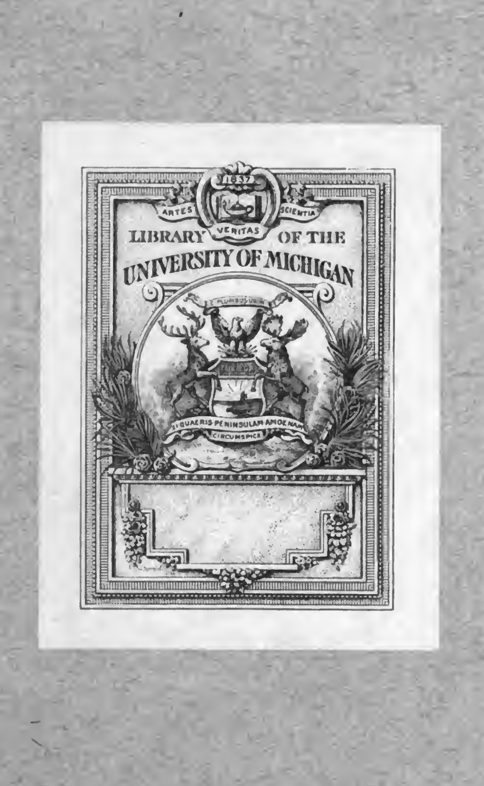
B 376362


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

AS
142
.V67

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTELFTER BAND.

WIEN, 1902.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CXI. BAND. ABTHEILUNG II a.

JAHRGANG 1902. — HEFT I BIS X.

(MIT 6 TAFELN UND 174 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1902.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

Seite

I. Sitzung vom 9. Jänner 1902: Übersicht 3
II. Sitzung vom 16. Jänner 1902: Übersicht 5
III. Sitzung vom 23. Jänner 1902: Übersicht 7
IV. Sitzung vom 6. Februar 1902: Übersicht 11
V. Sitzung vom 13. Februar 1902: Übersicht 13
VI. Sitzung vom 20. Februar 1902: Übersicht 15
VII. Sitzung vom 6. März 1902: Übersicht 313
VIII. Sitzung vom 13. März 1902: Übersicht 379
IX. Sitzung vom 17. April 1902: Übersicht 397
X. Sitzung vom 24. April 1902: Übersicht 553
XI. Sitzung vom 9. Mai 1902: Übersicht 557
XII. Sitzung vom 15. Mai 1902: Übersicht 559
XIII. Sitzung vom 22. Mai 1902: Übersicht 561
XIV. Sitzung vom 5. Juni 1902: Übersicht 825
XV. Sitzung vom 12. Juni 1902: Übersicht 827
XVI. Sitzung vom 19. Juni 1902: Übersicht 828
XVII. Sitzung vom 3. Juli 1902: Übersicht 881
XVIII. Sitzung vom 10. Juli 1902: Übersicht 884
XIX. Sitzung vom 9. October 1902: Übersicht 1147
XX. Sitzung vom 16. October 1902: Übersicht 1212
XXI. Sitzung vom 23. October 1902: Übersicht 1213
XXII. Sitzung vom 6. November 1902: Übersicht 1217
XXIII. Sitzung vom 13. November 1902: Übersicht 1219
XXIV. Sitzung vom 20. November 1902: Übersicht 1221
XXV. Sitzung vom 4. December 1902: Übersicht 1561
XXVI. Sitzung vom 11. December 1902: Übersicht 1563
XXVII. Sitzung vom 18. December 1902: Übersicht 1565

Adler A., Zum Normalenproblem der Flächen zweiten Grades. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 58

Benndorf H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. X. Über ein mechanisch registrierendes Elektrometer für luftelektrische Messungen. (Mit 8 Textfiguren.) [Preis: 70 h = 70 Pfg.] 487

130433

Seite

Biermann O., Über die Discriminante einer in der Theorie der doppeltperiodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung. (III. Mittheilung.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] . 1444

Billitzer J., Eine einfache Methode zur directen Bestimmung von Dielektricitätsconstanten. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 814

— Versuch einer Theorie der mechanischen und colloidalen Suspensionen. [Preis: 80 h = 80 Pfg.] 1393

— und *Coehn A.*, Elektrochemische Studien am Acetylen. II. Mittheilung: Anodische Depolarisation. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 1433

Boltzmann L., Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Coordinaten. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 1603

Brell H., Über die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Schwingungen einer Saite. [Preis: 20 h = 20 Pfg.] 1038

Conrad V., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. VIII. Über die entladende Wirkung verschiedener Elektroden. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] . . . 333

— Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. IX. Einige Bemerkungen zur Wolkenelektricität. [Preis: 10 h = 10 Pfg.] 341

Daublebsky v. Sterneck R., Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie. [Preis: 70 h = 70 Pfg.] 1567

Dechant O., Über die Änderung der Diathermansie von Flüssigkeiten mit der Temperatur. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 264

Doležal E., Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung der Reflexe. (Mit 1 Tafel und 5 Textfiguren.) [Preis: 1 K = 1 Mk.] 788

Eder J. M., System der Sensitometrie photographischer Platten. (IV. Abhandlung.) (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 888

Ehrenhaft F., Prüfung der Mischungsregeln für die Dielektricitätsconstante der Gemische von Hexan-Aceton. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 1549

Elster J. und *Geitel H.*, Messungen der Elektricitätszerstreuung in der freien Luft. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 70 h = 70 Pfg.] 946

Ernst W. E., Über das Wärmeleitvermögen des Kesselsteines und anderer die Kesselflächen verunreinigenden Materialien. [Preis: 20 h = 20 Pfg.] 923

Exner F., Über die Grundempfindungen im Young-Helmholtz'schen Farbensystem. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 60 h = 60 Pfg.] . 857

— Zur Charakteristik der schönen und hässlichen Farben. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 60 h = 60 Pfg.] 901

Seite

Exner F. und *Haschek* E., Das Funken- und Bogenspectrum des Europiums. [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 42
— *F. M.*, Versuch einer Berechnung der Luftdruckänderungen von einem Tage zum nächsten. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 50 h = 50 Pfg.] 707
— *K.* und *Villiger W.*, Über das Newton'sche Phänomen der Scintillation. (Erste Mittheilung.) [Preis: 90 h = 90 Pfg.] . 1265
Fischer R., Über die Elektricitätserregung bei dem Hindurchgange von Luftblasen durch Wasser. [Preis: 50 h = 50 Pfg.] . . 1013
Gegenbauer L., Über eine Relation des Herrn Hobson. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 563
Grünwald J., Über die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in einaxig-krystallinischen Medien. [Preis: 1 K 80 h = 1 Mk. 80 Pfg.] 411
Hann J., Die Schwankungen der Niederschlagsmengen in größeren Zeiträumen. [Preis: 2 K 10 h = 2 Mk. 10 Pfg.] 67
— Zur Meteorologie des Äquators. Nach den Beobachtungen am Museum Goeldi in Pará. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 1 K 40 h = 1 Mk. 40 Pfg.] 615
— Über die tägliche Drehung der mittleren Windrichtung und über eine Oscillation der Luftmassen von halbtägiger Periode auf Berggipfeln von 2 bis 4 *km* Seehöhe. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 80 h = 1 Mk. 80 Pfg.] 1615
Haschek E., Spectralanalytische Studien. (II. Mittheilung.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 232
Hasenöhrl F., Über die Absorption elektrischer Wellen in einem Gas. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 70 h = 70 Pfg.] 1229
— Über die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für bewegte Körper. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 50 h = 50 Pfg.] 1525
Herglotz G., Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit drei ungleichen Hauptaxen. (Mit 8 Textfiguren.) [Preis: 1 K 40 h = 1 Mk. 40 Pfg.] 1331
Holetschek J., Über die scheinbaren Beziehungen zwischen den heliocentrischen Perihelbreiten und den Periheldistanzen der Kometen. [Preis: 60 h = 60 Pfg.] 1496
Jäger G., Das Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 255
— Der innere Druck, die innere Reibung, die Größe der Molekeln und deren mittlere Weglänge bei Flüssigkeiten. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 697
— Zur Theorie des photographischen Processes. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 1132

Seite

Jaumann G., Über die Wärmeproduction in zähen Flüssigkeiten. (Preis: 40 h = 40 Pfg.) 215
Kaufler F., Über die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichtes durch Oberflächenkräfte. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 935
Lampa A., Der Gefrierpunkt von Wasser und einigen wässerigen Lösungen unter Druck. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 316
— Elektrostatik einer Kugel, welche von einer concentrischen, aus einem isotropen Dielektricum bestehenden Kugelschale umgeben ist. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 50 h = 50 Pfg.] 593
— Zur Moleculartheorie anisotroper Dielektrica. Mit einer experimentellen Bestimmung der Dielektricitätsconstante einer gespannten Kautschukplatte senkrecht zur Spannungsrichtung. [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 982
Lang V., v., Krystallographisch-optische Bestimmungen. (5. Reihe.) (Mit 59 Textfiguren.) [Preis: 1 K 90 h = 1 Mk. 90 Pfg.] . . 1161
Lecher E., Beeinflussung des elektrischen Funkens durch Elektrisierung. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] . . . 513
Mache H., Über die Verdampfungswärme und die Größe der Flüssigkeitsmolekel. [Preis: 20 h = 20 Pfg.] 382
— Über die Schutzwirkung von Gittern gegen Gasexplosionen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 1223
Mertens F., Ein Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes. [Preis: 50 h = 50 Pfg.] 17
Meyer St., Notiz über das magnetische Verhalten von Europium, Samarium und Gadolinium. [Preis: 10 h = 10 Pfg.] 38
— Über die durch den Verlauf der Zweiphasencurve bedingte maximale Arbeit. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 20 h = 20 Pfg.] 305
Müller-Erzbach W., Über das Wesen und über Unterschiede der Adsorption. [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 684
Nabl J., Über die elektrostatischen Ladungen der Gase, die an der activen Elektrode des Wehnelt-Unterbrechers auftreten. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 296
— Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitte. (Mit 2 Textfiguren) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 846
Niessl G., v., Bahnbestimmung der großen Feuerkugel vom 3. October 1901. [Preis: 1 K 10 h = 1 Mk. 10 Pfg.] 1074
Oppolzer E., R. v., Erdbewegung und Äther. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 244

Seite

Puschl C., Über den Wärmezustand der Gase. [Preis: 60 h = 60 Pfg.] 187
— Über Fortpflanzung des Lichtes durch Körpersubstanz. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 1151
Ritter P., Über die Gleichung der Sättigungscurve und die durch dieselbe bestimmte maximale Arbeit. [Preis: 20 h = 20 Pfg.] 1046
Schweidler E., R. v., Einige Fälle der Energieumwandlung bei der Ladung von Condensatoren. [Preis: 20 h = 20 Pfg.] . . . 573
— Einige Versuche über Leitung und Rückstandsbildung in Dielektricis. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] . . 579
— Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. XI. Luftelektrische Beobachtungen zu Mattsee im Sommer 1902. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 70 h = 70 Pfg.] 1463
Stankewitsch B. W., Magnetische Messungen, ausgeführt im Pamir im Sommer 1900. [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 276
Steindler O., Über die Temperaturcoefficienten einiger Jodelemente. [Preis: 20 h = 20 Pfg.] 1312
Streintz F., Über die elektrische Leitfähigkeit von gepressten Pulvern. II. Mittheilung: Die Leitfähigkeit von Metall-Oxyden und -Sulfiden. (Mit 6 Textfiguren.) [Preis: 80 h = 80 Pfg.] 345
Suschnig G., Neue Experimente mit Wirbelringen. (Mit 13 Textfiguren.) [Preis: 90 h = 90 Pfg.] 830
Szarvassi A., Über die magnetischen Wirkungen einer rotierenden elektrisierten Kugel. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 1053
Tuma J., Eine Methode zur Vergleichung von Schallstärken und zur Bestimmung der Reflexionsfähigkeit verschiedener Materialien. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 402
Tumlirz O., Eine Ergänzung der van der Waals'schen Theorie des Cohäsionsdruckes. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 60 h = 60 Pfg.] 524
Valentin J., Der Staubfall vom 9. bis 12. März 1901. (Mit 3 Tafeln.) [Preis: 1 K 50 h = 1 Mk. 50 Pfg.) 727
Waldstein O., Über longitudinale Schwingungen von Stäben, welche aus parallel zur Längsaxe zusammengesetzten Stücken bestehen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 930
Wassmuth A., Über eine Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 777
— Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Dehnen oder Tordieren von Drähten. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 50 h = 50 Pfg.] 996
Weinek L., Zur Theorie des Spiegelsextanten. (Mit 6 Textfiguren.) [Preis: 40 h = 40 Pfg.] 1319

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IV. SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1902.

Das w. M. Hofrath Zd. H. Skraup übersendet eine Untersuchung von Prof. Dr. Franz v. Hemmelmayr in Graz, betitelt: »Über die Elektrolyse des Brechweinsteins«.

Das c. M. Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet eine Arbeit: »Culturversuche mit isolierten Pflanzenzellen«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt folgende Abhandlungen vor:

I. »Spectralanalytische Studien« (II. Mittheilung), von Dr. E. Haschek.
II. »Über die Änderung der Diathermansie von Flüssigkeiten mit der Temperatur«, von O. Dechant.

Das w. M. Hofrath A. Lieben überreicht die folgende, in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Über das Tabakaroma« (vorläufige Mittheilung), von Sigmund Fränkel und Alfred Wogrinz.

Der Secretär Hofrath V. v. Lang legt folgende Arbeiten vor:

I. »Über die Wärmeproduction in zähen Flüssigkeiten«, von Prof. G. Jaumann in Brünn.
II. »Über die elektrostatischen Ladungen der Gase, die an der activen Elektrode des Wehnelt-Unterbrechers auftreten«, von Dr. Josef Nabl in Wien.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Fritsche, H., Dr.: Die tägliche Periode der erdmagnetischen Elemente. St. Petersburg, 1902. 8°.

Institut Botanique in Bukarest: Bulletin de l'Herbier, 1901, Nr. 1. Bukarest, 8.

Real Academia de Ciencias y Artes in Barcelona: Memorias, 1902, vol. II, núm. 2—5. Barcelona, 4°.

Segesser, Heinrich v.: Die Quadratur des Kreises, ein gelöstes Problem. Luzern. 8°.

Università di Sassari: Studi Sassaresi, vol. I, fasc. 1, 2.

V. SITZUNG VOM 13. FEBRUAR 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 110, Abth. I, Heft V bis VII (Mai bis Juli 1901). — Abth. III, Heft I bis VII (Jänner bis Juli 1901).

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung.

Der Secretär, Hofrath V. v. Lang, bringt folgende Dankschreiben zur Kenntnis:

I. Von Dr. Josef Wiesel in Wien für eine Subvention behufs Studiums der Physiologie der Suprarenalkörper an der k. k. zoologischen Station in Triest;

II. von Dr. Otto v. Fürth in Straßburg für eine Subvention zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über den blutdrucksteigernden Bestandtheil der Nebennieren;

III. von Prof. C. Doelter in Graz für eine Subvention zur Bearbeitung und Neuherausgabe einer Karte des Monzonigebietes;

IV. von Dr. Franz Schaffer für eine Subvention behufs einer geologischen Forschungsreise in den Balkan.

Das w. M. Hofrath Zd. H. Skraup legt eine von ihm in Gemeinschaft mit phil. cand. G. Piccoli ausgeführte Untersuchung vor, betitelt: »Neue Beiträge für die Hofmannsche Reaction«.

Das w. M. Hofrath Sigm. Exner legt eine vorläufige Mittheilung von Prof. Dr. Egon R. v. Oppolzer vor, mit dem Titel: »Zur Farbentheorie Youngs's«.

Prof. Dr. Rud. Wegscheider überreicht drei von ihm verfasste Abhandlungen:

I. »Über den Einfluss der Constitution auf die Affinitätsconstanten organischer Säuren«.

II. »Untersuchungen über die Veresterung unsymmetrischer zwei- und mehrbasischer Säuren. IV. Abhandlung: Über die Leitfähigkeit einiger Säuren und Estersäuren«.

III. »Dasselbe, V. Abhandlung: Über die Constitution einiger Estersäuren«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Astronomisch-meteorologisches Observatorium in Triest: Astronomisch-nautische Ephemeriden, herausgegeben von Dr. Friedrich Bidschof, XVI. und XVII. Band (1901 und 1902).

Blaise, F. E., Dr., À travers la matière et l'énergie. Paris. Groß-8°.

K. k. Österreichisches General-Commissariat der Weltausstellung in Paris 1900: Beiträge Österreichs zu den Fortschritten im XIX. Jahrhunderte. Redigiert von Reg.-Rath J. Wottiz. Band I bis IV. Wien 1902. 8°.

— Participation de l'Autriche aux progrès accomplis au XIX^{me} siècle. I—IV. Rédigé par J. Wottiz. Vienne, 1902. 8°.

K. k. Statthalterei von Böhmen: Studienstiftungen in Böhmen, Band IX. Prag, 1901. 4°.

VI. SITZUNG VOM 20. FEBRUAR 1902.

Der Secretär, Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingelangte Arbeiten vor:

I. »Über elliptische Tangentenformeln«, von Prof. Josef Sterba in Wien;

II. »Die Imaginärprojection der Raumcurven vierter Ordnung, erster Art«, von Prof. F. J. Obenrauch in Brünn;

III. »Magnetische Messungen, ausgeführt im Pamir im Sommer 1900«, von Prof. Dr. B. W. Stankewitsch in Warschau;

IV. »Darstellung der Linien gleicher Helle für krumme Flächen«, von Prof. Emil Grünberger in Trautenau.

Herr Karl Moser in Klagenfurt übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Selbstthätige Kuppelung für Eisenbahn-Waggons«.

Das c. M. Th. Fuchs übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Nachträge zur Kenntnis der Tertiärbildungen von Eggenburg«.

Emil Waelsch, Professor an der technischen Hochschule in Brünn, übersendet eine Mittheilung, betitelt: »Binäranalyse zur Rotation eines starren Körpers«.

Das w. M. Hofrath F. Mertens überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Ein Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes«.

Das w. M. Prof. Franz Exner überreicht eine im Physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: »Über die durch den Verlauf der Zweiphasencurve bedingte maximale Arbeit«, von Dr. Stefan Meyer.

Derselbe legt ferner zwei Abhandlungen von Dr. V. Conrad vor: »Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität VIII und IX«.

Das w. M. Prof. V. Uhlig legt eine Arbeit von Franz Baron Nopcsa jun. vor, betitelt: »Dinosaurierreste aus Siebenbürgen III (*Mochlodon* und *Onychosaurus*)«.

Ferner legt derselbe eine Arbeit desselben Verfassers vor, betitelt: »Notizen über cretacische Dinosaurier«.

Prof Dr. Friedrich Berwerth überreicht eine Mittheilung, betitelt: »Über das neue Meteoreisen von Mukerop«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Reinhardt, Georg: Meine Schwerkraft-Hypothese. Hann. Münden.

Wiesner, Julius, Dr. Prof.: Franz Unger. Gedenkrede, gehalten am 14. Juli 1901 anlässlich der im Arkadenhofe der Wiener Universität aufgestellten Unger-Büste. Wien, 1902. 8°.

Ein Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1902.)

1.

In den folgenden Zeilen wird ein Beweis des Fundamentalsatzes von Galois über die Gruppe einer Gleichung mitgetheilt, deren Coefficienten einem bestimmten Rationalitätsbereiche angehören. Dieser Beweis weicht von dem allgemein üblichen ab und kann für manche Fragen von Interesse sein.

Es möge gestattet sein, eine zum geltenden Rationalitätsbereiche gehörende Größe kurz als einheimisch und eine ganze oder rationale Function von Größen $\xi, \ldots$ mit einheimischen Coefficienten als einheimische ganze oder rationale Function von $\xi, \ldots$ zu bezeichnen.

2.

Es sei eine algebraische Gleichung

$$fx = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n = 0$$

gegeben, deren Coefficienten einem gegebenen Rationalitätsbereiche R angehören und deren Wurzeln

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

alle untereinander verschieden sind. Der Rationalitätsbereich, welcher aus R durch Adjunction der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_k$ hervorgeht, werde mit R_k bezeichnet.

Man suche den in R irreductibelen Factor $f_1 x$ von fx, welcher für die Wurzel x_1 verschwindet, hierauf den in R_1 irreductibelen Factor $f_2 x$ von fx, welcher für die Wurzel x_2 verschwindet, sodann den in R_2 irreductibelen Factor $f_3 x$ von fx, welcher für x_3 verschwindet, und fahre so fort, bis man zu dem in R_{n-1} irreductibelen Factor $f_n x$ von fx gelangt, welcher mit $x-x_n$ zusammenfällt. Alle Ausdrücke

$$f_2 x, f_3 x, \ldots f_n x$$

können als ganze einheimische Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ angenommen werden.

Ersetzt man in $f_k x$ die Unbestimmte x durch z_k und in dem Falle $k > 1$ die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}$ durch $z_1, z_2, \ldots z_{k-1}$, wo $z_1, z_2, \ldots z_n$ Unbestimmte bezeichnen, so ergibt sich eine einheimische ganze Function Z_k der Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots z_k$. Jeder Ausdruck von der Gestalt

$$P_1 Z_1 + P_2 Z_2 + \ldots + P_n Z_n,$$

in welchem $P_1, P_2, \ldots P_n$ ganze einheimische Functionen von $z_1, z_2, \ldots z_n$ bedeuten, soll kurz mit

$$[Z_1, Z_2, \ldots Z_n]$$

bezeichnet werden.

Sind $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ die Gradzahlen der Functionen $f_1 x$, $f_2 x, \ldots f_n x$ in Bezug auf x, so kann jede ganze einheimische Function F von $z_1, z_2, \ldots z_n$ identisch auf die Form

$$F = [Z_1, Z_2, \ldots Z_n] + F_0$$

gebracht werden, wo F_0 in z_i den Grad ν_i nicht erreicht und der Rest von F in Bezug auf die Functionen $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ genannt werden soll.

Denn man bringe F zunächst mittels algebraischer Division durch Z_n in Bezug auf z_n auf die Form $P_n Z_n + F_{n-1}$, wo F_{n-1} in z_n den Grad ν_n des Divisors nicht erreicht, hierauf F_{n-1} mittels Division durch Z_{n-1} in Bezug auf z_{n-1} auf die Form $P_{n-1} Z_{n-1} + F_{n-2}$, wo F_{n-2} in z_{n-1} den Grad ν_{n-1} des Divisors

nicht erreicht, und fahre so fort, bis die letzte Division durch Z_1 in Bezug auf z_1 den Rest F_0 liefert. Es ist dann

$$F = P_1 Z_1 + P_2 Z_2 + \ldots + P_n Z_n + F_0.$$

Jede ganze einheimische Function F von $z_1, z_2, \ldots z_n$, welche für

$$z_1 = x_1,\ z_2 = x_2 \ldots z_n = x_n$$

verschwindet, hat einen identisch verschwindenden Rest in Bezug auf $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ und ist demzufolge in der Gestalt

$$F = [Z_1, Z_2, \ldots Z_n]$$

darstellbar.

Es sei F_0 der Rest von F in Bezug auf $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ und F_k der Ausdruck, in welchen F_0 für

$$z_1 = x_1, z_2 = x_2, \ldots z_k = x_k$$

übergeht. Man nehme als feststehend an, dass F_k identisch in $z_{k-1}, z_{k+2}, \ldots z_n$ verschwindet, wo $k < n$. Ordnet man F_{k-1} nach Potenzproducten $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ der Unbestimmten $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots z_n$ und setzt

$$F_{k-1} = C\mathfrak{P} + C'\mathfrak{P}' + \ldots,$$

so sind $C, C', \ldots$ ganze Functionen von z_k, welche den Grad ν_k nicht erreichen und für $z_k = x_k$ verschwinden, weil sie dann in die Coefficienten von $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ in F_k übergehen. Da aber die Coefficienten von $z_k^0, z_k, \ldots z_k^{\nu_k - 1}$ in $C, C', \ldots$ dem Rationalitätsbereiche R_{k-1} angehören und x_k eine Wurzel der in R_{k-1} irreductibelen Gleichung

$$f_k x = 0$$

ist, so müssen $C, C', \ldots$ identisch in z_k verschwinden. Daher ist identisch in $z_k, z_{k+1}, \ldots z_n$

$$F_{k-1} = 0.$$

Nun verschwindet F_{n-1} identisch in z_n. Denn die Identität

$$F = [Z_1, Z_2, \ldots Z_n] + F_0$$

ergibt nach Ersetzung von $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$0 = F_n.$$

Da aber F_0 die Unbestimmte z_n nicht enthält, so ist $F_{n-1} = F_n$ und demnach identisch in z_n

$$F_{n-1} = 0.$$

Dann folgt aber nach und nach

$$F_{n-2} = 0, \ldots F_1 = 0, \ F_0 = 0.$$

3.

Es sei a eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots n$ und man bezeichne das Resultat, welches aus einer Function F der Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch Ausführung der Permutation n an den Stellenzeigern von $z_1, z_2, \ldots z_n$ hervorgeht, mit $(F)_a$, Wird die Permutation a an den Stellenzeigern der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ vollzogen, so soll kurz gesagt werden, dass sie an den Wurzeln selbst vollzogen wird.

Die Permutationen a, für welche alle Ausdrücke

$$(Z_1)_a, \ (Z_2)_a, \ldots (Z_n)_a$$

identisch verschwindende Reste in Bezug auf $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ aufweisen, bilden eine Gruppe G.

Denn es seien a, b irgend zwei solche Permutationen. Man hat die Identitäten

$$(Z_i)_a = P_1 Z_1 + P_2 Z_2 + \ldots + P_n Z_n$$
$$(Z_i)_b = [Z_1, Z_2, \ldots Z_n],$$
$$i = 1, 2, \ldots n$$

wo $P_1, P_2, \ldots P_n$ ganze einheimische Functionen von $z_1, z_2, \ldots z_n$ bedeuten. Vollzieht man in der ersten Identität die Permutation b, so folgt

$$(Z_i)_{ab} = (P_1)_b (Z_1)_b + (P_2)_b (Z_2)_b + \ldots$$

und es wird auf Grund der zweiten

$$(Z_i)_{ab} = [Z_1, Z_2, \ldots Z_n].$$

Die Permutation ab verwandelt daher $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ ebenfalls in Ausdrücke, deren Reste identisch verschwinden.

Da nach 2. eine ganze Function der Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots z_n$, deren Rest in Bezug auf $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ identisch verschwindet, für

$$z_1 = x_1, z_2 = x_2, \ldots z_n = x_n$$

verschwindet und umgekehrt, so besteht die Gruppe G aus allen Permutationen der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche keine der Gleichungen

$$f_1 x_1 = 0, f_2 x_2 = 0, \ldots f_n x_n = 0$$

stören.

Jede ganze einheimische Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

zwischen den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ verträgt die Permutationen der Gruppe G. Denn $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$ hat die Gestalt $[Z_1, Z_2, \ldots Z_n]$ und es ist daher für jede Permutation a von G

$$(F(z_1, z_2, \ldots z_n))_a = [(Z_1)_a, (Z_2)_a, \ldots]$$
$$= [Z_1, Z_2, \ldots Z_n].$$

Somit ist auch

$$(F(x_1, x_2, \ldots x_n))_a = 0.$$

4.

Es sei G_{k-1} die Gruppe aller Permutationen von G, in welchen $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}$ fest bleiben, oder auch die Gruppe G selbst, wenn $k = 1$ ist. Die in G_{k-1} mit x_k transitiv verbundenen Wurzeln seien $x_k, x_p, \ldots x_r$ und es werde

$$g = (x - x_k)(x - x_p) \ldots (x - x_r)$$

$$u f_k x_k + u_1 f_{k+1} x_{k+1} + \ldots u_{n-k} f_n x_n = U$$

gesetzt, wo $u, u_1, \ldots u_{n-k}$ Unbestimmte bezeichnen.

Das über alle möglichen Permutationen der Wurzeln $x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$ erstreckte Product

$$P = \Pi(x - x_k - U)$$

ist eine in R_{k-1} einheimische ganze Function der Unbestimmten $x, u, u_1, \ldots u_{n-k}$. Denn die Coefficienten der verschiedenen Potenzproducte dieser Unbestimmten in P sind in R_{k-1} einheimische ganze symmetrische Functionen der Wurzeln $x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$ und als solche ganze in R_{k-1} einheimische Functionen der symmetrischen Grundfunctionen von $x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$, welche selbst zu R_{k-1} gehören.

Da die Gleichungen

$$f_k x_k = 0, f_{k+1} x_{k+1} = 0, \ldots f_n x_n = 0$$

alle Permutationen von G_{k-1} vertragen, so verschwindet U in allen Factoren des Productes P, welche den Permutationen von G_{k-1} entsprechen, und das Product dieser Factoren fällt mit dem über die genannten Permutationen erstreckten Producte $\Pi(x-x_k)$ zusammen. Ist aber m die Anzahl derjenigen Permutationen von G_{k-1}, in welchen x_k festbleibt, so ist $\Pi(x-x_k) = g^m$ und es erhellt, dass die bei den verschiedenen Potenzproducten von $u, u_1, \ldots u_{n-k}$ in P stehenden Coefficienten

$$C, \ldots$$

durch g^m theilbar sind.

Umfasst nun G_{k-1} alle möglichen Permutationen von $x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$, so fällt P mit g^m zusammen und es gibt nur einen Coefficienten $C = g^m$.

Gibt es dagegen noch andere in G_{k-1} nicht vorkommende Permutationen der Wurzeln $x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$, so muss jede derselben mindestens eine der Gleichungen

$$f_k x_k = 0, \quad f_{k+1} x_{k+1} = 0, \ldots f_n x_n = 0$$

aufheben. Dies erhellt unmittelbar, wenn $k = 1$ ist, und folgt in dem Falle $k > 1$ daraus, dass die Gleichungen

$$f_1 x_1 = 0, \quad f_2 x_2 = 0, \ldots f_{k-1} x_{k-1} = 0$$

durch diese Permutationen nicht gestört werden. U kann demnach für keine der in Rede stehenden Permutationen identisch verschwinden und somit auch nicht das über dieselben erstreckte Product ΠU. Da aber $g^m \Pi U$ diejenigen Glieder von P umfasst, welche in $u, u_1, \ldots u_{n-k}$ die höchste Dimension aufweisen, so erhellt, dass es unter den Coefficienten $C, \ldots$ solche

gibt, welche sich von g^m nur durch einen von x unabhängigen und von 0 verschiedenen Factor unterscheiden.

In allen Fällen ist daher g^m und somit auch g selbst in R_{k-1} einheimisch.

Da anderseits in G_{k-1} Permutationen vorkommen, welche x_k durch $x_k, x_p, \ldots x_r$ ersetzen, so ergibt die Vollziehung derselben an der Gleichung

$$f_k x_k = 0,$$

welche alle Permutationen von G verträgt:

$$f_k x_k = 0,\ f_k x_p = 0, \ldots f_k x_r = 0.$$

Die Function $f_k x$ ist sonach durch g theilbar. Da aber g in R_{k-1} einheimisch und $f_k x$ in R_{k-1} irreductibel ist, so muss g mit $f_k x$ zusammenfallen.

Die in G_{k-1} mit x_k transitiv verbundenen Wurzeln sind also die Wurzeln der Gleichung

$$f_k x = 0.$$

Gibt es in dem Falle $k > 1$ in G Permutationen, welche $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}$ in $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\varepsilon$ verwandeln, so sei H ihr Inbegriff und $f_k^0 x$ die aus $f_k x$ durch Verwandlung von $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}$ in $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\varepsilon$ hervorgehende Function. In jeder Permutation von H wird x_k durch eine Wurzel der Gleichung

$$f_k^0 x = 0$$

ersetzt. Denn die Identität

$$f_k x = (x - x_k)(x - x_p) \ldots (x - x_r)$$

ergibt nach Ausführung irgend einer Permutation von H, welche $x_k, x_p, \ldots x_r$ in $x_\lambda, x_\mu, \ldots x_\rho$ verwandeln möge:

$$f_k^0 x = (x - x_\lambda)(x - x_\mu) \ldots (x - x_\rho).$$

Jede Permutation von H verwandelt sonach $x_k, x_p, \ldots x_r$ in die Wurzeln der Gleichung

$$f_k^0 x = 0.$$

x_k kann aber auch in jede dieser Wurzeln, etwa x_μ, durch Permutationen von H verwandelt werden. Denn eine beliebig aus H herausgegriffene Permutation b verwandelt eine der Wurzeln $x_k, x_p, \ldots x_r$, etwa x_q, in x_μ. Ist dann a eine Permutation von G_{k-1}, welche x_k in x_q verwandelt, so ist ab eine Permutation von H, welche x_k durch x_μ ersetzt.

Den entwickelten Sätzen zufolge gibt es in G immer eine Permutation, welche x_1 durch eine beliebig vorgeschriebene Wurzel x_α der Gleichung

$$f_1 x = 0,$$

x_2 durch eine beliebig vorgeschriebene Wurzel x_β der Gleichung

$$f_2^0 x = 0,$$

x_3 durch eine beliebig vorgeschriebene Wurzel x_γ der Gleichung

$$f_3^0 x = 0$$

u. s. f. ersetzt, wo $f_2^0 x$ aus $f_2 x$ durch Verwandlung von x_1 in x_α, $f_3^0 x$ aus $f_3 x$ durch Verwandlung von x_1, x_2 in x_α, x_β u. s. f. hervorgehen. Es leuchtet überdies ein, dass es nur eine solche Permutation geben kann. Da x_α auf ν_1 Arten, x_β bei festgelegtem α auf ν_2 Arten, x_γ bei festgelegtem α und β auf ν_3 Arten u. s. f. gewählt werden kann, so fällt die Anzahl aller Permutationen von G mit dem Producte $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n$ zusammen. Die Ordnung ν der Gruppe G wird daher durch die Gleichung

$$\nu = \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n$$

gegeben.

5.

Es sei F eine ganze einheimische Function der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche bei allen Permutationen der Gruppe G ungeändert bleibt. Bildet man dieselbe für die Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots z_n$, so enthält der Rest des erhaltenen Ausdruckes in Bezug auf $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ keine der Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Geht dieser Rest für

$$z_1 = x_1, \; z_2 = x_2, \ldots \; z_n = x_n$$

in F_0 über, so ist

$$F = F_0$$

und es genügt zu zeigen, dass die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ in F_0 nicht vorkommen.

Es stehe bereits fest, dass F_0 die Wurzeln $x_{k+1}, \ldots x_n$ nicht enthält.

Ist $\nu_k > 1$, so enthält F_0 die Wurzeln x_k in nicht höherem als dem $\nu_k - 1$ten Grade und es sei, nach x_k entwickelt:

$$F_0 = Q_0 + Q_1 x_k + Q_2 x_k^2 + \ldots$$

Da man mittels Permutationen der Gruppe G x_k durch alle Wurzeln $x_k, x_p, \ldots$ der Gleichung

$$f_k x = 0$$

ersetzen kann, ohne in dem Falle $k > 1$ die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}$ zu verrücken, so ergibt die Ausführung dieser Permutationen an der Gleichung

$$F = Q_0 + Q_1 x_k + Q_2 x_k^2 + \ldots$$

nach der Annahme

$$F = Q_0 + Q_1 x_k + Q_2 x_k^2 + \ldots$$
$$F = Q_0 + Q_1 x_p + Q_2 x_p^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hieraus erhellt, dass die ganze Function von x

$$Q_1 (x - x_k) + Q_2 (x^2 - x_k^2) + \ldots$$

für alle ν_k genannten Wurzeln $x_k, x_p, \ldots$ verschwindet. Da dieselbe aber in x den Grad ν_k nicht erreicht, so muss sie identisch verschwinden und es ist

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \ldots$$

Denkt man sich aber die Ausdrücke $Q_1, Q_2, \ldots$ für die Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots$ gebildet, so erreichen die Resultate nicht den Grad $\nu_1, \nu_2, \ldots$ in $z_1, z_2, \ldots$ und müssen daher nach 2. identisch verschwinden. F_0 enthält somit die Wurzel x_k nicht.

Ist $\nu_k = 1$, so enthält F_0 überhaupt nicht die Wurzel x_k.

Da F_0 die Wurzel x_n nicht enthält, weil $\nu_n = 1$ ist, so zeigt die vorstehende Darlegung schrittweise, dass auch x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots x_1$ in F_0 fehlen.

Jede ganze einheimische Function F der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche alle Permutationen der Gruppe G verträgt, ist daher eine einheimische Größe F_0.

6.

Als Beispiel für die Aufstellung der Functionen $f_1 x$, $f_2 x, \ldots f_n x$ diene zunächst die Gleichung

$$F = 0$$

für die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln, welche vom Grade $\nu = \varphi n$ ist. Als Rationalitätsbereich gelte die Gesammtheit aller rationalen Zahlen.

Ist x_1 eine bestimmte primitive n^{te} Einheitswurzel und bezeichnen

$$1, a, b, \ldots e$$

alle zu n theilerfremden positiven Zahlen unter n, so sind

$$x_1, x_1^a, x_1^b, \ldots x_1^e$$

alle primitiven n^{ten} Einheitswurzeln.

Versteht man unter x_m die Potenz x_1^r, wo r der echte Rest von m nach dem Modul n ist, so empfiehlt es sich, für die Wurzeln der Gleichung

$$F = 0$$

die Bezeichnung

$$x_1, x_a, x_b, \ldots x_e$$

zu wählen.

Da die Function F in dem gewählten Rationalitätsbereiche irreductibel ist, so ist $f_1 x = Fx$ zu setzen. Adjungiert man die Wurzel x_1, so zerfällt $\frac{Fx}{x - x_1}$ in die $\nu - 1$ linearen Factoren

$$x - x_1^a, \; x - x_1^b, \ldots x - x_1^e$$

und da dieselben für

$$x = x_a, x_b, \ldots x_e$$

verschwinden, so kann

$$f_2 x = x - x_1^a,$$
$$f_3 x = x - x_1^b,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_\nu x = x - x_1^e$$

gesetzt werden.

Ersetzt irgend eine Permutation der gesuchten Gruppe die Wurzeln x_1, x_s durch x_m, x_t, so muss, damit die Gleichung

$$x_s - x_1^s = 0$$

nicht gestört werde,

$$x_t = x_m^s = x_1^{ms} = x_{ms},$$

also $t \equiv ms$ (mod n) sein. Die Permutation muss demnach jeden Stellenzeiger s durch ms ersetzen. Bezeichnet man diese Forderung mit $\binom{s}{ms}$, so besteht die gesuchte Gruppe aus den Permutationen

$$\binom{s}{s}, \binom{s}{as}, \binom{s}{bs}, \ldots \binom{s}{es}.$$

7.

Als zweites Beispiel diene die Gleichung für die Theilung der Perioden der elliptischen Functionen. Als Rationalitätsbereich R gelte die Gesammtheit aller rationalen rationalzahligen Functionen des Modulquadrates k^2.

Es sei n eine ungerade Zahl,

$$N = n^2 \Pi \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wo das Product über alle Primfactoren p von n zu erstrecken ist, und es werde

$$\sin am \frac{4aK + 4biK'}{n} = x_{a,b}$$

gesetzt. Alle Größen $x_{a,b}$, in welchen a, b, n theilerfremd sind, sind die Wurzeln einer in R einheimischen und irreductibelen Gleichung

$$Fx = 0$$

vom Grade N.

Es gibt eine in R einheimische ganze Function $g_{\xi\eta}(y, z)$ von y, z, welche nur von den Stellenzeigern ξ, η abhängt und vermöge welcher sich die Wurzel $x_{a\xi+b\eta,\, c\xi+d\eta}$ durch $x_{a,c}$ und $x_{b,d}$ in der Gestalt

$$x_{a\xi+b\eta,\, c\xi+d\eta} = g_{\xi\eta}(x_{a,c}, x_{b,d})$$

darstellen lässt. $g_{\xi 0}$ enthält nur y und $g_{0\eta}$ nur z.

Adjungiert man die Wurzel x_{10}, so enthält Fx die in dem neuen Rationalitätsbereiche R_1 einheimischen linearen Factoren

$$x - x_{10},\ x - g_{a0}(x_{10}), \ldots x - g_{e0}(x_{10}),$$

wo $1, a, b, \ldots e$ alle zu n theilerfremden positiven Zahlen unter n bezeichnen. Man kann daher

$$\begin{aligned} f_1 x &= Fx, \\ f_2 x &= x - g_{a0}(x_{10}), \\ f_3 x &= x - g_{b0}(x_{10}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_\nu x &= x - g_{e0}(x_{10}) \end{aligned}$$

setzen, wo $\nu = \varphi n$ ist.

Um die weiteren Functionen $f_{\nu+1} x, \ldots$ zu ermitteln, hat man den in R_1 irreductibelen Factor von Fx zu bestimmen, welcher für x_{01} verschwindet.

Es sei

$$F_1 x = \Pi(x - x_{\lambda,\mu}),$$

wo das Product über alle Werte $0, 1, 2, \ldots n-1$ von λ und die Werte $1, a, b, \ldots e$ von μ zu erstrecken ist. Dieses Product ist eine in R_1 einheimische ganze Function von x vom Grade $n\varphi n$, wie leicht durch Befreiung der Function Fx von allen Factoren $x - x_{\alpha,\beta}$ gefunden wird, in welchen β nicht zu n theilerfremd ist.

Die Function $F_1 x$ ist in R_1 irreductibel. Um dies darzuthun, sind die Abel'schen Relationen[1] zuhilfe zu nehmen.

Versteht man unter r die n^{te} Einheitswurzel

$$r = e^{\frac{1}{n} 2\pi i},$$

so besteht nach Abel für jedes ganzzahlige μ die Gleichung

$$\Sigma r^{4h\mu} x_{h,\mu} = 0,$$
$$h = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Dagegen ist die Summe

$$\Sigma r^{4h\rho} x_{h,\mu}$$
$$h = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

von 0 verschieden, wenn ρ nicht $\equiv \mu \pmod{n}$ ist.

Es sei

$$f(t) = \Sigma g_{h1}(x_{10}, x_{\lambda,\mu}) t^{4h}$$
$$h = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

und

$$\varphi + \varphi_1 t + \ldots + \varphi_{n-1} t^{n-1}$$

der den Grad $n-1$ in t nicht übersteigende Rest, welcher bei der Division des Productes

$$f(rt) f(r^2 t) \ldots f(r^{n-1} t)$$

durch $t^n - 1$ erhalten wird und in welchem $\varphi, \varphi_1, \ldots$ ganze in R einheimische Functionen von x_{10} und $x_{\lambda,\mu}$ sind. Da $f(r^\mu) = 0$, $f(r^{\mu+1})$, $f(r^{\mu+2}), \ldots f(r^{\mu+n-1})$ aber von 0 verschieden sind, so hat man

$$\varphi + \varphi_1 r^\mu + \ldots + \varphi_{n-1} r^{(n-1)\mu} = B,$$
$$\varphi + \varphi_1 r^{\mu+1} + \ldots + \varphi_{n-1} r^{(n-1)(\mu+1)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi + \varphi_1 r^{\mu+n-1} + \ldots + \varphi_{n-1} r^{(n-1)(\mu+n-1)} = 0,$$

wo B nicht $= 0$ ist.

---

[1] Oeuvres complètes, Bd. 1, S. 523. Weber, Elliptische Functionen, §. 65.

Hieraus folgt

$$n\varphi = B, \qquad n\varphi_1 = Br^{-\mu},$$

$$r^{\mu} = \frac{\varphi}{\varphi_1}.$$

Da φ_1 für alle Wurzeln $x_{\lambda,\mu}$ der Gleichung

$$F_1 = 0$$

von Null verschieden ist, so kann der Bruch $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ in eine in R einheimische ganze Function $\psi(x_{\lambda,\mu}, x_{10})$ von $x_{\lambda,\mu}$ und x_{10} verwandelt werden, welche von λ und μ unabhängig ist, und man hat

$$r^{\mu} = \psi(x_{\lambda,\mu}, x_{10}).$$

Es sei nun χx derjenige in R_1 irreductibele Factor von F_1, welcher für x_{10} verschwindet, und

$$Ht = 0$$

die Gleichung für die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln. Das über alle Wurzeln y der Gleichung

$$\chi x = 0$$

erstreckte Product

$$P = \Pi(t - \psi(y, x_{10}))$$

ist eine Potenz einer in R_1 irreductibelen ganzen Function von t. Diese Function verschwindet für

$$t = \psi(x_{01}, x_{10}) = r$$

und muss daher mit der in R_1 irreductibelen Function Ht zusammenfallen. Somit ist

$$P = H^m.$$

Hiernach verschwindet P für alle primitiven Einheitswurzeln und es muss unter den Wurzeln y mindestens eine vorkommen, welche der Gleichung

$$\psi(y, x_{10}) = r^{\mu}$$

genügt, wo μ eine beliebige Zahl der Reihe $1, a, b, \ldots e$ bezeichnet. Eine solche Wurzel muss aber die Gestalt $x_{\nu,\mu}$ haben.

Ist aber

$$\chi(x_{\alpha,\mu}, x_{10}) = 0,$$

und setzt man

$$\frac{iK'}{K} = \omega,$$

so ergibt die Ersetzung von ω durch $8\gamma+\omega$ in den ϑ Functionen, durch welche sin amu und k^2 dargestellt werden:

$$\chi(x_{\alpha+8\mu\gamma,\mu}, x_{10}) = 0$$

und man kann γ so bestimmen, dass $\alpha+8\mu\gamma$ einer beliebigen Zahl λ der Reihe $0, 1, \ldots n-1$ nach dem Modul n congruent wird. Die Function χ verschwindet demnach für alle Wurzeln der Gleichung

$$F_1 = 0$$

und muss demzufolge mit F_1 zusammenfallen.

Man kann somit

$$f_{\nu+1} = F_1$$

setzen.

Adjungiert man hierauf x_{01}, so zerfällt F in lauter lineare Factoren und man kann

$$f_{\nu+2} = x - g_{11}(x_{10}, x_{01}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_N = x - g_{n-1\,n-1}(x_{10}, x_{01})$$

setzen.

Die Ordnung der gesuchten Gruppe ist hiernach das Product $Nn\varphi n$ der Gradzahlen von F und F_1.

Ist u irgend eine Permutation der Gruppe der Gleichung

$$F = 0$$

und treten vermöge u die Wurzeln

$$x_{a,c},\ x_{b,d},\ x_{\sigma,\tau}$$

an Stelle der Wurzeln

$$x_{10},\ x_{01},\ x_{\xi,\eta},$$

so geht der Ausdruck

$$x_{\xi\eta} - g_{\xi\eta}(x_{10}, x_{01})$$

durch u in

$$x_{\sigma,\tau} - g_{\xi\eta}(x_{a,c}, x_{b,d}) = x_{\sigma,\tau} - x_{a\xi+b\eta,\, c\xi+d\eta}$$

über und es muss, damit die Gleichung

$$x_{\xi\eta} - g_{\xi\eta}(x_{10}, x_{01}) = 0$$

nicht gestört werde,

$$\sigma \equiv a\xi + b\eta, \qquad \tau \equiv c\xi + d\eta \quad (\text{mod } u)$$

sein. Die Permutation ersetzt demnach allgemein die Wurzel $x_{\xi,\eta}$ durch $x_{a\xi+b\eta,\, c\xi+d\eta}$. Bezeichnet man diese Forderung durch das Symbol $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ a\xi+b\eta, & c\xi+d\eta \end{pmatrix}$ und nennt eine solche Permutation in üblicher Weise eine linear-homogene, so erhellt, dass die gesuchte Gruppe nur linear-homogene Permutationen enthalten kann. Da aber die Anzahl aller verschiedenen linear-homogenen Permutationen mit der Ordnung $u\varphi u N$ der gesuchten Gruppe zusammenfällt, so besteht letztere genau aus allen linear-homogenen Permutationen.

8.

Es werde noch in dem natürlichen Rationalitätsbereiche aller rationalen Zahlen die Gruppe der Gleichung ermittelt, welche die acht Wurzeln

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{A}\ \sqrt{B}\ \sqrt{C}, \\
x_2 &= -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{A'}\ \sqrt{B}\ \sqrt{C'}, \\
x_3 &= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{A}\ \sqrt{B}\ \sqrt{C}, \\
x_4 &= -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{A'}\ \sqrt{B}\ \sqrt{C'}, \\
x_5 &= \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{A}\ \sqrt{B'}\ \sqrt{C'}, \\
x_6 &= -\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{A'}\ \sqrt{B'}\ \sqrt{C}, \\
x_7 &= \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{A}\ \sqrt{B'}\ \sqrt{C'}, \\
x_8 &= -\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{A'}\ \sqrt{B'}\ \sqrt{C}
\end{aligned}$$

besitzt, wo

$$A = 2+\sqrt{2}, \qquad A' = 2-\sqrt{2},$$
$$B = 2+\sqrt{3}, \qquad B' = 2-\sqrt{3},$$
$$C = 3+\sqrt{2}\sqrt{3}, \qquad C' = 3-\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Es seien R' und R'' die Rationalitätsbereiche, welche aus R durch Adjunction von $\sqrt{2}$, beziehungsweise $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ hervorgehen.

Die Gleichung $z^2-3=0$ ist in R' irreductibel.

Das Product ABC kann nicht das Quadrat einer Zahl aus R'' sein. Gesetzt, es sei

$$ABC = (\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt{3}+\delta\sqrt{2}\sqrt{3})^2,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rationale Zahlen bedeuten. Es wäre dann

$$AB'C' = (\alpha+\beta\sqrt{2}-\gamma\sqrt{3}-\delta\sqrt{2}\sqrt{3})^2$$

und das Product

$$ABC.AB'C' = 3A^2$$

hätte die Gestalt $(m+n\sqrt{2})^2$, also das Product

$$3A^2.3A'^2 = 36$$

die Gestalt $(m^2-2n^2)^2$, wo m, n rationale Zahlen bezeichnen. Setzt man

$$m = \frac{L}{N}, \qquad n = \frac{M}{N},$$

wo L, M, N theilerfremde Zahlen sind, so wäre demnach

$$36N^4 = (L^2-2M^2)^2,$$
$$L^2-2M^2 = \pm 6N^2.$$

Da M zu N theilerfremd sein muss, so würde aus der letzten Gleichung folgen, dass 2 quadratischer Rest von 3 ist, was nicht der Fall ist.

Die Function

$$(x-x_1)(x-x_3) =$$
$$= x^2 - (2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})x - 13 - 12\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 5\sqrt{6}$$

ist demnach in R'', die Function

$$(x-x_1)(x-x_3)(x-x_5)(x-x_7) =$$
$$= x^4 - 4\sqrt{2}\,x^3 - (30+24\sqrt{2})x^2 -$$
$$- (24+8\sqrt{2})x + 7 + 12\sqrt{2}$$

in R' und die Function

$$Fx = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_8)$$
$$= x^8 - 92x^6 - 432x^5 - 366x^4 + 864x^3 + 1180x^2 + 48x - 239$$

in R irreductibel.

Wird

$$\frac{x^4 - 30x^2 - 24x + 7}{4x^3 + 24x^2 + 8x - 12} = \varphi x,$$

$$\frac{x^4 - 22x^2 + 24x + 31}{4x^3 + 20x^2 - 12x - 20} = \psi x,$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_3) = y_1, \qquad \frac{1}{2}(x_1 - x_3) = z_1,$$
$$\frac{1}{2}(x_2 + x_4) = y_2, \qquad \frac{1}{2}(x_2 - x_4) = z_2,$$
$$\frac{1}{2}(x_5 + x_7) = y_3, \qquad \frac{1}{2}(x_5 - x_7) = z_3,$$
$$\frac{1}{2}(x_6 + x_8) = y_4, \qquad \frac{1}{2}(x_6 - x_8) = z_4,$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\sqrt{2} = \varphi x_1 = \varphi x_3 = \varphi x_5 = \varphi x_7$$
$$= -\varphi x_2 = -\varphi x_4 = -\varphi x_6 = -\varphi x_8,$$

$$\sqrt{3} = \psi x_1 = \psi x_2 = \psi x_3 = \psi x_4$$
$$= -\psi x_5 = -\psi x_6 = -\psi x_7 = -\psi x_8.$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \varphi x_1 + \psi x_1,\\
y_2 &= -\varphi x_1 + \psi x_1,\\
y_3 &= \varphi x_1 - \psi x_1,\\
y_4 &= -\varphi x_1 - \psi x_1,
\end{aligned}$$

$$z_1 = x_1 - y_1 = x_1 - \varphi x_1 - \psi x_1,$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= B\sqrt{2}\,\sqrt{3} = (2+\psi x_1)\varphi x_1 \psi x_1,\\
z_1 z_3 &= A\sqrt{3} \qquad = (2+\varphi x_1)\psi x_1,\\
z_1 z_4 &= C\sqrt{2} \qquad = (3+\varphi x_1 \psi x_1)\varphi x_1.
\end{aligned}$$

Hiernach sind $y_1, y_2, \ldots z_1, z_2, \ldots x_2, x_3, \ldots x_8$ rationale Functionen von x_1 und man hat

$$\begin{aligned}
f_1 x &= Fx,\\
f_2 x &= x - x_2,\\
f_3 x &= x - x_3,\\
&\cdots\cdots\\
f_8 x &= x - x_8
\end{aligned}$$

zu setzen. Die gesuchte Gruppe G besteht demnach aus 8 Permutationen und ist transitiv.

Es seien a, b diejenigen Permutationen von G, welche x_1 durch x_2, beziehungsweise x_5 ersetzen.

Es ist

$$\begin{aligned}
(y_1)_a &= \varphi x_2 + \psi x_2 = -\varphi x_1 + \psi x_1 = y_2,\\
(y_2)_a &= -\varphi x_2 + \psi x_2 = \varphi x_1 + \psi x_1 = y_1,\\
(y_3)_a &= \varphi x_2 - \psi x_2 = -\varphi x_1 - \psi x_1 = y_4,\\
(y_4)_a &= -\varphi x_2 - \psi x_2 = \varphi x_1 - \psi x_1 = y_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_1)_a &= (x_1)_a - (y_1)_a = x_2 - y_2 = z_2,\\
(z_1 z_2)_a &= (2+\psi x_2)\varphi x_2 \psi x_2 = -(2+\psi x_1)\varphi x_1 \psi x_1\\
&= -z_1 z_2,\\
(z_1 z_3)_a &= (2+\varphi x_2)\psi x_2 = (2-\varphi x_1)\psi x_1\\
&= z_2 z_4,\\
(z_1 z_4)_a &= (2+\varphi x_2 \psi x_2)\varphi x_2 = -(2-\varphi x_1 \psi x_1)\varphi x_1\\
&= -z_2 z_3.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(z_2)_a = -z_1, \quad (z_3)_a = z_4, \quad (z_4)_a = -z_3,$$

$$\begin{aligned}
(y_1 \pm z_1)_a &= y_2 \pm z_2, & (x_1)_a &= x_2, & (x_3)_a &= x_4,\\
(y_2 \pm z_2)_a &= y_1 \mp z_1, & (x_2)_a &= x_3, & (x_4)_a &= x_1,\\
(y_3 \pm z_3)_a &= y_4 \pm z_4, & (x_5)_a &= x_6, & (x_7)_a &= x_8,\\
(y_4 \pm z_4)_a &= y_3 \mp z_3, & (x_6)_a &= x_7, & (x_8)_a &= x_5.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$a = (1234)(5678).$$

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned}
(y_1)_b &= \varphi x_5 + \psi x_5 = \varphi x_1 - \psi x_1 = y_3,\\
(y_2)_b &= -\varphi x_5 + \psi x_5 = -\varphi x_1 - \psi x_1 = y_4,\\
(y_3)_b &= \varphi x_5 - \psi x_5 = \varphi x_1 + \psi x_1 = y_1,\\
(y_4)_b &= -\varphi x_5 - \psi x_5 = -\varphi x_1 + \psi x_1 = y_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_1)_b &= (x_1)_b - (y_1)_b = x_5 - y_3 = z_3,\\
(z_1 z_2)_b &= (2 + \psi x_5)\varphi x_5 \psi x_5 = -(2 - \psi x_1)\varphi x_1 \psi x_1\\
&= -z_3 z_4,\\
(z_1 z_3)_b &= (2 + \varphi x_5)\psi x_5 = -(2 + \varphi x_1)\psi x_1\\
&= -z_1 z_3,\\
(z_1 z_4)_b &= (3 + \varphi x_5 \psi x_5)\varphi x_5 = (3 - \varphi x_1 \psi x_1)\varphi x_1\\
&= z_2 z_3.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(z_2)_b = -z_4, \quad (z_3)_b = -z_1, \quad (z_4)_b = z_2,$$

$$\begin{aligned}
(y_1 \pm z_1)_b &= y_3 \pm z_3, & (x_1)_b &= x_5, & (x_3)_b &= x_7,\\
(y_2 \pm z_2)_b &= y_4 \mp z_4, & (x_2)_b &= x_8, & (x_4)_b &= x_6,\\
(y_3 \pm z_3)_b &= y_1 \mp z_1, & (x_5)_b &= x_3, & (x_7)_b &= x_1,\\
(y_4 \pm z_4)_b &= y_2 \pm z_2, & (x_6)_b &= x_2, & (x_8)_b &= x_4.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$b = (1537)(2846).$$

Die aus den Permutationen a, b abgeleitete Gruppe ist die Quaternionengruppe

$$1,\ a,\ b,\ c,\ d,\ a^3,\ b^3,\ c^3,$$

wo

$$c = (1836)(2745),$$
$$d = (13)(24)(57)(68).$$

Die gesuchte Gruppe muss demnach die Quaternionengruppe enthalten und daher mit derselben zusammenfallen.

Notiz über das magnetische Verhalten von Europium, Samarium und Gadolinium

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Jänner 1902.)

Herr Prof. F. Exner hat mir das ihm von Herrn Demarçay übersandte Präparat, das letzterer als Eu_2O_3 bezeichnete, mit dessen Einverständnis zur Bestimmung der Magnetisierungszahl überlassen. Die an diesem rein weißen Pulver gewonnenen Daten sind in der von mir bisher verwendeten Bezeichnungsweise:[1]

	μ	g	a	$g.m$	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$
Eu_2O_3....	350	0·502	606	1·73	+0·64	+17·0	+9·8

Dabei ist das Atomgewicht von Europium nach Demarçay mit 151 angesetzt. Dem Molecularmagnetismus von Eu_2O_3, $k.10^6 = 9·8$ entsprechend, wird also der Atommagnetismus für Eu in gleichartigen Verbindungen gleich $4·9.10^{-6}$.

Stellt man den Atommagnetismus der seltenen Erden, soweit er bisher bestimmt war, mit ihrem Atomgewicht α zusammen, so ergibt sich die Folge:[2]

	La	Ce	Pr	Nd	Sa	Eu	Gd	Ho	Er	Yb
α =	138	140	140	144	150	151	156	160	166	173
$k.10^6$ =	−0·07	+0·01	+3·3	+5·2	+11·2	+4·9	+27·3	+50	+38·2	+6

[1] Diese Sitzungsber., 108 (IIa), S. 171 und S. 861 (1899); 109 (IIa), S. 284 und 400 (1900); 110 (IIa), S. 541 (1901).

[2] Vergl. diese Sitzungsber., 110 (IIa), S. 557. Die in den übrigen Tabellen richtigen Werte sind dort durch einen Druckfehler bei La (−0·23 statt −0·07) und Ce (+0·06 statt +0·01) unrichtig angegeben.

Daraus ersieht man unmittelbar, dass Europium schlecht an die ihm zugewiesene Stelle passt, da der sonst völlig regelmäßige Verlauf in diesem Falle gerade dort eine Störung erlitte. Die Ursache könnte entweder darin zu suchen sein, dass Eu nicht das Atomgewicht 151 zukommt, oder wahrscheinlicher darin, dass dieses Präparat noch keinen einheitlichen Körper darstellt, sondern sich aus einem stärker magnetischen und einem minder magnetischen oder diamagnetischen Bestandtheil zusammensetzt. Eine solche Dualität hält auch Herr Demarçay für möglich.[1]

Zur Controle hat Herr Demarçay neuerdings noch das von ihm rein dargestellte Samarium- und Gadoliniumoxyd gesendet. Beide Präparate sind rein weiße Pulver und ergaben die Daten:

Substanz	μ	g	a	$g.m$	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$
Gd_2O_3	360	1·087	1003	2·78	+7·0	+147·0	+53·0 = 2×26·5
Sa_2O_3	348	0·519	479	1·38	+0·11	+ 2·32	+ 1·70 = 2× 0·85
Sa_2O_3	348	0·658	608	1·75	+0·14	+ 2·95	+ 1·70 = 2× 0·85

Das Gadoliniumoxyd, das nach Herrn Demarçay's Angabe noch etwas Europium enthalten mag, ergibt also einen Wert der Atomsusceptibilität, welcher mit den an den Präparaten von Marignac (23·2), Benedicks (25·6), Cleve (28·6) und Haitinger (27·1 und 26·3) gewonnenen[2] gut übereinstimmt.

Hingegen liefert das von Herrn Demarçay als besonders rein bezeichnete Samariumoxyd einen Wert 0·85, der bloß circa den dreizehnten Theil desjenigen darstellt, der an den verschiedenen Substanzen des Herrn Cleve[3] (Mittel 11·2) erhalten wurde. Eine solche Verschiedenheit kann nur dann noch auf Verunreinigungen zurückgeführt werden, wenn die letzteren Präparate mehr als zur Hälfte aus Gadolinium bestanden haben,[4] und rückt anderen Falles die Möglichkeit nahe,

[1] C. r., 132, S. 1486 (1901).

[2] L. c., S. 549.

[3] L. c., S. 548.

[4] Vergl. l. c. die diesbezügliche Bemerkung, die auf der Untersuchung der Funkenspectra durch die Herren F. Exner und E. Haschek fußt.

dass man es hier mit zwei wesentlich verschiedenen Substanzen zu thun habe.

Man wäre nach dem magnetischen Verhalten geneigt, Eu und Demarçay's Samarium aus der oben gegebenen Folge der seltenen Erden auszuscheiden und diesen Elementen oder mindestens, falls sie noch keine einheitlichen Körper sind, den schwächer magnetischen Bestandtheilen Plätze anzuweisen, die höheren Atomgewichten entsprechen. Sollten aber anderweitige Untersuchungen ihre Atomgewichte mit circa 150 und 151 bestätigen, so müsste umgekehrt der magnetische Verlauf dahin charakterisiert werden, dass die Gruppe der seltenen Erden sich in zwei Folgen theilt, einmal bis zum Pr und Nd mit steigendem Magnetismus, dann wieder abfallend zum Sa, von diesem ansteigend zum Ho und mit neuerlichem Abfall zum Yb. Schließlich muss auch noch mit der Möglichkeit gerechnet werden, dass der von mehreren Seiten noch in Praseodym und Neodym vermuthete dritte Körper stark magnetisch wäre und diesen zwei Elementen in ganz reinem Zustande bloß Susceptibilitäten zwischen $+0{\cdot}01.10^{-6}$ und $+0{\cdot}85.10^{-6}$ zukämen. Dann ließe sich unter Aufrechterhaltung der bisherigen Folge ein einziger sehr rapider Anstieg des magnetischen Verhaltens vom Lanthan bis Holmium wahren.

	La	Ce	Pr	Nd	Sa	Eu	Gd	Ho
$k.10^6 =$	·0·07	+0·01	.	.	+0·85	+4·9	+27·3	+50

In jüngster Zeit hat Herr Steele-Melbourne[1] den Versuch gemacht, das periodische System der Elemente zu Gunsten der seltenen Erden abzuändern. Er lässt in der Atomvolumen-Atomgewicht-Curve nach den zwei ersten kurzen Perioden zu je sieben Elementen, zwei weitere zu 17 folgen, die wieder jede in sieben am Anfang und sieben am Ende abgetheilt werden, während die dazwischen liegenden drei Elemente (Fe, Co, Ni, beziehungsweise Ru, Rh, Pd) als »interperiodische Gruppe«, deren Elemente einander besonders nahestehen, gekennzeichnet sind. Die folgende Periode enthält dann eine viel größere interperiodische Gruppe, nämlich alle seltenen Erden, für welche er

[1] Chem. News, 84, S. 245 (1901).

aus ihrem magnetischen Verhalten und ihrer Lösungstension durchwegs geringe Atomvolumina annehmen zu müssen glaubt.

Damit wird die Möglichkeit ausgeschlossen, dass die Atomvolumencurve in der Gegend des Atomgewichtes von 170 nochmals ein Maximum habe, wofür sonst der ganze Aufbau des sogenannten natürlichen Systemes zu sprechen scheint.

Das Verhalten des Europium und von Demarçay's Samarium lässt nun erwarten, dass sich noch schwach magnetische oder diamagnetische Substanzen, das sind zugleich solche mit größerem Atomvolumen, unter den seltenen Erden finden lassen werden und spricht somit ebenfalls nicht für ein vorzeitiges Verlassen der bisherigen Darstellungsweise zu Gunsten derjenigen des Herrn Steele.

Das Funken- und Bogenspectrum des Europiums

von

Prof. **Franz Exner,** w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(**Vorgelegt in der Sitzung am 23. Jänner 1902.**)

Nach Abschluss unserer Untersuchungen über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente ist uns von Herrn E. Demarçay in Paris eine Probe des jüngst von ihm entdeckten Europiums in der Form des Oxydes Eu_2O_3 zur Untersuchung übermittelt worden. Wir haben nicht nur das ultraviolette Funkenspectrum in der bisherigen Weise, sondern auch das Bogenspectrum dieses Elementes gemessen. Die Hauptlinien des Funkenspectrums wurden schon von Demarçay selbst in seiner Publication[1] über dieses Element angegeben. Das Funkenspectrum ist ausgezeichnet durch eine Reihe sehr starker Linien, etwa von dem Charakter der Linien des Lanthans oder Yttriums, nebst denen sich noch eine große Zahl scharfer und schwacher Linien, ähnlich denen des Erbiums, zeigt. Es könnte dieses Verhalten zu Gunsten der von Demarçay (l. c.) ausgesprochenen Vermuthung angeführt werden, dass das Europium vielleicht kein einheitlicher Körper sei. Auffallend ist auch, dass im Bogenspectrum alle die Hauptlinien des Funkenspectrums unverändert wiederkehren, während der größte Theil der schwachen Linien fehlt. Auch die schwachen Linien des Bogenspectrums sind zum großen Theil im Funkenspectrum nicht vorhanden. Die Zahl der gemessenen Linien war im Funkenspectrum 1193, im Bogenspectrum 527. An Verunreinigungen konnten Ca, Mg, Pb nachgewiesen werden.

[1] C. R., Bd. 132 (1901).

Das Atomgewicht des Europiums beträgt nach Demarçay 151. Das Element steht also zwischen Sa und Gd. Es finden sich dementsprechend auch die Hauptlinien des Europiums in den von uns schon früher publicierten Spectren des Samariums und Gadoliniums.

Die in den folgenden Tabellen verwendeten Symbole für die Intensität und den Charakter der Linien sind die von uns schon früher verwendeten.

I. Funkenspectrum.

λ	i	λ	i	λ	i
2211·95	1+	2375·56	4	2435·26	1
12·78	1+	77·33	1	36·84	1+
14·79	1+	77·90	1+	40·80	1
17·33	1+	87·41	1	44·51	3
19·47	1+	89·20	1	46·11	4
62·04	1	91·29	2	48·70	1+
65·86	1	92·06	1	48·80	1+
69·57	1	98·97	1+	51·37	1+
71·50	1+ br.	2401·15	1	55·31	1
76·98	1	02·46	1	56·02	1+
81·16	1+	04·21	1	58·54	1+
82·80	1+	06·25	1+	60·02	1+
91·73	2	08·44	1+	64·58	1
2304·51	1	09·79	1+	65·02	1+
12·05	1+	10·20	1+	66·05	1+
33·95	1	12·17	2	70·65	1
37·14	1+	19·28	1+	76·37	1
42·6	1+	19·38	1+	76·56	1
43·2	1+	22·13	1	77·90	1
46·95	1+	23·03	1+	80·20	1+
50·65	2	25·80	1	83·40	2
52·44	1	27·81	1	87·12	1
55·1	1+ br.	28·41	1	92·63	1
60·75	1+	29·48	1	2500·54	1+
63·1	1+ br.	31·66	1	13·90	4
68·19	1	31·89	1	18·10	1
74·20	2	34·33	1	22·26	2

λ	i	λ	i	λ	i
2551·0	1+	2647·20	1+	2725·61	2
54·10	1+	51·04	2	27·89	6
54·62	1+	53·32	1+	29·46	3
54·90	1	53·72	1+	31·15	1+ br.
57·65	1	54·81	1+	36·10	1+
58·23	1	55·22	1+	38·65	1+
59·29	2	57·1	1+	40·71	1
60·55	1+	65·35	1	44·36	1
64·27	3	66·93	3	45·53	1+
64·66	1	68·35	5	52·22	1+
68·25	2	71·88	1+ d.	52·73	2
68·64	1	73·52	1	55·23	2
69·30	1+	76·15	3	57·9	2+ br.
71·8	1+	78·35	2	60·30	2
74·85	1	81·64	1	63·69	1
77·25	3	83·29	2	66·39	2
81·97	1	85·74	2	68·48	2
94·89	2	86·26	1	68·59	1
96·49	2	87·35	2+	73·12	1
2602·2	1+	87·82	2	75·39	1
02·5	1+	88·57	1+	80·60	2
03·5	1+	89·78	1	82·01	3
04·67	1+	91·2	1+	92·62	2
08·47	2	91·4	1+	94·15	1+
14·31	1	91·73	1	99·3	1+
16·20	2	92·10	3	2805·75	1+
16·45	2+	93·59	3	06·24	1
20·93	1+	94·95	1	08·47	1
23·50	1	96·77	1+	11·84	2
27·11	2	99·98	1+	12·18	1+
27·84	1+	2700·85	2+	13·17	1
28·50	2	01·23	3	14·03	5
29·52	1+	01·99	3	16·24	3
35·00	1	05·35	2	17·69	1
35·42	1+ d.	08·30	2	20·88	4
38·84	3	08·91	2	28·80	3
41·36	2	13·63	1+	29·36	1
42·86	2	17·08	3	31·65	1+
45·37	2	20·71	4	33·37	1+
46·60	1+	21·3	1+ br.	34·48	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2839·65	2+	2964·35	1+	3077·49	2
42·95	1+	72·40	2	84·26	1
45·16	1	76·68	1	90·5	1+ br.
48·52	1+	79·04	2	92·43	1
50·53	1	82·40	3	96·40	1
54·38	1+	91·44	2	97·22	1+
57·8	1+	98·55	1+	97·60	2
58·45	1	3000·20	3	98·30	2
59·75	2	04·9	1+	99·65	1+
60·67	1+	06·50	1+	3103·00	1+
61·30	1+	12·50	1	03·6	1+
62·66	2	13·34	3	05·35	1+
64·54	1+	15·37	1+	06·30	1
71·7	1+	22·17	2+	07·78	1
72·1	1+	22·75	2+	08·35	1+
75·00	1+	23·47	2+	09·53	1+
78·00	1	24·00	2+	09·82	1+
78·33	1	26·87	3	11·25	1
83·28	1+	29·92	2+	11·53	1
87·97	1	31·30	2+	13·13	2
92·68	2+	32·82	2+	18·10	1+
93·95	2	37·00	2+	21·9	1+
2903·36	1+	38·05	1+	24·30	1+
04·20	1+	38·65	1+	24·87	1+
06·80	5	39·20	1+	25·25	1+
12·36	2	40·06	1+	30·54	1
12·74	2	48·5	1+	30·87	2
21·7	1+	49·07	1	31·75	1
25·13	3	49·60	1+	34·80	1
31·09	2	50·26	1+	39·36	2+
32·65	1+	54·3	1+	40·45	1+
33·37	1+	55·03	3	45·0	1+
47·43	1	62·35	1+	46·7	1+
49·30	1	63·52	1+	47·5	1+
50·30	1	69·24	2	50·01	1
52·79	2	71·73	1+	50·6	1+ br.
56·90	2+	72·9	1+ br.	52·02	1
58·73	1	75·3	1+ br.	52·45	1
59·61	1+	76·22	1	54·8	1+
60·32	2	76·60	1	56·38	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3156·76	1+	3232·50	1	3284·00	2
61·54	1+	35·0	1+ br.	86·03	1
64·90	1+	35·94	1	87·65	1+
65·70	1+	37·51	1	88·5	1+ d.
66·60	1	39·0	1+ br.	98·43	2
68·03	1+	40·2	1+ br	99·05	1+
69·41	1	40·80	1	99·25	1+
70·54	1	41·6	1+ br.	3300·50	1+
71·11	3	44·36	1	00·90	1+
72·09	1	44·58	1	01·38	1
73·75	1	46·54	1	01·71	1
76·7	1+	46·90	2	02·11	2 r.
79·0	1+	47·48	1	03·00	1
81·4	2+ r.	47·69	1	04·31	1
83·10	1	50·17	1+	04·62	1
83·88	2	51·58	2	06·13	1
85·62	1	53·6	1+	07·43	1
85·95	1+	54·2	1+	08·16	3 r.
87·13	1	54·9	1+	09·10	1
90·75	1	58·82	2	10·52	1
91·65	1+	59·60	1+	10·95	1
94·50	2+	60·80	1+	12·29	1
98·9	1+	62·68	2+	13·48	3 r.
3206·5	1+ br.	63·10	1+	17·25	1+
07·43	1+	63·55	1+	17·40	1+
10·30	1	64·55	1+	20·05	2
10·69	1	65·84	1+	20·26	2+
12·95	2	66·54	2	22·00	2
13·95	2+	67·15	1+	22·43	1
18·75	1	69·50	1+	26·11	2
19·35	1+	71·07	1+	27·20	1
21·87	1	72·90	3 r.	28·16	2+
24·90	1+	74·43	1+	28·7	2+
25·40	1+	75·06	1+	29·65	2+
26·51	1	75·65	1+	31·32	2+
26·89	1	77·90	3 r.	32·9	1+ br.
29·06	1	78·70	1	33·79	2+
30·00	1+	79·51	1	34·27	1
30·5	1+ br.	80·33	1+	34·44	2
32·20	1+	82·64	2	35·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
3336·60	2	3384·76	1	3435·21	2
36·98	2	86·30	1	35·33	1
37·72	1	87·54	1	35·88	3
38·61	2	88·58	1+	41·17	2
38·85	2	90·90	3	45·31	2
39·67	1+	92·11	2	45·97	1+
41·23	1	93·38	2	46·51	2
42·04	1+	93·86	1	48·30	1
42·77	1+	95·30	1+	48·60	1
45·4	1+ br.	95·46	2	53·61	2
46·26	1	96·70	3	54·30	1
46·76	1	98·6	1+ br.	54 62	1
47·10	1	3400·0	1+ br.	54·90	2
51·19	1	02·55	2	55·48	1+
51·70	1	03·3	1+ br.	57·19	2
52·73	1	04·0	1+ br.	57·72	1
54·60	2+ d.	05·57	1+ br.	59·46	1+
55·13	1	06·25	2	60·45	1+
55·52	1	09·80	1+	61·53	2
56·13	1	10·2	1+	62·4	1+
57·23	1+	10·7	1+	63·43	1+
57·75	1+	12·39	2	66·58	2
60·8	1+ br.	12·87	3	67·01	1
61·34	1	14·25	1+	69·0	1+
61·74	2	16·48	1	69·44	2
62·96	1+	16·90	3 d.	71·85	1+
63·46	1	17·46	1	74·03	1
64·4	1+ br.	18·98	1	74·64	2
66·27	1+	20·00	1	76·77	2
67·80	1	21·40	1	77·14	2
69·24	2	21·85	2	80·57	1
70·65	2+	23 26	3	81·75	2
71·84	1	24·75	1+	82·69	2
73·36	1	25·18	2	85·32	2+
74·61	1	26·58	1+	86·00	2
77·83	1	27·93	1+	87·21	1
79·40	1	28·91	1+	88·44	1
79·77	1	29·45	1+	89 40	2
80 41	2	30·56	1+	91·25	1
81·88	2	31·03	1	95·28	2

λ	i	λ	i	λ	i
3501·95	1+	3551·40	1+	3588 73	1
02·66	1	52 65	2	90·12	1+
02·99	1	54·10	1+	90·34	2
04·18	2+	55·53	1+	90·77	1+
05·45	2	56·05	1+	91·52	1
06·11	1	56·63	1+	91·97	1
07·70	1+	57·89	1	93·05	1+
09·00	1	58·73	1	96·32	1+
11·23	2	59·10	1	97·04	2+
11·33	1	59·34	1+	97·94	1
11·65	1+	60·77	1+	98·40	1
12·03	1	61·43	1+	98·76	1
14·65	1	61·76	1+	3600·42	1+
18·64	2	62·35	1	01·21	1
20·19	1	62·91	1+	01·87	1
21·25	4 r.	63·9	1+ br.	02·64	1
23·33	1	66·06	1	03·36	2
23·83	1+ d.	66·92	1+	04·9	1+ br.
24·50	1+	69·30	1+	05·47	1+
24·95	1+	70·26	3	06·30	1+
25·95	1+	72·24	1	06·88	1
26·85	1+	72·8	1+ br.	08·05	1+
28·00	2	74·08	1	08·40	1+
30·48	1	75·07	1	08·86	1+
31·30	2	75·52	1+	10·70	1+
31·96	2	76·2	1+ br.	11·22	1
32·40	1	78·24	1	11·76	1
34·25	2	78·63	1	12·34	2
37·85	2+	79·27	1+	13·9	1+ br.
38·22	2+	79·46	1+	14·3	1+ br.
41·48	2	80·06	1+	15·00	1+
42·29	1	80·35	1+	16·30	2
43·98	4	80·70	1+	18·57	1
44·28	1	82·88	1+	19·30	1
44·90	1	83·38	1+	20·3	1+ br.
45·25	1+	84·0	1+ br.	21·05	1
47·20	2	85·0	1+ d.	22·09	2
48·17	1+	85·99	1	22·71	3
48·63	1+	87·26	1+	23·26	1
49·82	2+	88·25	1	23·81	2+

λ	i	λ	i	λ	i
3626·55	1+	3670·95	1+	3719·45	1+
27·57	1	73·35	2	20·90	1
28·6	1+ br.	74·83	1+	22·80	1
29·93	2+	75·85	1+	23·97	1
32·35	1	76·79	1	25·08	20
36·01	2+	77·01	1	26·55	2
36·80	2	78·31	2	27·04	1
37·84	2	79·64	1	29·28	1
38·22	1	80·95	1	29·55	1+
38·50	1	81·68	1+	29·93	1+
41·38	1+	82·55	1	31·38	1
44·10	1	83·45	1+	32·01	2
44·60	1+	84·02	1+	32·90	1+
45·33	1+	85·81	1	33·81	2
47·0	1+ br.	86·24	1	36·20	1
48·40	1	87·93	4	37·08	1+
49·95	1	88·59	10	38·20	3
51·30	1+	92·13	1	40·40	2
52·15	1+	93·23	1	41·48	3
52·74	1+	93·96	1	44·2	1+ br.
53·19	1+	95·96	1	44·70	1+ br.
55·08	1+	96·25	1	45·13	1+
55·51	1+	98·11	1+	46·15	1+ ((y)
57·60	1+	3701·29	1+	46·80	1+
58·96	1	03·72	1	47·34	1+
59·29	1	04·08	1	48·35	1+
62·10	1+	05·2	1+ br.	49·68	1+
62·50	1	06·4	1+ br.	50·32	1+
62·62	1	07·58	2	51·20	1+
63·08	1	10 5	1+ br.	51·60	1+
63·55	1	11·05	2	53·00	1
63·87	1	11·80	1+	53·19	2
65·73	1	12·37	1+	53·90	1
66·44	1	13 10	1+	55·60	1+
66·94	1	13·65	2	56·16	1
68·69	1	14·84	1	56 92	1+
69·15	1+	15·07	2	57·55	2
69·30	1+	17·10	2	57·79	2
69·95	1	17·84	2	58·70	1+
70·70	1+	18·85	1+	60·49	2

λ	i	λ	i	λ	i
3761·29	3	3799·17	2	3837·60	1+
63·15	1	3800·71	2	37·85	1+
64·90	1+	01·54	2	38·04	1
66·10	2	01·77	2	38·45	2+ d. (Mg)
67·77	1+	02·43	1	38·90	1
69·46	2	02·89	2	41·10	1
70·40	2	03·26	2	42·10	1
71·32	2	04·47	2	42·54	2
74·24	1	06·01	1	43·25	2
74·82	1+	06·34	1	45·19	1
75·83	1	06·95	1	46·15	1
76·18	1	07·71	3	46·51	1
76·68	1	08·10	1	48·33	1
77·23	1	08·33	1	48·52	1+
77·74	1	09·23	1	49·51	1
78·54	1	09·90	1	50·7	2+
78·95	1	10·90	1	51·0	1+
79·45	1	11·73	1	51·75	1+
80·00	2	12·17	1+	54·78	2
80·66	2	15·02	1	57·30	1
81·56	3	15·61	3	60·89	2
83·67	1	15·96	1	61·36	3
84·05	1	17·14	1	62·11	1+
84·43	2	17·86	3	63·31	1
85·57	2+ d.	19·25	1+	64·26	2
85·96	2	19·81	50	64·70	1
86·50	1	21·56	1	65·43	2
87·00	2 d.	23·21	1	66·35	2
87·30	1	23·54	2	69·29	1+
88·94	2	25·33	2+	73·67	1
89 33	2	25·80	1	77·42	2
90·64	1	26·83	2	77·52	2+
90·96	1	27·54	1	83·81	2
91·68	1	29·10	2	84·55	1
93·98	2	29·60	2	84·90	1+
94·54	1	30·56	1	85·47	1+
94·99	1	31·32	2+	86·10	1+
95·49	1	32·56	1	87·95	1
96·30	2	35·10	1	88·84	1
96·48	2	36·66	2	89·65	1

λ	i	λ	i	λ	i
3891·42	1+	3950·92	1+	4037·30	1
93·03	1+	53·60	1	42·20	1
94·33	1+	54·45	1+	47·47	1+
95·10	1+	56·17	1+	52 53	1+
97·41	2	57·20	1	57·76	1+
98·45	2+	58·05	2	59·51	3
99·65	2+	59·38	1+	61·70	2
3900·34	2	60·90	1+	62·35	2
00·59	2	65·60	2 r.	62·83	2
03·75	1	66 75	2	66·22	1
05·79	1	70·78	1	67·27	1
07·30	30	71·27	1	68·40	1+
10·1	1+	72·16	50	71·47	2+ d.
10·4	1+	73·54	1+	77·07	2
11·20	1+	75·70	1	80·95	2
11·70	1+	76·11	2	81·15	1+
12·67	1+	77·22	1+	82·03	1+
13·39	1+	77·77	1+	83·03	1+
13·85	1	79·80	2	85·17	1
15·39	2	81·52	2+ br.	85·54	2
17·45	2	85·10	1+	87·27	1+
18·31	2	87·10	1+	88·18	1+
19·22	3	88·40	2	89·93	1+
21·35	1+ br.	88·75	1	93·16	2+
22·66	1	94·11	2	94·48	1+
29·08	1+	96·16	2	96·95	1
30·03	1	4001·53	1	99·80	2
30·65	50	02·62	1	4102·90	1+
36·10	2	03·89	3	03·58	1+
37·7	1+ br.	09·05	1+	06·00	1
38·43	1+	10·39	1+	06·40	1
39·34	1+	11·89	3	06·82	1
40·10	1	12·99	3	08·06	3
41·72	2	17·71	3	08·74	1
42·40	1+	18·55	1+	09·20	1
43·19	3+ d.	29·76	1	11·25	1
44·73	1	31·54	1+	12·24	2
45·80	1	34·25	1+	12·36	2
49·27	1	35·5	1+	19·45	3
50·00	1	37·05	1	20·94	2

λ	i	λ	i	λ	i
4123·13	1	4182·39	1	4263·97	1+
24·70	2	84·02	1+	65·05	1+
25·08	2	87·26	1	70·41	2
29·90	100	88·17	1	70 66	2
32·51	1+	89·95	1+	76·37	1
33·26	1+	92·26	1+	82·10	1
34·02	2+	93·54	1+	84·06	1
35·08	1+	95·54	2	88·76	1
36·74	2	96·35	3	95·60	1
39·80	2+	97·24	1	98·90	1
40·19	2+	4205·20	50	4301·03	1
41·18	2	08·31	1	11·22	1+
41·88	3	09 5	1+	14·05	1+
44·08	1	11·05	1	17·35	1+
44·65	1	11·44	1+	17·85	2
45·37	1	13·71	2	30·79	3
46·45	1+	16·05	1	34·90	2
47·35	1	17·92	1+	35·60	1
48·56	1+	18·57	1+	37·84	1+
50·45	1	19·22	1+	40·10	1+
50·82	1+	21·25	1	40·85	1+
51·33	1	24·05	1	46·90	1+
51·74	1+	25·89	1	51·42	1
52·43	1+	29·47	2	52·40	2
53 56	2	32·60	2	55·28	3 r.
59·40	1	34·25	1	57·94	1
60·65	1	35·93	1+	61·83	1
62·30	1	37·66	2	68·54	1+
66·51	1	38·85	1	69 61	2
66·95	1+	41·00	1	70·50	1+
69·50	1+	42·70	1+	72·37	2
71·25	1+	44·54	1+	75·30	1
71·90	1+	45·55	1+	80·00	1+
72·98	3	47·20	2	82·22	1+
75·34	2	48·01	1+	83·34	2
76·80	2	53·96	2	89·28	1
77·65	2 d.	58·03	1+	90·59	1+
79·55	1+	58·22	1+	91·55	2
80·04	1	58·70	1+	97·89	1
81·10	1	61·20	2+	4403·31	1

λ	i	λ	i	λ	i
4407·21	2	4442·65	1+	4488·40	1
14·85	1+	44·43	1+	4522·76	15
19·83	1+	54·94	1	52·45	1+
26·58	1+	64·05	1+	55·75	1+ br.
29·92	1+	65·16	2	94·22	10
35·00	2	66·17	1+	4627·39	8
35·75	30	71·80	1	62·08	5
38·10	1	72·54	1		
40 15	1+	85·33	2		

II. Bogenspectrum.

λ	i	λ	i	λ	i
2373·00	1+	2659·50	1	2744·36	2
75·50	1	68·40	4	45·70	2
79·76	1	70·93	1+	47·38	1
2421·64	1+	73·54	2	47·94	2
35·25	1	78·36	3	52·29	2
52·20	1 Eu?	82·72	1	73·01	1
55·03	1	85·74	3	76·65	1
60·55	1+	92·10	3	80·64	1
61·84	1	2701·21	3	82·02	3
71·23	1	01·99	4	2802·10	1 Eu?
90·77	1 Eu?	05·36	2	10·81	1
2559·30	1	10·09	2+	11·86	3
64·27	1	17·06	3	13·18	2
68·26	1	24·04	2	14·08	5
77·25	2	27·87	4	16·30	3
77·69	1+	29·46	5	20·90	4
2604·68	1	31·45	1	27·36	1
35·56	1	32·68	1	28·81	4
38·84	4	35·33	1	29·40	2
41·37	3	38·66	1	33·20	1 Pb?
53·69	1	40·71	2	33·36	2
58·51	1+	43·38	2	44·05	1

λ	i	λ	i	λ	i
2859·79	3	3085·83	1	3354·54	1
62·69	3	89·44	2	69·22	3
64·52	1	97·60	3	80·40	1
71·69	1	98·30	1	90·94	1
76·16	1	3106·31	3	92·14	2
77·88	1	11·55	6	94·23	1
78·97	2	17·72	1	96·73	4
87·01	1	25·23	1	3419·96	1
87·97	1	30·83	2	21·82	1
92·65	3	32·27	2	23·22	1
93·16	3	37·06	1+	25·19	3
93·95	3	50·00	2	26·60	1
2904·31	1	68·40	2	32·69	2
06·82	5	73·75	2	35·34	2
09·10	3	85·69	1	35·85	1
12·43	1	3210·65	4	41·15	3
17·54	1	12·89	5	45·32	1
25·19	4	13·84	3	53·62	1
32·65	1+ br.	35·26	2	54·00	1
47·44	2	41·55	3	54·25	1
49·26	1	46·14	2	57·17	3
50·94	1	47·45	1+	57·70	1
52·79	3	62·64	1	61·52	3
59·03	2	66·54	2	68·02	3 Eu?
59·59	2	72·91	2	76·77	1
60·34	3	77·89	2	77·17	2+
91·46	3	3302·10	2	81·77	1+
95·33	1	04·35	1+	85·56	1
3001·48	1	04·65	1	88·45	1
06·39	2	08·15	2	3502·96	1+
22·27	1	13·46	2	03·42	1+
40·89	1	20·03	1	05·45	1
55·07	4	22·01	2	08·99	1
59·12	2	22·42	3	11·20	3
67·09	2	34·48	6	21·26	4
67·81	1	38·84	1	22·52	1
67·88	1	50·57	3	23·63	1
69·23	1	51·35	1+	31·25	2
76·20	1	51·70	1	32·36	1
77·50	3	53·85	2	38·26	1

λ	i	λ	i	λ	i
3540·0	1+ br.	3687·90	1	3897·85	2
42·31	3	88·57	20	98·35	1
44·03	1	89·12	1	98·65	1
44·30	1	92·25	1+	98·90	2
52·65	3	3708·6	1+	3900·36	1
62·33	1	11·02	2	00·66	3
68·44	1	13·58	2	01·07	1
72 75	2	15·05	2	03·39	3
89·39	3	17·03	2	07·28	30
91·47	2	19·30	3	10·03	1
92·72	1	21·4	1+	10·26	1+
3603·40	3	22·77	2	11·16	1+
05·77	1+	25·10	30	14·30	1
06·86	2	25·93	1	15·35	1
08·88	1	28·34	2	15·75	2
09·66	1	29·85	2	16·11	3
11·52	1	31·33	1	16·93	2
11·75	2	32·34	3	17·43	4
16·30	1	35·8	1+	17·81	1
18 34	2	38·23	1	18·61	2
19·97	1+	41·46	4	19·19	1
22·70	1+	43·71	2	27·60	1
29·94	1	44·35	2	29·02	2
32·32	2	60·95	1+ d.	30·00	2
34·42	1	61·30	3	30·66	50
46·85	1+	62·50	1+	36·12	1
56·40	2	64·50	1	36·79	1
60·78	1	66·06	2	40·55	1
62·6	1+	68·35	1	41·72	1
63·10	1	70·40	1	42·34	1
63·62	1	72·30	1	42·47	1
71·00	1	74·26	4	43·21	2
74·87	1	99·16	3	45·82	1
78·41	1	3811·47	4	49·72	3
79·63	1	19·80	50 u.	54·40	1+
82·58	2	65·69	4	55·86	4
83·41	1	84·91	5	58·04	1
83·63	1 Pb?	91·66	1+	61·27	1+
84·86	1+	94·86	1	63·75	1+
86·20	1+	96·96	1+	64·61	2+

λ	i	λ	i	λ	i
3965·06	4	4038·53	1+	4145·45	1+
67·27	2+	39·36	5	51·73	2
69·36	2	40·65	2+	52·40	1+
72·16	50	42·18	1	57·95	2
74·03	1	47·87	1+	71·90	1
77·01	2	53·27	1	72·98	2
78·60	4	58·00	1 Pb?	75·36	1
79·15	1+	58·64	1	76·85	2+
79·78	1	59·19	1	81·06	2
83·20	1+	59·55	1	82·42	4
85·39	1	60·20	1+	94·6	2+ br.
86·27	1	60·45	1+	95·50	1
86·79	3	61·73	1+	4202·80	3+
87·25	1+	62·33	1	05·20	100
88·00	2+	65·57	2	09·24	1
88·36	1	69·12	2	17·85	1
92·50	1	71·40	3	20·83	1
94·05	1	78·39	3	22·46	1
96·11	1	80·63	1	29·49	1
4000·87	1	85·52	3	32·61	1
00·95	1	88·00	1+	37·66	1
03·10	1	96·96	2	38·83	1
03·88	1	4102·86	2	44·90	2
10·57	2	04·04	2	47·20	1+
11·85	3	07·01	4	49·55	1+ br.
12·95	1	08·02	1+	53·97	1
14·52	2	12·23	3	55·39	1
14·78	1	17·14	1	56·10	1
16·82	3	19·49	1	56·54	1
17·75	4	24·69	1	58·28	2+
25·60	1	27·43	4	61·95	1
26·10	2	28·25	1	66·93	1+
26·77	2	29·90	100	68·00	1+
28·76	2	36·34	1+	69·63	1
30·17	4	36·71	1	70·41	1
30·84	1	37·24	3	70·67	1
33·85	1	38·70	1+	76·05	1
36·25	2+	39·34	1+	76·35	2
36·69	1+	41·20	1	79·40	1+
37·84	1+	41·89	2	79·80	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4280·96	1	4391·5	1+ br.	4535·75	3
82·09	1	99·48	1	38·15	1+
84·83	1	4403·30	1	39·40	1+
85·86	1	05·43	1	74·40	1+
87·60	1	06·96	1	75·40	1+
93·15	1+ br.	07·25	1	76·00	1+
94·04	1	12·20	1+	76·56	1+
96 93	1	13·69	1	77·90	1+
96·60	1+	14·83	1	78·05	1+
98·88	5	17·39	2	81·85	1+
4313·62	1	20·68	1	86·60	1+ br.
17·82	1+	24·51	1	91·26	1
19·06	1	29·87	1+	94·23	100 u.
22·72	3	33·40	1+	97·52	2
29·20	1	34·00	1+	4601·38	1+
29·52	4	34·49	1	11·65	1+
30·13	4	35·01	2	16·68	1+
30·75	1	35·74	50	25·51	2
31·35	3	45·33	1	27·43	100 u.
33·35	1	49·25	1+ br.	30·02	1+
37·86	4	54·90	1+	41·58	1+
43·42	1	64·75	1	44·41	1
46·08	3	65·12	2	50·70	2
49·90	1+	67·47	1	51·75	1+
50·30	1+	71·05	1	56·90	2
52·40	1+ br.	72·15	1	60·57	2
54 92	3	77·33	1	62·10	50
55·25	4	80 30	1+	65·25	1
57·92	1	85·30	2	71·40	1+ d.
61·73	1	88·44	1	75·66	1+
69·61	2	4512·32	1	85·44	1
70·60	2	13·35	1+	88·39	2
72·36	1	14·28	1+	98·30	2
83·36	3	22·80	20		
88 07	4	26·85	2		

Zum Normalenproblem der Flächen zweiten Grades

von

August Adler,

k. k. Realschulprofessor, Privatdocent für darstellende Geometrie an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Jänner 1902.)

Bekanntlich kann man von jedem P des Raumes sechs Normalen an eine Fläche zweiten Grades F^2 fällen.

Die Construction dieser Normalen bei gegebenen F^2 und P wurde bisher noch wenig behandelt, während das analoge Problem für Kegelschnitte eine eingehende Behandlung erfahren hat, namentlich von Pelz, Mertens, Lauermann, Schoute.[1] Steiner lehrte zwar in einer berühmten Abhandlung: »Über algebraische Curven und Flächen« (Crelle's Journal, Bd. 49) die Construction einer Raumcurve dritter Ordnung C^3, welche die F^2 in den Fußpunkten der gesuchten Normalen schneidet, seit dieser Zeit sind auch eine Reihe von Sätzen über die Normalen der F^2 bekannt geworden; die einzige durchgeführte Construction unserer Normalen gibt aber, unseres Wissens nach, nur Niemtschik[2] in einer Arbeit, auf welche wir noch später zurückkommen werden.

Im folgenden soll daher das Normalenproblem der Flächen zweiten Grades vom Standpunkte der darstellenden Geometrie

[1] Pelz, diese Sitzungsberichte, Bd. LXXXV, XCV, XCVI.
Mertens, diese Sitzungsberichte, Bd. XCVIII.
Lauermann, diese Sitzungsberichte, Bd. XCVIII.
Schoute, diese Sitzungsberichte, Bd. XCVIII.

[2] Niemtschik, diese Sitzungsberichte, Bd. LVIII.

aus durchgenommen werden; es wird sich dabei zeigen, dass diese Aufgabe einer ebenso einfachen wie vielseitigen Erledigung zugeführt werden kann.

1. Zunächst aber müssen wir die Benützung der Apollonischen Hyperbel H zur Construction der Normalen, welche von einem Punkte P an einen Kegelschnitt K gefällt werden können, ins Gedächtnis zurückrufen: Die Asymptoten von H sind bekanntlich parallel zu den Axen von K, H selbst geht durch P und den Mittelpunkt M von K und ist das Erzeugnis der Strahlenbüschel P und M, wobei jedem Strahle s aus P jener Durchmesser von K entspricht, auf dessen conjugiertem Durchmesser s senkrecht steht.

Ist K eine Hyperbel s_2 (Fig. 1 *a*), so sind auch die Fußpunkte R der Normalen, welche man von $P(P'')$ auf die Asymptoten von s_2 fällen kann, Punkte von $H(H_2)$; in diesem Falle ist also der Mittelpunkt O_2 vermittels der Diagonalen h_1 und h_2 (Fig. 1 *a*) leicht zu finden und damit H_2 selbst.

Ist K eine Ellipse s_1 (Fig. 1 *b*), so ist die zweite Diagonale d_1 des Rechteckes $M'P'$ schon eine durch den Mittelpunkt O_1 von H_1 gehende Gerade; einen zweiten Ort für O_1 findet man, indem man die Tangenten von H_1 in P' oder M' sucht. Die Tangente in P' steht senkrecht auf der Polaren von P' bezüglich s_1. Die Tangente t von H_1 in M' ist conjugiert bezüglich s_1 zu dem auf $M'P'$ normalen Durchmesser von s_1: t kann daher leicht gefunden werden mit Hilfe des Linienzuges 1234 (Fig. 1 *b*), wie man durch eine einfache Rechnung nachweist.[1] Aus t folgt d_2 und daraus O_1 (Fig. 1 *b*).

Ist endlich K eine Parabel, so fällt eine Asymptote von H mit der Axe der Parabel zusammen, die zweite darauf normale Asymptote ergibt sich nach Fig. 2 auf das einfachste.

2. Wir mussten die Construction von H wiederholen, weil wir sie im folgenden benützen werden; die Construction des Mittelpunktes von H ist dabei etwas einfacher, als sie gewöhnlich gegeben wird.

Wir müssen noch einen Satz erwähnen, den wir sofort anwenden werden: H ist offenbar nur von P und von der

[1] Siehe auch: A. Adler, Zur sphärischen Abbildung der Flächen. Diese Sitzungsber., 1901, Bd. CX.

Involution conjugierter Durchmesser aus M abhängig; H bleibt also bei festem P unverändert, wenn man an Stelle der Grundellipse s_1 (Fig. 1 *b*) eine ähnliche, concentrisch und ähnlich liegende setzt, oder wenn man an die Stelle der ursprünglichen Hyperbel s_2 (Fig. 1 *a*) eine andere Hyperbel mit denselben Asymptoten gibt. Ist der Kegelschnitt K eine Parabel (Fig. 2), so bleibt, wie man aus der Construction von H sofort ersieht, bei festem P die Apollonische Hyperbel H ungeändert, wenn K längs seiner Axe verschoben wird.

3. Gestützt auf das eben Gesagte können wir unser Problem nun rasch erledigen. Wir wollen dabei als F^2 ein einschaliges Hyperboloid annehmen, dessen Axen parallel zu den Projectionsebenen sind (Fig. 1).

Es seien PX_1 eine der gesuchten Normalen und k der durch X_1 gehende horizontale Schnitt von F^2. Die erste Projection $P'X_1'$ unserer Normalen muss dann Normale an die erste Projection k' von k sein; denn die Tangentialebene τ an F^2 in X_1 steht senkrecht zu PX_1 und die Tangente von k' in X_1^1 ist eine erste Spurparallele von τ. k' selbst ist ähnlich mit s_1.

Fällt man von P' an alle mit s_1 concentrischen, ähnlich und ähnlich liegenden Ellipsen die Normalen aus P', so liegen (Art. 2) die Fußpunkte derselben auf einer Hyperbel H_1, deren Construction wir (Art. 1) gezeigt haben.

Die ersten Projectionen der gesuchten Fußpunkte X_1, X_2, ... X_6 müssen also auf H_1 liegen; analog müssen die zweiten Projectionen dieser Punkte auf der Apollonischen Hyperbel H_2 des Punktes P'' in Bezug auf den Hauptschnitt s_2 liegen.

4. Damit ist schon eine einfache Methode gegeben, um die Normalen aus P an F^2 zu construieren: Man zeichne zunächst H_1 und H_2, ferner construiere man H_1'', d. h. die zweite Projection jener Curve von F^2, deren erste Projection H_1 ist; die Schnittpunkte von H_1'' und H_2 liefern schon die gesuchten Punkte X.

H_1'' ist von der vierten Ordnung; sie schneidet daher die Hyperbel H_2 in acht Punkten, aber nur sechs dieser acht Punkte liefern Lösungen unserer Aufgabe. Der geometrische Ort der Fußpunkte aller Normalen von F^2, welche die verticale

Gerade PP' schneiden, ist nach Art. 3 offenbar jene Curve von F^2, deren erste Projection H_1 ist; ebenso ist der geometrische Ort der Fußpunkte aller Flächennormalen, welche die Gerade PP'' treffen, jene Curve von F^2, deren zweite Projection H_2 ist.

Die Flächennormalen in den acht gemeinschaftlichen Punkten dieser beiden Curven vierter Ordnung erster Art müssen daher sowohl die Gerade PP', als auch die Gerade PP'' schneiden, also entweder in der Ebene $P'PP''$ liegen oder durch den Punkt P gehen. In jeder Ebene liegen aber bekanntlich zwei Normalen, durch den Punkt P gehen also nur sechs.

Die auszuschaltenden Normalen erkennt man dabei constructiv sofort; die Projectionen ihrer Fußpunkte fallen ja in die Gerade $P''P'$.

5. Bei der thatsächlichen Durchführung unserer Aufgabe construiert man H_1 und H_2 am vortheilhaftesten aus ihren Asymptoten, Axen und Brennpunkten. Einzelne Punkte von H_1'' findet man, indem man F^2 durch horizontale Ebenen schneidet; man kann dabei aus der Ähnlichkeit der entstehenden Schnitte constructiven Nutzen ziehen. Die Tangente in einem Punkte von H_1'' kann man auch einfach finden, denn die erste Projection dieser Tangente ist bei gezeichnet vorliegender H_1 bekannt, und die sie enthaltende Tangentialebene von F^2 kann leicht gefunden werden.

Es wird auch nur nöthig sein, H_1'' innerhalb eines kleinen Bereiches mit besonderer Sorgfalt zu verzeichnen.

Damit ist eine darstellend - geometrisch befriedigende Lösung unserer Aufgabe gegeben; vom rein theoretischen Standpunkte aus könnte man noch wünschen, dass die Aufgabe durch Curven möglichst niedriger Ordnung gelöst würde; darauf wollen wir aber erst später eingehen.

6. Schon einleitend erwähnten wir, dass man eine C^3 construieren kann, welche durch P und den Mittelpunkt M von F^2 geht und F^2 in den Fußpunkten der von P an F^2 möglichen Normalen schneidet.

Nimmt man nämlich einen beliebigen Punkt Q an, so steht jeder Strahl s von P senkrecht auf einer Ebene σ aus Q; dieser Ebene σ ist ein bestimmter Durchmesser von F^2 conjugiert,

gleichgiltig ob M im Endlichen liegt oder nicht. Wenn man zwei derartige Strahlen s und s_1 einander zuweist, so sind die beiden Bündel P und M collinear aufeinander bezogen und erzeugen unsere C^3.

Aus der Construction von C^3 erkennt man ohneweiters, dass C^3 durch die unendlich fernen Punkte der Axen von F^2 geht: die orthogonalen Projectionen von C^3 auf die Hauptebenen von F^2 müssen daher gleichseitige Hyperbel sein, und zwar schon unsere Apollonischen Hyperbel H_1 und H_2, denn dieselben gehen auch durch die Punkte $X'_1, X'_2, \ldots X'_6$, respective $X''_1, X''_2, \ldots X''_6$.

7. Will man nun unsere Aufgabe mit Benützung der C^3 lösen, so wird man gewöhnlich folgendermaßen vorgehen: Man wird zunächst die Projectionen H_1 und H_2 von C^3 zeichnen (Art. 1), dann durch C^3 einen verticalen Cylinder C^2 legen, den Schnitt von C^2 und F^2 also H''_1 bestimmen und damit die Aufgabe lösen. Man bemerkt, dass dieser Vorgang genau derselbe ist, wie der in Art. 4 angegebene.

Man kann aber noch auf eine zweite Weise vorgehen, die besonderes theoretisches Interesse hat:

C^2 und F^2 besitzen ein gemeinsames Poltetraeder; ein Eckpunkt desselben liegt in der Spitze von C^2; die drei übrigen Eckpunkte I, II, III sind die Ecken des gemeinschaftlichen Poldreieckes von s_1 und H_1; die Punkte I, II, III können bekanntlich[1] durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Schlagen von Kreisbogen gefunden werden, sobald s_1 zur Benützung gezeichnet vorliegt.

Projiciert man nun die Schnittlinie von C^2 und F^2 aus I auf die verticale Ebene durch II, III, so erhält man als Projection einen sehr einfach zu construierenden Kegelschnitt. Projiciert man unsere C^3 in derselben Weise, so erhält man eine einfach zu construierende Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Aus den sechs Schnittpunkten dieser beiden

[1] Kortum, »Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades«.
Henry J. St. Smith, »Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques«. Collected math. paper's, Vol. 2.
Beide Arbeiten gekrönt 1868 mit dem Steiner-Preise von der Berliner Akademie der Wissenschaften.

Projectionen gehen die gesuchten Normalen hervor: dieselben sind jetzt theoretisch möglichst einfach gefunden.

8. Die sechs Normalen aus P an F^2 liegen auf einem gleichseitigen Kegel K^2 zweiten Grades, auf jenem Kegel nämlich, welcher C^3 aus P projiciert. Der Schnitt dieses Kegels mit der Hauptebene s_1 z. B. ist offenbar eine gleichseitige Hyperbel: die Asymptoten derselben sind parallel zu den Axen von s_1. Ein fünftes Bestimmungsstück dieser Hyperbel findet man einfach, wenn man beachtet, dass die Tangente von C^3 in P auf der Polarebene von P bezüglich F^2 senkrecht stehen muss.

Diese Polarebene ist darstellend-geometrisch leicht zu finden: ihre erste Spur ist nämlich (Fig. 1) die Polare von P' bezüglich s_1, und ihre zweite Spur ist parallel zur Polaren von P'' in Bezug auf s_2.

9. Steiner hat in der eingangs erwähnten berühmten Arbeit eine allgemeine Lösung des Normalenproblems für Flächen gegeben:

Es sei F eine beliebige Fläche, g_1 eine beliebige Gerade. Dreht man F um g_1 unendlich wenig, so erhält man eine neue Fläche F_1, welche F nach einer Curve schneidet; die Normalen von F in den Punkten dieser Curve werden offenbar die Gerade g_1 treffen.

Von diesem Gedanken ausgehend, kann man die Normalen aus Punkt P an die Fläche F folgendermaßen finden: Man lege durch P zwei Gerade g_1 und g_2, drehe F unendlich wenig einmal um g_1, dann um g_2 und bestimme die so auf F entstehenden Curven. Die Normalen in den Schnittpunkten dieser Curven müssen sowohl g_1, als auch g_2 schneiden. Man hat jetzt nur noch die in der Ebene $g_1 g_2$ liegenden Normalen auszuscheiden, um sämmtliche durch P gehende zu erhalten.

Diese Steiner'sche Methode können wir auch auf unsere Aufgabe anwenden.

Es wird dabei am einfachsten sein, durch P die Geraden PP' und PP'' zu legen und um dieselben unendlich wenig zu drehen. Drehen wir um PP' unendlich wenig, so schneidet die zweite Lage von F^2 die erste nach einer Curve, die sich offenbar in H_1 projicieren muss; denn (Art. 4) auf H_1 liegen ja die

ersten Projectionen der Fußpunkte aller Normalen, welche PP' treffen. Eine analoge Bedeutung hat H_2. Man erkennt, dass auch die Steiner'sche Methode genau auf die Art. 4 gegebene Lösung führt.

Man könnte durch P auch andere Hilfsgeraden legen und dieselben als Drehungsaxen benützen:

Legt man insbesondere durch P jene Geraden, welche auf den zwei reellen Kreisschnitten von F^2 senkrecht stehen, so erhält man jene Methode, welche Niemtschik (a. a. O.) angegeben hat, ohne übrigens den dargelegten Zusammenhang zu erwähnen.

Bekanntlich besitzt auch nicht jede F^2 reelle Kreisschnittebenen; die Niemtschik'sche Methode ist daher auch nicht ausnahmslos anwendbar.

10. Unsere Art. 4 gegebene Methode ist für alle Flächen zweiten Grades (auch Kegelflächen) und für alle Lagen des Punktes P anwendbar; denn es lässt sich jederzeit die Apollonische Hyperbel construieren, auch wenn ein Hauptschnitt der Fläche in zwei Gerade zerfällt.

Ist F^2 ein Paraboloid, so geht die Steiner'sche C^3 durch den Berührungspunkt der Fläche mit der unendlich fernen Ebene; unsere Aufgabe hat dann nur fünf eigentliche Lösungen.

Ist F^2 eine Kegelfläche K^2, so geht C^3 durch die Spitze S derselben, schneidet also die Kegelflächen außerdem noch in vier Punkten, d. h. von einem Punkte P gehen an K^2 nur vier Normalen. Dieselben können nach den früher erörterten Methoden gefunden werden, sobald die Hauptebenen der Kegelfläche parallel zu den Projectionsebenen sind.

11. Nicht selten ist aber eine Kegelfläche in anderer Weise gegeben, gewöhnlich durch ihre Grundfläche und Spitze.

Ist diese Grundfläche ein Kreis, so kann man sehr einfach die Axen und damit die Hauptebenen des Kegels finden; die beiden Halbierungslinien der Winkel, welche die kürzeste und längste Erzeugende der Fläche miteinander bilden, sind nämlich schon zwei Axen der Kegelfläche, und die dritte Axe steht normal zur Ebene der beiden ausgezeichneten Erzeugenden. Durch Transformation oder Drehung kann man jetzt den Kegel in die gewünschte Lage bringen und die Normalen nach Art. 4 finden.

Falls die Kegelfläche durch einen ihrer Kreise und durch ihre Spitze gegeben ist, kann man auch leicht die zweiten Kreisschnittebenen bestimmen und dann zur Construction der gesuchten Normalen vortheilhaft die erwähnte Niemtschik'sche Methode anwenden.

12. Ist die gegebene Grundfläche des Kegels K^2 kein Kreis, so wäre es zur Lösung unseres Normalenproblems nicht vortheilhaft, zuerst die Axen des Kegels zu suchen und dann nach Art. 4 weiter zu gehen.

In diesem Falle schlägt man passend folgenden Weg ein: Man schneidet K^2 durch eine Ebene α normal zur Geraden PS, wodurch man einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und einen Punkt $\mathfrak{P}$ erhält. Die Normalen aus $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{K}$ sind nun offenbar die Projectionen der gesuchten Normalen aus P an K^2, wobei S das Centrum dieser Projection darstellt und α die Projectionsebene.

Auf diesem Wege, der auch auf jede beliebige Kegelfläche anwendbar ist, findet man vortheilhaft die gesuchten Normalen.

13. Von jedem Punkte P gehen vier Normalen an eine Kegelfläche zweiten Grades; dieselben müssen sich nach den oben erwähnten Arbeiten von Smith und Kortum durch bloßes Schlagen von Kreisbogen und Ziehen von geraden Linien finden lassen, sobald ein Kegelschnitt (z. B. der Grundkegelschnitt K) zur Benützung gezeichnet vorliegt.

Dies ist auch unschwer möglich. Kortum und Smith geben nämlich mehrere Methoden an, um folgende Hauptaufgabe vierten Grades zu lösen: »Gegeben sei ein gezeichnet vorliegender Kegelschnitt K und fünf Punkte eines zweiten Kegelschnittes K_1; es sind die Schnittpunkte von K und K_1 (bei Benützung von K) durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Schlagen von Kreisbögen zu finden«.

Nach dem vorigen Artikel sind nun in der Ebene α die Normalen an $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{P}$ zu construieren zur Lösung unseres Normalenproblems. Dies geschieht mit Hilfe einer Apollonischen Hyperbel $\mathfrak{H}$, und es ist leicht möglich, fünf Punkte von $\mathfrak{H}$ linear zu construieren, ohne $\mathfrak{K}$ selbst zu benützen. Projiciert man nun diese fünf Punkte aus S auf die Grundfläche des Kegels, so ist offenbar unser Normalenproblem

auf die eben erwähnte Hauptaufgabe vierten Grades zurückgeführt.

14. Folgende zwei Bemerkungen, welche mir beim Lesen der einschlägigen Literatur auffielen, dürften von Interesse sein:

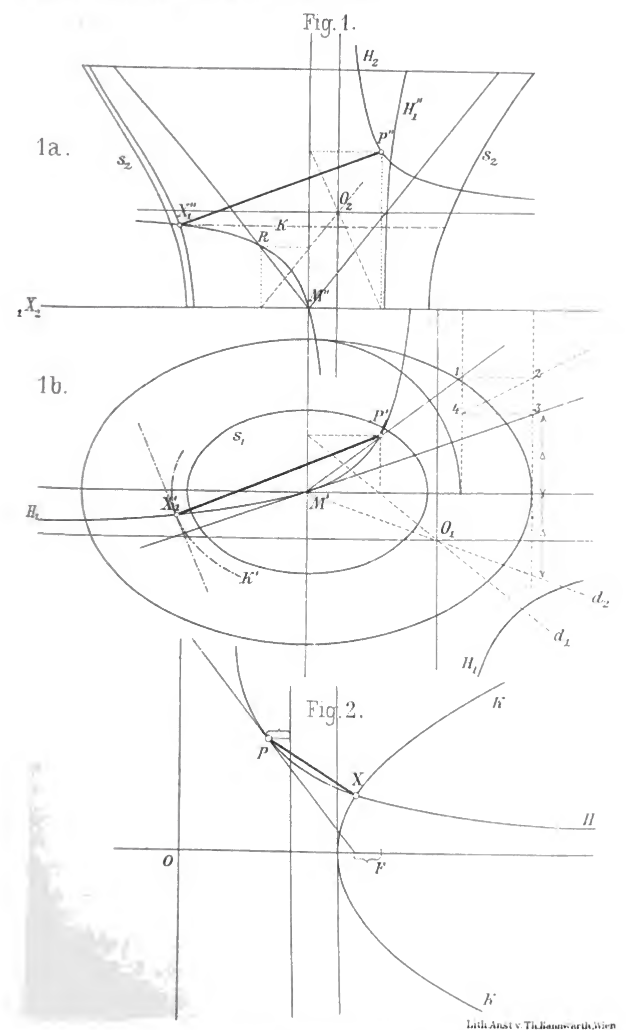
α) Schon Descartes spricht in seiner »Géometrie« (livre troisième, p. 409) den Satz aus, dass jede geometrische Aufgabe vierten Grades sich mit Zirkel und Lineal lösen lässt, sobald ein noch so kleines Stück eines Kegelschnittes zur Benützung gezeichnet vorliegt.

β) In der wirklich schönen Abhandlung von Smith über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades findet sich einleitend im I. Capitel eine Methode des Construierens mit imaginären Elementen vor, welche verdient, der Vergessenheit entrissen zu werden.

Smith nennt daselbst die Gesammtheit zweier conjugiert imaginärer Elemente eine Dyade. Er nimmt nun eine Fundamentaldyade c_1c_2 gegeben durch eine gerade Involution an (wir beschränken uns hier nur auf imaginäre Punkte) und sagt: Ein Punkt des imaginären Punktepaares a_1a_2 ist dann bestimmt, wenn der Träger der Involution a_1a_2 und außerdem noch eines der beiden Centren der Perspectivität zwischen a_1a_2 und c_1c_2 gegeben sind. Analoges gilt für imaginäre Geraden und Ebenen.

Man kann dann leicht linear folgende zwei Fundamentalaufgaben lösen: 1. Der Schnittpunkt zweier Geraden ist zu finden, wenn wenigstens eine derselben imaginär ist; 2. die Verbindungslinie zweier Punkte ist zu finden, wenn wenigstens einer derselben imaginär ist.

Smith zeigt noch an zahlreichen Beispielen, dass das Eintreten derart definierter imaginärer Elemente in eine geometrische Aufgabe keine Änderung ihres Grades bedeutet.



Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien

Die Schwankungen der Niederschlagsmengen in größeren Zeiträumen

von

J. Hann,
w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Jänner 1902.)

Die Grenzen, innerhalb welcher sich die Niederschlagsmenge eines bestimmten Ortes innerhalb einer längeren Zeit bewegt, sowie die mittleren Abweichungen derselben von dem Durchschnittswerte haben ein großes theoretisches und praktisches Interesse. Das theoretische Interesse lässt sich kurz dadurch kennzeichnen, dass es sich dabei darum handelt, die Frage zu beantworten, wie weit die Abweichungen der Niederschlagsmengen kürzerer Zeitabschnitte von dem Mittelwerte einer größeren Anzahl derselben die Natur zufälliger Störungen haben, und den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen werden dürfen. Dazu kommt dann auch noch die Frage nach der Existenz cyclischer Änderungen der Jahressummen, oder gar einer fortschreitenden Ab- oder Zunahme.

In der vorliegenden Abhandlung werden die Ergebnisse der besonders langjährigen Niederschlags-Aufzeichnungen von Padua (1725 bis 1900), dann jene von Klagenfurt (1813 bis 1900) in dieser Hinsicht etwas näher untersucht; von der langen Reihe von Mailand (1764 bis 1900) wurden nur die Jahressummen der Niederschläge zu Vergleichen herbeigezogen.

I. Die Niederschlagsmessungen zu Padua. Dieselben beginnen mit dem Jahre 1725 und erstrecken sich bis auf die

Gegenwart, umfassen also mit Abschluss des Jahres 1900 schon 176 Jahresreihen. Die einzelnen Monats- und Jahressummen dieser höchst bemerkenswerten Reihe von Regenmessungen finden sich von 1725 bis inclusive 1879 veröffentlicht in den »Annali della Meteorologia Italiana«, Vol. III, parte I, 1881, Roma 1882: »Sulla distribuzione della Pioggia in Italia«, Memoria del Prof. E. Millosevich, p. 32 bis 39; die Jahrgänge 1880 bis 1882 in »Appendice alla Memoria etc.«, Annali 1883, parte I. Die folgenden Jahresreihen (bis 1890) wurden den entsprechenden Jahrgängen der »Annali«, soweit sie bis heute erschienen sind, entnommen, die des letzten Decenniums 1891 bis 1900 verdanke ich einer brieflichen Mittheilung des Directors des Observatoriums in Padua, Herrn Prof. Dr. Giuseppe Lorenzoni, der auch die Güte hatte, die einzelnen Monatssummen 1871 bis 1890 nach den Originalen in Padua zu corrigieren.[1] Ich spreche ihm dafür auch an dieser Stelle meinen Dank aus.

Natürlich ist die erste Frage, welche sich bei Benützung einer so langen Reihe von Messungen nothwendig aufdrängt, die Frage nach der Homogenität der Reihe. Ich habe auch Versuche gemacht, diese Frage zu beantworten.

Die erste Auskunft darüber müssen wir in den Angaben über die Geschichte der Station suchen. Ich entnehme dieselben der Schrift von Lorenzoni: »Sulle osservazioni udometriche eseguite in Padova dal 1725 al 1871«, Padova 1873 (dieselbe enthält nur die einzelnen Jahressummen und Mittel derselben, ferner Vergleiche mit Mailand und Udine).

Dem Marchese Giovanni Poleni (geb. zu Venedig 1683, von 1708 an Professor in Padua) verdankt man die Messungen der ersten 36 Jahre. Er beobachtete in seinem Hause, leider lässt sich die Localität nicht mehr genau ermitteln. Die Höhe

[1] Es muss übrigens bemerkt werden, dass die große Tabelle in dem Werke von Millosevich (die Monatssummen sind auf 2 Decimalen angegeben, daneben auch die Zahl der Niederschlagstage) ohne Druckfehler ist, wie ich mich überzeugt habe, indem ich die Monatssummen auf ganze Millimeter reduciert ausschrieb und die Jahressummen neu bildete, die innerhalb der dadurch nothwendig hie und da entstehenden kleinen Differenzen vollkommen mit dem Drucke stimmten.

des Regenmessers, wahrscheinlich auf dem Dache des Hauses aufgestellt, war vermuthlich circa 12 *m* (40 Piedi; das Barometer befand sich »30 Piedi sul livello medio del fiume Brenta«). Nach dem Tode von Poleni, 1761, wurden die Beobachtungen an gleicher Stelle mit den gleichen Instrumenten von seinem Sohne fortgesetzt bis März 1764. Die Regenhöhe wurde in englischen Zollen und Zehntelzollen gemessen. Die Messungen von April 1764 bis inclusive October 1765 finden sich in einem Manuscriptvolum von Morgagni. Von da bis December 1767, also für 2 Jahre und 2 Monate, fehlen die quantitativen Messungen, doch findet sich die Zahl der Niederschlagstage aufgezeichnet. Mittels derselben hat Toaldo die wahrscheinlichen Niederschlagsmengen herzustellen gesucht. Er entnahm den vorausgegangenen Jahren die Regenmengen jener Monate, welche die gleiche Zahl der Niederschlagstage hatten, bildete daraus Mittelwerte und setzte selbe für die fehlenden Niederschlagsmessungen ein (della vera influenza degli astri sulle stagioni e mutazione del tempo; Padova 1781).

Von 1768 bis zur Gegenwart wurden die Regenmessungen am Observatorium in Padua ausgeführt. Die Regenmesser, deren sich Toaldo bedient, sowie die Maßstäbe, mit denen die Regenhöhe gemessen wurde, finden sich noch im Observatorium aufbewahrt.

Auf p. 9 bis 12 der citierten Schrift von Lorenzoni wird diese ältere Art der Messung der Niederschläge specieller mitgetheilt. Die Methode von Toaldo wurde bis 1815 oder 1823 beibehalten, das Jahr ist nicht mehr genau zu ermitteln. Von da an wurde eine Art Wasserstandszeiger an der Seite des Auffanggefäßes angebracht. Das Auffanggefäß hatte einen Pariser Fuß Seitelänge. Von 1838 an bis jetzt dient das Metalldach des Meridiansaales, welches die Form einer achtseitigen, mit der Spitze nach unten gerichteten Pyramide (Neigung der Seiten 24 bis 25°) und eine Oberfläche von 27.485 m^2 hat, als Auffangfläche. Der horizontale Querschnitt des Messgefäßes ist 1·482 m^2, die Reductionszahl also 0·0539. Die Schneehöhe wurde gleich $^1/_{12}$ der Niederschlagshöhe angenommen.

Die Höhe des Auffanggefäßes über dem Boden war von 1768 bis 1838 24 *m*, seit 1838 bis heute beträgt sie 27 bis 28 *m*.

Über die Aufstellung vor 1768 kann nichts gesagt werden. Die Aufstellung am Observatorium ist frei auf einem Bogen des Horizontes von 270°, nur nach West hin befinden sich dominierende Thürme, welche Einfluss nehmen könnten, wenn der Regen unter einem Winkel von weniger als 25 bis 30° fällt, was gewiss selten der Fall sein dürfte.

Die in einigen Monaten späterer Jahrgänge fehlenden Regenmessungen habe ich selbst dadurch ergänzt, dass ich auf Grund der angegebenen Zahl der Niederschlagstage und der mittleren Regendichte der betreffenden Monate die daraus folgende wahrscheinliche Niederschlagshöhe berechnete. Die Vergleichung der daraus erhaltenen Mengen mit den correspondierenden Mengen zu Bologna ergab eine völlig befriedigende Übereinstimmung.

Nach dem Vorausgehenden muss es als sehr unwahrscheinlich angesehen werden, dass die Reihe der Regenmessungen zu Padua ganz homogen ist. Die Jahresmengen selbst aber lassen direct keine bemerkenswerte Unterbrechung der Homogenität erkennen. Etwas auffällig ist nur die größere Regenmenge der ersten Decennien. Für die 37- und 36jährigen Perioden hat schon Lorenzoni folgende Mittelwerte aus der Zeit von 1725 bis 1871 gebildet:

	Periode			
	1725—1761	1762—1798	1799—1834	1835—1871
Jahressumme.....	883	908	832	833 *mm*
Tage	106	107	90	94

Die erste 74jährige Periode 1725—1798 gibt ein Mittel von 895 *mm*, die zweite, 72jährige ein solches von 833 *mm*, was anzudeuten scheint, dass diese beiden Perioden nicht homogen sind. Aber bemerkenswerterweise ist auch die Zahl der Regentage der ersten Periode größer, die Regendichte umgekehrt in der zweiten Periode etwas größer, 8·4 *mm* 1725/98 und 9·0 *mm* 1799/1871, was für einen reellen Unterschied der Niederschlagsmengen dieser beiden Perioden sprechen dürfte. Jedenfalls hält sich der Unterschied der beiden Perioden in Grenzen, welche die Verwendung der ganzen Reihe als einer genähert homogenen zu gestatten scheinen.

Ich habe auch versucht, durch Vergleich der correspondierenden Jahressummen von Padua und Mailand dieser Frage noch näherzutreten; leider beginnen die Regenmessungen zu Mailand erst mit dem Jahre 1764. Die correspondierenden 10- (respective 7-) jährigen Mittel der Jahressummen des Niederschlages sind:

	1764 bis 1770	1771 bis 1780	1781 bis 1790	1791 bis 1800	1801 bis 1810	1811 bis 1820	1821 bis 1830
Padua	856	1006	835	879	1015	731	720
Mailand	949	870	909	990	1009	1036	987
Verhältnis	0·90	1·16	0·92	0·89	1·01	0·71	0·73

	1831 bis 1840	1841 bis 1850	1851 bis 1860	1861 bis 1870	1871 bis 1880	1881 bis 1890	1891 bis 1900
Padua	798	854	884	815	875	790	830
Mailand	1061	1169	1063	917	1004	1078	1047
Verhältnis......	0·75	0 73	0·83	0·89	0·87	0·73	0·79

Die ersten fünf Decennien geben das Verhältnis Padua zu Mailand zu 0·98, die letzten neun Decennien aber 0·78.

Dies würde für eine relativ zu große Regenmenge von Padua in der ersteren Periode vor 1811 sprechen.

Anderseits scheint aber, dass die Regenmengen zu Mailand im XVIII. Jahrhunderte zu klein waren, während die Regenmengen von 1801—1900 als ganz homogen angesehen werden dürften. Die 20jährigen Mittel der Niederschlagsmenge von Mailand sind:

1761/80	1781/1800	1801/20	1821/40	1841/60	1861/80	1881/1900
914	950	1023	1024	1116	960	1063

Mittel der ersten 40 Jahre 932,
» » letzten 100 » ..... 1037.

Man kann deshalb aus den Vergleichen von Mailand mit Padua 1764—1800 nichts sicheres schließen. Dürfte man annehmen, dass das erste 40jährige Mittel von Mailand dem

nächsten 40jährigen mit 1023 nahe kam, so erhält man Padua : Mailand circa = 0·90, das ist allerdings immer noch mehr als später. Es dürfte demnach die Regenmenge von Padua im XVIII. Jahrhundert und noch etwas darüber hinaus doch etwas zu groß gefunden worden sein gegen die neuere Reihe im XIX. Jahrhundert. Eine innere Begründung dafür ist aber in der Geschichte der Beobachtungsstation nicht zu finden.

Diese letztere würde vermuthen lassen, dass um die Jahre 1815—1823 und dann von 1837 auf 1838 eine Unterbrechung in der Homogenität der Messungsergebnisse eingetreten sein dürfte. Diese beiden kritischen Perioden lassen sich aber glücklicherweise prüfen durch die Regenmessungen an der benachbarten Station Udine.

Von Udine liegt eine sehr homogene Reihe von Regenaufzeichnungen aus der Periode December 1802 bis Schluss des Jänner 1843 vor, die von demselben sorgfältigen Beobachter mit den gleichen Instrumenten in gleicher Aufstellung ausgeführt worden ist.[1]

Die correspondierenden acht Lustrenmittel von Padua und Udine geben folgende Verhältniszahlen:

	1803 bis 1807	1808 bis 1812	1813 bis 1817	1818 bis 1822	1823 bis 1827	1828 bis 1832	1833 bis 1837	1838 bis 1842
Padua : Udine. .	0·60	0·55	0·40	0·45	0·49	0·50	0·58	0·49

Eine Unterbrechung der Continuität in den Niederschlagsaufzeichnungen zu Padua ist in dieser Zahlenfolge nicht zu erkennen. Die Schwankungen der Verhältniszahlen sind vollkommen erklärlich durch die viel größere Regenmenge zu Udine und durch dessen Nähe an der Alpenkette, welche gelegentlich große Regenmengen bewirkt, die sich nicht mehr auf das entferntere flache Vorland erstrecken. Die geänderte Methode der Regenmessung nach Toaldo zwischen 1815 und 1823, sowie der Übergang auf eine sehr große und ganz

[1] Osservazioni Met. fatte in Udine pel Quarantennio 1804—1842 da Girolamo Venerio. Udine 1851. In einem elegant ausgestatteten großen Quartbande veröffentlicht.

ungewöhnliche Auffangfläche im Jahre 1838 scheint die Homogenität der Reihe nicht merklich gestört zu haben.

Das Mittel der Verhältniszahlen 1803—1812 ist 0·57, jenes von 1823—1837 aber 0·52; anderseits wieder geben die Jahre 1803—1837 0·51, jene von 1838—1842 aber 0·49. In keiner dieser beiden kritischen Perioden zeigt sich eine irgendwie auffallende Änderung der Quotienten.

Das Ergebnis der ganzen vorstehenden Untersuchung kann deshalb dahin zusammengefasst werden, dass die selten lange und deshalb so wertvolle Reihe von Regenaufzeichnungen zu Padua als ziemlich homogen betrachtet werden darf, wenngleich ein Verdacht bestehen bleibt, dass die Messungsergebnisse im XVIII. Jahrhunderte relativ etwas zu groß sein mögen gegen jene im XIX. Jahrhunderte.

II. Die Niederschlagsmessungen zu Klagenfurt. Dieselben beginnen mit December 1812 und rühren von drei Beobachtern her: Mathias Achazel bis 1843 (31 Jahre), Johann Prettner, 1844—1874 (gleichfalls 31 Jahre), und Ferdinand Seeland, 1875—1900 (26 Jahrgänge). Ferdinand Seeland hat noch kurz vor seinem Tode in dem Jahrbuche des naturhistorischen Landesmuseums für Kärnten, 1899 (XXV. Heft) die einzelnen Monats- und Jahressummen des Niederschlages 1813—1898 selbst zusammengestellt (für das meteorologische Jahr und auch für die Jahreszeiten). Die in meiner Abhandlung enthaltene Tabelle ist nach den an der k. k. Met. Central-Anstalt vorhandenen Tabellen und der eben citierten zusammengestellt worden. Diese beiden Quellen dienten zur Controle etwaiger Schreib- oder Druckfehler. Wo kleine Abweichungen (größtentheils Differenzen infolge von Maßreduction und Abwerfen der Decimale des Millimeters) vorkommen, habe ich mich an die Manuscripttabellen der k. k. Met. Centralanstalt gehalten. Die Differenzen sind ganz belanglos. Die Mittel für das bürgerliche und für das meteorologische Jahr sind natürlich neu berechnet worden, ebenso die Niederschlagssummen der Jahreszeiten.

Die Ergebnisse der Niederschlagsaufzeichnungen zu Klagenfurt verdienen ganz besonderes Vertrauen, da sie von drei für den Gegenstand besonders interessierten Männern herrühren. Die Aufstellung der Regenmesser hat zwar zweimal

gewechselt, aber dieselben befanden sich stets im Freien (nicht zwischen Häusern) und nahe am natürlichen Boden. Die Lage von Klagenfurt ist ganz eben, so dass die geringen Entfernungen der drei Beobachtungsorte gar keine Rolle spielen. Auch die Schneemessungen des Winters sind durch die große Windstille während des Winters im Becken von Klagenfurt sehr erleichtert und es sind Fehler durch Verwehung des gefallenen Schnees so gut wie ausgeschlossen.

III. Die Jahressummen der Niederschläge zu Mailand. Dieselben wurden entnommen der vielseitigen und gründlichen Bearbeitung der Niederschlagsverhältnisse von Mailand von E. Pini in der Abhandlung: »Andamento annuale e diurno della Pioggia nel clima di Milano«, Publicazioni del R. Oss. di Brera, Nr. XXXVII, Milano 1891. Sie enthält die Monats- und Jahressummen der Niederschläge von 1764 bis inclusive 1884. Jene der folgenden Jahre bis 1900 inclusive habe ich den mit großer Pünktlichkeit und Raschheit von Pini veröffentlichten meteorologischen Beobachtungsergebnissen der Mailänder Sternwarte entnommen.

A. Die Schwankungen der Jahresmengen der Niederschläge zu Mailand, Padua und Klagenfurt.

Die folgenden Tabellen enthalten zunächst die Jahresmengen der Niederschläge in Millimetern (Tabelle *A*) für die ganzen Beobachtungsperioden, dann für das volle XIX. Jahrhundert in Procenten des 100jährigen Mittels (Tabelle *B*) und endlich die Abweichungen der Jahresmengen vom Mittel in Centimetern (Tabelle *C*). Die specielleren Daten findet man in den ausführlichen Tabellen am Schlusse dieser Arbeit.

Tabelle 4.

Jahressummen der Niederschlagsmenge zu Padua, Mailand und Klagenfurt.

	Padua	Mailand	Klagenfurt		Padua	Mailand	Klagenfurt
				1751	1073	—	—
				52	961	—	—
				53	1000	—	—
				54	705	—	—
1725	759	—	—	55	1101	—	—
26	629	—	—	56	994	—	—
27	1162	—	—	57	798	—	—
28	1348	—	—	58	1111	—	—
29	924	—	—	59	919	—	—
30	871	—	—	60	887	—	—
1731	866	—	—	1761	1126	—	—
32	814	—	—	62	572	—	—
33	879	—	—	63	947	—	—
34	961	—	—	64	1069	937	—
35	775	—	—	65	982	1286	—
36	792	—	—	66	841	871	—
37	606	—	—	67	902	919	—
38	713	—	—	68	763	899	—
39	645	—	—	69	1061	900	—
40	570	—	—	70	1372	833	—
1741	614	—	—	1771	1062	703	—
42	991	—	—	72	1563	1096	—
43	717	—	—	73	1129	961	—
44	906	—	—	74	760	778	—
45	963	—	—	75	916	726	—
46	1056	—	—	76	943	900	—
47	649	—	—	77	1184	1044	—
48	1052	—	—	78	866	823	—
49	918	—	—	79	826	787	—
50	821	—	—	80	812	877	—

	Padua	Mailand	Klagen-furt		Padua	Mailand	Klagen-furt
1781	940	930	—	1811	661	905	—
82	821	758	—	12	1029	1067	—
83	825	1030	—	13	729	1188	1081
84	791	910	—	14	839	1578	964
85	918	915	—	15	718	1029	1103
86	1037	1075	—	16	553	891	1135
87	852	859	—	17	575	670	838
88	824	1099	—	18	827	968	541
89	748	754	—	19	863	1102	832
90	597	763	—	20	515	959	1235
1791	679	1082	—	1821	671	1143	884
92	670	812	—	22	480	879	580
93	947	1082	—	23	779	1079	879
94	1041	915	—	24	763	1006	743
95	897	1098	—	25	660	827	996
96	845	1041	—	26	990	1287	836
97	722	1064	—	27	841	1114	980
98	868	959	—	28	617	696	743
99	1121	935	—	29	800	954	1137
1800	1003	907	—	30	597	884	1116
1801	903	1194	—	1831	790	925	1056
02	1110	890	—	32	673	1032	738
03	1142	(823)	—	33	949	1106	981
04	1130	1131	—	34	501	804	410
05	893	837	—	35	912	921	617
06	991	1133	—	36	958	1142	1033
07	1184	986	—	37	952	1160	788
08	738	734	—	38	821	1274	1082
09	1089	1017	—	39	809	1348	952
10	973	1345	—	40	614	899	997

	Padua	Mailand	Klagen-furt		Padua	Mailand	Klagen-furt
1841	713	969	885	1871	712	639	875
42	699	1360	963	72	1088	1570	1273
43	752	1179	1054	73	919	1053	911
44	933	1147	1302	74	720	681	1174
45	1265	1355	1164	75	821	1044	803
46	957	1338	1126	76	1032	1170	1469
47	748	915	1107	77	971	884	896
48	843	1238	1092	78	886	982	1385
49	680	984	1085	79	852	1008	1115
50	948	1205	1225	80	747	1004	1134
1851	1030	1362	1230	1881	684	1098	1003
52	747	1100	914	82	813	1268	1295
53	1034	1017	894	83	701	868	726
54	718	753	774	84	768	799	898
55	1139	1227	920	85	892	1168	1179
56	1015	1068	1022	86	835	1219	1023
57	653	769	529	87	908	995	1028
58	806	1016	840	88	648	1158	1092
59	809	1158	970	89	963	1179	1086
60	884	1162	1006	90	689	1031	839
1861	533	672	684	1891	671	1108	845
62	1128	1315	847	92	991	1193	1087
63	789	1114	863	93	580	862	913
64	790	880	1208	94	563	838	1007
65	619	809	732	95	956	863	891
66	731	861	1065	96	1186	1310	997
67	862	985	1093	97	785	935	960
68	913	973	785	98	983	1361	987
69	1083	835	994	99	589	881	887
70	698	721	1143	1900	993	1122	910

Tabelle *B*.

**Jährliche Niederschlagsmengen in Procenten des 100jährigen Mittels.
Mailand 1037, Padua 832, Klagenfurt 971.**

	Mailand	Padua	Klagenfurt		Mailand	Padua	Klagenfurt
1801	115	109	—	1821	110	81	91
02	86	133	—	22	85	58	60
03	79	137	—	23	104	94	89
04	109	136	—	24	97	92	77
05	81	107	—	25	79	80	103
06	109	119	—	26	124	119	86
07	95	142	—	27	107	101	101
08	71	89	—	28	67	74	77
09	98	131	—	29	92	96	117
10	130	117	—	30	85	72	115
1811	87	80	—	1831	89	95	109
12	103	124	—	32	99	81	76
13	115	88	111	33	107	114	101
14	152	100	100	34	77	60	42
15	99	86	114	35	89	110	64
16	86	67	117	36	110	115	106
17	65	70	86	37	112	114	81
18	93	100	56	38	123	99	111
19	106	104	86	39	130	97	98
20	92	62	127	40	87	74	103

	Mailand	Padua	Klagen-furt		Mailand	Padua	Klagen-furt
1841	93	86	91	1871	62	86	90
42	131	84	99	72	151	131	131
43	114	91	109	73	102	110	94
44	111	112	134	74	66	87	121
45	131	152	121	75	101	99	83
46	129	115	116	76	113	124	151
47	88	90	114	77	85	117	92
48	119	101	113	78	95	107	143
49	95	82	112	79	97	102	115
50	116	114	126	80	97	90	117
1851	131	124	127	1881	106	82	103
52	106	90	94	82	122	98	133
53	98	124	92	83	84	84	75
54	73	86	80	84	77	92	92
55	118	137	95	85	113	107	121
56	103	122	105	86	118	100	105
57	74	78	54	87	96	109	106
58	98	97	87	88	112	78	113
59	112	97	99	89	114	116	112
60	112	106	104	90	99	83	86
1861	65	64	71	1891	107	81	87
62	127	136	87	92	115	119	112
63	107	95	89	93	83	70	94
64	95	95	124	94	81	68	103
65	78	74	75	95	83	115	92
66	83	88	110	96	126	143	103
67	95	104	113	97	90	94	99
68	94	109	81	98	131	118	102
69	80	130	102	99	85	71	91
70	69	84	118	1900	108	119	94

Tabelle C.

Jahressummen des Regenfalles in Abweichungen vom Gesammtmittel in Centimetern.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
					I. Padua						
1720	—	—	—	—	—	—10	—23	30	49	6	
30	1	+ 0	— 5	2	10	— 9	— 7	—26	—15	—22	
40	—29	—25	13	—14	5	10	20	—21	19	6	
50	— 4	21	10	14	—16	24	13	6	25	6	
60	3	27	—29	9	21	12	— 2	4	—10	20	
70	51	20	70	27	—10	6	8	32	+ 0	— 4	
80	— 5	8	— 4	— 4	— 7	6	18	— 1	— 4	—11	
90	— 26	—18	—19	9	18	4	— 2	—14	1	26	
1800	14	4	25	28	27	3	13	32	—12	23	
10	11	—20	17	—13	— 2	—14	—31	—20	— 3	+ 0	
20	—35	—19	—38*	— 8	—10	—20	13	— 2	—24	— 6	
30	—26	— 7	—19	9	—36	5	10	9	— 4	— 5	
40	—25	—15	—16	—11	7	40	10	—11	— 2	—18	
50	9	17	11	17	—14	28	15	—21	— 6	— 5	
60	2	— 33	27	— 7	— 7	—24	—13	+ 0	5	22	
70	—16	—15	23	6	—14	— 4	17	11	3	— 1	
80	— 11	—18	— 5	—16	— 9	3	— 3	5	—21	10	
90	—17	—19	13	—28	—30	10	33	— 8	12	—27	13
					II. Klagenfurt						
1810	—	—	—	11	— 1	13	16	—13	—43	—14	
20	26	— 9	—39	— 9	23	3	—14	1	—23	17	
30	15	9	—23	1	—56*	—35	6	—18	11	— 2	
40	3	— 9	— 1	8	33	19	16	14	12	11	
50	25	26	— 6	— 8	—20	— 5	5	44	—13	— 0	
60	4	—29	—12	—11	24	24	9	12	—19	2	
70	17	—10	30	— 6	20	—17	50	— 8	41	14	
80	16	3	32	—25	— 7	21	5	6	12	12	
90	— 13	—13	12	— 6	4	— 8	3	— 1	2	— 8	— 6
					III. Mailand						
1800	—13	16	—15	— 22	9	—20	10	— 5	—30	— 2	
10	31	—13	3	15	54	— 1	—15	—37	— 7	7	
20	— 8	11	—16	4	— 3	—21	25	8	— 34	— 8	
30	15	—11	— 1	7	—23	—12	11	12	24	31	
40	—14	— 7	32	14	11	32	30	—12	20	— 5	
50	17	33	6	— 2	—28	19	3	—27	— 2	12	
60	13	—37	28	8	—16	—23	—18	— 5	— 6	—20	
70	—32	—40*	53	2	—36	1	13	—15	— 6	— 3	
80	— 3	6	23	—17	—24	13	18	— 4	12	14	
90	— 1	7	16	—18	—20	—17	27	—10	32	—16	9

Die Entfernung der Orte Mailand—Padua (215 *km*) und Padua—Klagenfurt (235 *km*) ist schon zu groß, als dass jederzeit eine Übereinstimmung des Sinnes der gleichzeitigen Schwankungen des Regenfalles oder der Zeichen der Abweichungen vom Mittel erwartet werden könnte. Klagenfurt liegt in einer anderen Regenprovinz als Padua und Mailand, und auch diese beiden letzteren Orte stimmen nicht mehr völlig in Bezug auf die jährliche Regenvertheilung überein, wie folgende Zahlen erkennen lassen:

Monatssummen des Regenfalles in Procenten der Jahresmenge.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
Mailand (1764—1884)											
6·1	5·8*	6·5	8·5	10·0	8·2	7·1*	8·4	9·2	11·8	11·0	7·4
Padua (1725—1900)											
6·4	5·5*	7·1	8·8	9·9	10·0	7·5*	7·6	8·8	11·2	9·9	7·3
Klagenfurt (1813—1900)											
3·9	3·5*	5·3	6·7	9·7	11·4	**12·9**	12·4	10·2	10·6	7·8	5·6

Die Tabelle *B*, welche die Regensummen in Procenten des 100jährigen Mittels (Klagenfurt 88 Jahre) enthält, lässt die Übereinstimmung und Divergenz der regenreichen und regenärmeren Jahre am besten überblicken.

Mailand und Padua stimmen in 69 Jahren überein, und zwar waren in 32 Fällen beide Stationen zu regenreich, in 37 Fällen zu regenarm, in 31 Fällen (oder Procenten) bestanden Verschiedenheiten im Sinne des Charakters der Jahrgänge.

Padua und Klagenfurt stimmen nur in 60% aller Fälle überein (28% bei positiven, 32% bei negativen Abweichungen), in 40% der Fälle (in 35 Jahren) bestand eine Verschiedenheit im Sinne der Anomalie. Der größeren Entfernung entsprechend stimmen demnach Klagenfurt—Padua um 9% der Fälle seltener überein als Mailand—Padua. Das Product aus der Häufigkeit der gleichsinnigen Abweichungen in die Entfernung ist für beide Stationspaare ziemlich das gleiche. Allgemeine Trockenzeiten und nasse Perioden, an allen drei Stationen gleichzeitg auftretend, waren:

Gleichzeitig trockene und nasse Jahrgänge und deren mittlere Abweichung zu Mailand, Padua und Klagenfurt in den 88 Jahrgängen 1813—1900.

Trockene Jahrgänge		Nasse Jahrgänge	
Jahr	Mittlere Abweichung	Jahr	Mittlere Abweichung
1817	— 26%	1827	30%
22	— 32	33	7
24	— 11	36	10
28	— 27	44	29
32	— 15	45	35
34	— 40	46	20
41	— 10	48	11
54	— 20	50	19
57	— 31	51	27
58	— 6	56	10
61	— 33	60	7
65	— 24	72	38
71	— 21	76	29
83	— 19	85	14
84	— 13	86	8
90	— 11	89	14
93	— 18	92	15
97	— 6	96	24
99	— 18	98	17

Besonders bemerkenswert ist die kaum unterbrochene Folge nasser Jahre von 1844—1851 mit sehr großem Überschusse über die mittlere Regenmenge. Zu Klagenfurt währte die nasse Periode ununterbrochen von 1843—1851 inclusive, 9 Jahrgänge hindurch. Auch die Jahre 1885—1889 waren constant nass.

Eine ähnliche Folge trockener Jahre ist nicht vorhanden. Durch besondere Trockenheit zeichnete sich das Jahr 1834 aus mit 40% Deficit von Mailand bis Klagenfurt. In 43% aller Fälle hatten die Jahrgänge von Mailand bis Klagenfurt den gleichen Charakter in Bezug auf Regenmangel oder Regenüberfluss.

Den Tabelle *B* und *C* (Abweichungen der Jahressummen) lässt sich Folgendes entnehmen.

Zunächst die Extreme.

Padua. Das trockenste Jahr in der 176jährigen Periode war das Jahr 1822 mit 480 *mm* oder 55·6% des 176jährigen Mittels (57·7% des 100jährigen Mittels), das regenreichste 1772 mit 1563 *mm* oder 181·2%; Verhältnis des Maximums zum Minimum $3^1/_4$. Nimmt man das meteorologische Jahr, so ergibt sich als trockenstes das Jahr 1820 mit 56%, das nasseste bleibt 1772 mit 192%. Die Gegensätze werden noch größer.

Klagenfurt. Trockenstes Jahr 1834 mit 410 *mm* oder 42·3%, nassestes 1876 mit 1469 oder 151·3%; Verhältnis des Maximums zum Minimum 3·6. Von den meteorologischen Jahren war gleichfalls 1834 das trockenste mit 411 *mm*, das regenreichste aber 1878 mit 1386 *mm* oder 141·2%. Hier geht das trockenste Jahr tiefer unter den Mittelwert hinab, als sich das nasseste darüber erhebt, was sonst zumeist der Fall ist.

Mailand. Das trockenste Jahr der ganzen 137jährigen Beobachtungsreihe war das Jahr 1871 mit 639 *mm* oder 61·7%, die nassesten waren 1814 mit 1578 *mm* (152·2%) und 1872 mit 1570 *mm* (151·4%); Verhältnis des Maximums zum Minimum 2·47, also viel kleiner als an den beiden anderen Orten.

Zusammenstellung der Resultate.

	Zahl der Jahrgänge	trockenstes Jahr	nassestes Jahr	Verhältnis
Padua	176	56%	181%	3·25
	100	58	152	2·6
Klagenfurt	88	42	151	3·6
Mailand	137[1]	62	152	2·5

Am extremsten ist demnach Klagenfurt.

Die Häufigkeit trockener und nasser Jahrgänge nach gewissen Abstufungen des Grades der Abweichung vom Mittel ergab folgende Zahlen (Procente der Gesammtzahl der Jahrgänge):

Procentische Häufigkeit gewisser Jahressummen, letztere in Procenten des Gesammtmittels ausgedrückt.

Jahressumme in Procenten											
51—60	61—70	71—80	81—90	91—100	101—110	111—120	121—130	131—140	141—150	151—160	161—170
Padua *A.* Ganze Reihe											
2·8	5·7	11·4	14·8	**21·0**	14·8	12·5	8·5	5·7	1·7	0·0	1·1
B. 1801—1900											
2	6	9	20	**18**	15	14	6	7	2	1	—
Mailand 1801—1900											
—	6	8	20	**19**	20	13	8	4	0	2	—
Klagenfurt 1813—1900											
4·5	1·1	7·9	14·8	19·6	**20·5**	18·2	10·2	1·1	1·1	1·0	—

[1] Die Extreme fallen in die letzten 100 Jahre.

Die Übereinstimmung in der Häufigkeit der trockenen und nassen Jahre ist sehr groß, wobei allerdings zu beachten ist, dass die letzten drei Reihen nahe dem gleichen Zeitraume entnommen sind. Die trockenen Jahre sind häufiger als die nassen, wie zu erwarten. In der langen Reihe von Padua (176 Jahre) ist die Vertheilung der trockenen und nassen Jahre nach ihrer Intensität am meisten symmetrisch. Die größte Häufigkeit haben die Jahre, welche 0—9% unter dem Mittelwerte liegen, nur Klagenfurt macht da eine Ausnahme.

Übersichtlicher wird die Zusammenstellung, wenn wir größere Gruppen bilden und etwa unterscheiden:

Ort	Überaus trocken unter 50%	sehr trocken 51—70%	trocken 71—90%	fast normal 91—110%	nass 111—130%	sehr nass 131—150%	überaus nass über 150%
Padua (I) ...	0	9	26	36	21	7	1
» (II) ..	0	8	29	33	20	9	1
Mailand	0	6	28	39	21	4	2
Klagenfurt ..	1	5	23	40	28	2	1

Man kann daher im allgemeinen das Ergebnis in folgendem zusammenfassen (Padua I mit doppeltem Gewichte):

Unter 100 Jahren gibt es durchschnittlich 8 sehr trockene (mit 51—70% der normalen Regenmenge), 26 trockene (71 bis 90%), 37 nahezu normale (91—110%), 22 nasse (111—130%), 6 sehr nasse (131—150%) und 1 überaus nasses Jahr (über 150%). Auf 34% zu trockene kommen 29% zu nasse Jahre; letztere sind also etwas seltener.

Eine weitere theoretisch wie praktisch interessante Aufgabe ist die Constatierung der längeren Folgen zu trockener und zu nasser Jahre und die Beträge der Abweichung derselben. Die folgende Tabelle beantwortet die hierauf bezüglichen Fragen.

Trockenste und nasseste Jahre in langen Zeiträumen.

I.

	Trockenstes Jahr	Anzahl der sich unmittelbar folgenden trockensten Jahre							
		2	3	4	5	6	7	8	9
Padua *A.* 175 meteorologische Jahre									
Procente....	56	63	63	71	71	72	—	—	—
Jahr	1820	1816—1817[1]	1820—1822	1838—1841	1837—1841	1820—1825	—	—	—
B. 100 bürgerliche Jahre									
Procente....	58	69	67	74	77	78	—	—	—
Jahr	1822	1893—1894	1820—1822	1820—1823	1820—1824	1820—1825	—	—	—
Mailand 100 Jahre									
Procente....	62	65	70	76	80	80	80	82	—
Jahr	1871	1870—1871	1869—1871	1868—1871	1867—1871	1866—1871	1875—1871	1864—1871	—
Klagenfurt 88 Jahre									
Procente....	42	53	75	79	—	—	—	—	—
Jahr	1834	1834—1835	1822—1824	1821—1824	—	—	—	—	—

II.

	Nassestes Jahr	Anzahl der sich unmittelbar folgenden nassesten Jahre							
		2	3	4	5	6	7	8	9
Padua A. 175 meteorologische Jahre									
Procente....	192	165	131	148	144	123	122	122	123
Jahr	1772	1772—1773[2]	1727—1729[3]	1770—1773[4]	1769—1773[5]	1799—1804	1799—1805	1799—1806	1799—1807
B. 100 bürgerliche Jahre									
Procente....	152	136	135	129	124	123	126	—	—
Jahr	1845	1803—1804	1802—1804	1801—1804	1801—1805	1801—1806	1801—1807	—	—
Mailand 100 Jahre									
Procente....	151	134	124	121	123	—	—	—	—
Jahr	1814 u. 1872	1813—1814[6]	1844—1846	1843—1846	1842—1846	—	—	—	—
Klagenfurt 88 Jahre									
Procente....	151	129	125	121	122	118	119	120	119
Jahr	1876	1878—1879	1878—1880	1844—1847	1878—1882	1844—1849	1844—1850	1844—1851	1843—1851

[1] 1740—1741 64%. [2] 140, 1728—1729, und 131, 1803—1804. [3] 129, 1802—1804. [4] 125, 1727—1730 und 1802—1805. [5] 126, 1803—1807. [6] 130, 1845—1846.

Man sieht, dass die Übereinstimmung der drei Stationen in Bezug auf die Größe der Abweichung längerer, ununterbrochener Folgen zu trockener und zu nasser Jahre eine sehr bemerkenswerte ist. Padua (175 meteorologische Jahre) hat natürlich etwas größere Extreme aufzuweisen. Es gibt da im Maximum sechs sich folgende Jahre mit einer mittleren Regenmenge von 72% (—28%) der normalen, und selbst neun sich folgende nasse Jahre mit 123% (also Abweichung 23%).

Aus den letzten 100 (respective 88) Jahrgängen ergibt sich im Mittel Folgendes:

Folgen zu trockener Jahre. Extreme.

Anzahl	1	2	3	4	5	6	7
Procente......	54	62	70	76	(78)	(79)	(80)
Abweichung...	—46	—38	—30	—24	—22	—21	—20

Folgen zu nasser Jahre. Extreme.

Anzahl	1	2	3	4	5	6	7
Procente......	151	133	128	124	123	(121)	(122)
Abweichung...	51	33	28	24	23	21	22

Während das trockenste Jahr durchschnittlich unter dem feuchtesten in Bezug auf Größe der Abweichung vom Normale zurückbleibt, weichen die ununterbrochenen Folgen von 2 und 3 zu trockenen Jahrgängen etwas stärker vom Mittel ab, als die gleichen Folgen nasser; die längeren Folgen trockener und nasser Jahre kommen sich in Bezug auf Größe der Anomalie fast gleich.

Veränderlichkeit der einzelnen Jahressummen, Erhaltungstendenz einer bestehenden Abweichung.

Padua. Die mittleren Abweichungen wurden doppelt gerechnet, aus den Abweichungen der einzelnen Jahressummen in Millimeter und aus den in Procenten des Gesammtmittels ausgedrückten Niederschlagsmengen der meteorologischen Jahre.

Die mittlere Veränderlichkeit der Jahressummen [$v = (\Sigma\varepsilon):n$] aus 176 Jahren beträgt 146 *mm* oder 16·9% — aus den letzten 105 Jahrgängen (oder drei Brückner'schen Perioden, siehe später), die ganz homogen scheinen, 143 *mm* oder 17·1%, also nicht besser. Dies spricht dafür, dass man die ganze Reihe zu den Untersuchungen verwenden kann.

176 meteorologische Jahre, in Procenten ausgedrückt, geben $v = 17·25$%, die 100 letzten Jahre desgleichen 17·16%. Die mittlere Veränderlichkeit der Jahressummen beträgt also für Padua 17%.

Mailand. Die 100 bürgerlichen Jahre 1801—1900 geben als mittlere Abweichung 160 *mm*, die Tabelle der Procente desgleichen $v = 15·36$%.

Klagenfurt. 88 Jahrgänge geben als mittlere Abweichung 148 *mm* oder 15·2%, die Procente geben $v = 15·25$%.

Die Veränderlichkeit der Jahresmengen der Niederschläge dieser letzten beiden Orte ist demnach die gleiche, 15·3%, und etwas kleiner als die von Padua. Dies stimmt damit überein, dass regenreichere Orte relativ kleinere mittlere Schwankungen der Regenmengen haben, als regenärmere.

Unterschied der positiven und negativen Abweichungen der Jahressummen nach Zahl und Größe.

Padua. 176 bürgerliche Jahre hatten 87 positive und 89 negative Abweichungen, deren mittlere Größe war +148 und —144 *mm* oder 17·2 und 16·7%. Die in Procenten ausgedrückten 176 (meteorologischen) Jahressummen geben 78 positive, 89 negative Abweichungen und 9 normale Jahre (Abweichung unter der Schwelle von 1%). Der Unterschied ist hier größer. Mittlere Größe der positiven Abweichungen 19·4%, der negativen 17·2%. Die letzten 100 bürgerlichen Jahre in Procenten geben 45 positive Abweichungen, Mittel 19%, 52 negative Abweichungen, Mittel 16·6% und 3 normale Jahre.

Mailand. 100 bürgerliche Jahre liefern 47 positive und 53 negative Abweichungen, das Mittel der positiven Abweichungen ist 170 *mm*, das der negativen 151 *mm*, die Procente geben +16·4 und —14·4%.

Die positiven Abweichungen sind an beiden Orten weniger zahlreich, der mittlere Betrag derselben ist deshalb natürlich größer.

Klagenfurt nacht eine Ausnahme, es hat mehr nasse als trockene Jahre. 46 nasse Jahre geben als mittlere Abweichung 142·0 *mm*, 42 trockene 154·5 *mm* oder 14·6 und 15·9%. Die Tabelle der Jahressummen in Procenten gibt 46 positive mit 14·7% und 41 negative mit 16·3%, ein normales Jahr.

Im allgemeinen kann man aber doch sagen, dass die positiven Abweichungen weniger zahlreich, aber von größerem Betrage sind.

Nebenbei mag auf Grund des ohnehin schon vorhandenen Materiales von Abweichungen nochmals die Frage beantwortet werden, ob man trotz der verschiedenen Zahl der positiven und negativen Abweichungen und deren verschiedenen Größe, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dieselben auwenden darf. Wir wenden das Kriterium an, das Cornu dafür aufgestellt. Für zufällige Fehler (oder Abweichungen) gilt der Satz, wenn ε die einzelnen Abweichungen und n deren Anzahl bezeichnen

$$2\left|\Sigma\frac{\varepsilon^2}{n-1}\right| : \left(\frac{\Sigma\varepsilon}{n}\right) = \pi.$$

Padua. 176 Jahre:

$$\frac{\Sigma\varepsilon}{n} = 17\cdot25 = v, \quad \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n}} = 21\cdot9 = E, \quad 2E^2 : v = 3\cdot23;$$

die letzten 100 Jahre geben

$$E = 20\cdot9, \quad v = 17\cdot16, \quad 2E^2 : v^2 = 2\cdot97; \quad \text{Mittel } 3\cdot10.$$

Mailand. 100 Jahre:

$$E = 19\cdot0, \quad v = 15\cdot4, \quad 2E^2 : v^2 = 3\cdot05.$$

Klagenfurt. 88 Jahre:

$$E = 19\cdot6, \quad v = 15\cdot3, \quad 2E^2 : v^2 = 3\cdot28.$$

Im Mittel der drei Stationen ergibt sich demnach $2E^2 : v^2$, das gleich $\pi = 3\cdot141$ sein soll, zu 3·14, wobei aber auf die genaue Übereinstimmung dieses Mittels kein Gewicht gelegt werden darf.

Die Erhaltungstendenz ist bei den Abweichungen der Jahressummen der Niederschlagsmenge nicht mehr so groß, wie dies für kürzere Zeiträume der Fall ist.

Zu Padua ist die Wahrscheinlichkeit eines nassen Jahres $87:176 = 0{\cdot}49$, die eines trockenen $89:176 = 0{\cdot}51$, die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Wechsels beträgt daher $2 \times 0{\cdot}49 \times 0{\cdot}51 = 0{\cdot}50$. Wir zählen aber in der Tabelle *C* nur 73 Zeichenwechsel (102 Zeichenfolgen), die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels ist demnach nur 0·415, also erheblich kleiner, als sie dem Zufalle entsprechen würde.

Für Mailand finden wir die Wahrscheinlichkeit eines nassen Jahres 0·47, eines trockenen Jahres 0·53, die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Zeichenwechsels ist demnach 0·498. Die Tabelle *C* gibt 51 Zeichenwechsel, Wahrscheinlichkeit 0·510 also größer.

Ebenso verhält es sich in Klagenfurt. Wir zählen da 42 trockene und 46 nasse Jahre, Wahrscheinlichkeit 0·48 und 0·52, theoretische Wahrscheinlichkeit eines Zeichenwechsels 0·499, beobachtet wurden (Tabelle *C*) 51 Wechsel, Wahrscheinlichkeit somit 0·579, somit erheblich größer, als wenn sie vom Zufalle abhängen würde.

Das allgemeine Ergebnis ist demnach, dass für die Jahressummen der Niederschläge nur zu Padua eine Tendenz zu einer Erhaltung der bestehenden Abweichung zu constatieren war, dagegen ist zu Mailand und Klagenfurt die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels größer, als die der Erhaltung der bestehenden Abweichung.

Veränderlichkeit und langjährige Schwankungen der Mittel von je 5, 10, 20 und 30 Jahrgängen.

Wenn die Änderungen der Jahressummen der Niederschläge nur zufällige wären, und letztere keinen langjährigen cyclischen oder vielleicht sogar fortschreitenden Veränderungen unterliegen würden, so würden die vorhin berechneten Zahlen für die mittlere Veränderlichkeit gestatten, auch die wahrscheinlichen Fehler von 5-, 10-, 20-, etc. jährigen Mitteln des Regenfalles zu berechnen. Wir erhalten z. B.:

Padua; $v = 146$ *mm* oder rund $17^0/_0$; der wahrscheinliche Fehler eines 5-, 10-, 20-, 30- und 176jährigen Mittels berechnet sich daraus nach Fechner's Formel:

	n =						
	5	10	20	30	40	100	176
Wahrsch. Fehler..	±58	40	28	22	20	12	9 *mm*
Procente........	6·8	4·7	3·2	2·6	2·3	1·4	$1 \cdot 1^0/_0$

Für Mailand und Klagenfurt sind die wahrscheinlichen Fehler noch etwas kleiner, da $v = 15 \cdot 3^0/_0$ beträgt. Ein 5jähriges Mittel hat für Mailand und Klagenfurt einen wahrscheinlichen Fehler von $6 \cdot 1^0/_0$, ein 10jähriges von $4 \cdot 2^0/_0$, ein 20jähriges von $2 \cdot 9^0/_0$, ein 30jähriges von $2 \cdot 4^0/_0$ und ein 40jähriges von $2 \cdot 1^0/_0$.

Es ist aber nach dem oben Gesagten nicht zu erwarten, dass dies für Mittel aus sich unmittelbar folgenden 5, 10, 20 und 30 Jahrgängen genau der Fall sei; das wäre eigentlich nur bei aus langjährigen Reihen beliebig herausgegriffenen Jahren, die zu solchen Mitteln vereinigt würden, zu erwarten. Die in der Praxis vorkommenden Fälle sind aber fast stets von erster Art, man hat Mittel aus sich unmittelbar folgenden Jahrgängen. Die Fehlergrenzen solcher Mittel, namentlich jene aus kürzeren Reihen sich folgender Jahre müssen daher speciell untersucht werden.

Zu diesem Zwecke wurden für Padua, Klagenfurt und Mailand aus sich unmittelbar folgenden je 5, 10, 20, 30 und 40 Jahrgängen Reihen von Mittelwerten gebildet, indem stets das Anfangsjahr der Reihe weggelassen und dafür dem Endjahre das nächstfolgende Jahr angeschlossen und so die Reihe wieder completiert wurde. Die auf diese Weise entstandenen mehrjährigen Niederschlagsmittel finden sich zum Theile in den folgenden Tabellen in Form von Abweichungen vom Gesammtmittel zusammengestellt. Die Form der Abweichungen gestattet, die Änderungen viel schneller zu überblicken, als dies bei den Niederschlagsmengen selbst der Fall gewesen wäre. Für die 40jährigen Mittel und für Mailand überhaupt wurden nur die Procentzahlen dieser Berechnung unterzogen, weil dies viel weniger Zeit und Mühe in Anspruch nahm.

Mittlere jährliche Regenmengen von je 5, 10, 20 und 30 Jahrgängen.
Abweichungen vom Gesammtmittel (in Millimetern),
berechnet nach dem Schema $(a+b+c+d+e):5$, $(b+c+d+e+f):5$ etc., ebenso für 10, 20 und 30 Termen.

Tabelle I.

Padua.

A. Fünfjährige Mittel.

Das erste gilt für das mittlere Jahr 1727, das zweite für 1728 etc.

103	81	24	— 87	11	— 34
126	124	23	—178	60	— 9
173	81	15	—159	70	35
104	107	— 49	—154	88	32
10	62	—121	—194	38	25
17	— 11	—157	—171	— 26	51
— 2	59	—133	—190	— 11	37
— 17	78	— 74	—199	— 11	— 33
— 58	21	— 14	—219	27	— 65
— 92	87	19	—190	34	—102
—155	50	29	—127	73	—118
—196	49	14	— 54	70	— 89
—231	127	30	— 87	51	— 59
—154	171	51	— 79	5	— 40
—154	301	62	— 92	23	— 51
—101	376	140	—132	— 28	— 12
— 23	316	195	—166	—124	— 52
66	225	197	— 99	— 29	— 85
— 3	201	175	—159	— 32	— 69
64	125	192	— 96	— 36	— 83
63	73	207	— 62	— 89	—162
38	86	126	— 7	— 50	—109
42	65	118	— 32	—103	— 6
104	65	134	29	— 78	— 47
94	— 8	68	— 30	— 19	34
51	— 16	37	— 79	— 4	39
107	— 23	35	—130	— 7	46
91	— 2	— 15	—144	38	
59	17	— 66	—119	39	

Mittel... 860·6

B. Zehnjährige Mittel.

Das erste gilt für 1729—1730 etc.

72	52	— 14	— 60	— 17	— 19
74	47	— 40	— 82	— 37	1
90	83	— 55	—128	— 35	31
35	71	— 43	—127	— 48	42
— 29	56	— 28	—183	— 14	40
— 57	67	— 30	—187	17	17
— 87	32	— 49	—195	22	21
—112	46	— 62	—200	50	19
— 94	94	— 58	—157	29	— 9
—111	88	— 20	—130	11	— 31
—116	187	20	—151	17	— 26
— 97	205	43	—157	7	— 19
— 61	174	87	—149	4	— 38
— 57	168	106	—137	17	— 45
— 23	178	115	—118	30	— 69
5	206	115	—101	— 20	— 51
30	217	129	—127	19	— 63
76	193	175	—102	— 6	— 65
73	137	162	—105	1	— 47
101	125	159	— 94	— 51	— 59
81	51	156	— 74	— 79	— 79
95	20	132	— 63	— 58	— 73
88	23	124	— 71	— 48	— 38
73	34	83	— 79	— 20	— 50
79	53	54	— 75	— 39	— 17
79	20	36	— 95	— 21	— 54
86	16	— 8	— 52	— 25	— 24
91	8	— 69	— 16	— 12	

Mittel... **849**

C. Je zwanzigjährige Mittel.

— 26	101	— 2	— 28	— 49	— 23
— 16	101	— 25	— 47	— 55	— 39
6	131	— 25	— 65	— 37	— 38
— 20	137	— 10	— 76	— 25	— 23
— 40	140	— 1	— 76	— 21	— 19
— 40	131	— 3	— 98	— 17	— 17
— 43	78	12	—104	— 6	— 24
— 32	147	28	—119	5	— 16
— 25	135	45	—138	8	— 32
— 19	131	43	—131	— 7	— 36
— 32	127	41	—149	— 8	— 37
— 15	117	58	—138	— 8	— 23
— 5	130	53	—155	6	— 18
4	124	70	—145	— 3	— 16
24	110	89	—125	18	— 29
43	107	88	—106	20	— 35
54	117	106	—106	13	— 36
79	114	95	—109	— 20	— 38
58	117	85	—104	— 36	— 43
70	101	76	—102	— 30	— 59
78	63	62	— 91	— 27	— 67
79	44	54	— 92	— 6	— 61
68	— 1	52	— 84	— 19	— 53
81	— 10	39	— 54	— 35	— 62
67	4	15	— 55	— 18	— 57
74	3	3	— 60	— 23	— 70
					— 58

Mittel... 853·3

D. Dreißigjährige Mittel.

11	115	35	—131	— 13
22	109	28	—112	— 28
34	110	12	— 99	— 25
22	112	2	— 93	— 18
15	102	3	— 93	— 16
14	97	7	— 99	— 10
15	87	4	— 84	— 17
24	72	0	— 72	— 29
15	75	— 6	— 63	— 26
17	75	— 12	— 55	— 37
20	74	— 21	— 56	— 36
27	72	— 29	— 40	— 44
29	72	— 24	— 40	— 50
39	66	— 20	— 46	— 42
40	69	— 28	— 40	— 47
54	71	— 39	— 39	— 42
81	59	— 53	— 30	— 48
96	54	— 59	— 38	— 44
115	38	— 71	— 23	— 48
129	39	— 78	— 28	— 54
124	51	— 98	— 19	— 63
122	50	— 98	— 29	— 51
119	52	— 99	— 36	— 36
136	49	—107	— 39	— 39
130	44	—104	— 36	— 37
127	33	—113	— 27	— 53
127	39	—125	— 24	— 43
122	29	—124	— 24	
118	36	—134	— 11	
112	33	—134	— 6	

Mittel... 847

Tabelle II.

Klagenfurt.

A. Fünfjährige Mittel			*B.* Zehnjährige Mittel		
51	101	66	— 70	88	93
— 57	149	102	— 90	111	73
— 83	178	34	—112	146	133
— 57	185	153	—123	141	145
—107	142	78	—153	125	144
—159	154	172	—138	72	157
— 91	175	161	—118	48	159
—109	136	227	— 88	37	141
11	117	134	—100	— 21	113
—166	34	213	— 82	— 16	151
— 86	— 27	82	— 67	— 27	106
—113	— 68	38	— 56	— 49	120
— 35	—145	47	— 90	—104	90
— 11	—156	51	—128	—110	87
33	—117	— 2	—108	—114	58
— 15	—100	71	—127	— 70	42
33	—167	109	— 93	— 89	21
—113	—104	41	—112	— 85	40
—213	— 99	5	—124	— 28	51
—217	— 51	17	—141	— 34	22
—207	—106	— 19	—118	— 31	19
—187	— 30	— 35	—111	— 18	13
— 79	19	— 24	— 22	1	2
— 3	4	6	33	44	— 18
— 32	— 39	— 19	42	50	— 11
3	43	— 5	74	45	
— 3	5	— 29	75	53	
67	41	— 25			
Mittel... 973			Mittel... 988·6		

C. Zwanzigjährige Mittel			*D.* Dreißigjährige Mittel	
— 58	37	82	— 77	13
— 63	25	75	— 78	8
— 91	26	60	— 66	4
—115	26	82	— 64	— 8
—120	16	80	— 65	3
—123	10	77	— 56	— 4
— 96	1	92	— 37	6
— 90	— 4	97	— 29	7
—102	— 21	81	— 29	4
—102	— 28	80	— 18	— 4
— 83	— 29	71	— 7	9
— 74	— 44	71	— 6	3
— 45	— 49	62	— 5	8
— 37	— 53	67	— 8	16
— 23	— 71	43	— 2	16
— 16	— 53	46	— 16	33
1	— 52	26	— 13	41
— 1	— 32	15	— 19	45
4	— 38	4	— 23	40
13	— 16		— 35	45
22	3		— 31	53
17	30		— 35	55
35	37		— 9	48
50	44		— 5	53
50	60		— 4	51
			6	47
			— 3	53
			— 2	50
			3	42
			3	
Mittel... 978·8			Mittel... 981	

Tabelle III.

Abweichungen der 5-, 10-, 20- und 30jährigen Mittel vom 100jährigen Mittel. Procente.

Mailand.

A. Fünfjährige Mittel				*B.* Zehnjährige Mittel			
— 6	— 6	9	— 7	— 5	—10	6	— 5
— 7	— 5	5	— 8	— 8	— 7	4	— 2
— 5	—12	5	— 2	— 6	— 6	2	2
— 7	—14	0	— 3	— 2	— 8	4	— 1
— 9	—16	— 7	— 4	2	— 7	3	— 2
1	— 9	— 7	3	4	— 2	— 3	— 1
— 4	— 8	1	1	2	2	— 1	0
— 2	— 4	0	— 3	— 4	2	0	0
7	— 1	— 8	1	— 2	3	2	1
17	2	3	3	— 1	6	— 2	3
11	13	5	— 2	— 5	7	— 4	5
11	12	1	3	— 3	10	— 2	5
3	9	— 6	11	— 5	14	— 2	5
— 1	13	— 2	8	— 6	16	— 5	4
—10	11	— 8	6	—11	14	—10	4
—12	7	—11	9	—13	14	—10	5
— 7	16	—14	4	—10	11	— 8	2
— 3	23	—16	— 3	— 5	14	— 8	3
— 1	15	—20	— 6	— 8	17	—11	2
— 2	16	— 9	— 2	— 9	15	— 9	4
— 5	12	— 7	— 7	—10	13	— 6	1
— 2	9	—10	2	—12	10	— 7	2
2	10	— 4	3	—11	8	— 7	
— 5	13	7	8				

C. Zwanzigjährige Mittel			*D.* Dreißigjährige Mittel		
— 1	3	— 6	— 2	5	— 3
— 2	6	— 6	— 3	6	— 3
— 2	6	— 6	— 2	5	— 3
— 1	7	— 5	— 1	4	— 4
— 1	10	— 5	— 2	5	— 4
— 1	10	— 6	— 2	6	— 4
0	9	— 7	— 2	7	— 4
0	9	— 5	— 1	3	— 4
0	11	— 5	0	4	— 4
0	10	— 6	1	4	— 3
— 3	8	— 7	0	4	— 3
— 3	7	— 5	0	4	— 2
— 3	6	— 4	1	3	— 3
— 3	8	— 4	1	2	— 2
— 7	6	— 3	0	1	— 2
— 7	6	— 1	1	3	— 3
— 6	6	0	2	2	— 3
— 4	5	3	3	1	— 3
— 2	2	1	4	1	— 2
— 1	0	0	4	1	— 2
— 1	0	1	4	0	— 1
— 2	— 1	0	5	— 1	0
0	— 2	0	6	— 2	1
1	— 4	1	6	— 2	
1	— 8	2			
4	— 5	2			
4	— 5	2			

Diese Mittelwerte haben, abgesehen von dem Zwecke, dem sie hier zunächst dienen sollen, noch eine andere Bedeutung, die für manche Untersuchungen noch nützlich werden könnte. Sie geben die »Bilanz« der Niederschlagsmengen für 10, 20 und 30 Jahrgänge, den Summationseffect der Regenmenge in den entsprechenden Perioden. Sie würden sich daher besonders nützlich erweisen für Untersuchungen über die Ursache der Gletscherschwankungen, welche ja als ein Summationseffect der Niederschläge vieler vorausgegangener Jahre im Firngebiete derselben angesehen werden müssen (soweit nicht auch die Temperatursummen eine Rolle spielen).

Nehmen wir z. B. die Tabelle für Klagenfurt und beachten die Bedeutung der letzten Ziffern in den 10-, 20jährigen Mitteln.

Die letzte Zahl, —11 *mm*, in der Reihe der 10jährigen Mittel sagt, dass sich in den letzten 10 Jahren ein Niederschlags-Deficit von 110 *mm* angehäuft hat, wogegen die letzten 20 Jahren einen Überschuss von 80 *mm*, die letzten 30 Jahre aber einen solchen von 1260 *mm* aufzuweisen haben, gegenüber einer 10-, 20- und 30jährigen Summe von jährlich 971 *mm*, wie sie aus 88jährigen Aufzeichnungen sich ergibt. Es lassen sich natürlich auch die ganzen Niederschlagssummen selbst jederzeit leicht wieder herstellen. Je nachdem also z. B. die Gletscher von einer 5- und 10jährigen oder von einer 20jährigen Summation der Niederschläge im Firngebiete abhängen würden, müssten sie im ersten Falle im Jahre 1900 einen Rückgang, im letzteren ein Vorrücken gezeigt haben.

Ich meine nicht, dass dies wirklich der Fall hätte sein müssen, denn man wird zu derartigen Untersuchungen wohl nicht die Jahressummen der Niederschläge, sondern bloß jene des Winterhalbjahres verwenden dürfen (die Tabellen am Schlusse würden auch zu solchen Berechnungen das nöthige Materiale liefern). Es soll damit nur auf eine Methode hingewiesen werden, welche zur Beantwortung solcher Fragen die geeignetste sein dürfte, da das Vorrücken oder Rückschreiten der Gletscher sicherlich ein Summationseffect der Niederschlagsverhältnisse längerer Reihen von Jahrgängen ist, der in solchen Mittelwerten (besser vielleicht in den Summen

selbst) wie die obigen, am übersichtlichsten zum Ausdrucke kommt.[1]

Berechnet man aus den Abweichungen, die in Tabelle I bis III enthalten sind, die mittleren Schwankungen oder die mittlere Veränderlichkeit der 5-, 10-, 20- und 30jährigen Mittel, so findet man:

	Veränderlichkeit der Mittel von je				
	$n = 5$	10	20	30	40 Jahren[2]
Padua (176)......	83	71	57	21	20 *mm*[3]
	9·6	8·4	6·6	2·5	2·39%
Klagenfurt (88)...	83	80	50	26	21 *mm*
	9·5	8·1	5·2	2·6	2·55%
Mailand (100)....	7·0	5·9	3·9	2·7	1·96%

Die Veränderlichkeit der je 30jährigen Mittel für Padua aus 176 Jahren ergab sich als nicht kleiner wie jene der je 20jährigen Mittel. Es wurden deshalb aus den in Procenten ausgedrückten Jahressummen der letzten 100 Jahre je 30jährige Mittel berechnet. Dieselben ergeben eine mittlere Veränderlichkeit von 2·5% in völliger Übereinstimmung mit Klagenfurt und Mailand. Es scheint demnach in den vorausgegangenen 76 Jahren (vor 1801) die Ursache der großen Veränderlichkeit der 30jährigen Mittel von Padua zu liegen.

Nehmen wir die mittlere Veränderlichkeit der 5-, 10-, 20, 30 und 40jährigen Mittel von Klagenfurt und Mailand und vergleichen sie mit der theoretischen Veränderlichkeit, die im Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungsjahre abnimmt, so erhalten wir folgenden Vergleich:

---

[1] Leider fehlen langjährige Reihen von Niederschlagsmessungen aus jenen Höhen, die dem Nährgebiete der Gletscher entsprechen, und selbst jene aus geringeren Höhen sind zu wenig homogen, um frühere und neuere Zeiten richtig vergleichen zu können.

[2] Letztere aus 1801—1900. Die zugrunde liegenden Zahlen (Procente) sind nicht abgedruckt worden.

[3] Die entsprechenden Mittel für Padua sind 861, 849, 853 und 847 *mm*, für Klagenfurt 973, 989, 979 und 981 *mm*. Mittels derselben wurden die Procente berechnet.

	Mittlere Veränderlichkeit der Mittel aus je					
	$n = 1$	5	10	20	30	40 Jahre
Mittleres v	15·3	8·2	7·0	4·5	2·6	2·3
$15·3 : \sqrt{n}$	15·3	6·8	4·8	3·4	2·8	2·4

Die beobachtete Veränderlichkeit ist für Mittel aus 5, 10 und 20 Jahren etwas größer als die theoretische, kommt aber schon bei den 30jährigen Mitteln den letzteren gleich; namentlich die Mittel von Mailand aus den 100jährigen Aufzeichnungen berechnet stimmen gut mit den theoretischen Werten. Die wahrscheinlichen Fehler sind im selben Verhältnisse, wie die Werte von v etwas größer als die theoretischen. Im ganzen aber kann man wohl sagen, dass die Schwankungen der Jahressummen des Niederschlages in sehr langen Zeiträumen den Charakter von zufälligen Abweichungen annehmen.

Wir wollen nun auch die absolute Veränderlichkeit der 5-, 10-, 20-, 30- und 40jährigen Mittel unseren Tabellen entnehmen. Es wird hier aber vorzuziehen sein, die Regenmengen selbst und nicht die Abweichungen zu betrachten.

Absolute Veränderlichkeit von je 5-, 10-, 20-, 30- und 40jährigen Mitteln.

	Jahre					
	1	5	10	20	30	40[1]
Padua 176 Jahre						
Maximum ...	1563	1237	1066	1000	983	889
Minimum	480	630	649	698	713	804
Verhältnis ...	3·25	1·96	1·64	1·43	1·38	1·11
Klagenfurt						
Maximum ...	1469	1200	1148	1076	1036	1026
Minimum	410	756	836	856	903	937
Verhältnis ...	3·58	1·58	1·37	1·26	1·15	1·09
Mailand						
Maximum ...	1578	1276	1203	1151	1110	1074
Minimum	639	830	902	964	990	999
Verhältnis ...	2·47	1·54	1·33	1·19	1·12	1·08

[1] Aus 100 Jahren.

Die Verhältniszahlen von Klagenfurt und Mailand, die der gleichen Periode entnommen sind, stimmen mit Ausnahme des Jahres 1834 (410), das ganz exceptionell trocken war, gut überein. Nimmt man das nächst trockene 1857 mit 529, so wird das Verhältnis 2·78. Als mittlere Verhältniszahlen der Extreme darf man daher ansetzen:

	Jahre					
	1	5	10	20	30	40
Max.:Min.....	2·62	1·56	1·35	1·22	1·13	1·08

Drückt man die Maxima und Minima in Procenten der Jahresmenge aus, so erhält man folgende Reihe:

Absolute Veränderlichkeit (in Procenten) der Mittel von je 1, 5, 10, 20, 30 und 40 Jahren.

	Jahre					
	1	5	10	20	30	40
Maxima						
Klagenfurt	151	124	118	111	107	105·6
Mailand	152	123	116	111	107	103·6
Minima						
Klagenfurt	54	78	86	88	93	96·5
Mailand	62	80	89	93	95	96·3

Die absoluten Maxima stimmen, wie man sieht, vollkommen überein, die Minima gehen in Mailand nicht so tief herab wie in Klagenfurt, der Unterschied ist aber nur bei den 20jährigen Mitteln erheblich.

Man kann auch fragen, inwieweit die Abweichungen der je 30- und 40jährigen Mittel der Periode 1801—1900 an den drei Orten Mailand, Padua und Klagenfurt übereinstimmen. Um

eine größere Übersichtlichkeit zu erzielen, habe ich je 5 Zahlen in ein Mittel vereinigt, aber natürlich so, dass die Jahrgänge correspondieren. Die Reihe schließt mit dem 30jährigen Mittel 1871—1900.

Gleichzeitige Abweichungen der 30jährigen Mittel (Procente).

	Mittlere Jahre											
	1825·5	1830·5	1835·5	1840·5	1845·5	1850·5	1855·5	1860·5	1865·5	1870·5	1875·5	1880·5
Mailand . .	0	3	6	5	4	2	0	— 3	— 4	— 3	— 3	— 1
Padua . . .	— 8	— 4	0	2	4	3	5	5	3	1	1	2
Klagenfurt	— 7	— 4	— 1	— 2	— 2	0	0	0	1	4	5	5

Einen ganz analogen Gang zeigen natürlich auch die 40jährigen Mittel; Mailand beginnt mit positiven und schließt mit negativen Abweichungen (Extreme 103·6 und 96·3%), Padua beginnt umgekehrt mit negativen und schließt mit positiven Abweichungen (Extreme 93·3 und 103·2%), bei Klagenfurt ist dasselbe der Fall (Extreme 96·5 und 105·6%). Die absolute Schwankung der je 40jährigen Mittel beträgt bei Mailand 7·3, bei Padua 9·9, bei Klagenfurt 9·1%, es liegen daher bei 40jährigen Mitteln die Extreme noch rund um 9% auseinander.

Die Reihen der obigen Abweichungen sind gegeneinander gleichsam um eine halbe Periode verschoben, Mailand und Klagenfurt haben einen fast entgegengesetzten Gang der Abweichungen.

Da die Zahlen der drei Reihen Mitteln entsprechen, welche um je 5 Jahre auseinanderliegen, so würden die Extreme in Mailand und Padua um circa 30 Jahre, jene von Klagenfurt aber um 50 Jahre voneinander abstehen. Es ist aber zu beachten, dass nach der Entstehung dieser Mittel eine 30jährige Periode hätte eliminiert werden müssen, es hätten nur die

Unregelmäßigkeiten einer solchen zurückbleiben können. Dasselbe gilt in Bezug auf die 5-, 10- und 20jährigen Mittel und entsprechenden, etwa vorhandenen Perioden von dieser Länge.

Ich glaube keine bestimmten Perioden in der Aufeinanderfolge der Abweichungen der 5-, 10-, 20- und 30jährigen Mittel bemerken zu können.

Cyclische Änderungen der Jahressummen des Niederschlages.

Es liegt nicht in meiner Absicht, die in dieser Abhandlung zusammengestellten langen Reihen von Jahressummen des Niederschlages auf periodische Änderungen im allgemeinen zu untersuchen. Dazu möchte ich andere auffordern, denen das hier gesammelte Material zur Kenntnis kommt. Ich habe nur vor, zwei bekannte Perioden, welche mit geringerer oder größerer Wahrscheinlichkeit schon seit längerer Zeit aufgestellt worden sind, auf Grund der hier vorliegenden langjährigen Beobachtungsergebnisse auf ihre Giltigkeit einer Prüfung zu unterziehen. Es ist dies die 11jährige Sonnenflecken-Periode und die circa 35jährige Brückner'sche Periode.

I. Die 11jährige Sonnenflecken-Periode.

Dem Versuche einer Constatierung derselben gelten die folgenden sechs Tabellen.

Die erste enthält die Relativzahlen der Sonnenflecken in der Anordnung, dass die Minima derselben untereinander gesetzt worden sind. Ich habe 9 Perioden genommen. Die Tabellen II, III und IV enthalten in völlig gleicher Anordnung die Abweichungen der Jahressummen des Niederschlages in Padua, Mailand und Klagenfurt; die mittlere Abweichung, sowie Anzahl der positiven und negativen Abweichungen für jedes Jahr der Sonnenflecken-Periode. In diesen Zahlenfolgen müsste wohl der Einfluss der Sonnenfleckenfrequenz auf die Jahressummen der Niederschläge hervortreten.

Da das Resultat so ziemlich ein negatives war, habe ich noch in gleicher Weise die Winter- und Sommerniederschläge zu Padua und Klagenfurt untersucht, da es ja möglich wäre, dass in unseren Breiten nur eine der extremen Jahreszeiten in Bezug auf ihre Niederschlagsmenge der Sonnenflecken-Periode folgt.

Tabelle I.

Jahresmittel der Wolf'schen Relativzahlen der Sonnenflecken, beginnend mit dem Minimum 1798.

Minimum													
1798	**4·6**	7·1	15·6	33·9	54·7	70·7	**71·4**	48·0	28·4	11·1	7·2	3·1	—
1810	0·0	1·6	4·9	12·6	16·2	35·2	**46·9**	39·9	29·7	23·5	16·2	6·1	3·9
1823	2·6	8·1	16·2	35·0	51·2	62·1	**67·2**	67·0	50·4	26·3	—	—	—
1833	9·4	13·3	59·0	119·3	**136·9**	104·1	83·4	61·8	38·5	23·0	—	—	—
1843	13·1	19·3	38·3	59·6	97·4	**124·9**	95·4	69·8	63·2	52·7	38·5	21·0	7·7
1856	5·1	22·9	56·2	90·3	**94·8**	77·7	61·0	45·4	45·2	31·4	14·7	—	—
1867	8·8	36·8	78·6	**131·8**	113·8	99·7	67·7	43·1	18·9	[11·3	12·3	—	—
1878	3·4	6·0	32·3	54·3	59·6	**63·7**	63·5	52·2	25·4	13·1	6·8	—	—
1889	6·3	7·1	35·6	73·8	[84·9	78·0	64·0	40·4	26·3	26·2	11·9	8·8	—
Mittel	5·9	13·6	37·4	67·8	78·8	**79·6**	68·9	52·0	36·2	24·3	15·4	9·7	5·8

Die Relativzahlen der Sonnenflecken in dieser Tabelle sind entnommen: R. Wolf, Mémoire sur la période commune à la fréquence des taches solaires et à la Variation de la Déclinaison magnétique. Royal Astron. Soc. Vol. XLIII (Tabelle reicht bis 1875 inclusive). — A. Wolfer, Bibliothèque universelle de Genève. Archives des sciences physiques et naturelles. T. XXVI. Déc. 1891; und Meteorol. Zeitschrift 1892, S. 201 etc. (bis 1890). Von 1891 an aus der Meteorol. Zeitschrift; Wolfer, provisorische Zahlen (von 1893 an). Für den vorliegenden Zweck sind dieselben sicherlich genügend.

Tabelle II.

Jahressummen des Regenfalles in Padua in Procenten des 100jährigen Mittels 1801—1900.

Abweichungen vom Mittel (100).

1798	4	35	21	9	33	37	36	7	19	42	−11	31	—
1810	17	−20	24	−12	0	−14	−33	−30	0	4	38	−19	−42
1823	−6	−8	20	19	1	26	4	28	−5	−19			–
1833	14	−40	10	15	14	1	3	26	−14	16			–
1843	−9	12	52	15	−10	1	−18	14	24	−10	24	14	37
1856	22	22	−3	−3	6	36	36	5	−5	−26	−12		
1867	4	9	30	16	−14	31	10	−13	1	24	17	–	–
1878	7	2	10	−18	2	−16	8	7	0	9	−22		–
1889	16	17	19	19	30	32	15	43	6	18	−29	19	
Mittel	8	−5	9	3	0	6	3	−3	1	3	−10	(4)	(−2)
	Häufigkeit der Fälle												
+	7	4	5	5	4	3	4	4	2	5	2	2	1
−	2	5	4	4	4	6	5	5	5	4	5	2	1

Tabelle III.

Abweichungen der Jahressummen des Regenfalles in Mailand in Procenten des 100jährigen Mittels.

1798	— 8	—10	—13	15	—14	—21	9	—19	9	— 5	—29	— 2	.
1810	30	—13	3	15	52	— 1	—14	—35	— 7	6	— 8	10	—15
1823	4	— 3	—21	24	7	—33	— 8	—15	—11	— 1	—	—	—
1833	7	—23	—11	10	12	23	30	—13	— 7	31	—	—	—
1843	14	11	31	29	—12	19	— 5	16	31	6	— 2	—27	18
1856	3	—26	— 2	12	12	—35	27	7	— 5	—22	—17	—	—
1867	— 5	— 6	—20	—31	—38	51	2	—34	1	13	—15	—	—
1878	— 5	— 3	— 3	6	22	—16	—23	13	18	— 4	12	—	—
1889	14	— 1	7	15	—17	—19	—17	26	—10	31	—15	8	—
Mittel	4	— 8	— 3	11	3	— 4	0	— 6	2	6	— 8	— 1	—
	Häufigkeit der Abweichungen:												
+	6	1	3	8	5	3	4	4	4	5	1	2	1
—	3	8	6	1	4	6	5	5	5	4	6	2	1

Tabelle IV.

Abweichungen der Jahressummen des Regenfalles in Klagenfurt in Procenten des 88jährigen Mittels.

1810				11	0	14	17	−14	−44	−14	27	9	−40
1823	11	−23	3	14	1	−23	17	15	9	−24			
1833	1	−58	−36	6	−19	11	−2	3	−9	1			
1843	9	34	21	16	14	13	12	26	27	6	8	20	5
1856	5	−46	−13	1	4	−29	−13	11	24	−25	10		
1867	13	19	2	18	10	31	−6	21	−17	51	8		
1878	43	15	17	3	33	25	−8	21	5	6	13		
1889	12	14	13	12	6	3	8	3	−1	2	−9	6	
Mittel	8	12	−2	6	2	−1	1	7	−1	−1	3	4	—
	Häufigkeit der Abweichungen:												
+	6	2	4	6	5	5	3	6	4	3	3	0	0
−	1	5	3	2	3	3	5	2	4	5	3	3	2

Tabelle V.

Abweichungen der Regensummen des Winters zu Padua in Abweichungen vom Mittel (1725—1900) in Procenten.

Sonnenflecken	Min.	1	2	3	4	Max.	1	2	3	4	5	6	7
1798	— 67	11	105	41	109	111	93	79	9	— 40	— 3	— 22	—
1810	76	— 31	— 36	9	30	— 3	— 50	— 94	— 23	3	— 17	47	— 43
1823	20	— 25	— 63	36	— 52	— 36	— 41	— 43	0	— 43	—	—	—
1833	— 86	— 33	— 60	6	— 51	49	— 64	— 14	— 14	8	—	—	—
1843	34	— 17	66	— 59	3	33	— 95	— 24	— 47	— 77	29	— 3	105
1856	15	— 11	— 67	— 47	11	44	— 8	— 14	18	— 35	— 56	—	—
1867	— 13	— 58	— 27	102	28	— 31	105	— 50	39	39	— 8	—	—
1878	— 28	47	— 60	— 26	— 47	23	— 85	13	— 4	— 5	3	—	—
1789	— 23	— 48	— 60	41	— 52	— 67	6	— 0	33	— 19	— 67	43	—
Mittel	— 8	— 18	— 22	11	— 2	14	— 17	— 16	1	— 20	— 17	— 4	(31)
						Häufigkeit der Abweichungen:							
+	4	2	2	6	5	5	2	2	5	3	2	1	1
—	5	7	7	3	4	4	7	7	4	6	5	3	1

Abweichungen der Regensummen des Sommers (desgleichen).

Sonnenflecken	Min.	1	2	3	4	Max.	1	2	3	4	5	6	7
1798	17	41	20	— 29	— 68	53	31	36	39	48	26	— 3	—
1810	19	14	64	— 15	28	48	— 45	— 19	12	89	— 75	30	— 47
1823	— 30	4	— 8	26	56	— 52	— 32	— 28	52	— 16	—	—	—
1833	73	5	54	— 32	— 1	— 49	— 37	— 29	— 16	— 30	—	—	—
1843	— 18	0	52	6	24	— 32	— 40	— 5	— 23	— 4	— 29	— 36	— 10
1856	— 22	— 47	— 26	— 8	30	— 52	9	— 57	— 32	— 26	— 14	—	—
1867	4	73	— 21	6	— 15	30	— 26	— 16	22	54	— 12	—	—
1878	— 11	— 69	5	— 49	— 23	— 4	55	— 41	17	— 18	— 49	—	—
1889	3	— 39	— 29	23	— 30	— 36	— 12	159	— 13	11	— 35	— 19	—
Mittel	4	— 2	12	— 9	0	— 10	— 11	0	6	12	— 27	— 7	(— 28)
	Häufigkeit der Abweichungen:												
+	5	6	5	4	4	3	3	2	5	4	1	1	0
—	4	3	4	5	5	6	6	7	4	5	5	3	2

Tabelle VI.

Klagenfurt. Niederschlagsmengen in Centimetern.

Sonnenflecken	Min.	1	2	3	4	Max.	1	2	3	4	5	6	7
A. Winter													
1810	—	—	—	13	27	11	13	4	13	12	10	11	13
1823	23	4	5	13	19	4	19	15	22	12	—	—	—
1833	5	4	6	14	13	14	11	10	16	14	—	—	—
1843	25	18	16	13	25	16	3	11	3	7	17	12	13
1856	10	9	5	9	19	17	8	9	15	11	12	—	—
1867	16	20	12	22	16	9	29	6	23	11	16	—	—
1878	11	21	11	5	5	11	5	12	16	23	14	—	—
1889	8	4	7	13	12	6	21	10	11	17	11	21	—
Mittel	14	11	9	13	17	11	14	10	15	13	11	(15)	(13)
B. Sommer													
1810	—	—	—	33	49	47	38	35	18	25	38	43	23
1823	31	37	49	15	47	42	42	37	48	27	—	—	—
1833	43	24	26	38	26	46	30	57	33	33	—	—	—
1843	27	59	32	34	37	33	44	42	35	27	23	31	34
1856	39	13	25	30	32	23	29	30	50	28	46	—	—
1867	34	26	29	43	36	35	17	53	35	43	31	—	—
1878	38	40	49	46	56	23	44	32	36	32	44	—	—
1889	42	32	41	38	36	37	25	42	38	42	22	30	—
Mittel	36	33	36	35	40	36	34	41	37	32	34	(35)	(28)

Aber auch in diesen Zusammenstellungen dürfte man kaum einen bestimmt ausgesprochenen Einfluss der Sonnenfleckenhäufigkeit auf die Niederschläge wenigstens an den drei in Untersuchung stehenden Orten zu erkennen vermögen.

Zur schärferen Prüfung der Beziehungen zwischen Sonnenfleckenfrequenz und Niederschlagsmenge des Jahres mögen die Hauptergebnisse hier zusammengestellt werden.

Sonnenflecken-Relativzahlen im Mittel von 9 Cyclen.

	6*	14	37	68	79	80	69	52	36	24	15

Summen der Abweichungen der Jahresmengen des Niederschlages in Procenten.

Klagenfurt ..	72	—111	—19	51	17	— 5	9	64	— 6	—11	25
Padua	69	— 49	85	28	— 2	—56	31	—31	12	26	— 71
Mailand	40	— 74	—29	95	24	—32	1	—54	19	55	— 74
Summe	181	—234	37	174	39	—93	41	—21	25	70	—120

Das Minimumjahr hat an allen drei Orten einen Überschuss, das Maximumjahr einen Mangel an Niederschlägen, aber größeres Gewicht ist deshalb auf diese Übereinstimmung nicht zu legen, weil diese Zahlen aus gleichen Zeiträumen stammen und die drei Orte sich relativ nahe liegen.

Ferner haben gerade diese übereinstimmenden Jahrgänge beiderseits entgegengesetzte Abweichungen neben sich, nur im zweiten, dritten und vierten Jahre nach dem Sonnenflecken-Minimum bemerken wir eine Folge gleicher (positiver) Zeichen, sonst fast nur Zeichenwechsel von einem Jahre zum nächsten, was sehr gegen die Realität einer Sonnenfleckenperiode der Niederschläge an den drei Orten sprechen dürfte.

Versuchen wir die Folge der Abweichungen mittels der üblichen Formel $|a+2b+c|:4$ auszugleichen, um eine etwaige Periodicität leichter auffinden zu können, so erhalten wir folgende Zahlenreihe:

	Sonnenflecken-										
	Min.	1	2	3	4	Max.	1	2	3	4	5
Abweichungen	2	—63	4	106	40	—27	— 8	6	25	12	3
reduciert	—7	—72	—5	97	31	—36	—17	—3	16	3	—6

In der zweiten Reihe sind die Werte auf Procente reduciert, da in der ersten die positiven Abweichungen weitaus vorwiegen, aus Gründen, die sich aus der Entstehung dieser Zahlen (und aus dem Wegfalle negativer Abweichungen im sechsten und siebenten Jahre nach dem Maximum) von selbst ergeben.

Auch diese ausgeglichene und reducierte Reihe lässt noch keinen bestimmt ausgesprochenen Zusammenhang zwischen der Niederschlagsmenge und den Sonnenflecken-Relativzahlen erkennen.

Die drei Jahre vor dem Maximum geben +125, das Maximumjahr und die zwei Jahre nach demselben —56; die drei Jahre vor dem Minimum +26,[1] das Minimumjahr und das demselben folgende zusammen —79, es würden sich demnach in Bezug auf die Niederschläge Maximum und Minimum der Sonnenflecken fast ganz gleich verhalten.

Gruppiert man die Zahlen anders, indem man die vier dem Minimum folgenden Jahre und ebenso die vier dem Maximum folgenden Jahre in eine Summe zusammenfasst, so erhält man:

Die 4 Jahre nach dem Minimum geben ..... +51,
» 4 » » » Maximum » ..... — 1,

gleichfalls ein wenig sagendes Resultat.

Ein Einfluss der Sonnenflecken auf die jährlichen Regenmengen ist also zu Mailand, Padua und Klagenfurt selbst im Mittel von 9 Cyclen nicht bestimmt zu erkennen.

Man könnte noch die bloße Häufigkeit der positiven und negativen Abweichungen ins Auge fassen, ob sich vielleicht in diesen eine ausgesprochene Beziehung zu erkennen geben möchte. Zu diesem Zwecke habe ich folgende Tabelle der Häufigkeit der positiven und negativen Abweichungen in Summe der drei Stationen zusammengestellt.

Unmittelbar vor und im Minimumjahre, dann vor dem Maximum der Sonnenflecken sind die positiven Abweichungen vorherrschend, nach dem Minimum und Maximum die negativen.

---

[1] Wobei dem dritten und vierten Jahre je das Gewicht $1^1/_2$ gegeben worden ist, da das fünfte nicht in allen Cyclen vorhanden war.

Sonnenfleckenfrequenz										
Min.	1	2	3	4	Max.	1	2	3	4	5
Häufigkeit positiver Abweichungen										
19	7	12	19	15	11	11	14	12	13	6
Häufigkeit der negativen Abweichungen										
6	18	13	7	11	15	15	12	14	13	14
Differenz										
+13	—11	—1	+12	+4	—4	—4	+2	—2	0	+8

Anders gruppiert:

Während der Zunahme der Sonnenflecken ist die Summe der Abweichungen vom Mittel +17, während der Abnahme aber, das Maximum selbst eingerechnet, ist jene Summe 0. Auch diese Resultate sprechen keineswegs für einen merklichen Einfluss der Fleckenhäufigkeit auf die Jahresmenge der Niederschläge in Mailand, Padua und Klagenfurt.[1]

[1] Wie ganz anders verlaufen die Zahlen dort, wo ein entschiedener Einfluss der Sonnenflecken vorhanden ist, wie z. B. bei der Amplitude der täglichen Schwankung der magnetischen Declination! Nehmen wir geradezu die entsprechenden Werte von Mailand her, um dies zu zeigen.

Mittel von fünf Fleckenperioden 1837 bis 1893.

Sonnenfleckenfrequenz										
Max.	1	2	3	4	5	6	Min.	1	2	3
Mittlere Relativzahlen										
107	94	77	55	39	27	16	11*	18	40	52
Tägliche Amplitude der magnetischen Declination zu Mailand										
10'7	9·9	8·9	7·8	7·4	6·3	6·2	5·7*	6·0	6·9	8·2

Die Übereinstimmung der beiden Zahlenreihen ist eine vollkommene.

Die Tabellen V und VI, in denen die Niederschlagsmengen des Winters und Sommers von Padua und Mailand nach der Sonnenfleckenhäufigkeit gruppiert sind, führen zu ganz ähnlichen Resultaten, wie jene des Jahres, sie sollen deshalb nur dem Nachweis dienen, dass nicht etwa in einer der extremen Jahreszeiten ein ausgesprochener Einfluss der Sonnenflecken vorhanden ist, der in den Jahressummen selbst nicht mehr zum Vorscheine kommt. Die Quantität der Niederschläge, sowie die Häufigkeit der positiven und negativen Abweichungen verlaufen in der Sonnenfleckenperiode im Winter und im Sommer ganz ähnlich, wie im Jahre selbst.

Sonnenfleckenperiode und Regenfall-Anomalie.

	Min.	1	2	3	4	Max.	1	2	3	4	5
						Winter					
Padua ...	0	—10	—14	19	6	22	—9	—8	9	—12	—9%
Klagenfurt	2	—1	—3	1	5	—1	2	—2	3	1	—1 *cm*
						Sommer					
Padua....	6	0	14	—7	2	—8	—9	2	8	14	—25%
Klagenfurt	0	—3	0	—1	4	0	—2	5	1	—4	—2 *cm*

Da es sich ohnehin um qualitative Bestimmungen hier nicht handeln kann, habe ich für Klagenfurt als Einheit den Centimeter beibehalten (Abweichungen in Centimeter), die Reihenfolge der Abweichungen ist dem Sinne nach wenig verschieden von der des Jahres und führt daher wie diese zu keinem entschiedenen Resultate. Es wäre überflüssig, nochmals verschiedene Combinationen zu versuchen, um eine bestimmtere Antwort zu erhalten.

Ich halte mich daher zu dem Satze berechtigt:

In den Niederschlagsmengen von Mailand, Padua und Klagenfurt ist selbst im Mittel von 9 Sonnenflecken-Cyclen eine bestimmte Abhängigkeit der ersteren von der Sonnenfleckenfrequenz nicht zu erkennen.

II. Die 35jährige Brückner'sche Periode.

Die Reihe der Regenaufzeichnungen zu Padua umfasst von 1726 bis 1900 gerade fünf volle Brückner'sche Perioden, jene von Mailand, wenn man 3 Jahre zu Anfang mit Hilfe der Verhältniszahlen des Regenfalles nach Padua ergänzt, vier volle Brückner'sche Perioden, die Reihe von Klagenfurt von 1831 bis 1900 zwei solcher Perioden.

Wir haben also eine Reihe von jährlichen Regenaufzeichnungen, welche im ganzen 11 volle 35jährige Perioden umfasst.

Die folgenden Tabellen I und II enthalten die Ergebnisse der Niederschlagsaufzeichnungen von Padua, Mailand und Klagenfurt in Centimetern nach 35jährigen Perioden zusammengestellt. Aus diesen ausführlichen Originaltabellen, welche eventuell zu weiterer Prüfung nach anderen Richtungen, als dies hier geschehen ist, verwendet werden können,[1] ist dann Tabelle III hervorgegangen, welche erstlich die rohen Mittelwerte von fünf Perioden für Padua, vier für Mailand und zwei für Klagenfurt nebeneinandergestellt enthält. Diese rohen Mittel sind dann, jede Reihe für sich, nach dem Schema $(a+2b+c):4$ ausgeglichen und selbe schließlich in Mittelwerte vereinigt worden. Diese Mittelwerte schreiten schon mit überraschender Regelmäßigkeit von einem Maximum einem Minimum zu. Dieselben sind dann nochmals nach dem Schema $(a+b+c):3$ ausgeglichen worden, was bei 35 Termen ohne Bedenken geschehen kann. Das Ergebnis ist eine merkwürdig regelmäßige Folge von Zahlen, welche sehr entschieden für die Existenz einer 35jährigen Periode zu sprechen scheint. Freilich, im einzelnen ist die Übereinstimmung bei weitem nicht so günstig, wenigstens insoferne nicht, als, obgleich der Beginn der Jahresreihen der drei Stationen völlig auf die gleichen Jahre in der 35jährigen Periode fällt, doch die Maxima und Minima der drei Reihen durchaus nicht zusammenfallen. Um das ersichtlicher zu machen, mögen die 35jährigen Perioden näher specificiert werden.

[1] Man könnte z. B. nur die gleichzeitigen (correspondierenden) Reihen per drei Stationen vereinigen, etc.

Padua	1726–1760	1761–1795	1796–1830	1831–1865	1866–1900
Mailand	—	1761–1795	1796–1830	1831–1865	1866–1900
Klagenfurt ...	—	—	—	1831–1865	1866–1900

Legt man diese Reihen übereinander, so sollten die gleichen Phasenzeiten, also auch Extreme in den Perioden aufeinanderfallen. Es verhält sich aber nicht so, wie folgende übersichtliche Zusammenstellung von je fünfjährigen Mitteln zeigt.

Mittlere Abweichungen des jährlichen Regenfalles in Millimeter.

	Jahr der Periode						
	3	8	13	18	23	28	33
Padua	153	**257**	209	—139	—133	—269*	— 65
Mailand	—228*	— 12	99	**243**	10	—153	46
Klagenfurt	—435*	25	**750**	445	— 25	—365	—380

In jeder dieser Zahlenreihen ist eine Periode mit großer Amplitude[1] unverkennbar ausgesprochen (am wenigsten in Mailand), aber die gleichen Phasenzeiten treten zu Padua um zwei Termen zu früh auf. Verschiebt man in Padua die Reihe um 10 Jahre von links nach rechts, dann wäre die Übereinstimmung sehr gut; z. B.:

	Jahr der Periode						
	3	8	13	18	23	28	33
Padua	—269*	—65	153	**257**	209	—139	—133
Mailand	—228*	—12	99	**243**	10	—153	46
Klagenfurt	—435*	25	**750**	445	— 25	—365	—380

Gegenüber der Unentschiedenheit im Gange der Jahressummen des Regenfalles, wenn sie nach der Sonnenfleckenfrequenz gruppiert werden, ist die ausgesprochene Periodicität in einer 35jährigen Folge von Jahressummen höchst auffallend und spricht in der That sehr für die Brückner'sche Hypothese.

[1] Doch ist zu beachten, dass die Zahlen Summen von je 5 Jahren sind.

Tabelle I.

Jährliche Regenmengen zu Padua 1726—1900 nach 35jährigen Perioden.

	I	II	III	IV	V	Mittel	Abweichung
	in Centimetern					in Millimetern	
	Jahressummen						
1	63	113	85	79	73	826	— 35
2	116	57	72	67	86	796	— 65
3	135	95	87	95	91	1006	145
4	92	107	112	50	108	938	77
5	87	98	100	91	70	892	31
6	87	84	90	96	71	856	— 5
7	81	90	111	95	109	972	111
8	88	76	114	82	92	904	43
9	96	106	113	81	72	936	75
10	78	137	89	61	82	894	33
11	79	106	99	71	103	916	55
12	61	156	118	70	97	1004	143
13	71	113	74	75	89	844	— 17
14	65	76	109	93	85	856	— 5
15	57	92	97	126	75	894	33
16	61	94	66	96	68	770	— 91
17	99	118	103	75	81	952	91
18	72	87	73	84	70	772	— 89
19	91	83	84	68	77	806	— 55
20	96	81	72	95	89	866	5
21	106	94	55	103	84	884	23
22	65	82	58	75	91	742	—119
23	105	83	83	103	65	878	17
24	92	79	86	72	96	850	— 11
25	82	92	52	114	69	818	— 43
26	107	104	67	102	67	894	33
27	96	85	48	65	99	786	— 75
28	100	82	78	81	58	798	— 63
29	71	75	76	81	56	718	—143
30	110	60	66	88	96	840	— 21
31	99	68	99	53	119	876	15
32	80	67	84	113	79	846	— 15
33	111	95	62	79	98	890	29
34	92	104	80	79	59	828	— 33
35	89	90	60	62	99	800	— 61
Mittel ...	88·0	92·3	83·5	83·6	83·5	861·4	—

	I	II	III	IV	V	Mittel
Abweichungen von den 35jährigen Mitteln						
1	—25	21	2	— 5	—10	— 3·2
2	28	—35	—11	—17	3	— 6·2
3	47	3	4	11	8	14·8
4	4	15	29	—34	25	8·0
5	— 1	6	17	7	—13	3·4
6	— 1	— 8	7	12	—12	— 0·2
7	— 7	— 2	28	11	26	11·4
8	0	—16	31	— 2	9	4·6
9	8	14	30	— 3	—11	7·8
10	—10	45	6	—23	— 1	3·6
11	— 9	14	16	—13	20	5·8
12	—27	64	35	—14	14	14·6
13	—17	21	— 9	— 9	6	— 1·4
14	—23	—16	26	9	2	— 0·2
15	—31	0	14	42	— 8	3·6
16	—27	2	—17	12	—15	— 8·8
17	11	26	20	— 9	— 2	9·4
18	—16	— 5	—10	0	—13	— 8·6
19	3	— 9	1	—16	— 6	— 5·2
20	8	—11	—11	11	6	0·8
21	18	2	—28	19	1	2·6
22	—23	—10	—25	— 9	8	—11·6
23	17	— 9	0	20	—18	2·0
24	4	—13	3	—12	13	— 0·8
25	— 6	0	—31	30	—14	— 4·0
26	19	12	—16	18	—16	3·6
27	8	— 7	—35	—19	16	— 7·2
28	12	—10	— 5	— 3	—25	— 6·0
29	—17	—17	— 7	— 3	—27	—14·0
30	22	—32	—17	4	13	— 1·8
31	11	—24	16	—31	36	1·8
32	— 8	—25	1	29	— 4	— 1·2
33	23	3	—21	— 5	15	3·2
34	4	12	— 3	— 5	—24	— 3·0
35	1	— 2	—23	—22	16	— 5·8
Mittel....	14·2	14·6	15·8	14·0	13·0	14·3

Tabelle II.

Jahressummen der Niederschläge nach 35jährigen Perioden zu Mailand und Klagenfurt (in Centimetern).

	I	II	III	IV	Mittel	Abweichung
					in Millimetern	
			A. **Mailand**			
1	(125)	104	93	86	1020	13
2	(63)	106	103	98	925	— 82
3	(105)	96	111	97	1022	15
4	94	94	80	84	880	—127
5	129	91	92	72	960	— 47
6	87	119	114	64	960	— 47
7	92	89	116	157	1135	128
8	90	(82)	127	105	1010	3
9	90	113	135	68	1015	8
10	83	84	90	104	903	—104
11	70	113	97	117	992	— 15
12	110	99	136	88	1083	76
13	96	73	118	98	962	— 45
14	78	102	115	101	990	— 17
15	73	134	136	100	1107	100
16	90	91	134	110	1063	56
17	104	107	92	127	1075	68
18	82	119	124	87	1030	23
19	79	158	98	80	1037	30
20	88	103	121	117	1073	66
21	93	89	136	122	1100	93
22	76	67	110	99	880	—127
23	103	97	102	116	1045	38
24	91	110	75	118	985	— 22
25	92	96	123	103	1035	28
26	108	114	107	111	1100	93
27	86	88	77	119	925	— 82
28	110	108	102	86	1015	8
29	75	101	116	84	940	— 67
30	76	83	116	86	902	—105
31	108	129	67	131	1088	81
32	81	111	132	94	1045	38
33	108	70	111	136	1063	56
34	92	95	88	88	907	—100
35	110	88	81	112	978	— 29
Mittel ...	92	101	108	102	1007	58

	I	II	Mittel	Abweichung
			in Millimetern	
		B. **Klagenfurt**		
1	106	106	1060	76
2	74	109	965	— 19
3	98	78	880	—104
4	41	99	700	—284
5	62	114	880	—104
6	103	87	950	— 34
7	79	127	1030	46
8	108	91	995	11
9	95	117	1060	76
10	100	80	900	— 84
11	88	147	1175	191
12	96	90	930	— 54
13	105	138	1215	231
14	130	111	1205	221
15	116	113	1145	161
16	113	100	1065	81
17	111	129	1200	216
18	109	73	910	— 74
19	108	90	990	6
20	122	118	1200	216
21	123	102	1125	141
22	91	103	970	— 14
23	89	109	990	6
24	77	109	930	— 54
25	92	84	880	—104
26	102	84	930	— 54
27	53	109	810	—174
28	84	91	875	—109
29	97	101	990	6
30	101	89	950	— 34
31	68	100	840	—144
32	85	96	905	— 79
33	86	99	925	— 59
34	121	89	1050	66
35	73	91	820	—164
Mittel	95	102	984	100

Tabelle III.

Jahressummen des Regenfalles nach 35jährigen Perioden.

Abweichungen von den 35jährigen Mitteln (Millimeter).

	Padua	Mailand	Klagen-furt	Ausgeglichene Zahlen			Mittel [1]	Aus-ge-glichen
	5 Cyclen	4 Cyclen	2 Cyclen	Padua	Mai-land	Klagen-furt		
1	— 35	13	76	—49	—22	— 8	—30	—28
2	— 65	— 82	— 19	— 5	—34	— 17	—19	—21
3	145	15	—104	75	—45	—128	—14	—23
4	77	—127	—284	82	—72	—194	—35	—30
5	31	— 47	—104	33	—67	—132	—40	—23
6	— 5	— 47	— 34	33	— 3	— 31	6	5
7	111	128	46	65	53	17	50	35
8	43	3	11	68	36	36	49	39
9	75	8	76	56	—21	20	18	23
10	33	—104	— 84	49	—54	25	3	19
11	55	— 15	191	72	—15	61	35	32
12	143	76	— 54	81	23	78	57	44
13	— 17	— 45	231	26	— 7	157	39	47
14	— 5	— 17	221	1	5	208	44	45
15	33	100	161	— 5	60	156	53	48
16	— 91	56	81	—15	70	134	49	49
17	91	68	216	0	54	110	44	32
18	— 89	23	— 74	—36	36	18	4	17
19	— 55	30	6	—48	38	38	3	20
20	5	66	216	— 6	63	145	52	28
21	23	93	141	—17	32	121	30	18
22	—119	—127	— 14	—50	—30	30	—26	— 5
23	17	38	6	—24	—18	— 14	—20	—20
24	— 11	— 22	— 54	—12	6	— 52	—13	—14
25	— 43	28	—104	—16	32	— 79	—10	—11
26	33	93	— 54	—13	33	— 96	—11	—24
27	— 75	— 82	—174	—45	—16	—128	—50	—43
28	— 63	8	—109	—86	—33	— 97	—67	—61
29	—143	— 67	6	—93	—57	— 33	—67	—60
30	— 21	—105	— 34	—43	—49	— 51	—47	—42
31	15	81	—144	— 2	23	—100	—12	—18
32	— 15	38	— 79	3	53	— 90	4	— 3
33	29	56	— 59	2	12	— 30	— 1	—10
34	— 33	—100	66	—25	—43	— 23	—32	—23
35	— 61	— 29	—164	—28	—36	— 47	—36	—33

[1] Klagenfurt mit halbem Gewichte.

Nehmen wir die Mittelwerte aus der ersten der kleinen Zusammenstellungen auf S. 119 (da die zweite doch zu willkürlich erscheinen muss) und dividieren durch 5, um Jahresmittel für die betreffenden Termen der Periode zu erhalten, so ergibt sich Folgendes.

Mittlere Abweichungen des Regenfalles in einer 35jährigen Periode.

	Jahr der Periode						
	3	8	13	18	23	28	33
Abweichung der Jahressumme...	—102	54	210	110	—30	—157*	—80

Es wären hiernach beiläufig und durchschnittlich gewesen:

Nass.......	1738	1773	1808	1843	1878	(1913)
trocken.....	1753	1788	1823	1859	1893	(1928)

Vergleichen wir diese Epochen mit unseren früheren Tabellen der Jahressummen des Regenfalles, so ist die Übereinstimmung nicht schlecht, es sind ja auch die Extreme in den obigen fünfjährigen Mitteln nur erst beiläufig fixiert. Es fallen aber zu Padua gerade nicht die auffallendsten Trockenzeiten und Regenzeiten auf diese Jahre.

Die letzte Zahlenreihe in Tabelle III fixiert die Extreme in der 35jährigen Periode auf das 14. (Maximum) und auf das 28. Jahr (Minimum), was mit obigen Ansätzen bis auf ein Jahr bei den nassen Perioden (1739, 74 etc.) übereinstimmt.

Entnimmt man der Tabelle der Jahressummen des Regenfalles 1801—1900, in Procenten ausgedrückt, die mittleren Niederschlagsmengen von je 5 Jahren, so dass das mittlere Jahr den obigen nassen und trockenen Jahren entspricht, so erhält man im Mittel von Mailand, Padua und Klagenfurt:

Mittleres Jahr des Lustrums......	1808	1843	1878
Regenfall in Procenten..........	110	111	110%
Mittleres Jahr des Lustrums......	1823	1859	1893
Regenfall in Procenten..........	87	88	94%

Übereinstimmend waren an allen drei Stationen diese Lustren nass oder trocken. Es ist aber hiezu noch zu bemerken, dass es daneben auch noch andere und zum Theil extremere Trocken- und Regenperioden im XIX. Jahrhunderte gegeben hat. Aber immerhin sprechen die obigen Zahlen sehr zu Gunsten einer 35jährigen Periode des Regenfalles an den bezeichneten Orten.

Um eine zu weiteren Rechnungen bequemere Zahlenreihe zu erhalten, habe ich zwischen dem letzten und ersten Gliede der 35jährigen Reihe in Tabelle III, letzte Columne, ein 36stes Glied interpoliert (Mittel aus 35 und 1), wodurch die Periode nicht merklich alteriert wird. Man kann aber dann je 3 Jahre zusammenfassen und erhält eine Reihe von 12 Zahlen, die sich bequem durch eine periodische Function ausdrücken lässt. So bin ich zu folgenden Zahlen gekommen:

Abweichungen der Jahressummen des Regenfalles in einer 36jährigen Periode (Millimeter).

Jahr der Periode (Beginn 1722, 1788, 1794, 1829, 1865[1])

2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
—24	—16	32	32	47	33	22	—13	—26	—54*	—10	—28

Die Amplitude ist hier dadurch, dass Klagenfurt (mit bloß 2 Perioden) nur mit halbem Gewicht bei der Mittelbildung berücksichtigt worden ist, sowie auch durch die mehrfache Ausgleichung erheblich vermindert, aber dadurch kaum weniger wahrscheinlich geworden.

Man erhält aus obigen Zahlen folgende Gleichung ($x = 0$ für 1865, 1829 u. s. w.):

$$39\cdot5 \sin(334\cdot9+x)+9\cdot6 \sin(193\cdot9+2x),$$

wo die Amplituden in Millimeter ausgedrückt sind. Eine allgemeinere Anwendung erhält die Gleichung, wenn man die

[1] Da für die erste Periode nur Padua vorliegt, wo das Maximum zu früh eintritt gegen die anderen Stationen, habe ich die ersten vier Perioden um je ein Jahr zurück verschoben.

Amplituden in Tausendtheile der Jahresmenge des Regenfalles umrechnet, durch Division mit dem mittleren Regenfalle der drei Stationen (Klagenfurt mit halbem Gewichte), d. i. mit 942 *mm*.

Gleichung der 36jährigen Periode des Regenfalles, Amplituden in Tausendtheilen der Jahressumme:

$$42^{0}/_{00} \sin(334 \cdot 9 + x) + 12^{0}/_{00} \sin(193 \cdot 9 + 2x).$$

Damit erhält man:

Jahr der Periode (Beginn 1865 und je 36 Jahre zurück):											
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
Abweichung der Jahressumme in Tausendtheilen derselben:											
—20	—8	15	41	**53**	43	15	—15	—33	—35*	—30	—26

Dies wäre der strengere Ausdruck für die Brückner'sche Periode. Die Trockenzeit dauert länger als die nasse Zeit (circa 21 gegen 15 Jahre) und die nassen Jahre weichen stärker vom Durchschnitte ab als die trockenen, wie dies ja der allgemeine Charakter der Niederschläge ist.

B. Die Schwankungen der Monatssummen der Niederschläge und der Summen der Jahreszeiten zu Padua und Klagenfurt.

In den folgenden Tabellen findet man vorerst die Monatssummen der Niederschlagsmengen nach 10- und 20jährigen und Gesammtmitteln für Padua und Klagenfurt zusammengestellt. Die 20jährigen Monatsmittel von Padua sind dann in Procente umgerechnet worden, damit man die Veränderlichkeit der Jahresperiode der Niederschläge und die Verlässlichkeit 20jähriger Mittel in dieser Hinsicht zu beurtheilen vermöge.

In den 10jährigen Monatsmitteln von Padua waren die regenärmsten Monate im Jahre: Jänner 3-, Februar 10-, März 2-, Juli 1-, August 1-, December 2mal; die Monate April—Juni, dann September—November sind in den 10jährigen Mitteln nie am trockensten gewesen.

Tabelle I.

Regenfall zu Padua. Decennien-Mittel.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decemb.	Jahr
(1725—1730)	54	30*	43	96	55	87	73	82	89	**123**	96	**121**	949
1731—1740	53	42	67	66	86	82	77	75	39	**92**	51	32*	762
1741—1750	53	42*	48	**99**	83	91	66	67	72	**95**	91	62	869
1751—1760	46*	69	56	77	87	80	88	72	72	108	**117**	83	955
1761—1770	65	57*	63	86	**114**	94	65	61	68	**120**	108	62	963
1771—1780	90	69	53*	79	99	**111**	72	66	96	84	**110**	77	1006
1781—1790	66	45*	85	61	69	86	55	45*	64	**97**	85	77	835
1791—1800	71	41*	63	56	78	**106**	62	53	105	95	78	71	879
1801—1810	86	65	59*	72	78	83	87	80	87	111	**124**	83	1015
1811—1820	50	28*	47	52	58	87	70	81	53	**100**	52	53	731
1821—1830	34	29*	50	48	70	**92**	48	59	79	**90**	65	56	720
1831—1840	33	55	52	100	**105**	68	71	82	84	52	72	24*	798
1841—1850	47*	54	48	85	94	81	60	63	81	**120**	65	56	854
1851—1860	46*	49	61	89	96	67	60	50	101	**109**	90	66	884
1861—1870	50	42	94	53	64	81	36*	77	75	81	**100**	62	815
1871—1880	54	48*	54	96	**105**	95	54	60	63	83	94	69	875
1881—1890	54	31*	72	82	70	83	47	55	77	03	65	51	790
1891—1900	45	42*	74	80	**113**	84	77	60	56	78	69	52	830
1725—1900	55	47	61	76	85	87	65	66	75	96	85	63	861

Regenfall zu Padua. Decennien-Mittel der meteorologischen Jahreszeiten und Jahre.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
(1726—1730)	238	194	242	308	982
1731—1740	134	218	233	183	768
1741—1750	156	229	225	258	868
1751—1760	200	220	240	297	957
1761—1770	185	264	220	296	965
1771—1780	237	231	249	290	1007
1781—1790	187	215	186	246	834
1791—1800	174	197	221	278	870
1801—1810	242	209	250	322	1023
1811—1820	131	157	238	204	730
1821—1830	115	168	199	234	716
1831—1840	117	257	221	208	803
1841—1850	155	227	204	266	852
1851—1860	150	247	176	300	873
1861—1870	158	211	193	257	819
1871—1880	180	255	208	241	884
1881—1890	133	232	185	246	796
1891—1900	141	267	221	203	832
1726—1900	166·6	222·2	216·8	256·4	862·0

Tabelle II.

Zwanzigjährige Mittel des Regenfalles zu Padua.

	(1725—1740)	1741—1760	1761—1780	1781—1800	1801—1820	1821—1840	1841—1860	1861—1880	1881—1900	176jährige Mittel 1725–1900
Jänner	54	49	77	69	68	33	46	52	50	55·3
Februar	38	55	63	43	46	42	51	45	37	47·0
März	58	52	58	74	53	51	55	74	73	60·9
April	77	88	83	58	62	75	87	74	81	76·0
Mai	74	85	106	73	68	87	95	85	91	85·3
Juni	84	85	103	96	85	80	74	88	83	86·5
Juli........	75	77	68	58	79	60	60	45	62	64·7
August.....	77	70	64	49	80	71	57	68	57	65·5
September ..	58	72	82	85	70	81	91	69	67	75·3
October	104	102	102	96	105	71	114	82	91	96·2
November .	68	104	109	82	88	68	77	97	67	84·9
December ..	65	73	70	74	69	40	61	65	51	63·0
Jahr	832	912	985	857	873	759	686	844	810	860·6
				In Procenten der Jahressumme						
Jänner	7	5*	8	8	8	4*	5*	6	6	6·4
Februar	5*	6	6	5*	5*	6	6	5*	5*	5·5*
März	7	6	6*	9	6	7	6	9	9	7·1
April	9	10	8	7	7	10	10	9	10	8·8
Mai	9	9	11	8	8	11	11	10	11	9·9
Juni	10	9	11	11	10	11	9	11	10	10·0
Juli........	9	8	7	7	9	8*	7	5*	8	7·5*
August.....	9	8*	7*	6*	9	9	7*	8	7*	7·6
September ..	7*	8	8	10	8*	11	10	8	8	8·8
October	12	11	10	11	12	9	13	10	11	11·2
November .	8	12	11	10	10	9	9	11	9	9·9
December...	8	8	7	8	8	5	7	8	6	7·3

Tabelle III.

Regenfall zu Klagenfurt. Decennien-Mittel.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1813—1820	37	24*	43	38	102	113	116	**124**	105	112	88	66	966
1821—1830	42	31*	31*	46	77	112	**137**	117	91	88	56	61	889
1831—1840	23*	41	41	67	88	118	**138**	109	83	48	77	33	865
1841—1850	57	46*	48	96	95	116	124	**134**	104	**151**	77	52	1100
1851—1860	32	31*	48	65	92	78	**113**	98	99	**120**	88	46	910
1861—1870	54	36*	71	54	75	108	**115**	112	97	87	78	54	941
1871—1880	26*	42	62	79	135	118	**141**	118	121	85	101	76	1104
1881—1890	24	22*	59	63	74	115	125	**149**	111	**155**	62	58	1017
1891—1900	46	35*	57	71	116	116	114	**121**	86	86	57	44	948
Mittel........	37·9	34·4	51·4	64·9	94·7	110·2	124·9	120·2	99·6	103·3	75·6	54·2	971·3
Häufigkeit der Fälle in 88 Jahren, in denen ein Monat der regenreichste war													
Jahres-Maximum	1	0	0	2	8	8	20	14	9	18	9	2	—
Häufigkeit der Fälle, in denen ein Monat der regenärmste war													
Jahres-Minimum..........	23	29	10	6	2	0	0	0	1	3	4	16	—

Die Summe ist nicht 88, weil es zuweilen Monate mit gleichen Regenmengen gab, welche Jahresextreme waren.

Der regenreichste Monat in der jährlichen Periode war April 1-, Mai 4-, Juni 3-, October 7-, November 4-, December 1mal; auf Jan.--März und Juli—September ist nie das Maximum gefallen (der September aber 2mal demselben nahe gekommen).

Diese Verhältnisse treten noch bestimmter auf in den 20jährigen Mitteln, welche auch in Procenten der Jahressumme ausgedrückt worden sind. In diesen treten stets zwei Maxima des Regenfalles deutlich hervor, das eine zwischen April und Juni schwankend, das andere zwischen October und November. Die Minima fallen auf Jänner und Februar, dann auf Juli, August und September. Dies charakterisiert die jährliche Regenperiode von Oberitalien.

Ganz andere Verhältnisse zeigt die Tabelle III für Klagenfurt. Juli und August sind die entschiedenen Regenmonate, aber im Herbste kommt noch ein zweites Maximum im October hinzu, das sich besonders bei der Auszählung der Häufigkeit dieses Herbstmaximums markiert herausstellt. In den drei Sommermonaten Juni—August ist in 88 Jahren nie das Jahresminimum des Regenfalles eingetreten, dasselbe trat am häufigsten in den drei Wintermonaten ein, aber auch noch häufig im März. In dieser Jahreszeit sind auch einige ganz regenlose Monate eingetreten, auch noch im April.

Veränderlichkeit der Niederschlagsmengen der extremen Jahreszeiten.

Ich habe für die Winter- und Sommermonate von Padua und Klagenfurt, erstere natürlich meteorologisch genommen (December des Vorjahres mit Jänner und Februar des anschließenden Jahres, Winter nach diesem genannt), die Veränderlichkeit berechnet. In den Tabellen im Anhange findet man die Niederschlagssummen der Jahreszeiten zu Padua 1725 bis 1900 in Millimetern, dann auch in Procenten des 176jährigen Mittels ausgedrückt, ferner die Niederschlagsmengen der Jahreszeiten zu Klagenfurt 1813—1900 in Millimetern. Zur Berechnung der Veränderlichkeit wurden die in Procenten ausgedrückten Niederschlagsmengen verwendet.

Mittlere Veränderlichkeit.

Padua, 176 Jahre:

Winter. $v = \pm 42 \cdot 9\%_0$. — Zahl der positiven Abweichungen 73, deren Mittel +51·6. Zahl der negativen Abweichungen 101, deren Mittel —37·4 (2 Null); Verhältnis der Größe der positiven zu jenen der negativen Abweichungen 1·38.

Sommer. $v = \pm 30 \cdot 6\%_0$. — Zahl der positiven Abweichungen 78, deren Mittel +34·7. Zahl der negativen Abweichungen 97, deren Mittel —27·7 (1 Null), Verhältnis positiv zu negativ 1·25.

Im Winter sind die positiven Abweichungen um $38\%_0$ größer, im Sommer nur um $25\%_0$.

Klagenfurt, 88 Jahre:

Winter. $v = \pm 36 \cdot 7\%_0$. — 40 positive Abweichungen, Mittel +41, 46 negative, Mittel —34·5 (2 Null), Verhältnis 1·19.

Sommer. $v = \pm 21 \cdot 6$. — Zahl der positiven Abweichungen 41, Mittel derselben +23·1. Zahl der negativen Abweichungen 45 (2 Nullen), Mittel derselben —21·1, Verhältnis 1·09. Das Verhältnis der positiven zu den negativen Abweichungen ist in Klagenfurt viel kleiner als in Padua; der Unterschied in der Größe derselben ist viel geringer.

Das Verhältnis der Veränderlichkeit der Winter- zu jenem der Sommerniederschläge ist zu Padua 1·40, zu Klagenfurt aber 1·70, also viel extremer. Für Klagenfurt habe ich auch die Häufigkeit der Zeichenwechsel und der Zeichenfolgen, von einem Winter und Sommer zum nächsten gezählt. Die Winter ergeben 46 Folgen und 41 Wechsel, also eine geringe Tendenz zur Erhaltung der gleichen Abweichung; auf einen nassen oder trockenen Winter folgt etwas häufiger im nächsten Jahre wieder ein nasser oder ein trockener Winter.

Im Sommer gab es dagegen nur 42 Zeichenfolgen, aber 44 Zeichenwechsel, es sind also die Wechsel häufiger.

Trotzdem aber gibt es gerade im Sommer längere Folgen von gleichen Abweichungen, namentlich folgen sich oft trockene Sommer ganz ungewöhnlich lange. Die folgende Tabelle lässt dieses bemerkenswerte Verhältnis überblicken.

Klagenfurt. Abweichungen der Sommerniederschläge (in Procenten ausgedrückt) vom 88jährigen Mittel.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1810	—	—	—	—8	39	33	6	0	—50	—28	
20	6	21	—37	—12	4	39	—58	33	18	19	
30	5	35	—23	22	—31	—26	6	—28	28	—16	
40	62	—6	—5	—24	67	—10	—5	—24	—7	23	
50	19	—1	—25	—36	—12	—3	11	—62	—31	—17	
60	—10	—36	—18	—17	40	—22	30	—4	—28	—19	
70	20	0	—1	—51	50	—2	21	—13	7	13	
80	39	31	58	—34	25	—10	2	—9	23	19	
90	—10	17	7	1	5	—30	17	6	19	—38	—16

In den Jahren 1841 bis 1863 gab es eine ganz auffallende Folge trockener Sommer mit geringen Unterbrechungen, die Sommer 1857 bis 1863 waren sämmtlich zu trocken, nachdem vorher schon 1851 bis 1855 inclusive zu trocken gewesen. Gleich lange Folgen nasser Sommer gibt es nicht. Von 1827 bis 1831 inclusive folgten sich fünf sehr nasse Sommer, dann wieder von 1878 bis 1882 inclusive. Die Zeit der auffallend trockenen Sommer fällt in die Decennien 1830 bis 1860 inclusive (28 trockene und 12 nasse Sommer).

Absolute Extreme.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Größte Niederschlagsmengen in Procenten des Mittelwertes					
Padua (1801—1900) ...	211 [1]	205 [1]	259	203	143
Klagenfurt (1813—1900)	231	259	167	223	143
Kleinste Niederschlagsmengen in Procenten des Mittelwertes					
Padua (1801—1900) ...	5	26	25	29	56
Klagenfurt (1813—1900)	22	26	38	25	43

[1] Im Jahre 1772 hatte der Winter 409, der Frühling 249%.

Die Maxima sind, mit Ausnahme des Sommers, in Klagenfurt höher als in Padua. Daselbst fielen im Sommer 1896 259% der normalen Niederschlagsmenge, aber auch die nächsten Maxima sind höher als zu Klagenfurt (189% 1819 und 179% 1836). In Padua ist der Winter oft sehr trocken, der Winter 1817 hatte auch nur 6% (1849 5%), der Winter 1833 14%.

Häufigkeit von Abweichungen in gleichem Sinne in sich unmittelbar folgenden Jahreszeiten.

Sich folgende Jahreszeiten	Zahl								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Padua, 100 Jahre (1801—1900)									
Folgen zu nasser Jahreszeiten	19	15	3	3	—	—	—	—	—
» » trockener »	17	14	9	3	2	1	2	0	2
Mailand (nach Pini)									
Folgen zu nasser Jahreszeiten.....	18	6	5	3	0	1	—	—	—
» » trockener »	16	9	9	3	4	1	—	—	—

Zu Padua, wie zu Mailand ist eine längere Folge zu trockener Jahreszeiten häufiger, als eine gleiche Folge zu nasser Jahreszeiten. Zu Padua folgten sich von Herbst 1815 bis Winter 1818 inclusive constant zu trockene Jahreszeiten, der Winter 1817 hatte nur 6% der normalen Niederschlagsmenge, das meteorologische Jahr 1817 hatte 59%, 1816 und 1817 im Mittel auch nur 63%.

Die Veränderlichkeit der Monatssummen des Niederschlages zu Padua und Klagenfurt.

Die folgende Tabelle enthält in übersichtlicher Zusammenstellung alle auf die Veränderlichkeit der Monatssummen der Niederschläge bezüglichen Daten.

Mittlere und absolute Abweichungen der Monatssummen der Niederschläge.

	Mittlere Abweichung		Häufigkeit		Größe der Positiven		Größe der Negativen	
	Millimeter	Procente	positive	negative	Millimeter	Procente	Millimeter	Procente
I. Padua 176 Jahre								
Jänner	35	63	75	101	41	75	30	54
Februar	31	**67**	79	97	35	74	28	**60**
März	33	54	78	98	37	61	30	49
April	37	50	80	96	42	55	35	45
Mai........	35	41	79	97	39	46	31	36*
Juni	34	40*	82	94	37	43*	32	37
Juli........	33	51	74	102	39	60	29	44
August	33	50	75	101	39	59	29	44
September ..	37	49	75	101	44	58	32	42
October	44	45	81	95	48	49	40	42
November ..	45	52	74	102	52	62	39	46
December...	41	65	73	103	50	**79**	35	**60**
Mittel	36·5	52	77	99	42	60	32·5	47
II. Klagenfurt 88 Jahre								
Jänner	25	66	32	56	34	**91**	20	52
Februar	25	**72**	34	54	33	**95**	20	**58**
März	26	51	44	44	27	52	26	50
April.......	32	49	39	49	36	56	29	44
Mai	43	45	39	49	48	51	39	41
Juni	41	37	38	50	47	43	36	32
Juli........	44	35*	40	48	48	39	41	32*
August.....	45	37	44	44	45	37*	44	37
September ..	45	45	36	51	54	55	39	39
October	50	48	41	47	54	52	46	45
November ..	44	58	37	51	52	68	38	50
December...	37	69	36	52	46	85	32	**58**
Mittel	38	51	38	50	44	60	34	45

Die größte Veränderlichkeit in absolutem Maße zeigen in Padua wie in Klagenfurt die Herbst- und Sommermonate, aber in Bezug auf die normale Niederschlagsmenge ist die mittlere Abweichung weitaus am größten im Winter, am kleinsten im Sommer. Im Winter erreicht die Veränderlichkeit im Mittel 67% der normalen Menge, im Sommer beträgt sie nur 40% im Mittel. Der durchschnittliche Betrag der mittleren Abweichungen ist in Padua und Klagenfurt sehr übereinstimmend 51 bis 52% der normalen Monatssumme.

Die positiven Abweichungen sind seltener und größer als die negativen, die Zahl der negativen Abweichungen ist im Mittel um circa 30% größer als die der positiven. Der mittlere Betrag der positiven Abweichungen erreicht zu Klagenfurt und Padua übereinstimmend 60% der normalen Monatssumme (oder circa 43 *mm*), während der mittlere Betrag der negativen Abweichungen sich bloß auf 46% (circa 33 *mm*) erhebt.

Von 2112 Monaten (1725—1900) waren zu Padua 925 zu nass und 1187 zu trocken. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Monat zu nass ist, beträgt also 0·438, die Wahrscheinlichkeit eines trockenen Monates dagegen ist 0·562, also erheblich größer. Zu Klagenfurt gab es 460 zu nasse Monate, dagegen 595 zu trockene, die Wahrscheinlichkeit eines nassen Monates ist daher 0·436, die eines zu trockenen 0·564. Die Übereinstimmung ist eine, man kann sagen, vollständige. Es beträgt die

Wahrscheinlichkeit eines zu nassen	Monates	0·437,
» » » trockenen	»	0·563.

Erhaltungstendenz einer bestehenden Abweichung. Für Klagenfurt ergab die Auszählung der Zeichenfolgen und der Zeichenwechsel zwischen je zwei sich folgenden Monaten:

Zahl der Zeichenfolgen	557,	Wahrscheinlichkeit	0·527,
» » Zeichenwechsel . . .	499,	»	0·472.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit eines Zeichenwechsels ist aber $2 \times 0·436 \times 0·564 = 0·491$. Es besteht also eine Tendenz zur Erhaltung einer bestehenden Abweichung, die allerdings nicht sehr groß ist, für sich folgende Monate.

Die Auszählung der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel aus den Abweichungen der Monatssummen der Niederschläge zu Padua 1801 bis 1900 ergab folgende Resultate, die ich ihres Interesses halber im Detail für Decennien anführen will.

	1801—1810	1811—1820	1821—1830	1831—1840	1841—1850	1851—1860	1861—1870	1871—1880	1881—1890	1891—1900
Zahl der Zeichenfolgen ...	69	66	69	67	66	67	64	64	71	72
» » Zeichenwechsel ..	51	54	51	53	54	53	56	56	49	48

Der Überschuss der Zeichenfolgen gegen die Zeichenwechsel bleibt von einem Decennium zum anderen in bemerkenswerter Weise constant.

Die Summe der Zeichenfolgen beträgt 675, die der Zeichenwechsel dagegen 525. Die Wahrscheinlichkeit einer Fortdauer des Zeichens der Abweichung von einem Monate zum nächsten stellt sich demnach heraus:

Wahrscheinlichkeit einer Zeichenfolge....... 0·5625,
» eines Zeichenwechsels .. 0·4375.

Die Erhaltungstendenz ist hier erheblich größer als zu Klagenfurt. Die theoretische Wahrscheinlichkeit eines Zeichenwechsels ist

$$2 \times 0{\cdot}438 \times 0{\cdot}562 = 0{\cdot}492.$$

Köppen hat die Differenz 0·492—0·437 dividiert durch 0·492 = 0·112 den Index der Erhaltungstendenz genannt. Für Klagenfurt beträgt derselbe bloß 0·037.

Extreme Abweichungen. Die größten positiven Abweichungen traten in Padua im December und Jänner, in Klagenfurt im October und November ein (zweimal über 200 *mm*). Secundäre Maxima haben Mai und Juni. Da der Betrag der Minima nicht unter den Mittelwert hinabgehen kann, sind die kleinsten Werte in der regenärmsten Zeit zu finden.

Extreme Abweichungen der Monats- und Jahressummen von den 176- und 88jährigen Mitteln (Millimeter).

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
Padua 1725—1900												
Maxima +												
252	127	119*	153	195	147	144	207	167	208	195	241	702
Minima —												
55	47*	61	76	70	82	63	62	75	90	85	63	381
Klagenfurt 1813—1900												
Maxima +												
127	117	101*	154	165	166	160	117*	146	203	247	143	498
Minima —												
38	34*	51	65	92	79	108	100	97	95	65	54	561

Die Tabellen der Abweichungen der Niederschläge in den einzelnen Monaten würden noch manche Untersuchungen über die Eigenthümlichkeiten der Niederschlagsverhältnisse gestatten. Bemerkenswert ist z. B., dass ein und derselbe Monat viele sich folgende Jahre hindurch einen zu geringen Niederschlag hat, die längere unmittelbare Folge von positiven Abweichungen ist seltener. Um nur einen Fall namentlich anzuführen, zeigt die Tabelle der Abweichungen zu Klagenfurt, dass dort die sich folgenden Octobermonate 1827 bis 1840 inclusive, also 14 Jahre hindurch eine zu geringe Regenmenge hatten. Die längste Reihe positiver Abweichungen war die von 1881 bis

1890 inclusive, gerade ein Decennium umfassend. Die Junimonate waren von 1851 bis 1863 mit einer einzigen geringen Unterbrechung (1860 +9 *mm*) zu trocken, also 12mal hintereinander. Der eigenthümliche Umstand, dass derselbe Monat eine ganze Reihe von Jahren hindurch den gleichen Charakter der Abweichung bewahrt, würde eine speciellere Untersuchung verdienen. Es müssen trotz der Wechsel in der Zwischenzeit von einem Jahre zum anderen oft längere Zeit hindurch in den gleichen Monaten dieselben Wetterlagen wieder sich einstellen.

Häufigkeit längerer unmittelbarer Folgen von zu nassen und zu trockenen Monaten.

Ich habe aus den 176jährigen Beobachtungen von Padua und den 88jährigen von Klagenfurt ausgezählt, wie oft 2, 3, 4, 5 etc. Monate die gleiche Abweichung (dem Sinne nach) gezeigt haben, also die Häufigkeit einer ununterbrochenen Folge von nassen und trockenen Monaten. In der Abhandlung von Pini über die Regenverhältnisse von Mailand, die ich schon früher citiert habe, fand ich, dass Pini dasselbe für die 80jährigen Regenaufzeichnungen (1805—1884) auch schon geleistet. Derart konnte ich für Padua, Klagenfurt und Mailand die nachfolgende kleine Tabelle zusammenstellen.

Man findet, dass an jedem der drei Orte eine längere Andauer zu trockener Monate erheblich häufiger ist, als jene der zu nassen Monate. Zwei sich folgende Monate sind aber etwas häufiger zu nass als zu trocken (im Verhältnis von 68·2 zu 66·6), dagegen sind drei sich folgende Monate gleichen Charakters schon viel häufiger zu trocken als zu nass, und das gilt dann auch für noch längere Folgen.

Ich habe dann die drei Reihen zu Summen zusammengefasst und durch Division mit 176+88+80 auf je 100 Jahre reduciert, um die Zahlen übersichtlicher zu machen und ihnen eine leichter in Worte zu fassende Bedeutung zu geben. Unter 1200 Monaten kommt es hiernach 127mal vor, dass sich zwei und mehr Monate mit zu viel Niederschlag unmittelbar folgen und 160mal, dass sich zu trockene Monate in dieser Weise folgen.

Häufigkeit einer unmittelbaren Folge einer gewissen Anzahl zu trockener und zu nasser Monate zu Padua, Klagenfurt und Mailand.

Zahl der sich folgenden Monate gleichen Zeichens	Padua (176 Jahre)		Klagenfurt (88 Jahre)		Mailand (80 Jahre)		Häufigkeit der Fälle reduciert auf 100 Jahre	
	nass	trocken	nass	trocken	nass	trocken	nass	trocken
2	117	116	64	68	54	45	68·2	66·6
3	46	61	26	34	27	36	28·8	38·1
4	30	42	15	15	9	23	15·7	23·2
5	13	25	2	8	6	8	6·1	11·9
6	12	15	3	9	0	5	4·4	8·4
7	3	7	3	2	3	4	2·6	3·8
8	0	6	0	2	1	3	0·3	3·2
9	1	2	0	1	0	1	0·3	1·2
10	0	1	0	1	0	1	—	0·9
11	0	3	0	1	0	0	—	1·2
12	0	0	0	0	0	2	—	0·6
13	1	0	0	1	0	0	0·3	0·3
14	0	1	0	(1)	0	0	—	0·6
Summe....	223	279	113	143	100	128	127	160

In Klagenfurt folgten einmal 18 zu trockene Monate unmittelbar nacheinander (August 1834 bis December 1836 inclusive; aber auch die vorausgehenden Monate October 1833 bis Juni 1834 waren zu trocken, nur der Juli 1834 hatte eine Abweichung von +24 *mm*). Ähnlich lange Folgen zu nasser Jahre kommen nicht vor (Padua hatte einmal in 176 Jahren 13 zu nasse Monate in unmittelbarer Folge).

Die absolute Anzahl der zu trockenen und zu nassen Monate, die mindestens paarweise vorgekommen sind, würde man natürlich erhalten, wenn man die Zahl der Fälle mit der Dauer der zu trockenen und nassen Perioden multiplicieren würde. So geben 28·8 nasse Perioden von je 3 Monaten 86·4 zu nasse Monate, die nicht vereinzelt vorgekommen sind, und 38·1 Trockenperioden von je 3 Monaten desgleichen 114·3 zu trockene Monate, von denen das gleiche gilt u. s. w.

Von 1200 Monaten traten rund 370 nasse Monate nicht vereinzelt auf, und desgleichen 555 zu trockene Monate. Die Wahrscheinlichkeit, dass von nassen Monaten sich mindestens je zwei folgen, ist daher 0·31; die Wahrscheinlichkeit, dass trockene Monate nicht vereinzelt auftreten, 0·46. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt Monate gleichen Charakters (seien es nasse oder trockene) nicht vereinzelt eintraten, 0·77. Diese Wahrscheinlichkeit ist demnach eine sehr große.

Fassen wir die Ergebnisse der Schlusstabelle in etwas größere Intervalle zusammen, so können wir folgende Zahlenreihen aufstellen:

Häufigkeit einer Folge von Monaten gleichen Charakters.

	Monate				
	12—14	9—14	6—14	4—14	2—14
nass	0·3	0·6	7·9	29·7	126·7
trocken	1·5	4·8	20·2	55·3	160·0
trocken oder nass	1·8	5·4	28·1	85·0	286·7

Man sieht, wie bei den längeren Folgen die trockenen Monate das Übergewicht haben. Folgen von 9—14 Monaten gleichen Charakters kommen bei trockenen Monaten 8mal häufiger vor als bei nassen, sie sind aber bei 6—14 Monaten nur mehr kaum 3mal, bei 4—14 nicht einmal 2mal häufiger als die gleichen Folgen nasser Monate.

Anhang.

Tabelle I.

Monats- und Jahressummen des Niederschlages zu Padua 1725—1900.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1725	13	0*	10	89	84	34	45	71	101	**152**	143	17	759
26	18	51	4*	**171**	19	43	84	57	44	30	62	46	629
27	119	70	8*	49	44	90	41	77	**170**	154	111	**229**	1162
28	137	3*	28	130	80	77	92	114	143	**154**	86	**304**	1348
29	40	30*	81	64	46	94	77	65	44	**150**	133	100	924
30	0*	25	127	74	56	**183**	100	106	31	99	39	31	871
1731	29*	74	40	67	58	91	82	**150**	65	65	111	34	866
32	51	53	48	141	46	64	45	83	25	72	**186**	0*	814
33	137	10	92	68	**186**	89	69	116	17	85	10	0*	879
34	37	16*	81	19	122	93	**176**	120	64	114	16*	103	961
35	**111**	47	**110**	92	81	78	79	83	20	60	0*	14	775
36	56	**157**	91	54	86	96	42	44	46	58	27*	35	792
37	4*	24	43	29	78	93	20	25	29	**226**	17	18	606
38	10	9*	65	50	82	119	**153**	20	71	59	57	18	713
39	28	18*	62	104	36	24	57	88	51	**122**	21	34	645
40	69	17	36	34	**83**	73	45	17	7*	63	67	59	570

1741	81	2*	24	12	96	56	58	26	44	60	50	**105**	614
42	**151**	1*	25	94	82	100	8	44	106	110	134	127	991
43	8	1*	67	81	126	100	57	86	7	**130**	48	6	717
44	28	37	74	107	38	60	**168**	64	104	116	96	14*	906
45	9*	107	86	81	89	29	61	56	12	52	**210**	171	963
46	74	81	55	179	15	146	11*	66	115	**212**	56	46	1056
47	28	56	53	71	34	28	68	68	**114**	64	1*	64	649
48	23	57	44	114	77	139	126	107	**144**	65	140	16*	1052
49	65	75	44	124	117	**216**	10	105	56	24	79	3*	918
50	57	7	3*	126	**151**	37	96	50	13	112	98	71	821
1751	28*	161	36	153	75	89	97	30	23	**273**	79	29	1073
52	70	108	34	122	113	37	**134**	190	17*	26	55	55	961
53	92	107	62	93	54	70	86	46	98	115	**142**	35*	1000
54	19	55	96	7*	**154**	71	59	74	24	34	74	38	705
55	15	59	124	1*	41	84	140	103	67	149	**235**	83	1101
56	5*	16	31	40	92	20	149	45	149	117	135	**195**	994
57	73	31	22	47	84	**155**	14*	70	129	69	22	82	798
58	38	68	73	128	100	156	77	37*	89	96	**159**	90	1111
59	7*	32	63	139	92	31	35	49	78	88	122	**183**	919
60	110	49	17*	39	68	85	94	77	42	116	**146**	44	887

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1761	1*	18	56	**166**	72	**146**	**48**	**86**	94	**184**	160	**95**	1126
62	13	6	19	**5***	35	**98**	21	**66**	68	**190**	39	12	572
63	**66**	**86**	22	39	**280**	165	27	46	71	11*	36	98	947
64	40	**86**	82	**42**	97	98	62	23*	79	85	**191**	184	1069
65	**85**	60	**54**	112	121	59	**146**	59	43	109	123	11*	982
66	9*	32	59	87	83	79	**122**	52	74	96	117	31	841
67	73	32	63	**91**	**127**	107	61	91	86	89	64	18*	902
68	**99**	0*	2	61	**105**	54	45	**44**	**105**	82	79	87	763
69	127	124	**154**	120	103	83	50	43	5*	64	136	52	1061
70	137	123	123	141	118	55	67	102	54	**286**	136	30*	1372
1771	102	76	116	61	32	**136**	129	30	117	34	2*	**227**	1062
72	**307**	150	103	218	231	49	26*	72	69	32	173	133	1563
73	68	84	**26***	93	111	121	102	70	128	20	**230**	76	1129
74	55	71	43	73	**165**	66	60	40	99	37	31	20*	760
75	32	19	56	10*	153	72	142	81	50	67	**212**	22	916
76	90	109	47	105	104	69	31	38	**151**	112	73	14*	943
77	122	97	56	49	72	**233**	115	6*	66	196	26	140	1184
78	65	32	**74**	82	44	129	9*	59	109	77	**146**	40	866
79	0*	0*	1	22	55	150	64	126	55	**151**	129	75	826
80	58	54	10*	77	20	85	41	**140**	120	111	75	21	812

1781	47	35	52	95	93	180	42	78	96	89	111	10	940
82	53	50	41	154	39	79	25	8	18	192	128	34	821
83	56	58	112	14	140	65	57	58	124	86	2	53	825
84	87	55	117	74	37	81	15	37	48	99	36	105	791
85	54	115	40	34	61	107	129	33	23	93	58	171	918
86	121	5	106	39	87	114	80	36	112	46	199	92	1037
87	46	22	143	86	90	46	53	60	74	57	77	98	852
88	126	80	88	27	34	67	59	54	75	22	87	105	824
89	57	31	140	4	43	47	43	46	53	129	95	60	748
90	13	2	14	79	65	65	46	41	20	162	57	33	597
1791	102	50	23	39	70	36	45	42	35	73	81	83	679
92	111	11	34	26	45	94	43	45	66	84	71	40	670
93	83	35	170	115	119	13	81	27	125	39	42	98	947
94	78	0	17	29	51	228	72	125	181	121	91	48	1041
95	29	101	27	37	40	78	186	67	98	154	66	14	897
96	40	48	44	19	138	43	35	23	160	128	70	97	845
97	52	10	75	89	55	71	17	16	162	115	35	25	722
98	16	13	103	50	28	139	40	74	123	48	112	122	868
99	5	57	105	144	194	190	60	55	66	138	43	64	1121
1800	197	81	38	9	40	171	38	52	38	46	173	120	1003

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1801	34	81	27	35	22	58	70	25	196	132	125	98	903
02	76	174	72	34	121	36	23	10	19	126	280	139	1110
03	135	78	75	11	110	45	203	85	54	75	121	150	1142
04	133	39	121	96	79	106	65	112	8	146	72	153	1130
05	112	33	11	59	156	100	80	114	83	96	2	47	893
06	51	83	96	102	66	83	66	153	103	53	105	30	991
07	32	37	86	143	86	128	98	94	104	151	181	44	1184
08	89	28	11	23	23	115	86	72	88	108	62	33	738
09	78	19	19	181	74	61	93	56	150	124	140	94	1089
10	116	83	68	41	46	99	86	74	61	99	154	46	973
1811	63	5	22	104	70	117	95	35	59	62	14	15	661
12	28	63	132	64	47	86	187	83	76	143	48	72	1029
13	94	15	12	40	15	81	45	59	96	78	80	114	729
14	103	0	59	100	40	150	47	79	14	127	24	96	839
15	43	22	18	42	49	111	110	99	72	64	62	26	718
16	33	24	11	35	94	44	20	55	32	120	84	1	553
17	8	1	19	17	93	72	50	53	33	139	26	64	575
18	30	34	81	52	120	64	57	121	60	58	67	83	827
19	41	48	70	28	30	125	66	219	21	141	56	17	863
20	57	64	48	38	23	23	27	4	64	64	56	47	515

1821	40	0	55	29	85	103	88	90	19	86	5	71	671
22	24	0	15	40	50	46	40	30	26	135	(28)	46	480
23	72	81	51	58	92	117	15	19	(71)	107	45	51	779
24	(21)	36	82	62	31	127	38	60	84	163	(28)	(31)	763
25	(22)	(8)	(53)	5	44	54	74	71	(51)	(42)	80	156	860
26	(22)	48	12	47	92	119	117	37	126	155	200	15	990
27	4	(60)	26	70	119	161	42	135	104	55	(38)	27	841
28	31	48	49	55	86	51	26	27	44	42	141	17	617
29	71	9	135	93	42	33	33	82	104	89	48	61	800
30	(29)	5	(23)	26	55	106	10	40	155	26	39	83	597
1831	72	12	11	126	81	137	93	100	107	21	20	10	790
32	30	55	77	60	86	126	18	39	53	37	88	4	673
33	3	16	101	147	34	86	209	80	146	32	92	3	949
34	68	40	3	31	52	54	35	138	8	20	52	0	501
35	24	43	60	103	72	59	2	273	130	88	53	5	912
36	11	161	49	162	186	59	73	16	120	80	33	8	958
37	42	31	82	141	223	47	161	7	34	41	87	55	952
38	50	143	54	108	133	46	33	31	87	36	74	26	821
39	17	16	78	69	62	45	28	63	71	96	162	102	809
40	11	30	4	58	117	17	66	71	83	74	57	26	614

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1841	54	62	35	46	39	121	9	53	65	103	26	100	713
42	30	49	14	62	133	92	51	8	157	58	41	4	699
43	79	140	41	97	120	71	52	55	21	34	42	0	752
44	37	100	33	2	132	91	102	24	83	133	123	73	933
45	133	70	130	106	180	86	67	177	99	54	111	52	1265
46	16	0	37	78	76	43	47	140	98	266	54	102	957
47	49	20	0	48	38	106	76	87	79	62	71	112	748
48	24	85	99	62	95	61	75	12	99	145	86	0	843
49	7	1	69	121	62	75	28	27	74	78	63	75	680
50	41	10	19	229	67	65	89	53	34	263	35	43	948
1851	17	27	52	108	140	4	70	94	242	96	180	0	1030
52	8	29	26	18	49	77	91	39	150	142	65	53	747
53	85	76	180	104	80	84	12	57	58	154	63	81	1034
54	59	21	8	100	103	76	34	29	27	81	68	112	718
55	(80)	149	110	101	129	107	35	53	136	80	144	15	1139
56	114	62	55	63	181	61	85	22	151	94	49	78	1015
57	54	(16)	87	107	61	19	55	41	49	104	51	9	653
58	0	(45)	75	111	60	15	59	87	32	179	84	59	806
59	0	28	11	59	102	108	27	42	110	144	75	103	809
60	42	39	10	118	58	117	131	33	55	19	117	145	884

1861	(22)	73	42	57	66	45	41	19	46	28	69	(25)	533
62	88	42	160	47	59	103	10	123	128	72	254	44	1128
63	97	2	121	24	85	47	21	24	62	132	146	28	789
64	(22)	147	57	43	81	89	40	18	67	82	92	52	790
65	45	11	71	0	47	58	18	85	0	145	120	19	619
66	18	36	167	116	83	81	52	53	67	39	10	9	731
67	106	30	109	35	88	90	22	114	98	77	58	35	862
68	34	0	34	89	30	110	93	172	117	85	90	59	913
69	29	33	126	103	89	134	25	13	157	80	45	249	1083
70	40	47	49	11	16	49	36	145	13	73	120	99	698
1871	113	1	62	38	53	147	2	35	59	19	161	22	712
72	43	50	76	60	85	137	50	93	9	304	56	125	1088
73	111	106	76	116	77	47	52	61	66	115	86	6	919
74	13	63	14	47	104	115	42	24	33	31	56	178	720
75	14	39	29	47	81	74	103	88	32	166	73	75	821
76	128	28	83	108	106	138	127	69	47	6	99	93	1032
77	31	28	85	118	253	89	83	19	59	6	106	94	971
78	25	0	55	124	51	103	42	48	120	98	153	67	886
79	58	120	57	160	147	26	9	32	132	50	46	15	852
80	1	50	0	141	98	76	25	127	76	36	106	11	747

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1881	103	8	64	49	79	46	26	37	105	122	1	44	684
82	10	33	72	72	27	48	35	84	181	144	49	58	813
83	90	56	62	66	95	95	65	48	54	28	27	15	701
84	2	8	34	102	44	209	49	79	97	68	10	66	768
85	76	46	77	133	52	31	21	75	116	125	118	22	892
86	127	11	60	44	30	126	30	98	12	141	76	80	835
87	42	36	49	64	115	83	49	46	48	112	184	80	908
88	1	90	125	73	36	41	60	8	66	47	49	52	648
89	50	26	65	103	129	109	90	25	64	217	40	45	963
90	41	0	109	112	90	38	44	50	31	30	96	48	689
1891	19	0	63	86	96	31	76	48	43	118	54	37	671
92	83	115	162	133	84	35	159	71	44	40	49	16	991
93	10	54	18	14	75	34	99	19	70	39	116	32	580
94	23	0	27	112	80	45	61	33	41	84	43	14	563
95	75	66	106	101	131	127	7	57	16	142	20	108	956
96	2	56	6	38	97	150	140	271	72	116	123	115	1186
97	96	10	46	34	109	93	77	18	149	65	6	82	785
98	15	38	157	143	148	135	79	27	45	92	97	7	983
99	32	16	31	75	143	108	19	15	34	39	0	77	589
1900	93	67	128	64	162	78	56	42	50	45	178	30	993

Tabelle II.

Padua. Abweichungen des Niederschlages von den 176jährigen Mitteln.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1725	— 42	— 47	— 51	13	— 1	— 52	— 20	5	26	56	58	— 46	—102
26	37	4	— 57	95	— 66	— 43	19	— 9	— 31	— 66	— 23	— 17	— 232
27	64	23	— 53	— 27	— 41	4	— 24	11	95	58	26	166	301
28	82	— 44	— 33	54	— 5	— 9	27	48	68	58	1	241	487
29	— 15	— 17	20	— 12	— 39	8	12	— 1	— 31	54	48	37	63
30	— 55	— 22	66	— 2	— 29	97	35	40	— 44	3	— 46	— 32	10
1731	— 26	27	— 21	— 9	— 27	5	17	84	— 10	— 31	26	— 29	5
32	— 4	6	— 13	65	— 39	— 22	— 20	17	— 50	— 24	101	— 63	— 47
33	82	— 37	31	— 8	101	3	4	50	— 58	— 11	— 75	— 63	18
34	— 18	— 31	20	— 57	37	7	111	54	— 11	18	— 69	40	100
35	56	0	49	16	— 4	— 8	14	17	— 55	— 36	— 85	— 49	— 86
36	1	110	30	— 22	1	10	— 23	— 22	— 29	— 38	— 58	— 28	— 69
37	— 51	— 23	— 18	— 47	— 7	7	— 45	— 41	— 46	130	— 68	— 45	—255
38	— 45	— 38	4	— 26	— 3	33	88	— 46	— 4	— 37	— 28	— 45	—148
39	27	29	1	28	— 49	— 62	— 8	22	— 24	26	— 64	— 29	—216
40	14	30	25	— 42	2	13	20	49	68	— 33	— 18	— 4	291

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1741	26	— 45	— 37	— 64	11	— 30	— 7	— 40	— 31	— 36	— 35	42	— 247
42	96	— 46	— 36	18	— 3	14	— 57	— 22	31	23	49	64	130
43	— 47	— 46	6	5	41	14	— 8	20	— 68	34	— 37	— 57	— 144
44	— 27	— 10	13	31	— 47	— 26	103	— 2	29	20	11	— 49	45
45	— 46	60	25	5	4	— 57	— 4	— 10	— 63	— 44	125	108	102
46	19	34	— 6	103	— 70	60	— 54	0	40	116	— 29	— 17	195
47	— 27	9	— 8	— 5	— 51	— 58	3	2	39	— 32	— 84	1	— 212
48	— 32	10	— 17	38	— 8	53	61	41	69	— 31	55	— 47	191
49	10	28	— 17	48	32	130	— 55	39	— 19	— 72	— 6	— 60	57
50	2	— 40	— 58	50	66	— 49	31	— 16	— 62	16	13	8	— 40
1751	— 27	114	— 25	77	— 10	3	32	36	— 52	177	— 6	— 34	212
52	15	61	— 27	46	28	— 49	69	124	— 58	— 70	— 30	— 8	100
53	37	60	1	17	— 31	— 16	21	— 20	23	19	57	— 28	139
54	— 36	8	35	— 69	69	— 15	— 6	8	— 51	— 62	— 11	— 25	— 156
55	— 40	12	63	— 75	— 44	— 2	75	37	— 8	53	150	20	240
56	— 50	— 31	— 30	— 36	7	— 66	84	— 21	74	21	50	132	133
57	18	— 16	— 39	— 29	— 1	69	— 51	4	54	— 27	— 63	19	63
58	— 17	21	12	52	15	70	12	— 29	14	0	74	27	250
59	— 48	— 15	2	63	7	— 55	— 30	— 17	3	— 8	37	120	58
60	55	2	— 44	— 37	— 17	— 1	29	11	— 33	20	61	— 19	26

1761	54	29	6	90	13	60	17	20	10	88	75	32	265
62	— 42	41	42	— 71	— 50	12	— 44	0	— 7	94	— 46	— 51	289
63	11	39	— 39	— 37	195	79	— 38	— 20	— 4	— 85	— 49	35	86
64	— 15	39	21	— 34	12	12	— 3	— 43	4	— 11	106	121	208
65	30	13	— 7	36	36	— 27	81	— 7	— 32	13	38	— 52	121
66	— 46	— 15	— 2	11	— 2	— 7	57	— 14	— 1	0	32	— 32	— 20
67	18	— 15	2	15	42	21	— 4	25	11	— 7	21	— 45	41
68	44	— 47	— 59	— 15	20	— 32	— 20	— 22	30	— 14	— 6	24	— 98
69	72	77	93	44	18	— 3	— 15	— 23	— 70	— 32	51	— 11	200
70	82	76	62	65	33	— 31	2	36	— 21	190	51	— 33	511
1771	47	29	55	— 15	— 53	50	64	— 36	42	— 62	— 83	164	201
72	252	103	42	142	146	— 37	— 39	6	6	— 64	88	70	702
73	13	37	— 35	17	26	35	37	4	53	— 76	145	13	268
74	0	24	— 18	— 3	80	— 20	— 5	— 26	24	— 59	— 54	— 43	— 101
75	— 23	— 28	— 5	— 66	68	— 14	77	15	— 25	— 29	127	— 41	55
76	55	62	— 14	29	19	— 17	— 34	— 28	76	16	— 12	— 49	82
77	67	50	— 5	— 27	— 13	147	50	— 60	— 9	100	— 59	83	323
78	10	— 15	13	6	— 41	43	— 56	— 7	34	— 19	61	— 23	5
79	— 55	— 47	— 60	— 54	— 30	64	— 1	60	— 20	55	44	12	— 35
80	3	7	— 51	1	— 65	— 1	— 24	74	45	15	— 10	— 42	— 49

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1781	— 8	— 12	— 9	19	8	100	— 23	12	21	— 7	26	— 47	79
82	— 2	3	— 20	78	— 46	— 7	— 40	— 58	— 57	96	43	— 29	— 40
83	1	11	51	— 62	55	— 21	— 8	— 8	49	— 10	— 83	10	— 36
84	32	8	56	— 2	— 48	— 5	— 50	— 29	— 27	3	— 49	42	— 70
85	— 1	68	— 21	— 42	— 24	21	64	— 33	— 52	— 3	— 27	108	57
86	66	— 42	45	— 37	2	28	15	— 30	37	— 50	114	29	176
87	9	25	82	10	5	— 40	— 12	6	— 1	— 39	— 8	35	— 9
88	71	33	27	49	— 51	— 19	— 6	— 12	0	74	2	42	— 37
89	2	— 16	79	— 72	— 42	— 39	— 22	— 20	— 22	33	10	— 3	— 113
90	— 42	— 45	— 47	3	— 20	— 21	— 19	— 25	— 55	66	— 28	— 30	—264
1791	47	3	— 38	— 37	— 15	— 50	— 20	— 24	— 40	— 23	— 4	20	—182
92	56	— 36	— 27	50	— 40	8	22	— 21	— 9	— 12	14	— 23	— 191
93	28	— 12	109	39	34	— 73	16	— 39	50	57	— 43	35	86
94	23	— 47	— 44	— 47	— 34	142	7	59	106	25	6	— 15	180
95	— 26	54	— 34	— 39	— 45	— 8	121	1	23	58	— 19	— 49	36
96	— 15	1	— 17	— 57	53	— 43	— 30	— 43	85	32	— 15	34	— 16
97	— 3	— 37	14	13	— 30	— 15	— 48	— 50	87	19	— 50	38	— 139
98	— 39	34	42	— 26	— 57	53	— 25	8	48	— 48	27	59	7
99	— 50	10	44	68	109	104	— 5	— 11	— 9	42	— 42	1	260
1800	142	34	23	— 67	— 45	85	27	14	37	50	88	57	142

1801	21	34	- 34	- 41	63	28	5	41	121	36	40	35	42
02	21	127	11	- 42	36	50	- 42	- 56	- 56	30	195	76	249
03	80	31	14	- 65	25	- 41	138	19	- 21	- 21	36	87	281
04	78	- 8	60	20	- 6	20	0	46	- 67	50	- 13	90	260
05	57	- 14	- 50	- 17	71	14	15	48	8	0	- 83	- 16	32
06	- 4	36	35	26	- 19	- 3	1	87	28	- 43	20	- 33	130
07	- 23	- 10	25	67	1	42	33	28	29	55	96	- 19	323
08	34	- 19	- 50	- 53	- 62	29	21	6	13	12	- 23	- 30	- 123
09	23	- 28	- 42	105	- 11	- 25	28	- 10	75	28	55	31	228
10	61	36	7	- 35	- 39	13	21	8	- 14	3	69	- 17	112
1811	8	- 42	- 39	28	- 15	31	30	- 31	- 16	- 34	- 71	- 48	- 200
12	- 27	16	71	- 12	- 38	0	122	17	1	47	- 37	9	168
13	39	- 32	- 49	- 36	- 70	- 5	- 20	- 7	21	- 18	- 5	51	- 132
14	48	- 47	- 2	24	- 45	64	- 18	13	- 61	31	- 61	33	- 22
15	- 12	- 25	- 43	- 34	- 36	25	45	33	- 3	- 32	- 23	- 37	- 143
16	- 22	- 23	- 50	- 41	9	- 42	- 45	- 11	- 43	24	- 1	- 62	- 308
17	- 47	- 46	- 42	- 59	8	- 14	- 15	- 13	- 42	43	- 59	1	- 286
18	- 25	- 13	20	- 24	35	- 22	- 8	55	- 15	- 38	- 18	20	- 34
19	- 14	1	9	- 48	- 55	39	1	153	- 54	45	- 29	- 46	2
20	2	17	- 13	- 38	- 62	- 63	- 38	- 62	- 11	- 32	- 29	- 16	- 346

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1821	—15	—47	—6	—47	0	17	23	24	—56	—10	—80	8	—190
22	—31	—47	—46	—36	—35	—40	—25	—36	—49	39	—57	—17	—381
23	17	34	—10	—18	7	31	—50	—47	—4	11	—40	12	—82
24	—34	—11	21	—14	—54	41	—27	—6	9	67	—57	—32	—98
25	—33	—39	—8	—71	—41	—32	9	5	—24	—54	—5	93	—201
26	—33	1	—49	—29	7	33	52	—29	51	59	115	—48	129
27	—51	13	—35	—6	34	75	—23	69	29	—41	—47	—36	20
28	—24	1	—12	—21	1	—35	—39	—39	—31	—54	56	46	244
29	16	—38	74	17	—43	—53	—32	16	29	—7	—37	—2	—61
30	—26	—42	—38	—50	—30	20	—55	—26	80	—70	—46	20	264
1831	17	—35	—50	50	—4	51	28	34	32	—75	—65	—53	—71
32	—25	8	16	—16	1	40	—47	—27	—22	—59	3	—59	188
33	—52	—31	40	71	—51	0	144	14	71	64	7	—60	88
34	13	—7	—58	—45	—33	—32	—30	72	—67	—76	—33	—63	360
35	—31	—4	—1	27	—13	—27	63	207	55	—8	—32	—58	51
36	—44	114	—12	86	101	—27	8	—50	45	—16	—52	—55	97
37	—13	—16	21	65	138	—39	96	—59	—41	—55	2	—8	91
38	—5	96	—7	32	48	—40	—32	—35	12	—60	—11	—37	—40
39	—38	—31	17	—7	—23	—41	—37	—3	—4	0	77	39	—52
40	—44	—17	—57	—18	32	—69	1	5	8	—22	—28	—37	—247

1841	−1	15	−26	−30	46	35	−50	−13	10	7	59	37	−148
42	−25	2	−47	−14	48	6	−14	−58	82	−38	44	−59	−162
43	24	93	−20	21	35	−15	−13	−11	−54	62	−43	−63	−100
44	−18	53	−28	−74	47	5	37	−42	8	37	38	10	72
45	78	23	69	30	95	0	2	111	24	−42	26	−11	404
46	−39	−47	−24	2	−9	−43	−18	74	23	170	−31	39	96
47	−6	−27	−61	−28	−47	20	11	21	4	−34	−14	49	−113
48	−31	38	38	−14	10	−25	10	−54	24	49	1	63	−18
49	−48	−46	8	45	−23	−11	−37	−39	−1	−18	−22	12	−181
50	−14	−37	−42	153	−18	−21	24	−13	−41	167	−50	−20	87
1851	−38	−20	−9	32	55	−82	5	28	167	0	95	−63	169
52	−47	−18	−35	−58	−36	−9	26	−27	75	46	−20	−10	−114
53	30	29	119	28	−5	−2	−53	−9	−17	58	−22	18	173
54	4	−26	−53	24	18	−10	−31	−37	−48	−15	17	49	−143
55	25	102	49	25	44	21	−30	−13	61	−16	59	−48	278
56	59	15	−6	−13	96	−25	20	−44	76	−2	−36	15	154
57	−1	−31	26	31	−24	−67	−10	−25	−26	8	−34	−54	−208
58	55	−2	14	35	−25	−71	−6	21	−43	83	−1	−4	−55
59	−55	−19	−50	17	17	22	−38	−24	35	48	10	40	−52
60	13	−8	51	42	−27	31	66	33	20	77	32	82	23

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1861	— 33	26	— 19	— 19	— 19	— 41	— 24	— 47	— 29	— 68	— 16	— 38	—328
62	31	— 5	99	— 29	— 26	17	— 55	57	53	— 24	169	— 19	267
63	42	— 45	60	— 52	0	— 39	— 44	— 42	— 13	36	61	— 35	— 72
64	— 33	100	— 4	— 33	— 4	3	— 25	— 48	— 8	— 14	7	— 11	— 71
65	— 10	— 36	10	— **76**	— 38	— 28	— 47	19	— **75**	49	35	— 44	—242
66	— 37	— 11	106	40	— 2	— 5	— 13	— 13	— 8	— 57	— 75	— 54	—130
67	51	— 17	48	— 41	3	4	— 43	48	23	— 19	— 27	— 28	1
68	— 21	— **47**	— 27	13	— 55	24	28	106	42	— 11	5	— 4	52
69	— 26	— 14	65	27	4	48	— 40	— 53	82	— 16	— 40	186	222
70	— 15	0	— 12	— 65	— 69	— 37	— 29	79	— 62	— 23	35	36	—163
1871	58	— 46	1	— 38	— 32	61	— **63**	— 31	— 16	— 77	76	— 41	—149
72	— 12	3	15	— 16	0	51	— 15	27	— 66	**208**	— 29	62	227
73	56	59	15	40	— 8	— 39	— 13	— 5	— 9	19	1	— 57	58
74	— 42	16	— 47	— 29	19	29	— 23	— 42	— 42	— 65	— 29	115	—141
75	— 41	— 8	— 32	— 29	— 4	— 12	38	22	— 43	70	— 12	12	— 40
76	73	— 19	22	32	21	52	62	3	— 28	— **90**	14	30	171
77	— 24	— 19	24	42	168	3	18	— 47	— 16	— 90	21	31	110
78	— 30	— **47**	— 6	48	— 34	17	— 23	— 18	45	2	68	4	25
79	3	73	— 4	84	62	— 60	— 56	— 34	57	— 46	— 39	— 48	— 9
80	— 54	3	— **61**	65	13	— 10	— 40	61	1	— 60	21	— 52	—114

1881	48	— 39	3	— 27	6	40	39	29	30	26	84	19	—177
82	— 45	— 14	11	4	58	— 38	— 30	18	106	48	— 36	— 5	— 48
83	35	9	1	10	10	9	0	— 18	— 21	— 68	— 58	48	160
84	— 53	— 39	— 27	26	— 41	123	16	13	22	28	— 75	3	— 93
85	21	— 1	16	57	— 33	— 55	— 44	9	41	29	33	— 41	31
86	72	— 36	— 1	— 32	— 55	40	— 35	32	— 63	45	— 9	17	— 26
87	— 13	— 11	— 12	— 12	30	— 3	— 16	— 20	— 27	16	99	17	47
88	— 54	43	64	— 3	— 49	— 45	— 5	— 58	— 9	— 49	— 36	— 11	—213
89	— 5	— 21	4	27	44	23	25	— 41	— 11	121	— 45	— 18	102
90	— 14	— 47	48	36	5	— 48	— 21	— 16	— 44	— 66	11	— 15	—172
1891	— 36	— 47	2	10	11	— 55	11	— 18	— 32	22	— 31	— 26	—190
92	28	68	101	57	— 1	— 51	94	5	— 31	— 56	— 36	— 47	130
93	— 45	7	— 43	— 62	— 10	— 52	34	— 47	— 5	— 57	31	— 31	—281
94	— 32	— 47	— 34	36	— 5	— 41	— 4	— 33	— 34	— 12	— 42	— 49	—298
95	20	19	45	25	46	41	— 58	— 9	— 59	46	— 65	45	95
96	— 53	9	— 55	— 38	12	64	75	205	— 3	20	33	52	325
97	41	— 37	— 15	— 42	24	7	12	— 48	74	— 31	— 79	19	— 76
98	— 40	— 9	96	67	63	49	14	— 39	— 30	— 4	12	— 56	122
99	— 23	— 31	— 30	— 1	58	22	— 46	— 51	— 41	— 57	— 85	14	—272
1900	38	20	67	— 12	77	— 8	— 9	— 24	— 25	— 51	53	— 33	132

Tabelle III.

Padua. Regensummen der meteorologischen Jahreszeiten und des meteorologischen Jahres.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1725	—	183	150	396	(759)
26	86	194	184	136	600
27	235	101	208	435	979
28	369	238	283	383	1273
29	374	191	236	327	1128
30	125	257	389	169	940
1731	134	165	323	241	863
32	138	235	192	283	848
33	147	346	274	112	879
34	53	222	389	194	858
35	361	283	240	80	964
36	227	231	182	131	771
37	63	150	138	272	623
38	37	197	292	187	713
39	64	202	169	194	629
40	120	153	135	137	545
1741	142	132	140	154	568
42	257	201	152	359	969
43	136	274	243	185	838
44	71	219	292	316	898
45	130	256	146	274	806
46	326	249	223	383	1181
47	130	158	164	179	631
48	144	235	372	349	1100
49	156	285	331	159	931
50	67	280	183	223	753

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1751	260	264	216	375	1115
52	207	269	361	98	935
53	254	209	202	355	1020
54	109	257	204	132	702
55	112	166	327	451	1056
56	104	163	214	401	882
57	299	153	239	220	911
58	188	301	270	344	1103
59	129	294	115	288	826
60	342	124	256	304	1026
1761	63	294	280	438	1075
62	114	59	185	297	655
63	164	341	238	118	861
64	224	221	183	355	983
65	329	287	264	275	1155
66	52	229	253	287	821
67	136	281	259	239	915
68	117	168	143	266	694
69	338	377	176	205	1096
70	312	382	224	476	1394
1771	208	209	295	153	865
72	684	552	147	274	1657
73	285	230	293	378	1186
74	202	281	166	167	816
75	71	219	295	329	914
76	221	256	138	336	951
77	233	177	354	288	1052
78	243	200	197	332	972
79	40	78	340	335	793
80	187	107	266	306	866

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1781	103	240	306	296	945
82	119	234	112	338	803
83	148	266	180	212	806
84	195	228	133	183	739
85	274	135	269	174	852
86	297	232	230	357	1116
87	160	319	159	208	846
88	304	149	180	184	817
89	193	187	136	277	793
90	75	158	152	239	624
1791	185	132	123	189	629
92	205	105	182	221	713
93	158	404	121	206	889
94	176	97	425	393	1091
95	178	104	331	318	931
96	102	201	101	358	762
97	159	219	104	312	794
98	54	181	253	283	771
99	184	443	305	247	1179
1800	342	87	261	257	947
1801	235	84	153	453	925
02	348	227	69	425	1069
03	352	196	333	250	1131
04	322	296	283	226	1127
05	298	226	294	181	999
06	181	264	302	261	1008
07	99	315	320	436	1170
08	161	57	273	258	749
09	130	274	210	414	1028
10	293	155	259	314	1021

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1811	114	196	247	135	692
12	106	243	356	267	972
13	181	67	185	254	687
14	217	199	276	165	857
15	161	109	320	198	788
16	83	140	119	236	578
17	10	129	175	198	512
18	128	253	242	185	808
19	172	128	410	218	928
20	138	109	54	184	485
1821	87	169	281	110	647
22	95	105	116	189	505
23	199	201	151	223	774
24	108	175	225	275	783
25	61	102	199	173	535
26	226	151	273	481	1131
27	79	215	338	197	829
28	106	190	104	227	627
29	97	270	148	241	756
30	95	104	156	220	575
1831	167	218	330	148	863
32	95	223	183	178	679
33	23	282	375	270	950
34	111	86	227	80	504
35	67	235	334	271	907
36	177	397	148	233	955
37	81	446	215	162	904
38	248	295	110	197	850
39	59	209	136	329	733
40	143	179	154	214	690

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1841	142	120	183	194	639
42	179	209	151	256	795
43	223	258	178	97	756
44	137	167	217	339	860
45	276	416	330	264	1286
46	68	191	230	418	907
47	171	86	269	212	738
48	221	256	148	330	955
49	8	252	130	215	605
50	126	315	207	332	980
1851	87	300	168	518	1073
52	37	93	207	357	694
53	214	364	153	275	1006
54	161	211	139	176	687
55	341	340	195	360	1236
56	191	299	168	294	952
57	148	255	115	204	722
58	54	246	161	295	756
59	87	172	177	329	765
60	184	186	281	191	842
1861	240	165	105	143	653
62	153	266	236	454	1109
63	143	230	92	340	805
64	197	181	147	241	766
65	108	118	161	265	652
66	73	366	186	116	741
67	145	232	226	233	836
68	69	153	375	292	889
69	121	318	172	282	893
70	336	76	230	206	848

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1871	213	153	184	239	789
72	115	221	280	369	985
73	342	269	160	267	1038
74	82	165	181	120	548
75	231	157	265	271	924
76	231	297	334	152	1014
77	152	456	191	171	970
78	119	230	193	371	913
79	245	264	67	228	804
80	66	239	228	218	751
1881	122	192	109	228	651
82	87	171	167	374	799
83	204	223	208	109	744
84	25	180	337	175	717
85	188	262	127	359	936
86	160	134	254	229	777
87	158	228	178	344	908
88	171	234	109	162	676
89	128	297	224	321	970
90	86	311	132	157	686
1891	67	245	155	215	682
92	235	379	265	133	1012
93	80	107	152	225	564
94	55	219	139	168	581
95	155	338	191	178	862
96	166	141	561	311	1179
97	221	189	188	220	818
98	135	448	241	234	1058
99	55	249	142	73	519
1900	237	354	176	273	1040

Tabelle IV.

Padua. Regenmengen der meteorologischen Jahreszeiten und des Jahres in Procenten der 176jährigen Mittel.

	Winter 167	Frühling 222	Sommer 217	Herbst 256	Jahr 862
1725	52	82	70	155	88
26	52	88	85	53	70
27	141	45	96	170	114
28	221	108	131	150	148
29	224	86	109	128	131
30	75	116	179	66	109
1731	81	74	149	94	100
32	83	106	89	111	98
33	88	156	126	44	102
34	32	100	180	76	100
35	216	128	111	31	112
36	136	104	84	51	90
37	38	68	64	106	72
38	22	89	135	73	83
39	38	91	78	76	73
40	72	69	63	54	63
1741	85	60	65	60	66
42	154	91	70	141	112
43	82	123	112	72	97
44	43	99	135	124	104
45	78	115	68	107	94
46	195	112	103	150	137
47	78	72	76	70	73
48	87	106	171	137	128
49	94	129	153	62	108
50	40	126	84	87	87

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1751	156	119	100	147	129
52	124	122	166	39	109
53	152	94	93	139	118
54	65	116	94	52	82
55	68	75	151	176	123
56	62	73	99	157	102
57	179	69	111	86	106
58	113	136	124	134	128
59	77	132	53	113	96
60	205	56	118	119	119
1761	38	133	130	171	125
62	68	27	85	116	76
63	98	154	110	46	100
64	134	100	84	139	114
65	198	129	122	108	134
66	32	103	117	112	95
67	82	127	119	94	106
68	70	76	66	104	81
69	203	170	81	80	127
70	187	172	103	186	162
1771	125	94	136	60	100
72	409	249	63	107	192
73	171	104	135	148	138
74	121	127	77	65	95
75	43	99	136	129	106
76	133	115	64	132	111
77	139	80	163	113	122
78	146	90	91	130	113
79	24	36	157	131	92
80	112	49	123	120	100

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1781	62	109	141	116	109
82	71	106	52	132	93
83	89	120	83	83	94
84	117	103	61	72	86
85	164	61	124	68	99
86	178	105	106	140	129
87	96	144	73	82	98
88	183	68	83	72	95
89	116	84	63	108	92
90	45	72	70	94	72
1791	111	60	57	74	73
92	123	47	84	86	83
93	95	182	56	81	103
94	105	44	196	154	127
95	107	47	153	124	108
96	62	90	47	140	88
97	96	99	48	122	92
98	33	82	117	111	89
99	111	200	141	97	137
1800	205	39	120	100	110
1801	141	38	71	177	107
02	209	103	32	166	124
03	211	88	153	98	131
04	193	134	131	89	131
05	179	102	136	71	116
06	109	119	139	102	117
07	60	142	148	171	136
08	97	26	126	100	87
09	78	123	97	162	119
10	176	70	119	123	118

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1811	69	88	114	53	80
12	64	110	164	104	113
13	109	31	85	99	80
14	130	90	128	65	100
15	97	49	148	77	91
16	50	63	55	92	67
17	6	59	81	77	59
18	77	114	112	73	94
19	103	58	189	85	108
20	83	49	25	72	56
1821	53	76	130	43	75
22	57	48	53	74	59
23	120	91	70	87	90
24	65	79	104	108	91
25	37	46	92	68	62
26	136	68	126	188	131
27	48	97	156	77	96
28	64	86	48	89	73
29	59	122	68	94	88
30	57	47	72	86	67
1831	100	99	152	58	100
32	57	100	84	70	79
33	14	127	173	106	110
34	67	39	105	31	59
35	40	106	154	106	105
36	106	179	68	91	111
37	49	201	99	63	105
38	149	133	51	77	99
39	36	94	63	129	85
40	86	81	71	84	80

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1841	86	54	84	76	74
42	108	94	70	100	92
43	134	117	82	38	88
44	83	75	100	133	100
45	166	188	152	103	149
46	41	86	106	164	105
47	103	39	124	83	86
48	133	117	68	129	111
49	5	114	60	84	70
50	76	142	95	130	114
1851	53	135	77	203	125
52	23	42	96	140	81
53	129	164	71	108	117
54	97	95	64	69	80
55	205	153	90	141	143
56	115	135	78	115	111
57	89	115	53	80	84
58	33	111	74	115	88
59	53	78	82	129	89
60	111	84	130	74	98
1861	144	74	48	56	76
62	92	120	109	177	129
63	86	104	43	133	93
64	118	82	68	94	89
65	65	53	74	104	76
66	44	165	86	45	86
67	87	105	104	91	97
68	42	69	173	114	103
69	73	144	79	110	105
70	202	34	106	81	98

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1871	128	69	85	93	92
72	69	100	130	144	114
73	205	121	74	104	121
74	50	74	84	47	64
75	139	71	122	106	107
76	139	134	154	59	118
77	92	205	88	67	113
78	72	104	89	145	106
79	147	119	31	89	93
80	40	108	105	85	87
1881	74	87	51	89	76
82	53	77	77	146	93
83	123	100	96	43	86
84	15	81	155	69	83
85	113	118	59	141	109
86	96	61	117	89	90
87	95	103	82	134	105
88	103	105	51	63	78
89	77	134	103	125	113
90	52	140	61	61	79
1891	40	111	71	84	79
92	141	171	123	52	117
93	48	48	70	88	65
94	33	99	64	66	67
95	94	153	88	70	100
96	100	64	259	122	137
97	133	85	87	86	95
98	81	202	111	92	123
99	33	112	65	29	60
1900	143	160	81	107	121

Tabelle V.

Niederschlagsmengen zu Klagenfurt 1813—1900.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1813	30	8	30	33	133	95	103	127	154	127	92	149	1081
14	114	3	57	11	79	146	146	200	35	87	35	51	964
15	46	14	22	43	200	125	157	190	62	51	125	68	1103
16	22	41	27	68	211	162	89	125	157	57	162	14	1135
17	24	3	60	41	3	103	138	111	57	198	16	84	838
18	24	19	46	19	68	33	76	70	46	62	35	43	541
19	5	68	24	14	57	92	62	100	79	171	122	38	832
20	27	33	76	73	68	146	157	73	246	141	114	81	1235
1821	19	5	38	70	114	81	203	146	51	19	27	111	884
22	19	3	5	27	49	33	122	70	43	95	41	73	580
23	57	100	8	73	57	68	190	54	114	125	11	22	879
24	8	5	16	49	60	57	133	179	41	146	30	19	743
25	30	3	24	0	127	276	125	92	76	116	35	92	996
26	19	19	51	33	70	38	84	27	54	135	282	24	836
27	152	14	54	70	79	208	84	179	60	24	51	5	980
28	0	30	43	27	38	92	227	98	87	27	41	33	743
29	92	68	70	70	100	127	95	198	160	95	5	57	1137
30	27	62	3	41	76	141	103	130	227	95	35	176	1116

1831	24	16	14	87	173	217	111	152	111	19	60	72	1056
32	14	38	50	35	160	92	51	130	33	30	92	13	738
33	3	33	51	141	11	62	271	100	184	68	41	16	981
34	8	16	5	43	8	41	149	54	27	22	22	15	410
35	22	22	41	57	33	98	84	81	62	87	23	7	617
36	19	116	60	70	51	100	203	73	125	81	60	75	1033
37	16	41	66	16	152	92	84	79	43	11	165	23	788
38	43	70	73	92	89	149	179	127	84	76	76	24	1082
39	51	30	51	112	110	89	38	171	50	48	152	50	952
40	27	24	3	16	92	241	206	127	111	38	81	31	997
1841	108	16	10	42	49	127	92	114	70	127	54	76	885
42	57	3	24	33	146	92	168	70	173	92	103	2	963
43	165	87	22	108	106	127	73	68	65	154	79	0	1054
44	26	151	17	9	94	137	232	224	93	157	127	35	1302
45	62	66	102	111	172	51	88	181	80	32	108	111	1164
46	13	9	99	130	41	68	96	172	74	166	62	196	1126
47	36	18	26	219	105	172	106	90	195	70	22	48	1107
48	34	82	84	73	53	54	142	133	57	233	135	12	1092
49	13	4	81	107	75	115	86	237	137	169	40	21	1085
50	58	28	19	129	105	215	155	51	99	306	36	24	1225

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1851	0	6	72	76	211	99	115	136	137	55	323	0	1230
52	29	38	15	21	52	54	96	117	208	195	50	39	914
53	38	93	85	118	33	72	98	57	92	123	27	58	894
54	49	10	0	23	141	89	78	143	34	149	43	15	774
55	35	79	76	70	32	90	134	120	60	133	79	12	920
56	74	18	6	31	89	75	285	34	190	38	120	62	1022
57	21	4	59	89	40	37	56	41	9	125	46	2	529
58	28	21	40	47	136	49	106	91	52	136	65	69	840
59	0	22	46	50	112	91	72	133	126	155	35	128	970
60	43	23	78	126	76	119	90	108	84	92	91	76	1006
1861	49	46	84	19	51	95	86	45	61	9	131	8	684
62	53	21	64	70	98	64	87	141	71	78	79	21	847
63	66	0	73	57	80	84	145	66	154	27	94	17	863
64	10	122	85	37	101	197	121	178	230	27	87	13	1208
65	65	35	105	22	31	94	78	105	3	115	71	8	732
66	29	78	114	118	65	109	194	156	110	37	32	23	1065
67	130	7	35	62	163	140	114	86	124	99	22	111	1093
68	85	0	27	73	36	32	130	94	76	88	76	68	785
69	13	35	64	54	58	110	67	109	93	211	22	158	994
70	44	13	60	32	72	160	125	142	47	174	164	110	1143

1871	53	1	70	54	109	197	91	69	96	32	75	28	875
72	35	25	107	140	28	157	40	149	129	121	175	161	1273
73	52	81	39	126	169	48	49	76	110	94	67	0	911
74	24	36	27	44	151	191	205	136	65	50	48	197	1174
75	3	30	19	9	114	99	118	130	25	159	68	29	803
76	24	61	138	151	260	92	160	177	200	37	42	129	1469
77	10	21	101	63	69	85	154	69	160	8	76	80	896
78	26	1	76	47	157	76	219	83	210	172	239	79	1385
79	27	99	34	98	123	76	213	111	118	111	69	36	1115
80	3	67	14	59	166	156	156	181	97	69	149	17	1134
1881	12	24	61	82	66	96	147	222	134	114	15	30	1003
82	6	11	70	61	65	193	144	225	152	196	96	76	1295
83	18	15	52	14	63	72	113	48	105	142	49	35	726
84	7	6	15	60	107	137	133	172	65	121	8	67	898
85	46	5	81	74	142	124	17	177	167	180	123	43	1179
86	89	27	33	65	10	136	76	149	119	123	39	157	1023
87	24	48	30	23	144	72	92	160	56	124	165	90	1028
88	9	39	152	36	53	170	216	52	139	191	11	24	1092
89	22	31	67	88	25	60	174	187	115	228	66	23	1086
90	9	9	33	126	66	85	142	94	60	131	49	35	839

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1891	31	4	49	62	95	31	159	223	75	76	35	5	845
92	61	60	73	161	173	135	191	52	72	74	25	10	1087
93	77	34	17	13	79	167	173	20	116	45	120	52	913
94	8	3	41	81	124	108	67	197	138	99	107	34	1007
95	122	52	84	59	79	56	92	101	27	143	13	63	891
96	2	36	57	22	101	120	78	217	75	184	31	74	997
97	32	2	41	51	252	127	110	139	66	52	16	72	960
98	17	77	72	52	65	178	158	87	97	76	81	27	987
99	55	25	31	134	110	110	75	35	173	42	6	91	887
1900	57	58	104	73	79	124	38	135	17	72	140	13	910

Tabelle VI.

Klagenfurt. Abweichungen der Niederschlagsmengen von den 88jährigen Mittelwerten.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1813	— 8	— 26	— 21	— 32	38	— 15	— 22	7	54	24	16	95	110
14	76	— 31	6	— 54	— 16	36	21	80	— 65	— 16	— 41	— 3	— 7
15	8	— 20	— 29	— 22	105	15	32	70	— 38	— 52	49	14	132
16	— 12	7	— 24	3	116	52	— 36	5	57	— 46	86	— 40	164
17	— 14	— 31	9	— 24	— 92*	— 7	13	— 9	— 43	95	— 60	30	—133
18	— 14	— 15	— 5	— 46	— 27	— 77	— 49	— 50	— 54	— 41	— 41	— 11	—430
19	— 33	34	— 27	— 51	— 38	— 18	— 63	— 20	— 21	68	46	— 16	—139
20	— 11	— 1	25	8	— 27	36	32	— 47	146	38	38	27	264
1821	— 19	— 29	— 13	5	19	— 29	78	26	— 49	— 84	— 49	57	— 87
22	— 19	— 31	— 46	— 38	— 46	— 77	— 3	— 50	— 57	— 8	— 35	19	—391
23	19	66	— 43	8	— 38	— 42	65	— 66	— 14	22	— 65	— 32	— 92
24	— 30	— 29	— 35	— 16	— 35	— 53	8	59	— 59	43	— 46	— 35	—228
25	— 8	— 31	— 27	— 65*	32	166	0	— 28	— 24	13	— 41	38	25
26	— 19	— 15	0	— 32	— 25	— 72	— 41	— 93	— 46	32	206	— 30	—135
27	114	— 20	3	5	— 16	98	— 41	59	— 40	— 79	— 25	— 49	9
28	— 38*	— 4	— 8	— 38	— 57	— 18	102	— 22	— 13	— 76	— 35	— 21	—228
29	54	34	19	5	5	17	— 30	78	60	— 8	— 71	3	166
30	— 11	28	— 48	— 24	— 19	31	— 22	10	127	— 8	— 41	122	145

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1831	— 14	— 18	— 37	22	78	107	— 14	32	11	— 84	— 16	18	85
32	— 24	4	— 1	— 30	65	— 18	— 74	10	— 67	— 73	16	— 41	—233
33	— 35	— 1	0	76	— 84	— 48	146	— 20	84	— 35	— 35	— 38	10
34	— 30	— 18	— 46	— 22	— 87	— 69	24	— 66	— 73	— 81	— 54	— 39	—561
35	— 16	— 12	— 10	— 8	— 62	— 12	— 41	— 39	— 38	— 16	— 53	— 47	—354
36	— 19	82	9	5	— 44	— 10	78	— 47	25	— 22	— 16	21	62
37	— 22	7	15	— 49	57	— 18	— 41	— 41	— 57	— 92	89	— 31	—183
38	5	36	22	27	— 6	39	54	7	— 16	— 27	0	— 30	111
39	13	— 4	0	47	15	— 21	— 87	51	— 50	— 55	76	— 4	— 19
40	— 11	— 10	— 48	— 49	— 3	131	81	7	11	— 65	5	— 23	26
1841	70	— 18	— 41	— 23	— 46	17	— 33	— 6	— 30	24	— 22	22	— 86
42	19	— 31	— 27	— 32	51	— 18	43	— 50	73	— 11	27	— 52	— 8
43	**127**	53	— 29	43	11	17	— 52	— 52	— 35	51	3	— 54	83
44	— 12	**117**	— 34	— 56	— 1	27	107	104	— 7	54	51	— 19	331
45	24	32	51	46	77	— 59	— 37	61	— 20	— 71	32	57	193
46	— 25	— 25	48	65	— 54	— 42	— 29	52	— 26	63	— 14	**142**	155
47	— 2	— 16	— 25	**154**	10	62	— 19	— 30	95	— 33	— 54	— 6	136
48	— 4	48	33	8	— 42	— 56	17	13	— 43	130	59	— 42	121
49	— 25	— 30	30	42	— 20	5	— 39	**117**	37	66	— 36	— 33	114
50	20	— 6	— 32	64	10	105	30	— 69	— 1	**203**	— 40	— 30	254

1851	−38	−28	21	11	116	−11	−10	16	37	−48	247	54	250
52	−9	4	−36	−44	−43	−56	−29	−3	108	92	−26	−15	57
53	0	59	34	53	−62	−38	−27	−63	−8	20	−49	4	−77
54	11	−24	−51*	−42	46	−21	−47	23	−66	46	−33	−39	−197
55	−8	45	25	5	−63	−20	9	0	−40	30	3	−42	−51
56	36	−16	−45	−34	−6	−35	160	−86	90	−65	44	8	51
57	−17	−30	8	24	−55	−73	−69	−79	−91	22	−30	−52	−442
58	−10	−13	−11	−18	41	−61	−19	−29	−48	33	−11	15	−131
59	−38*	−12	−5	−15	17	−19	−53	13	26	52	−41	74	−1
60	5	−11	27	61	−19	9	−35	−12	−16	−11	15	22	35
1861	11	12	33	−46	−44	−15	−39	−75	−39	−94	55	−46	−287
62	15	−13	13	5	3	−46	−38	21	−29	−25	3	−33	−124
63	28	−34*	22	−8	−15	−26	20	−54	54	−76	18	−37	−108
64	−28	88	34	−28	6	87	−4	58	130	−76	11	−41	237
65	27	1	54	−43	−64	−16	−47	−15	−97*	12	−5	−46	−239
66	−9	44	63	53	−30	−1	69	36	10	−66	−44	−31	94
67	92	−27	−16	−3	68	30	−11	−34	24	−4	−54	57	122
68	47	−34	−24	8	−59	−78	5	−26	−24	−15	0	14	−186
69	−25	1	13	−11	−37	0	−58	−11	−7	108	−54	104	23
70	6	−21	9	−33	−23	50	0	22	−53	71	88	56	172

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1871	15	— 33	19	— 11	15	87	— 34	— 51	— 4	— 71	— 1	— 26	— 96
72	— 3	— 9	56	75	— 67	47	— 79	29	29	18	99	107	302
73	14	47	— 12	61	74	— 62	— 76	— 44	10	— 9	— 9	— 54	— 60
74	— 14	2	— 24	— 21	56	81	80	16	— 35	— 53	— 28	**143**	203
75	— 35	— 4	— 32	— 56	19	— 11	— 7	10	— 75	56	— 8	— 25	—168
76	— 14	27	85	86	**165**	— 18	35	57	100	— 66	— 34	75	498
77	— 28	— 13	50	— 2	— 26	— 25	29	— 51	60	— 95	0	26	— 75
78	— 12	— 33	25	— 18	62	— 34	94	— 37	110	69	163	25	414
79	— 11	65	— 17	33	28	— 34	88	— 9	18	8	— 7	— 18	144
80	— 35	33	— 37	— 6	71	46	31	61	— 3	— 34	73	— 37	163
1881 .	— 26	— 10	10	17	— 29	— 14	22	102	34	11	— 61	— 24	32
82	— 32	— 23	19	— 4	— 30	83	19	105	52	93	20	22	324
83	— 20	— 19	1	— 51	— 32	— 38	— 12	— 72	5	39	— 27	— 19	—245
84	— 31	— 28	— 36	— 5	12	27	8	52	— 35	18	— 68	13	— 73
85	8	— 29	30	9	47	14	—108*	57	67	77	47	— 11	208
86	51	— 7	— 18	0	— 85	26	— 49	29	19	20	— 37	103	52
87	— 14	14	— 21	— 42	49	— 38	— 33	40	— 44	21	89	36	57
88	— 29	5	**101**	— 29	— 42	60	91	— 68	39	88	— 65	— 30	121
89	— 16	— 3	16	23	— 70	— 50	49	67	15	125	— 10	— 31	115
90	— 29	— 25	— 18	61	— 29	— 25	17	— 26	— 40	28	— 27	— 19	—132

1891	— 7	— 30	— 2	— 3	0	— 79*	34	103	— 25	— 27	— 41	— 49	—126
92	23	26	22	96	78	25	66	— 68	— 28	— 29	— 51	— 44	116
93	39	0	— 34	— 52	— 16	57	48	—100*	16	— 58	44	— 2	— 58
94	— 30	— 31	— 10	16	29	— 2	— 58	77	38	— 4	31	— 20	36
95	84	18	33	— 6	— 16	— 54	— 33	— 19	— 73	40	— 63	9	— 80
96	— 36	2	6	— 43	6	10	— 47	97	— 25	81	— 45	20	26
97	— 6	— 32	— 10	— 14	157	17	— 15	19	— 34	— 51	— 60	18	— 11
98	— 21	43	21	— 13	— 30	68	33	— 33	— 3	— 27	5	— 27	16
99	17	— 9	— 20	69	15	0	— 50	— 85	73	— 61	— 70	37	— 84
1900	19	24	53	8	— 16	14	— 87	15	— 83	— 31	64	— 41	— 61

Tabelle VII.

Niederschlagssummen der meteorologischen Jahreszeiten und des meteorologischen Jahres zu Klagenfurt.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1813	130	196	325	373	1024
14	266	147	492	157	1062
15	111	265	472	238	1086
16	131	306	376	376	1189
17	41	104	352	271	768
18	127	133	179	143	582
19	116	95	254	372	837
20	98	217	376	501	1192
1821	105	222	430	97	854
22	133	81	225	179	618
23	230	138	312	250	930
24	35	125	369	217	746
25	52	151	493	227	923
26	130	154	149	471	904
27	190	203	471	135	999
28	35	108	417	155	715
29	193	240	420	260	1113
30	146	120	374	357	997
1831	216	274	480	190	1160
32	124	245	273	155	797
33	49	203	433	293	978
34	40	56*	244	71*	411*
35	59	131	263	172	625
36	142	181	376	266	965
37	132	234	255	219	840
38	136	254	455	236	1081
39	105	273	298	250	926
40	101	111	574	230	1016

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1841	155	101	333	251	840
42	136	203	330	368	1037
43	254	236	268	298	1056
44	177	120	593	377	1267
45	163	385	320	220	1088
46	133	270	336	302	1041
47	250	350	268	287	1255
48	164	210	329	425	1128
49	29*	263	438	346	1076
50	107	253	421	441	1222
1851	30*	359	350	515	1254
52	67	88	267	453	875
53	170	236	227	242	875
54	117	164	310	226	817
55	129	178	344	272	923
56	104	126	394	348	972
57	87	188	134*	180	589
58	51	223	246	253	773
59	91	208	296	316	911
60	194	280	317	267	1058
1861	171	154	226	201	752
62	82	232	292	228	834
63	87	210	295	275	867
64	149	223	496	344	1212
65	113	158	277	189	737
66	115	297	459	179	1050
67	160	260	340	245	1005
68	196	136	256	240	828
69	116	176	286	326	904
70	215	164	427	385	1191

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1851	0	6	72	76	211	99	115	136	137	55	323	0	1230
52	29	38	15	21	52	54	96	117	208	195	50	39	914
53	38	93	85	118	33	72	98	57	92	123	27	58	894
54	49	10	0	23	141	89	78	143	34	149	43	15	774
55	35	79	76	70	32	90	134	120	60	133	79	12	920
56	74	18	6	31	89	75	285	34	190	38	120	62	1022
57	21	4	59	89	40	37	56	41	9	125	46	2	529
58	28	21	40	47	136	49	106	91	52	136	65	69	840
59	0	22	46	50	112	91	72	133	126	155	35	128	970
60	43	23	78	126	76	119	90	108	84	92	91	76	1006
1861	49	46	84	19	51	95	86	45	61	9	131	8	684
62	53	21	64	70	98	64	87	141	71	78	79	21	847
63	66	0	73	57	80	84	145	66	154	27	94	17	863
64	10	122	85	37	101	197	121	178	230	27	87	13	1208
65	65	35	105	22	31	94	78	105	3	115	71	8	732
66	29	78	114	118	65	109	194	156	110	37	32	23	1065
67	130	7	35	62	163	140	114	86	124	99	22	111	1093
68	85	0	27	73	36	32	130	94	76	88	76	68	785
69	13	35	64	54	58	110	67	109	93	211	22	158	994
70	44	13	60	32	72	160	125	142	47	174	164	110	1143

1871	53	1	70	54	109	197	91	69	96	32	75	28	875
72	35	25	107	140	28	157	46	149	129	121	175	161	1273
73	52	81	39	126	169	48	49	76	110	94	67	0	911
74	24	36	27	44	151	191	205	136	65	50	48	197	1174
75	3	30	19	9	114	99	118	130	25	159	68	29	803
76	24	61	136	151	260	92	160	177	200	37	42	129	1469
77	10	21	101	63	69	85	154	69	160	8	76	80	896
78	26	1	76	47	157	76	219	83	210	172	239	79	1385
79	27	99	34	98	123	76	213	111	118	111	69	36	1115
80	3	67	14	59	166	156	156	181	97	69	149	17	1134
1881	12	24	61	82	66	96	147	222	134	114	15	30	1003
82	6	11	70	61	65	193	144	225	152	196	96	76	1295
83	18	15	52	14	63	72	113	48	105	142	49	35	726
84	7	6	15	60	107	137	133	172	65	121	8	67	898
85	46	5	81	74	142	124	17	177	167	180	123	43	1179
86	89	27	33	65	10	136	76	149	119	123	39	157	1023
87	24	48	30	23	144	72	92	160	56	124	165	90	1028
88	9	39	152	36	53	170	216	52	139	191	11	24	1092
89	22	31	67	88	25	60	174	187	115	228	66	23	1086
90	9	9	33	126	66	85	142	94	60	131	49	35	839

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1891	31	4	49	62	95	31	159	223	75	76	35	5	845
92	61	60	73	161	173	135	191	52	72	74	25	10	1087
93	77	34	17	13	79	167	173	20	116	45	120	52	913
94	8	3	41	81	124	108	67	197	138	99	107	34	1007
95	122	52	84	59	79	56	92	101	27	143	13	63	891
96	2	36	57	22	101	120	78	217	75	184	31	74	997
97	32	2	41	51	252	127	110	139	66	52	16	72	960
98	17	77	72	52	65	178	158	87	97	76	81	27	987
99	55	25	31	134	110	110	75	35	173	42	6	91	887
1900	57	58	104	73	79	124	38	135	17	72	140	13	910

Tabelle VI.

Klagenfurt. Abweichungen der Niederschlagsmengen von den 88jährigen Mittelwerten.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1813	— 8	— 26	— 21	— 32	38	— 15	— 22	7	54	24	16	95	110
14	76	— 31	6	— 54	— 16	36	21	80	— 65	— 16	— 41	— 3	— 7
15	8	— 20	— 29	— 22	105	15	32	70	— 38	— 52	49	14	132
16	— 12	7	— 24	3	116	52	— 36	5	57	— 46	86	— 40	164
17	— 14	— 31	9	— 24	— 92*	— 7	13	— 9	— 43	95	— 60	30	—133
18	— 14	— 15	— 5	— 46	— 27	— 77	— 49	— 50	— 54	— 41	— 41	— 11	—430
19	— 33	34	— 27	— 51	— 38	— 18	— 63	— 20	— 21	68	46	— 16	—139
20	— 11	— 1	25	8	— 27	36	32	— 47	**146**	38	38	27	264
1821	— 19	— 29	— 13	5	19	— 29	78	26	— 49	— 84	— 49	57	— 87
22	— 19	— 31	— 46	— 38	— 46	— 77	— 3	— 50	— 57	— 8	— 35	19	—391
23	19	66	— 43	8	— 38	— 42	65	— 66	— 14	22	— 65	— 32	— 92
24	— 30	— 29	— 35	— 16	— 35	— 53	8	59	— 59	43	— 46	— 35	—228
25	— 8	— 31	— 27	— 65*	32	**166**	0	— 28	— 24	13	— 41	38	25
26	— 19	— 15	0	— 32	— 25	— 72	— 41	— 93	— 46	32	**206**	— 30	—135
27	114	— 20	3	5	— 16	98	— 41	59	— 40	— 79	— 25	— 49	9
28	— 38*	— 4	— 8	— 38	— 57	— 18	102	— 22	— 13	— 76	— 35	— 21	—228
29	54	34	19	5	5	17	— 30	78	60	— 8	— 71	3	166
30	— 11	28	— 48	— 24	— 19	31	— 22	10	127	— 8	— 41	122	145

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1831	— 14	— 18	— 37	22	78	107	— 14	32	11	— 84	— 16	18	85
32	— 24	4	— 1	— 30	65	— 18	— 74	10	— 67	— 73	16	— 41	—233
33	— 35	— 1	0	76	— 84	— 48	146	— 20	84	— 35	— 35	— 38	10
34	— 30	— 18	— 46	— 22	— 87	— 69	24	— 66	— 73	— 81	— 54	— 39	—561
35	— 16	— 12	— 10	— 8	— 62	— 12	— 41	— 39	— 38	— 16	— 53	— 47	—354
36	— 19	82	9	5	— 44	— 10	78	— 47	25	— 22	— 16	21	62
37	— 22	7	15	— 49	57	— 18	— 41	— 41	— 57	— 92	89	— 31	—183
38	5	36	22	27	— 6	39	54	7	— 16	— 27	0	— 30	111
39	13	— 4	0	47	15	— 21	— 87	51	— 50	— 55	76	— 4	— 19
40	— 11	— 10	— 48	— 49	— 3	131	81	7	11	— 65	5	— 23	26
1841	70	— 18	— 41	— 23	— 46	17	— 33	— 6	— 30	24	— 22	22	— 86
42	19	— 31	— 27	— 32	51	— 18	43	— 50	73	— 11	27	— 52	— 8
43	**127**	53	— 29	43	11	17	— 52	— 52	— 35	51	3	— 54	83
44	— 12	**117**	— 34	— 56	— 1	27	107	104	— 7	54	51	— 19	331
45	24	32	51	46	77	— 59	— 37	61	— 20	— 71	32	57	193
46	— 25	— 25	48	65	— 54	— 42	— 29	52	— 26	63	— 14	**142**	155
47	— 2	— 16	— 25	**154**	10	62	— 19	— 30	95	— 33	— 54	— 6	136
48	— 4	48	33	8	— 42	— 56	17	13	— 43	130	59	— 42	121
49	— 25	— 30	30	42	— 20	5	— 39	**117**	37	66	— 36	— 33	114
50	20	— 6	— 32	64	10	105	30	— 69	— 1	**203**	— 40	— 30	254

1851	— 38	— 28	21	11	116	— 11	— 10	16	37	— 48	247	— 54	259
52	— 9	4	— 36	— 44	— 43	— 56	— 29	— 3	108	92	— 26	— 15	— 57
53	0	59	34	53	— 62	— 38	— 27	— 63	— 8	20	— 49	4	— 77
54	11	— 24	— 51*	— 42	46	— 21	— 47	23	— 66	46	— 33	— 39	—197
55	— 3	45	25	5	— 63	— 20	9	0	— 40	30	3	— 42	— 51
56	36	— 16	— 45	— 34	— 6	— 35	160	— 86	90	— 65	44	8	51
57	— 17	— 30	8	24	— 55	— 73	— 69	— 79	— 91	22	— 30	— 52	—442
58	— 10	— 13	— 11	— 18	41	— 61	— 19	— 29	— 48	33	— 11	15	—131
59	— 38*	— 12	— 5	— 15	17	— 19	— 53	13	26	52	— 41	74	— 1
60	5	— 11	27	61	— 19	9	— 35	— 12	— 16	— 11	15	22	35
1861	11	12	33	— 46	— 44	— 15	— 39	— 75	— 39	— 94	55	— 46	—287
62	15	— 13	13	5	3	— 46	— 38	21	— 29	— 25	3	— 33	—124
63	28	— 34*	22	— 8	— 15	— 26	20	— 54	54	— 76	18	— 37	—108
64	— 28	88	34	— 28	6	87	— 4	58	130	— 76	11	— 41	237
65	27	1	54	— 43	— 64	— 16	— 47	— 15	— 97*	12	— 5	— 46	—239
66	— 9	44	63	53	— 30	— 1	69	36	10	— 66	— 44	— 31	94
67	92	— 27	— 16	— 3	68	30	— 11	— 34	24	— 4	— 54	57	122
68	47	— 34	— 24	8	— 59	— 78	5	— 26	— 24	— 15	0	14	—186
69	— 25	1	13	— 11	— 37	0	— 58	— 11	— 7	108	— 54	104	23
70	6	— 21	9	— 33	— 23	50	0	22	— 53	71	88	56	172

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
1871	15	— 33	19	— 11	15	87	— 34	— 51	— 4	— 71	— 1	— 26	— 96
72	— 3	— 9	56	75	— 67	47	— 79	29	29	18	99	107	302
73	14	47	— 12	61	74	— 62	— 76	— 44	10	— 9	— 9	— 54	— 60
74	— 14	2	— 24	— 21	56	81	80	16	— 35	— 53	— 28	143	203
75	— 35	— 4	— 32	— 56	19	— 11	— 7	10	— 75	56	— 8	— 25	—168
76	— 14	27	85	86	165	— 18	35	57	100	— 66	— 34	75	498
77	— 28	— 13	50	— 2	— 26	— 25	29	— 51	60	— 95	0	26	— 75
78	— 12	— 33	25	— 18	62	— 34	94	— 37	110	69	163	25	414
79	— 11	65	— 17	33	28	— 34	88	— 9	18	8	— 7	— 18	144
80	— 35	33	— 37	— 6	71	46	31	61	— 3	— 34	73	— 37	163
1881 .	— 26	— 10	10	17	— 29	— 14	22	102	34	11	— 61	— 24	32
82	— 32	— 23	19	— 4	— 30	83	19	105	52	93	20	22	324
83	— 20	— 19	1	— 51	— 32	— 38	— 12	— 72	5	39	— 27	— 19	—245
84	— 31	— 28	— 36	— 5	12	27	8	52	— 35	18	— 68	13	— 73
85	8	— 29	30	9	47	14	—108*	57	67	77	47	— 11	208
86	51	— 7	— 18	0	— 85	26	— 49	29	19	20	— 37	103	52
87	— 14	14	— 21	— 42	49	— 38	— 33	40	— 44	21	89	36	57
88	— 29	5	101	— 29	— 42	60	91	— 68	39	88	— 65	— 30	121
89	— 16	— 3	16	23	— 70	50	49	67	15	125	— 10	— 31	115
90	— 29	— 25	— 18	61	— 29	— 25	17	— 26	— 40	28	— 27	— 19	—132

1891	— 7	— 30	— 2	— 3	0	— 79*	34	103	— 25	— 27	— 41	— 49	—126
92	23	26	22	96	78	25	66	— 68	— 28	— 29	— 51	— 44	116
93	39	0	— 34	— 52	— 16	57	48	—100*	16	— 58	44	— 2	— 58
94	— 30	— 31	— 10	16	29	— 2	— 58	77	38	— 4	31	— 20	36
95	84	18	33	— 6	— 16	— 54	— 33	— 19	— 73	40	— 63	9	— 80
96	— 36	2	6	— 43	6	10	— 47	97	— 25	81	— 45	20	26
97	— 6	— 32	— 10	— 14	157	17	— 15	19	— 34	— 51	— 60	18	— 11
98	— 21	43	21	— 13	— 30	68	33	— 33	— 3	— 27	5	— 27	16
99	17	— 9	— 20	69	15	0	— 50	— 85	73	— 61	— 70	37	— 84
1900	19	24	53	8	— 16	14	— 87	15	— 83	— 31	64	— 41	— 61

Tabelle VII.

Niederschlagssummen der meteorologischen Jahreszeiten und des meteorologischen Jahres zu Klagenfurt.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1813	130	196	325	373	1024
14	266	147	492	157	1062
15	111	265	472	238	1086
16	131	306	376	376	1189
17	41	104	352	271	768
18	127	133	179	143	582
19	116	95	254	372	837
20	98	217	376	501	1192
1821	105	222	430	97	854
22	133	81	225	179	618
23	230	138	312	250	930
24	35	125	369	217	746
25	52	151	493	227	923
26	130	154	149	471	904
27	190	203	471	135	999
28	35	108	417	155	715
29	193	240	420	260	1113
30	146	120	374	357	997
1831	216	274	480	190	1160
32	124	245	273	155	797
33	49	203	433	293	978
34	40	56*	244	71*	411*
35	59	131	263	172	625
36	142	181	376	266	965
37	132	234	255	219	840
38	136	254	455	236	1081
39	105	273	298	250	926
40	101	111	574	230	1016

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1841	155	101	333	251	840
42	136	203	330	368	1037
43	254	236	268	298	1056
44	177	120	593	377	1267
45	163	385	320	220	1088
46	133	270	336	302	1041
47	250	350	268	287	1255
48	164	210	329	425	1128
49	29*	263	438	346	1076
50	107	253	421	441	1222
1851	30*	359	350	515	1254
52	67	88	267	453	875
53	170	236	227	242	875
54	117	164	310	226	817
55	129	178	344	272	923
56	104	126	394	348	972
57	87	188	134*	180	589
58	51	223	246	253	773
59	91	208	296	316	911
60	194	280	317	267	1058
1861	171	154	226	201	752
62	82	232	292	228	834
63	87	210	295	275	867
64	149	223	496	344	1212
65	113	158	277	189	737
66	115	297	459	179	1050
67	160	260	340	245	1005
68	196	136	256	240	828
69	116	176	286	326	904
70	215	164	427	385	1191

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1871	164	233	357	203	957
72	88	275	352	425	1140
73	**294**	334	173	271	1072
74	60	222	532	163	977
75	230	142	347	252	971
76	114	**547**	429	279	1369
77	160	233	308	244	945
78	107	280	378	**621**	**1386**
79	205	255	400	298	1158
80	106	239	493	315	1153
1881	53	209	465	263	990
82	47	196	562	444	1249
83	109	129	233	296	767
84	48	182	442	194	866
85	118	297	318	470	1203
86	159	108	361	281	909
87	229	197	324	345	1095
88	138	241	438	341	1158
89	77	180	421	409	1087
90	41	225	321	240	827
1891	70	206	413	186	875
92	126	407	378	171	1082
93	121	109	360	281	871
94	63	246	372	344	1025
95	208	222	249	183	862
96	101	180	415	290	986
97	108	344	376	134	962
98	166	189	423	254	1032
99	107	275	220	221	823
1900	206	256	297	229	988
Mittel.....	127·4*	211·0	355·3	278·5	972·2

* Der December 1812, von dem Messungen vorliegen, hatte 92 *mm* Niederschlag, der December 1900 aber nur 13, weshalb das Mittel für das meteorologische Jahr etwas größer ausfällt.

Über den Wärmezustand der Gase

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Jänner 1902.)

Man kann der Ansicht sein, dass der von einem Gase auf jede Grenzfläche ausgeübte Druck, die Art und Weise seiner Entstehung betreffend, nicht wesentlich von demjenigen Drucke verschieden ist, welchen eine irgendwie comprimierte Flüssigkeit ebenfalls nach jeder Seite hin ausübt. In der That kann man auf Grund der Vorstellung, dass die kleinsten Theilchen jedes Körpers in fortwährender Bewegung begriffen sind, wie den Druck eines Gases auch denjenigen einer Flüssigkeit als eine Wirkung der ihren bewegten Theilchen innewohnenden Energie oder als ein Resultat der Impulse auffassen, welche die bezüglichen Begrenzungsflächen von den sich bewegenden Theilchen des Gases oder der Flüssigkeit fortgesetzt erfahren müssen.

Für eine Flüssigkeit lässt sich der Zusammenhang, welcher zwischen ihrem Drucke und der denselben erzeugenden Energie ihrer bewegten Theilchen obwaltet, auf einfache Weise ohne irgendwelche zu diesem Zwecke ersonnene Hypothese ermitteln.

Eine vertical stehende cylindrische Flüssigkeitssäule, deren Dichte als überall gleich zu betrachten ist, kann man sich aus gleichen horizontalen Schichten bestehend denken, deren Dicke so gering sei, dass innerhalb jeder Schicht der in ihr herrschende Druck nach allen Richtungen gleich erscheine. Denkt man sich die obere Grenze der Flüssigkeitssäule vollkommen frei, so hat jede Schicht nur das Gewicht des ober ihr stehenden Theiles der Säule zu tragen und muss daher soviel Energie besitzen,

als nothwendig ist, um dem entsprechenden Drucke das Gleichgewicht halten zu können. Man weiß aber, dass im gedachten Falle die Energie der Theilchen der Flüssigkeit von ihrer Oberfläche bis zum Boden des sie tragenden Gefäßes nach demselben Gesetze zunimmt, wie die Energie eines von der gleichen Höhe frei herabfallenden Körpers.

In der untersten oder Bodenschicht der Flüssigkeit haben demnach die Theilchen derselben eine Energie, welche bei der geringen Dicke der Schicht für jedes Theilchen derjenigen gleich ist, die es durch freien Fall von der Oberfläche bis zum Boden herab erlangen würde. Es sei die durch solchen freien Fall erzeugte Geschwindigkeit $= u$ und die Masse eines bezüglichen Theilchens $= m$, so hat dieses eine Energie $= \frac{mu^2}{2}$; ist nun die Anzahl der sämmtlichen als gleich angenommenen Theilchen der Schicht $= n$, so erhält man, deren Energiemenge mit L bezeichnend, die Formel

$$L = \frac{nmu^2}{2}.$$

Hat die gedachte Flüssigkeitssäule die Höhe H, so ist, die Beschleunigung der Schwere $= g$ gesetzt,

$$u^2 = 2gH,$$

und mit diesem Werte von u^2 folgt aus der vorigen Gleichung

$$L = nmgH,$$

wo nmg das Gewicht der betrachteten Schicht ist.

Bedeutet b den horizontalen Querschnitt der Flüssigkeitssäule, also auch denjenigen der Bodenschicht, und herrscht in dieser der wegen ihrer geringen Dicke h als überall gleich anzunehmende, auf die Flächeneinheit bezogene Druck p, so hat die Bodenfläche den Druck pb zu tragen, welcher dem Gewichte der Flüssigkeitssäule gleich sein muss; es besteht daher die Proportion

$$H : h = pb : nmg,$$

und mit dem hieraus resultierenden Werte von H ergibt sich

$$L = pbh,$$

wo bh das Volumen der Bodenschicht vorstellt. Bezeichnet man dieses mit v, so wird

$$L = pv,$$

und man erhält sonach, für L dessen oben angegebenen Wert setzend, die Gleichung

$$\frac{nmu^2}{2} = pv,$$

in welcher es natürlich bei sonstiger Bedingungsgleichheit auf die absolute Größe von v nicht ankommt. Wirklich kann in voriger Herleitung, wenn man sich die Flüssigkeitssäule genügend hoch denkt, die Höhe der Bodenschicht, in welcher man den Druck allseitig gleich annehmen darf, beliebig vergrößert werden. Die vorstehende Gleichung sagt also: Wenn ein Flüssigkeitsvolumen v unter dem überall gleichen Drucke p steht, so ist die demselben das Gleichgewicht haltende Energiemenge der Flüssigkeit dem Producte pv gleich.[1]

Den als überall gleich anzunehmenden Druck, welchen die Bodenschicht einer hohen Flüssigkeitssäule durch das Gewicht des ober ihr stehenden Theiles der letzteren erfährt, kann man sich, anstatt durch dieses Gewicht, mittels eines Kolbens ausgeübt denken. Mit diesem Falle ist, da zwischen flüssigen und gasförmigen Körpern bezüglich ihres Verhaltens gegen äußere Druckkräfte durchaus keine wesentliche Verschiedenheit besteht, derjenige eines unter dem Drucke eines Kolbens stehenden Gases nicht bloß äußerlich, sondern auch in principieller Beziehung vollkommen identisch. Es erscheint aus diesem Grunde selbstverständlich, dass der gleiche Zusammenhang zwischen Druck und erzeugender Energie, wie bei einer Flüssigkeit, auch bei einem beliebigen Gase obwalten

---

[1] Enthält das Volumen v die Gewichtseinheit, so ist $nmg = 1$, und es folgt somit aus obiger Gleichung als theoretische Ausflussgeschwindigkeit $u = \sqrt{(2gpv)}$.

muss und dass also, wenn ein Gasvolumen v unter dem allseitigen Drucke p steht, die demselben das Gleichgewicht haltende Energiemenge des Gases $= pv$ ist.[1]

In den Zuständen, worin man die Gase gewöhnlich beobachtet, folgen sie annäherungsweise den Gesetzen von Mariotte, Gay-Lussac und Joule. Für solche Gase lässt sich aus ihrem thatsächlichen Verhalten ein Zusammenhang zwischen der im Volumen v enthaltenen Wärmemenge w und der dem Drucke p das Gleichgewicht haltenden Energiemenge pv ableiten, welcher durch die Gleichung

$$pv = (k-1) Aw$$

ausgedrückt wird, wo k das Verhältnis der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu derjenigen bei constantem Volumen und A das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit ist. Dieser aus den erwähnten Gesetzen folgenden Formel gemäß würde für ein Gas, dessen Wärmemenge w einfach das Äquivalent seiner Energiemenge pv wäre, $k = 2$ sein. Solche Gase gibt es aber in der Wirklichkeit nicht. Für Gase von sehr complicierter Zusammensetzung ist k, wie bei flüssigen und festen Körpern, nur wenig größer als 1, über diesen Wert sich mehr erhebend, wenn man zu minder complicierten Verbindungen übergeht; für Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff, und für mehrere chemisch zusammengesetzte Gase ist $k = 1 \cdot 4$, endlich für Quecksilberdampf, Argon und Helium, und für die übrigen neuen Gase wird $k = 1 \cdot 666$, welcher von 2 noch weit abstehende Wert der größte bei Gasen mit Befolgung der gewöhnlichen Gesetze überhaupt vorkommende ist. Man sieht also, dass die Menge der in einem Gase thatsächlich enthaltenen Wärme ohne Ausnahme eine mehr oder minder

---

[1] Nach der kinetischen Gastheorie wäre die bezügliche Energiemenge $= \frac{3}{2} pv$, was unmittelbar eine viel zu große Ausflussgeschwindigkeit $= \sqrt{(3gpv)}$ ergeben würde. Thatsächlich findet sich in den Lehrbüchern der Physik für die theoretische Ausflussgeschwindigkeit eines Gases in den leeren Raum, ganz wie für diejenige einer Flüssigkeit, der durch obige Gleichung geforderte Ausdruck $\sqrt{(2gpv)}$ oder ein von diesem nur der Form nach verschiedener aufgestellt, während die abweichende Folgerung, zu welcher die kinetische Theorie führt, unerwähnt bleibt.

bedeutend größere ist, als der seine Spannkraft erzeugenden Energiemenge entspräche. Dass nun aber eine solche Differenz in der That immer bestehen muss, lässt sich theoretisch a priori vermuthen.

Ein Gas enthält nämlich in seinem Volumen nicht bloß ponderable Theilchen, sondern auch Äther, und es erscheint keineswegs undenkbar, dass dieser in der kinetischen Theorie unberücksichtigt bleibende Stoff[1] der Träger jener Wärmemenge ist, um welche die Gesammtwärme eines Gases in jedem Falle das Wärmeäquivalent der Energiemenge pv übersteigt. Meine Ansicht, dass dem so sein könne, habe ich schon früher mehrfach ausgesprochen; es möge mir gestattet sein, meine Begründung derselben hier kurz wiederzugeben.

Ich verstehe im folgenden unter einem Körperatom ein Massentheilchen, welches dem Äther gegenüber als ein räumliches Continuum erscheint. Wie in anderen Körpern, ist auch in Gasen jedes Atom, als Träger von Wärme, in seiner Substanz mechanisch erschüttert und sendet demzufolge durch Erregung des seine Oberfläche umschließenden Äthers fortwährend Strahlen aus, welche eine von der Beschaffenheit der Atomsubstanz abhängige spectrale Zusammensetzung haben; sie mögen die bezüglichen Fundamentalstrahlen heißen. Während nun die Atome eines Gases im allgemeinen Licht- und Wärmestrahlen, von denen ihre Oberflächen getroffen werden, ohne erhebliche Reflexion durch ihre sich dabei als elastisches Medium verhaltende Substanz hindurch fortpflanzen, werden die von denselben einander zugesendeten Fundamentalstrahlen an ihren Oberflächen selectiv zurückgeworfen, somit allseitig diffundiert und ihrer Ansammlung entsprechend verdichtet. Hieraus folgt, dass in einem aus zahllosen Atomen gebildeten Gase der zwischen denselben vorhandene Äther

[1] Insofern die kinetische Theorie die in einem Körper vorhandene Äthermenge aus dem Grunde vernachlässigt, weil man einer so geringen Masse eine in Betracht kommende Energiemenge nicht beimessen könne, geräth sie mit sich selbst in Widerspruch. Dieselbe Theorie besagt nämlich, dass in einem Gemenge von Quecksilberdampf und einem Gase, dessen Atomgewicht millionfach kleiner wäre, die Atome des letzteren trotz ihrer geringen Masse eine gleiche Energie haben würden wie die Atome des ersteren.

stets eine verhältnismäßig große, in diffundierten Strahlen bestehende Summe lebendiger Kräfte enthalten muss, welche einerseits der Intensität der von den Atomen ausgesendeten Strahlen und anderseits der Summe der strahlenden und zugleich reflectierenden Flächen aller das Gasvolumen ausmachenden Atome proportional ist. Die Intensität jener Strahlung, d. h. die von der Einheit der Atomflächen in der Zeiteinheit ausgesendete Strahlenmenge betrachte ich als proportional der absoluten Temperatur des bezüglichen Gases.

Hat das gedachte Gas, dessen Gewichtsmenge $= 1$ sei, die absolute Temperatur T, so lässt sich die Wärmemenge, welche dasselbe in der zwischen seinen Atomen diffundierten Strahlenmenge enthält, einfach durch das Product cT, wo c nach dem Gesagten der Summe der mit dem Äther in Berührung stehenden Atomflächen proportional ist, ausdrücken; diese Wärmemenge, durch welche die Temperatur des Gases bestimmt wird, nenne ich seine Temperaturwärme, wonach also die mit der Natur des Gases wechselnde Constante c als dessen specifische Temperaturwärme erscheint.

Da nach dem Obigen das Gas in seinem Volumen v zugleich eine seine Spannkraft p erzeugende, in Translationsbewegung seiner ponderablen Theilchen bestehende Energiemenge $= pv$ enthält, so ergibt sich als Ausdruck der Gesammtwärme w desselben die Gleichung

$$w = cT + \frac{pv}{A},$$

wobei jene Energiemenge, welche die Theilchen des Gases in jedem Falle vermöge ihrer inneren Bewegung besitzen, als relativ sehr klein vorausgesetzt und vernachlässigt ist.

Ein dieser Gleichung entsprechendes Gas, dessen Gesammtwärme nämlich außer den zwei darin ausgedrückten Energiemengen kein anderes Wärmeäquivalent von merklichem Betrage in sich schließt, mag ein ideales heißen. Man kann es voraus für wahrscheinlich halten, dass die Bestandfähigkeit und das sonstige Verhalten eines solchen Gases wesentlich auf der in seinem Volumen diffundierten, seine Temperatur bestimmenden Strahlenwärme beruht. Es scheint mir dies mit

Rücksicht auf die Eigenschaften, welche man dem Äther beizulegen berechtigt ist, in der That möglich zu sein.

In einem Gase, welches, um die Gedanken zu vereinfachen, unmittelbar aus Atomen bestehe, wird zufolge der in ihm angesammelten Strahlenmenge jedes derselben von allen Seiten her fortwährend von sehr intensiven, an seiner Oberfläche zurückprallenden Strahlen getroffen. Ich nehme nun an, dass jeder Wärmestrahl auf ein getroffenes, ihn reflectierendes Flächenstück eine seiner Intensität proportionale, longitudinal bewegende Kraft ausübe. Sind um ein Atom herum die übrigen so vertheilt, dass die auf dasselbe einfallenden Strahlen nach allen Richtungen gleiche Intensität haben, so heben sich die entsprechenden Kräfte in Bezug auf dessen Fortbewegung gegenseitig auf; das Atom befindet sich dann in einer Gleichgewichtslage. Denkt man sich dasselbe aus einer solchen Lage um etwas verschoben, so ist die darauf einfallende Bestrahlung nicht mehr nach allen Richtungen gleich; es ergibt sich also eine Bestrahlungsdifferenz, aus welcher eine das Atom fortbewegende Kraft resultiert. Ist diese Kraft hinreichend stark und immer so gerichtet, dass sie das bezügliche Atom gegen seine frühere Lage zurücktreibt, so entspricht diese einem stabilen Gleichgewichte; das Atom kann um eine solche Lage Schwingungen machen, indem es, dieselbe verlassend, durch die gleichzeitig eintretende Bestrahlungsdifferenz immer wieder dahin zurückgeführt wird. Da gleiches für alle Atome des Gases gilt, so erscheint dasselbe auf diese Weise unter der alleinigen Herrschaft der obwaltenden Strahlenkräfte bestandfähig.

Bisher blieb es unentschieden, ob die longitudinal bewegende Kraft, welche ein Wärmestrahl auf eine getroffene reflectierende Fläche hypothetisch ausübt, als Druck oder als Zug erscheine. Die Antwort auf diese Frage kann, wie ich glaube, nicht zweifelhaft sein. Der Äther zwischen zwei sich bestrahlenden Flächenstücken muss auf diese eine Wirkung haben, ähnlich derjenigen, welche eine gespannte Saite oder ein an seinen Endflächen festgeklemmter Stab erzeugen, wenn sie, transversal ausbiegend, um ihre Ruhelage schwingen. Im ersten Falle übt die gespannte Saite als ruhend einen Zug aus,

welcher, wenn sie schwingt, durchschnittlich um einen ihrer Schwingungsintensität proportionalen Betrag verstärkt ist. Im zweiten Falle übt der festgeklemmte Stab als ruhend einen Druck aus, welcher bei transversaler Schwingung durchschnittlich um einen seiner Schwingungsintensität proportionalen Betrag vermindert ist. Man kann sich nun die Vorstellung machen, dass der den ganzen Weltraum erfüllende Äther auf die Oberfläche jedes Körperatoms einen überall gleichen, vielleicht sehr starken Druck ausübt; wird ein solches Atom auf einer Seite von einem Strahle getroffen, den es reflectiert, so ist auf dieser Seite desselben der Druck des Äthers um etwas vermindert, das Atom erfährt folglich einen Überdruck oder, wie man auch sagen kann, einen Zug nach der Seite, woher die Bestrahlung kommt. Zwei Atome, welche einander Strahlen zusenden, die sie reflectieren, üben daher gegenseitig eine Anziehung aus.

Wendet man dies auf die Atome eines Gases an, so zeigt sich scheinbar widersprechend, dass jedes von seiner Gleichgewichtslage abweichende Atom, wenn die aus der zugehörigen Bestrahlungsdifferenz resultierende Kraft eine dasselbe zurückführende sein soll, immer auf der seiner Gleichgewichtslage zugewendeten Seite, wo ihm die Nachbaratome momentan ferner stehen, stärker bestrahlt sein muss, als auf der Gegenseite, wo ihm die Nachbaratome momentan näher stehen; die Atome fliehen sich dann, indem sie stets in die größtmöglichen Abstände voneinander zu kommen suchen. Es ist aber diesbezüglich eben auch zu beachten, dass die Atome nicht bloß strahlen, sondern zugleich reflectieren, und man sieht, dass das verlangte Resultat sich wirklich ergibt, wenn bei benachbarten, einander sich nähernden Atomen die gegenseitige Beschattung, welche sie durch Reflexion ausüben müssen, um einen größeren Betrag zunimmt, als ihre gegenseitige Bestrahlung. Dieser für den Bestand der Gase wesentlichen Bedingung ist nun nach meiner Ansicht ihrer geringen Dichte wegen immer entsprochen.

Bei gewöhnlicher Dichte eines Gases ist nämlich die Distanz, bis zu welcher die von einem Atom ausgehenden Strahlen vorzudringen vermögen und welche man den Radius

der thermischen Wirkungssphäre seiner Atome nennen kann, im Vergleich mit der mittleren Distanz zweier Nachbaratome sehr groß. Die jedes Atom treffenden Strahlen stammen aus dieser relativ großen Sphäre her. Die Bestrahlung, welche ein Atom von seinen Nachbaratomen empfängt, ist demgemäß gegen die aus größeren Entfernungen her auf dasselbe einfallende Bestrahlung sehr klein und wird desto kleiner gegen diese, je größer durch Verdünnung des Gases der Radius der thermischen Wirkungssphäre wird, woraus folgt, dass die Bestrahlung eines Atoms seitens seiner Nachbaratome im Vergleich mit der Beschattung, die es zugleich von denselben durch Auffangung der weiter herkommenden Strahlen erfährt, mit abnehmender Dichte immer stärker zurücktritt, so dass schließlich für die Richtung oder das Vorzeichen der aus den Verschiebungen der Atome entspringenden Bestrahlungsdifferenzen nothwendig ihre gegenseitigen Beschattungen ausschlaggebend sein müssen. Dies ist nun aber, wie ich annehme, schon bei der gewöhnlichen Dichte der Gase vollkommen der Fall, und es ist dann also die zur Stabilität ihrer Atome erforderliche Bedingung erfüllt. Der Grund, warum die Atome eines Gases einander fliehen und scheinbar abstoßen, ist sonach die von denselben auf ihre Fundamentalstrahlung ausgeübte selective Reflexion.

Für ein von seiner Gleichgewichtslage abweichendes Atom mit der reflectierenden Oberfläche e bedeute nun α die mittlere Bestrahlungsintensität auf der dieser Lage zugewendeten Seite und β diejenige auf der Gegenseite desselben, so ist $e(\alpha-\beta)$ der mittleren Intensität der das Atom in seine Gleichgewichtslage zurückführenden Kraft proportional; es sei nun σ die mittlere Schwingungsweite eines solchen, so übt jene Kraft, indem sie dasselbe aus dem Abstande σ in die Gleichgewichtslage zurücktreibt, eine dem Producte $e(\alpha-\beta)\sigma$ proportionale Arbeit aus, und es ergibt sich somit, wenn das Atom, dessen Masse m sei, daselbst mit der Geschwindigkeit u ankommt, die Gleichung

$$\frac{mu^2}{2} = Ce(\alpha-\beta)\sigma,$$

wo der Proportionalitätsfactor C eine von der Elasticität des Äthers abhängige Constante ist. Steht das Gas unter dem Drucke p und sind im Volumen v desselben n gleiche Atome enthalten, so folgt hieraus mit Rücksicht auf das Frühere die bemerkenswerte Beziehung

$$pv = \frac{nmu^2}{2} = Cne(\alpha - \beta)\sigma.$$

Man ersieht aus derselben zunächst, dass, wenn bei Verdünnung des Gases die mittlere Schwingungsweite seiner Atome in dem gleichen Verhältnisse zunimmt, in welchem die mittlere Intensität der an denselben obwaltenden Bestrahlungsdifferenzen abnimmt, das Product pv constant bleibt und also das Mariotte'sche Gesetz gilt. Jene Bedingung muss daher bei den gewöhnlichen Zuständen der Gase annäherungsweise erfüllt sein.

Bei Zusammendrückung eines Gases nimmt der Radius der thermischen Wirkungssphäre seiner Atome proportional dem Cubus der mittleren Atomdistanz ab. Man kann sich nun auf diese Weise die Wirkungssphäre so stark reduciert denken, dass die jedes Atom treffenden, bei der supponierten Verdichtung äußerst concentrierten Strahlen nur noch von den nächsten Nachbaratomen herkommen. Ein aus seiner mittleren Lage zwischen zwei Nachbaratomen verschobenes, dem einen näher und dem anderen ferner gerücktes Atom wird dann jedenfalls auf der Seite des näheren Nachbaratoms stärker als auf der Gegenseite bestrahlt sein; bei solcher Dichte würden also die aus den Atomverschiebungen entspringenden Bestrahlungsdifferenzen bereits das Vorzeichen gewechselt haben, und es wäre folglich jetzt eine Stabilität der Atome unter der alleinigen Herrschaft ihrer wechselseitigen Wärmestrahlung gar nicht möglich.

Man ersieht hieraus, dass in einem idealen Gase die mittlere Intensität $\alpha - \beta$ der an den Atomen obwaltenden Bestrahlungsdifferenzen, indem sie durch Verdichtung zunimmt, sich dabei einem Maximum nähert, nach dessen Überschreitung dieselbe schnell kleiner und unfähig wird, die Atome in mittleren Lagen stabil zu erhalten. Die Spannkraft eines Gases kann

daher, sofern es ein ideales ist, durch Verminderung seines Volumens immer nur bis zu einer gewissen Grenze zunehmen, welche jedesmal bei einer desto größeren Dichte erreicht wird, je höher die bezügliche Temperatur ist; bei einem diese Grenze übersteigenden äußeren Drucke ist das Gas nicht bestandfähig.

Wenn man ein ideales Gas von einem Zustande an, wo es das Mariotte'sche Gesetz befolgt und somit nach obiger Gleichung $(\alpha-\beta)\sigma$ constant ist, stärker zusammendrückt, so nimmt, indem hiebei die Differenz $\alpha-\beta$ einem Maximum zugeht, das Product pv vom genannten Gesetze sich entfernend ab. Lässt man das Gas von demselben Zustande an immer stärker sich ausdehnen, so geht die Differenz $\alpha-\beta$, beschleunigt abnehmend, schließlich dem völligen Verschwinden zu, es nimmt folglich pv nothwendig wieder ab, und das Gas entfernt sich nun vom Mariotte'schen Gesetze immer weiter im entgegengesetzten Sinne. Mit pv muss nach dem Obigen auch die Wärmemenge w des Gases durch Verdünnung bei constanter Temperatur zuerst bis zu einem Maximum wachsen und weiterhin abnehmen.

Nach den neuestens von Lord Rayleigh mit Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff bis zum Drucke von 0·01 *mm* Quecksilber ausgeführten Versuchen ist der Geltungsbereich des Mariotte'schen Gesetzes bei abnehmendem Gasdrucke ein sehr weiter und scheint eine erhebliche Abweichung davon erst für noch niedrigere Drucke einzutreten.

Den erwähnten Verlauf der Wärmemenge w bei hinreichend verdünnten Gasen betreffend, ist noch zu bemerken, dass derselbe für weiteste Erstreckung zu einer eigenthümlichen, vielleicht auf extreme Verdünnungszustände wirklich anwendbaren Folgerung führt.

Bedeutet nämlich dl den sehr kleinen Wärmebetrag, welchen das Gasvolumen v verschluckt, wenn es sich bei dem Drucke p um die sehr kleine Größe dv ausdehnt, so ist, dessen Wärmemenge w als Function von v betrachtet, allgemein

$$dl = \frac{pdv}{A} + dw,$$

und hieraus folgt, wenn man für w den entsprechenden Wert einsetzt,

$$A\frac{dl}{dv} = p + \frac{d(pv)}{dv},$$

wo für den Fall, dass pv durch Verdünnung abnimmt, der rechtsstehende Quotient negativ ist. Da nun die Abnahme von pv nach dessen Maximum mit zunehmender Verdünnung sich mehr und mehr beschleunigen muss, so erscheint es möglich, dass bei schon sehr niedrigem Drucke die Summe

$$p + \frac{d(pv)}{dv} < 0$$

und also $\frac{dl}{dv}$ negativ wird; das Gas müsste dann, um seine Temperatur constant zu erhalten, bei Ausdehnung Wärme abgeben und bei Zusammendrückung Wärme aufnehmen. Für einen auf solche Weise (wie das Wasser unterhalb 4° oder wie Kautschuk bei starker Spannung) sich verhaltenden Körper muss aber der Coefficient seiner Wärmeausdehnung negativ sein, und man kann es daher immerhin als eine nicht unbedingt abzuweisende Hypothese erachten, dass Gase von äußerster Verdünnung bei Erhöhung ihrer Temperatur sich zusammenziehen und bei deren Erniedrigung sich ausdehnen. Die seit langer Zeit bekannte, am Encke'schen Kometen bei jeder Wiederkehr während seines Umschwunges um die Sonne sich abspielende Contraction und Dilatation seiner gasförmigen Kernhülle und ebenso das analoge Vorkommen bei anderen Kometen dürfte sich unmittelbar auf die bezeichnete Ursache zurückführen lassen.

Permanente Gase und kritischer Zustand.

Das Volumen, welches ein Körper unter dem äußeren Drucke einnimmt, wird im allgemeinen durch zwei in ihm selbst wirksame Kräfte bestimmt: eine derselben, welche für gewöhnlich das Volumen ausdehnt, ist die darin vorhandene Wärme, die andere, welche für gewöhnlich, der Wärme entgegenwirkend, das Volumen zusammenzieht, ist eine ihrem Wesen nach bisher nicht näher bekannte Kraftart. Bezeichnet man die Wirkung der letzteren, auf die Flächeneinheit bezogen, mit q und den äußeren Druck mit p, so muss die ausdehnende

Kraft der Wärme, welche r heiße, den Kräften p und q zusammen das Gleichgewicht halten, d. h. es ist $r = p + q$ und folglich

$$p = r - q;$$

für ein ideales Gas wird $q = 0$ und somit $r = p$.

Hat der Körper das Volumen v, so erhält man hieraus durch Differentiation

$$\frac{dp}{dv} = \frac{dr}{dv} - \frac{dq}{dv},$$

wobei $\frac{dp}{dv}$ für einen bestandfähigen Körper negativ ist und nur im Grenzfalle $= 0$ werden kann; ein positiver Wert dieses Quotienten ist mit der Bestandfähigkeit absolut unvereinbar.

Nach meiner im vorigen dargelegten Anschauung über das Wesen der Wärme wird die ausdehnende Kraft r bei Zusammendrückung eines Gases, dasselbe mag ein ideales sein oder nicht, nothwendig ein Maximum. Denkt man sich dieses erreicht, so ist $\frac{dr}{dv} = 0$ und daher

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{dq}{dv}.$$

Ist das gedachte Gas von einem idealen nur erst wenig verschieden, so nimmt q jedenfalls durch Verdichtung zu, d. h. es ist in voriger Gleichung $\frac{dq}{dv}$ negativ und folglich $\frac{dp}{dv}$ positiv; das Gas ist also für das Maximum von r nicht mehr bestandfähig und hat seine Stabilität schon desto früher verloren, je merklicher die Kraft q bereits ist.

In der aus dem instabil gewordenen Gase gebildeten Flüssigkeit ist, weil r sein Maximum überschritten hat und mit v abnimmt, $\frac{dr}{dv}$ positiv. Da die Flüssigkeit stabil und $\frac{dp}{dv}$ für dieselbe negativ ist, so folgt, dass jetzt auch $\frac{dq}{dv}$ positiv sein muss, d. h. die Kraft q hat bei der Condensation des Gases, ähnlich wie r, ein Maximum überschritten; sie nimmt in der Flüssigkeit bei deren Zusammendrückung, und zwar schneller

als r, ab. Bezüglich der Frage nach dem Wesen der Kraft q dürfte diese mit der herrschenden Anschauung contrastierende Folgerung vielleicht von Wichtigkeit sein.

In dem vorhin betrachteten Falle eines durch Verdichtung instabil werdenden Gases trat das Maximum von q erst ein, nachdem die Kraft r ihr Maximum schon überschritten hatte. Da dieses Maximum aber mit steigender Temperatur schnell auf immer größere Dichte fortrückt, so wird es möglich sein, dass dasselbe bei hinreichend hoher Temperatur auf eine Dichte fällt, bei welcher q sein Maximum schon überschritten hat und abnimmt. Dann ist $\frac{dq}{dv}$ für das Maximum von r positiv und somit $\frac{dp}{dv}$ negativ, das Gas ist also diesfalls im Maximum von r bestandfähig.

Wenn bei niedriger Temperatur eines Gases das Maximum von r vor und bei hoher Temperatur nach dem Maximum von q eintreten kann, so muss es auch eine Temperatur geben, bei welcher r und q ihr Maximum gleichzeitig, d. h. bei gleicher Dichte erreichen. Für diesen Zustand wird

$$\frac{dr}{dv} = \frac{dq}{dv} = \frac{dp}{dv} = 0.$$

Drückt man ein Gas bei der diesbezüglichen Temperatur von einer geringen Dichte angefangen immer stärker zusammen, so nehmen r und q zuerst zu, aber r um mehr als q; es wächst daher auch p, und $\frac{dp}{dv}$ bleibt negativ, bis bei der Dichte, wo r und q Maxima werden, $\frac{dp}{dv} = 0$ wird. Hier hat der Druck p einen Halt- und Wendepunkt. Setzt man nämlich die Verdichtung weiter fort, so nehmen r und q ab, aber r um weniger als q; es wächst daher p wieder, und $\frac{dp}{dv}$ wird wieder negativ: der Nullwert dieses Quotienten bei der Dichte, wo r und q zugleich Maxima sind, ist folglich auch selbst ein Maximum, und es ist somit dann

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d^2p}{dv^2} = 0,$$

d. h. es sind in diesem Falle die bekannten zwei Bedingungen des kritischen Zustandes erfüllt. Die kritische Temperatur ist also diejenige, bei welcher die Maxima von r und q zusammen auf gleiche Dichte fallen und der dann obwaltende Druck, wobei Gas und Flüssigkeit, ineinander übergehend, identisch sind, ist der kritische.[1] Für höhere Temperatur tritt das Maximum von r nach demjenigen von q ein; das Gas ist dann als solches permanent, d. h. dessen Druck nimmt continuierlich mit der Dichte zu, in seinem Verlaufe zunächst noch einen Wendepunkt zeigend, wo seine Zunahme am langsamsten und die Zunahme der Dichte am schnellsten vor sich geht. Bei hinreichend hoher Temperatur ober der kritischen verschwindet dieser Wendepunkt.

Nach dem Gesagten nehmen bei der Zusammendrückung eines permanenten Gases, sobald auch die Kraft r ihr Maximum überschritten hat, beide Kräfte r und q miteinander, und zwar letztere rascher als erstere, fortwährend ab. Ihrem hier vorausgesetzten Ursprunge gemäß wird dabei die Wärmekraft r nothwendig zuletzt negativ; in äußerst comprimierten Gasen muss demnach r eine das Volumen zusammenziehende und q eine entsprechend starke, das Volumen ausdehnende Kraft sein. Gase von solcher Compression müssten, unter plötzlich vermindertem Drucke sich ausdehnend, zufolge der dabei von der Kraft q geleisteten Arbeit sich erhitzen.

Ich glaube, dass diese Folgerung, welche in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert erscheint, einer bis zu starker Verdichtung fortschreitenden experimentellen Prüfung sich nicht entziehen könnte. Thatsächlich scheinen die Schlüsse, welche Amagat (Wiedemann's Beiblätter, Bd. 18, S. 821) aus seinen

[1] Bei jenem Zustande einer unter dem Drucke ihres Dampfes erwärmten Flüssigkeit, wo sie durch die geringste weitere Erwärmung vollständig instabil wird, verschwindet für dieselbe zwar der erste, aber nicht der zweite Differentialquotient von p, welcher dann noch positiv ist; die bezüglichen Werte des Druckes und der Temperatur fallen daher mit ihren kritischen Werten nicht zusammen, sondern sind niedriger als diese. Unter ihrem kritischen Drucke erwärmt, würde die Flüssigkeit bestandfähig bleiben, bis sie bei Erreichung der kritischen Temperatur, wo beide Differentialquotienten von p gleichzeitig verschwänden, mit ihrem Dampfe identisch wäre.

weitgehenden Gasverdichtungsversuchen über den betreffenden Verlauf der von ihm als »innerer Druck« bezeichneten Größe abgeleitet hat, meiner Anschauung in ganz besonderer Weise günstig zu sein und die damit verbundene Annahme zu bestätigen, dass es möglich sein muss, die Wärmeausdehnung eines Gases umso früher, je höher seine Temperatur ist, durch starke Compression auf Null zu bringen und negativ zu machen. Diesem Ziele haben sich Amagat's Versuche bei Wasserstoff den entsprechenden Angaben zufolge schon einigermaßen genähert, indem bei dessen Compression der innere Druck, nach Überschreitung eines Maximums abnehmend, bereits durch eine 500fache Verdichtung $= 0$ und sodann immer stärker negativ wird, wonach die Wärmeausdehnung nun einem Wechsel ihres Vorzeichens zustrebt. Sobald dieser wirklich erreicht würde, wäre die Dichte des Gases bei veränderlicher Temperatur unter constantem Drucke ein Minimum. Es scheinen Amagat's Versuche demnach für die Erforschung des Verhaltens der Gase bei sehr hohen Drucken eine ganz neue Aussicht zu eröffnen.

Weitere Folgerungen.

Nach meiner Vorstellung beruht der Zustand eines den gewöhnlichen Gesetzen folgenden Gases auf einer in seinem Volumen zwischen den Atomen durch auswählende Reflexion angesammelten Strahlenmenge. Die bezüglichen Strahlengattungen entspringen aus einem inneren Erschütterungszustande der Substanz der Atome, und ihre Wellenlängen sind daher, sofern die Atome nicht selbst eine Modification erfahren, von der Temperatur und der Dichte des Gases unabhängig; ich habe sie Fundamentalstrahlen genannt. Die von der Einheit der Atomflächen in der Zeiteinheit ausgesendete Menge derselben ist der absoluten Temperatur proportional und im Vergleich mit der entsprechend zwischen den Oberflächen der Atome diffundierten Strahlenmenge ist die bezügliche innere Energie der Atomsubstanz immer sehr klein.

Die Theilchen eines Gasvolumens v, welche unter den gewöhnlichen Umständen dem äußeren Drucke p mit ihrer Bewegungsenergie pv das Gleichgewicht halten, sind meistens

keine Atome, d. h. keine mit dem Äther nur an ihrer Oberfläche in Berührung stehenden Massen, sondern aus solchen gebildete, mehr oder minder complexe Partialsysteme, worin, ähnlich wie in festen Körpern, die einzelnen Atome durch Ätherschichten voneinander getrennt bleiben. Solche Partialsysteme nenne ich Molekeln. Da die zu einer Molekel gehörigen Atome sich nicht unmittelbar berühren, müssen sie innerhalb derselben um mittlere Lagen schwingen. Ist die Energie dieser intramolecularen Atombewegung, wie ich angenommen habe, im Vergleich mit derjenigen, welche die Molekeln vermöge ihrer Bewegung als Ganze besitzen, sehr klein, so umfasst die Wärmemenge w des Gases außer der zwischen seinen Atomen diffundierten Strahlenwärme cT annäherungsweise nur noch das Wärmeäquivalent der Energiemenge pv seiner als Ganze bewegten Molekeln. Die Constante c lässt sich danach für jedes Gas leicht berechnen.

Die Atome können dadurch, dass sie innerhalb der Molekeln um mittlere Lagen schwingen, im Äther Strahlen erregen. Diese und die von den ganzen Molekeln durch ihre Schwingungsbewegung erzeugten Strahlen stehen in keiner Beziehung zu der Substanz der Atome; sie werden daher nicht nothwendig, wie die Fundamentalstrahlen, an der Oberfläche der getroffenen Atome zurückgeworfen, sondern sie werden von denselben, wie ich annehme, im ganzen ohne erhebliche Reflexion durch ihre Substanz hindurch, ähnlich wie im Äther, aber mit anderer Geschwindigkeit fortgepflanzt. Die aus Molekeln aufgebauten Gase müssen demnach im allgemeinen unter gleichen Umständen eine größere und gattungsreichere Strahlenmenge aussenden als diejenigen Gase, welche unmittelbar aus Atomen gebildet sind.

Die Energie der intramolecularen Atomverschiebungen nimmt jedenfalls mit der Temperatur zu. Die Annahme aber, dass dieselbe der absoluten Temperatur T proportional sei, erscheint durch nichts geboten; es kann daher sein, dass ihre Zunahme eine raschere ist und dass sie aus diesem Grunde bei höheren oder auch schon bei gewöhnlichen Temperaturen bemerkbar wird. Für diesen Fall lässt sich die Wärmemenge w des Gases durch die Gleichung

$$w = (c+\gamma)T + \frac{pv}{A}$$

ausdrücken, wo γT das Wärmeäquivalent der für gewöhnlich kleinen Energiemenge der intramolecularen Atomverschiebungen bedeutet.

Aus der beobachteten specifischen Wärme molecularer Gase ergibt sich in der That, dass bei denselben die Summe $c+\gamma$ durch Erwärmung langsam zunimmt. Da c constant und γ, welches sich ändern kann, gegen c nur klein ist, so muss der langsamen Zunahme von $c+\gamma$ eine verhältnismäßig rasche Zunahme von γ entsprechen, woraus folgt, dass γT und somit die Energie der intramolecularen Atomverschiebungen mit der absoluten Temperatur viel rascher als diese zunimmt.

In einem molecularen Gase besteht die ganze zwischen seinen Atomen diffundierte Strahlenmenge aus der zwischen den Oberflächen seiner Molekeln diffundierten und ebenso wie in den unmittelbar aus Atomen gebildeten Gasen seine Spannkraft bedingenden Strahlenmenge und aus derjenigen, welche zwischen den Atomen innerhalb der Molekeln diffundiert ist und zur Spannkraft des Gases nichts beiträgt. Man kann sich ein Gas aus so complexen Molekeln gebildet denken, dass gegen die letztere Strahlenmenge die erstere sammt der Energiemenge pv sehr unbedeutend wird und außeracht bleiben kann. Für ein solches Gas kann man

$$w = (c+\gamma)T$$

setzen, wo nun cT angenähert die zwischen den Atomen innerhalb der Molekeln diffundierte Strahlenmenge vorstellt, gegen welche γT gewöhnlich klein ist. Die Wärmemenge eines solchen Gases ist also nahe dieselbe, wie wenn seine Molekeln als Ganze in Ruhe wären.

Da die Structur einer Molekel, wie man vermuthen darf, mit derjenigen eines festen Körpers in der Hauptsache identisch und demnach ein sichtbarer fester Körper wesentlich nichts anderes als eine sehr große Molekel ist, so muss die vorstehende Gleichung auch für die Wärmemenge eines festen Körpers gelten. Dies besagt nun, dass die in einem festen Körper enthaltene Wärme fast ganz in der zwischen seinen

Atomen diffundierten Strahlenmenge besteht und dass die Energie der um mittlere Lagen schwingenden Atome von seiner Gesammtwärme nur einen kleinen Theil ausmacht.

Wenn man einen festen Körper von einer gewöhnlichen Temperatur an erwärmt, so nimmt analog wie bei molecularen Gasen die Summe $c+\gamma$ langsam zu. Da c constant ist, so muss dabei der veränderliche, aber gegen c kleine Wert von γ verhältnismäßig schnell wachsen; es nimmt folglich γT und somit die Energie der Atomverschiebungen in festen Körpern mit der absoluten Temperatur in einem viel stärkeren Verhältnisse als diese zu.

Nimmt man an, was diesbezüglich gewiss das wahrscheinlichste ist, dass die Intensität der Strahlen, welche die Atome durch ihre gegenseitige Bewegung erregen, einfach der Energie dieser Bewegung proportional sei, so muss nach dem Gesagten die Ausstrahlung eines festen Körpers, wenn sie hauptsächlich von der Energie der Atomverschiebungen herstammt, durch Erwärmung in einem viel stärkeren Verhältnisse als seine absolute Temperatur zunehmen. Dies ist erfahrungsmäßig der Fall. Man kann sonach umgekehrt aus der raschen Zunahme der Strahlung mit der Temperatur auf eine entsprechend rasche Zunahme der Energie der Atomverschiebungen bei den bezüglichen Körpern schließen.

Bei den festen Elementen ist die von mir als specifische Temperaturwärme bezeichnete Größe c ihrer Bedeutung nach die Constante, deren Product mit dem entsprechenden Äquivalentgewichte wirklich das Gesetz von Du Long und Petit ergeben muss. Dass dieses Gesetz bei gewöhnlicher Temperatur meistens angenähert auch mit der experimentellen specifischen Wärme gilt, kommt daher, dass dann γ gegen c hinreichend klein und die Wärmeausdehnung nur gering ist. Man sollte nun erwarten, dass die demgemäße Geltung des Gesetzes für tiefere Temperaturen an Genauigkeit nur noch zunehmen könnte. Nach den betreffenden Versuchen von Behn und anderen Physikern nimmt jedoch die specifische Wärme eines Metalles, wenn man es von einer gewöhnlichen Temperatur an immer tiefer erkalten lässt, zuerst zwar nur langsam, aber sich mehr und mehr beschleunigend endlich sehr weit unter

ihren normalen Wert und für verschiedene Metalle auf sehr ungleiche Weise ab. Man kann dies einfach daraus erklären, dass die in einem Metalle ohnehin schon bei gewöhnlicher Temperatur einander sehr nahen Atome, indem sie durch das Erkalten immer näher zusammenrücken, sich nach und nach gruppenweise mit ihren Grenzflächen unmittelbar aneinander legen, wodurch die Summe der mit dem Äther in Berührung stehenden, also der strahlenden Flächen sich vermindert und folglich die dieser Summe proportionale Größe c und mit ihr die beobachtete specifische Wärme abnehmen muss. Hiemit stimmt überein, dass gerade bei solchen Elementen, wo die Atome, wie beim Kohlenstoff, einander besonders nahe stehen, die Abnahme der specifischen Wärme am schnellsten und mehrfach schon von höheren Temperaturen angefangen vor sich geht. Ihrer erwähnten Bedingung gemäß kann diese Abnahme möglicherweise immer sehr weit fortschreiten, und es erscheint sogar nicht ausgeschlossen, dass die specifische Wärme der festen Elemente überhaupt in der Nähe des absoluten Nullpunktes der Temperatur nahezu Null sein könnte. Für den Kohlenstoff ist dies nach Behn's Versuchen kaum zu bezweifeln.

Wenn es demnach möglich ist, dass die Atome eines chemischen Elementes unter günstigen Umständen sich nach und nach gruppenweise mit ihren wahrscheinlich ebenen Grenzflächen unmittelbar, nämlich so aneinander legen, dass die sich bildenden Complexe keine Molekeln im oben bezeichneten Sinne, sondern mit dem Äther nur an ihrer Außenfläche in Berührung stehende Massen und daher selbst wieder — nur größere — Atome sind, so begreift es sich, dass für ein und dasselbe Element in verschiedenen Aggregatformen und in chemischen Verbindungen die Constante c verschieden sein und von ihrem normalen, dem Gesetze von Du Long und Petit entsprechenden Werte sehr weit abweichen kann. Modificationen der Elemente, welche die Substanz oder die innere Structur der Atome betreffen und möglicherweise die Constante c verändern, sind dabei nicht ausgeschlossen.

Ich bemerke in dieser Beziehung hier Folgendes. Aus der für ein gewöhnliches Gas anzunehmenden Gleichung

$$w = cT + \frac{pv}{A}$$

findet man, das Verhältnis der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu derjenigen bei constantem Volumen mit k bezeichnend, die darin diffundierte Strahlenmenge

$$cT = \frac{2-k}{k-1} \cdot \frac{pv}{A}.$$

Für Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff ist angenähert $k = 1{\cdot}4$ und daher

$$cT = \frac{3}{2} \cdot \frac{pv}{A};$$

es ist folglich, wenn man sich alle Strahlen nach drei aufeinander senkrechten Richtungen zerlegt denkt, nach einer jeden die Strahlenmenge

$$\frac{cT}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{pv}{A}$$

diffundiert.

Für den Quecksilberdampf mit $k = \frac{5}{3}$ folgt aus obiger Gleichung

$$cT = \frac{1}{2} \cdot \frac{pv}{A};$$

in diesem Dampfe beträgt also die nach jeder Richtung diffundierte Strahlenmenge gerade den dritten Theil derjenigen, welche diffundiert sein müsste, wenn seine Atome auf gleiche Weise strahlen und reflectieren würden, wie die Atome der zuvor genannten Gase. Um dies zu erklären, lege ich den Atomen des Quecksilberdampfes eine solche innere Structur bei, dass es in jedem eine Richtung gebe, in welcher dasselbe ebenso, wie die Atome anderer Gase allseitig, strahlt und reflectiert, während es nach den darauf senkrechten Richtungen weder strahlt noch reflectiert, sondern alle Strahlengattungen ohne Ausnahme durchlässt. Man sieht, dass dann, wenn die Atome gleichmäßig nach allen Richtungen orientiert sind, die nach jeder Richtung diffundierte Strahlenmenge der dritte Theil

derjenigen sein muss, als wenn dieselben gleich intensiv, wie nach einer, nach allen Richtungen strahlen und diffundieren würden. Ähnliches gilt für Argon, Helium und die übrigen neuen Gase.

Atome, welche gar keine Strahlen auszusenden vermöchten und alle auf sie einfallenden Strahlengattungen durchließen, sind denkbar, sie könnten aber kein Gas bilden. Gase, für welche bei den gewöhnlichen Gesetzen das Verhältnis k größer wäre als im Quecksilberdampfe, kann es daher nicht geben.

Mit den betreffenden Erfahrungsdaten erhält man für das Wasserstoffgas bekanntlich mit guter Annäherung

$$\frac{pv}{AT} = 1;$$

hiedurch wird für dasselbe die Constante $c = 1·5$. Wenn man als das dem Du Long-Petit'schen Gesetze entsprechende Product rund die Zahl 6 annimmt, so resultiert hiermit folgerichtig für den gasförmigen Wasserstoff das Äquivalentgewicht 4. Ist $H = 1$ dasjenige des festen, so kann man demnach das Äquivalentgewicht des gasförmigen Wasserstoffes mit $H_4 = 4$ bezeichnen. Auf gleiche Weise ergeben sich für Stickstoffgas und Sauerstoffgas die Äquivalentgewichte $N_4 = 56$ und $O_4 = 64$.

Bezüglich der Frage, durch welchen Vorgang eine nach einfachen Verhältnissen fortschreitende Vergrößerung der Äquivalentgewichte der Elemente eintreten könne, stelle ich mir die Sache auf folgende Weise vor.

Die specifische Wärme des flüssigen Wasserstoffes, aus der des Wassers berechnet, ist 6, wonach derselbe das Äquivalentgewicht $H = 1$ hat. Man denke sich nun jedes Atom dieser Flüssigkeit als Würfel, dessen Seitenkante $= 1$ sei. Legen sich beim Verdampfen solche Würfel unmittelbar mit ihren Seitenflächen so aneinander, dass sich aus ihnen größere Würfel mit der Seitenkante 4 bilden, so hat jeder der letzteren eine 16mal größere Oberfläche als jeder einfache Würfel; da die Zahl derselben 64mal kleiner ist als die Zahl der Componenten, so hat sich durch Verdampfen die Summe der freien und somit strahlenden Atomflächen im Verhältnis von $1:\frac{1}{4}$

vermindert, und es gehört daher zu der gleichen strahlenden Flächensumme im Dampfe eine viermal größere Gewichtsmenge als in der Flüssigkeit, d. h. diese hat durch Verdampfen ihr Äquivalentgewicht vervierfacht. Ähnlich verhält es sich mit Stickstoff und Sauerstoff.

Das Äquivalentgewicht des flüssigen Quecksilbers Hg verhält sich zu dem des flüssigen Wasserstoffes H wie 200:1, wogegen in der Gasform das Verhältnis der Dichten $= 100:1$ ist. Hieraus folgt, dass beim Verdampfen des Quecksilbers je acht seiner würfelförmigen Atome sich zur Bildung der nächst größeren Würfel von doppelter Kantenlänge unmittelbar aneinander legen, wodurch die Summe der freien Atomflächen sich auf die Hälfte reduciert, und es hätte der Dampf insofern das Äquivalentgewicht $Hg_2 = 400$. Da aber nach dem Vorigen die Atome zugleich ihre innere Structur so ändern, dass sie, anstatt wie in der Flüssigkeit allseitig, nur nach einer Richtung strahlen und reflectieren, so wird im ganzen die Summe der strahlenden und reflectierenden Flächen sechsmal kleiner, und es ist folglich das wahre, dem Gesetze von Du Long und Petit entsprechende Äquivalentgewicht des Quecksilberdampfes $3Hg_2 = 1200$. Bei diesem Dampfe und den analogen Gasen ist also das wahre Äquivalentgewicht das dreifache desjenigen, welches aus ihrer Dichte folgen würde; sie repräsentieren diesbezüglich eine eigenthümliche Anomalie, mit welcher auch ihr anderweitiges Verhalten im Zusammenhang stehen dürfte.

Nach dem Gesagten sind die selbständigen Theilchen des Quecksilberdampfes und seiner Analoga keineswegs, wie man aus der kinetischen Gastheorie schließt, untheilbare, sondern spaltbare Atome, und dies ist eine Folgerung, welche man vielleicht auch aus anderen Gründen für wahrscheinlich halten kann.

Bezeichnet man für moleculare Gase die darin bei der Temperatur T zwischen den Außenflächen ihrer Molekeln diffundierte Strahlenmenge mit εT und die zwischen den Atomen innerhalb der Molekeln, also zwischen den Innenflächen der letzteren diffundierte Strahlenmenge mit ιT, so wird für dieselben $c = \varepsilon + \iota$ und daher, den idealen Zustand vorausgesetzt, ihre Wärmemenge

$$w = \left(1 + \frac{\iota}{\varepsilon}\right)\varepsilon T + \frac{pv}{A}.$$

Wie in den unmittelbar aus Atomen gebildeten Gasen auf der Strahlenmenge cT, beruht in molecularen Gasen die Spannkraft derselben auf der Strahlenmenge εT; es muss folglich die Constante ε der Bedingung

$$\varepsilon T = \frac{3}{2} \cdot \frac{pv}{A}$$

entsprechen, wonach das Äquivalentgewicht, als proportional der Dichte, durch ε allein bestimmt und von ι unabhängig ist. Mit vorstehender Beziehung erhält man

$$w = \left(\frac{3\iota}{2\varepsilon} + \frac{5}{2}\right)\frac{pv}{A}$$

und hieraus ergibt sich für das Verhältnis k bei Geltung der gewöhnlichen Gesetze der Ausdruck

$$k = \frac{\frac{3\iota}{\varepsilon} + 7}{\frac{3\iota}{\varepsilon} + 5}.$$

Dieser Gleichung zufolge könnte man umgekehrt auch das Verhältnis $\frac{\iota}{\varepsilon}$ durch k ausdrücken und dasselbe sonach für jedes Gas, wenn k gegeben ist, direct berechnen. Da aber bei molecularen Gasen die experimentellen Bestimmungen von k beträchtlich schwanken, scheint es mir zweckmäßig, aus obiger Gleichung für supponierte Werte von $\frac{\iota}{\varepsilon}$ die zugehörigen Werte von k zu suchen und mit den für verschiedene Gase experimentell bekannten zu vergleichen.

Für $\iota = 0$ ist $k = 1{\cdot}4$. Hierher gehören außer Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff auch Kohlenoxyd, Stickoxyd, Chlor-, Brom- und Jodwasserstoff. Alle diese Gase bestehen unmittelbar aus Atomen, und die Äquivalentgewichte ihrer Elemente sind durchwegs vervierfacht; in denen, welche chemisch zusammen-

gesetzt sind, ist ihrer Dichte gemäß eine engere Zusammenlagerung ihrer ungleichartigen Atome nicht annehmbar.

Für $\frac{\iota}{\varepsilon} = \frac{1}{2}$ wird $k = 1{\cdot}307$. Um diesen Wert herum bewegen sich die Bestimmungen von k bei Chlor-, Brom- und Jodgas, ferner bei Wasserdampf, Kohlensäure, Stickoxydul, Ammoniak, Methan und Schwefelwasserstoff. Ich bemerke, dass man denselben Wert von $\frac{\iota}{\varepsilon}$ für ein Gasvolumen erhält, welches zur Hälfte aus einem Gase mit $\iota = 0$ und zur anderen Hälfte aus einem Gase mit $\iota = \varepsilon$ besteht. Die vorgenannten Gase scheinen in der That dem Volumen nach halb unmittelbar aus Atomen und halb aus Molekeln, welche aus gleichartigen Atomen auf gleiche Weise aufgebaut sein müssen, gebildet zu sein.

Für $\frac{\iota}{\varepsilon} = 1$ wird $k = 1{\cdot}25$ (schwefelige Säure); $\frac{\iota}{\varepsilon} = \frac{3}{2}$ gibt $k = 1{\cdot}210$ (Schwefelkohlenstoffdampf); $\frac{\iota}{\varepsilon} = 2$ gibt $k = 1{\cdot}182$ (Phosphordampf); $\frac{\iota}{\varepsilon} = 5$ gibt $k = 1{\cdot}100$ (Chlorsiliciumdampf).

Aus diesen Anführungen dürfte bereits hervorgehen, dass $\frac{\iota}{\varepsilon}$, also das Verhältnis der Summe der strahlenden Innenflächen der Molekeln zur Summe der strahlenden Außenflächen, für jedes moleculare Gas eine sehr einfache Zahl sein muss, und dies weist auf einen ganz regelmäßigen und höchst einfachen Bau der Molekeln hin, wodurch jede engere Zusammenlagerung ungleicher Atome ausgeschlossen erscheint.

In der That lässt sich angeben, wie die Molekeln, um den erwähnten einfachen Bedingungen zu entsprechen, aufgebaut sein müssen. Man denke sich z. B. im Wasserstoffgase H_4 die 64 einfachen Atome, woraus jedes seiner selbständigen Atome besteht, durch eingeschobene dünne Ätherschichten voneinander getrennt, so gehen jene complexen Atome ebenmäßig in Molekeln über; das durch die Summe der strahlenden Außenflächen bestimmte Äquivalentgewicht ändert sich dabei nicht, aber die Constante c steigt mit der Gesammtsumme der strahlenden Flächen auf das Vierfache, und es wird $\iota = 3\varepsilon$,

d. h. die Summe der strahlenden Innenflächen verhält sich zur Summe der strahlenden Außenflächen wie 3:1. Auf ähnliche Weise kann man für jeden Wert von $\frac{\iota}{\varepsilon}$ den Bau der zugehörigen Molekeln leicht ermitteln und ich gehe daher auf diesen von mir schon speciell erörterten Punkt hier nicht weiter ein.

Vergleicht man das Äquivalentgewicht einer gasförmigen Verbindung mit der Summe der darin verbundenen Äquivalentgewichte, so zeigt sich, dass ersteres die halbe Summe der letzteren ist. So hat z. B. das Stickstoffoxyd, da es 15 mal dichter ist als der Wasserstoff H_4, das Äquivalentgewicht 60, während die Summe der verbundenen Äquivalentgewichte $56+64=120$ ist. Diese Beziehung besteht durchgängig und grundsätzlich.

Äquivalente Gewichtsmengen der Gase haben normal bei gleicher Temperatur und Spannung das gleiche Volumen, welches x heiße. Wenn von zwei oder mehr verschiedenen Gasen N solche Volumina, wo N eine ganze Zahl sein muss, zu einer gasförmigen Verbindung zusammentreten, so reduciert sich das im freien Zustande eingenommene Gesammtvolumen Nx, wenn $N>2$, durch Condensation schließlich auf $2x$, welches das Volumen der Verbindung ist; ihr Äquivalentgewicht, d. h. jene Gewichtsmenge derselben, welche das Volumen x einnimmt, ist daher selbstverständlich nicht die ganze, sondern die halbe Summe der verbundenen Äquivalentgewichte.

Wie die Constante c bei den unmittelbar aus Atomen bestehenden Gasen, muss die Constante ε bei den molecularen Gasen, mit dem Äquivalentgewichte multipliciert, das dem Gesetze von Du Long und Petit entsprechende Product geben, d. h. es muss, wenn a das Äquivalentgewicht bedeutet, jedesmal

$$a\varepsilon = 6$$

sein. Da für moleculare Gase $c=\varepsilon+\iota$ ist, so folgt hieraus

$$ac = 6\left(1+\frac{\iota}{\varepsilon}\right),$$

und man sieht, dass die Äquivalentwärme ac, welche, wie bei Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff, auch bei Kohlenoxyd,

Stickoxyd, Chlor-, Brom- und Jodwasserstoff = 6 ist, für moleculare Gase mit der Complexität ihrer Theilchen nach sehr einfachen Verhältnissen an Größe zunehmen muss. Nach dem Obigen ist *ac* für Chlor-, Brom- und Jodgas, dann für Wasserdampf, Kohlensäure, Stickoxydul, Ammoniak, Methan und Schwefelwasserstoff = 9, für schwefelige Säure = 12, für Schwefelkohlenstoffdampf = 15, für Phosphordampf = 18, für Chlorsiliciumdampf = 36. Unter *a* ist natürlich immer das der Gasform entsprechende Äquivalentgewicht, dasjenige des Wasserstoffgases H_4 = 4 gesetzt, zu verstehen.

Da in dem Falle, wenn eine chemische Verbindung als solche ihre Aggregatform wechselt, die Verhältnisse der Äquivalentgewichte der Elemente zueinander und zu jenem der Verbindung sich gleich bleiben müssen, so behält der obige, das Äquivalentgewicht einer gasförmigen Verbindung betreffende Satz seine Geltung auch für flüssige und feste Verbindungen bei: man kann daher allgemein sagen, dass das Äquivalentgewicht einer chemischen Verbindung immer die halbe Summe der verbundenen Äquivalentgewichte ist, und mit Rücksicht hierauf kann man die vorstehende Formel als eine auf alle Substanzen, sie mögen chemisch einfach oder zusammengesetzt, fest, flüssig oder gasförmig sein, sich erstreckende Erweiterung des Gesetzes von Du Long und Petit betrachten. Ich bemerke dazu, dass für dieselbe Substanz in verschiedenen Aggregatformen der Quotient $\frac{t}{s}$ nicht nothwendig die gleiche, einfache Zahl bleibt. So ist die Äquivalentwärme *ac* für Eis, Wasser und dessen Dampf constant = 9, für den flüssigen Schwefelkohlenstoff = 9 und für dessen Dampf = 15, für festes Jod = 6, für flüssiges = 12 und für Joddampf = 9.

Das Wasser vervierfacht beim Verdampfen sein Äquivalentgewicht und Gleiches ist bei Salzsäure, Ammoniak, Schwefelkohlenstoff und Phosphorchlorür, dann bei den flüchtigen Chlormetallen der Fall. Es scheint sonach, dass die flüssigen oder festen anorganischen Verbindungen im allgemeinen durch Verdampfen ihr Äquivalentgewicht vervierfachen. Anders verhalten sich die organischen Verbindungen.

Nach dem Vorigen hat, um einen bestimmten Fall zu betrachten, Chlornatrium das wahre Äquivalentgewicht $\frac{1}{2}$ (NaCl) = 29·25. Die Erfahrung zeigt nun, dass 29·25 Gewichtstheile Chlornatrium in verdünnter wässeriger Lösung eine gleiche Gefrierpunktserniedrigung erzeugen wie 46 Gewichtstheile Alkohol, woraus man nach dem betreffenden van 't Hoff-schen Satze schließen muss, dass jene zwei Gewichtsmengen äquivalent sind und dass somit das Äquivalentgewicht des flüssigen Alkohols wirklich = 46 ist. Nun hat aber der Alkoholdampf, seiner auf H_4 bezogenen Dichte gemäß, das Äquivalentgewicht 92; man sieht also, dass der Alkohol durch Verdampfen sein Äquivalentgewicht verdoppelt, und da die Zahl 46 zu den Äquivalentgewichten anderer organischer Flüssigkeiten in denselben Verhältnissen steht wie die Zahl 92 zu den Äquivalentgewichten der bezüglichen Dämpfe, so folgt, dass die organischen Flüssigkeiten überhaupt durch Verdampfen ihr Äquivalentgewicht verdoppeln. Auf Grund dieser Anschauung erscheint zugleich die von Arrhenius aufgestellte Dissociationshypothese überflüssig.

Jenem Verhalten der organischen Verbindungen entsprechend, wird in ihren chemischen, die Summe der verbundenen Äquivalentgewichte ausdrückenden Formeln die Zahl der Äquivalente jedes Elementes immer eine gerade oder paarige sein müssen.

Über die Wärmeproduction in zähen Flüssigkeiten

von

G. Jaumann.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1902.)

Die Wärmeproduction im Innern einer bewegten Flüssigkeit muss durch ein Nahewirkungsgesetz bestimmt sein, und zwar durch die Werte der Geschwindigkeit und ihrer Derivierten an dem betrachteten Orte bestimmt, hingegen unabhängig sein von der Bewegungsform der Flüssigkeit in der weiteren Umgebung dieses Ortes.

Diese Wärmeproduction durch »innere Reibung« ist im Gegensatze zu ihrem nur auf triviale Vorstellungen zurückzuführenden Namen eine fundamentale Erscheinung und dürfte also durch ein sehr einfaches Differentialgesetz bestimmt sein, ähnlich wie die Wärmeproduction in einem Raumelemente eines elektrischen Stromes nach dem Joule'schen Gesetz einfach durch die specifische Leitfähigkeit und das Quadrat der elektrischen Kraft oder, was dasselbe ist: durch das Product des specifischen Widerstandes und des Quadrates des Quirls der magnetischen Kraft bestimmt ist.

In manchen einfachen Fällen ist nun die Wärmewirkung der inneren Reibung durch ein ganz ähnliches Gesetz bestimmt, und zwar vor allem in dem typischen Falle der inneren Reibung, wo Flüssigkeitsschichten in paralleler Richtung mit verschiedener Geschwindigkeit strömen. Es ist dann, wie man leicht berechnet, die Wärmeproduction pro Volums- und Zeiteinheit durch das Product des Reibungscoefficienten und des Quadrates des Quirls oder der Rotation der Strömung bestimmt.

Tumlirz[1] gibt einen anderen speciellen Fall an, in welchem die Reibungswärme durch das Quadrat des Quirls bestimmt wird. Eine incompressible Flüssigkeit, welche in allen Grenzflächen des Raumes τ ruht, produciert pro Secunde eine Wärmemenge W, welche dem Raumintegral des Quadrates des Quirls Q proportional ist:

$$W = \mu \int_\tau Q^2 d\tau,$$

worin μ der Reibungscoefficient ist. Es lässt sich jedoch diese Gleichung nicht auf ein beliebiges Raumelement beziehen, da die Grenzen des Integrals ganz speciell angenommen sind.

In anderen Fällen sieht man hingegen sofort ein, dass der Quirl der Strömung die Wärmeproduction nicht bestimmen kann. Wenn eine Flüssigkeitsmasse wie ein starrer Körper rotiert, so hat diese Strömung überall einen Quirl, welcher der doppelten Winkelgeschwindigkeit gleich ist, und dennoch finden hiebei keine relativen Verschiebungen der Flüssigkeitstheile statt und kann also keine Wärme produciert werden. Anderseits kann man von den meisten Potentialströmungen erwarten, dass sie Reibungswärme producieren, obwohl doch der Quirl dieser Strömungen Null ist.

Immerhin schien es mir der kleinen Mühe wert, die Spur dieses einfachen Gesetzes weiter zu verfolgen, und es soll im folgenden versucht werden, dasselbe richtig zu formulieren.

1.

Über die Größe der Wärmewirkung der inneren Reibung kann ein Zweifel nicht bestehen, denn diese kann in jedem Falle aus der von den bekannten Flächenkräften der Reibung geleisteten Arbeit berechnet werden.

Betrachten wir einen Raum τ, welcher von der Oberfläche ω umschlossen wird, so kann die Wirkung der außerhalb dieses Raumes befindlichen Flüssigkeit auf die innerhalb desselben befindliche Flüssigkeit ersetzt werden durch diese Oberflächenkräfte. Auf ein Oberflächenelement, dessen äußere

---

[1] Tumlirz, Wied. Ann., 40, S. 146 (1890).

Normale die x-Richtung hat, muss dann bekanntlich eine Kraft pro Flächeneinheit ausgeübt werden, deren Componenten die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right); \\ Z_x &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

worin u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit und μ der Reibungscoefficient ist. Durch cyclische Vertauschung erhält man die Kraft $X_y Y_y Z_y$, welche auf ein zur y-Richtung senkrechtes Flächenelement wirkt, und endlich die Kraft $X_z Y_z Z_z$, welche auf ein zur z-Richtung senkrechtes Flächenelement wirkt.

Zu den nach auswärts gerichteten Normalcomponenten X_x, Y_y und Z_z addiert sich jedoch noch der negative Druck p, welcher eine Function der Dichte der Flüssigkeit und ihrer Temperatur ist.

Die beste Rechtfertigung dieser Werte der Oberflächenkräfte der Reibung findet sich in einer alten Abhandlung von Stefan.[1]

Die Arbeit einer Kraft pro Zeiteinheit wird durch das innere Product derselben und der Geschwindigkeit gegeben. Die Arbeit der Oberflächenkräfte wird durch das Oberflächenintegral dieses inneren Productes bestimmt. Es sind

$$[u\,(X_x-p)+vY_x+wZ_x]\,dy\,dz,$$

$$[v\,(Y_y-p)+wZ_y+uX_y]\,dz\,dx$$

und

$$[w(Z_z-p)+uX_z+vY_z]\,dx\,dy$$

die Componenten eines Elementes dieses Oberflächenintegrals, welches sich leicht in ein Raumintegral verwandeln lässt. Beziehen wir dieses auf ein Raumelement, so erhalten wir für die Arbeit E der Oberflächenkräfte, welche auf dieses Element wirken, bezogen auf die Volums- und Zeiteinheit, den Wert:

---

[1] Stefan, diese Sitzungsberichte. Bd. 46, S. 8 (1862).

$$E = \frac{\partial}{\partial x}[u(X_x - p) + vY_x + wZ_x] + \frac{\partial}{\partial y}[v(Y_y - p) + wZ_y + uX_y] + \\ + \frac{\partial}{\partial z}[w(Z_z - p) + uX_z + vY_z].$$

Diese Arbeit zerfällt in zwei Theile. Der eine derselben vermehrt die Bewegungsenergie der in dem Raumelemente enthaltenen Flüssigkeit, der zweite bewirkt die Deformation derselben.

Um die zur Änderung der Bewegungsenergie verbrauchte Arbeit zu finden, denken wir uns das Raumelement zunächst undeformierbar oder starr. Da das Trägheitsmoment desselben von höherer Ordnung unendlich klein ist als seine Masse und die Winkelgeschwindigkeit endlich ist, so kommt es nur auf die Translation desselben an. Wir brauchen also in obigem Ausdruck für die Gesammtarbeit E nur die Geschwindigkeitscomponenten als unabhängig von den Coordinaten zu betrachten, um jenen Betrag A der Arbeit zu erhalten, welcher sich pro Volums- und Zeiteinheit in Bewegungsenergie umsetzt. Es ist also:

$$A = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + \\ + v\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right).$$

Der Rest der geleisteten Arbeit, welcher die Deformation des Raumelementes bewirkt, verwandelt sich in vollkommen elastischen Körpern in die potentielle elastische Energie, in Flüssigkeiten und Gasen jedoch zur Gänze in Wärme. Die pro Volums- und Zeiteinheit entwickelte Wärme Q ist sonach (in mechanischem Maß):

$$Q = E - A,$$

und wir haben also:

$$Q = -p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + X_x\frac{\partial u}{\partial x} + X_y\frac{\partial u}{\partial y} + X_z\frac{\partial u}{\partial z} + Y_x\frac{\partial v}{\partial x} + Y_y\frac{\partial v}{\partial y} + Y_z\frac{\partial v}{\partial z} + \\ + Z_x\frac{\partial w}{\partial x} + Z_y\frac{\partial w}{\partial y} + Z_z\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad 2)$$

Der erste Theil dieser Wärmeproduction entspricht der adiabatischen Compression durch den Druck p. Thatsächlich ist die Divergenz der Geschwindigkeit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta$$

gleich der Volumszunahme der Volumseinheit in der Zeiteinheit. Der Rest der entwickelten Wärme ist also die Reibungswärme W.

Setzen wir die Werte der Oberflächenkräfte aus 1) ein, so erhalten wir für die in dem Volumelement $d\tau$ und in der Zeit dt entwickelte Reibungswärme dW den Wert (in mechanischem Maß):

$$dW = \mu \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau\, dt, \qquad 3)$$

eine Gleichung, welche bereits von Helmholtz[1] (1869) abgeleitet wurde, allerdings nur für incompressible Flüssigkeiten und unter der Voraussetzung, dass dieselben sich unendlich langsam bewegen, so dass man die totalen Differentialquotienten den partiellen gleich setzen kann.

Wie man aus obiger einfacher Ableitung ersieht, gilt aber die Gleichung 3) für die Reibungswärme ganz allgemein, auch für compressible beliebig rasch bewegte Flüssigkeiten.

2.

Die gewonnene Differentialgleichung für die Wärmewirkung der inneren Reibung hat eine ganz zufällige, von dem Gange der Rechnung herrührende und sehr complicierte Form. Man erkennt aus derselben nicht einmal die doch nothwendig vorhandene Invarianz der Wärmeproduction bei Änderung des Coordinatensystems. Die einzelnen Glieder des Ausdruckes 3) haben nämlich keineswegs eine invariante Bedeutung.

---

[1] Helmholtz, Gesammelte Abh., 1. Band, S. 225.

Wählen wir als Coordinatenrichtungen die Hauptspannungsrichtungen des betrachteten Volumelementes, so können wir in Gleichung 2) die Tangentialspannungen gleich Null setzen und erhalten:

$$dW = \left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau dt,$$

worin

$$X = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

die Hauptspannungen sind. Es ist also

$$dW = \frac{1}{2\mu}(X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau dt. \qquad 4)$$

Die pro Volums- und Zeiteinheit in einem kleinen Raumelemente entwickelte Reibungswärme ist also der Summe der Quadrate der Hauptspannungen proportional.

Dies ist nun wohl ein einfacher Ausdruck, es ist aber damit nicht viel gewonnen. Die Invarianz desselben ist zwar einleuchtend, wurde aber auch bei der Ableitung desselben aus der für ein beliebiges Coordinatensystem geltenden Form stillschweigend vorausgesetzt. Für die Berechnung der Wärmewirkung wird im allgemeinen Gleichung 4) weniger bequem sein als Gleichung 3), weil sich die Hauptspannungen nur schwer berechnen lassen.

3.

Die Bewegungsform einer Flüssigkeit unterscheidet sich im allgemeinen auch in den kleinsten Theilen von der Bewegungsform eines starren Körpers. Man muss, wenn man die Werte der Geschwindigkeit und ihrer Derivierten in einem Punkte der Flüssigkeit kennt, entscheiden können, ob sie sich dort wie ein starrer Körper bewegt oder nicht.

Die Bedingung der Incompressibilität wird vielfach verwendet. Die Beziehung zwischen den Derivierten der Geschwindigkeit, welche erfüllt sein muss, damit ein Stoff in einem kleinsten Theile sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt, ist

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

und es ist diese Divergenz der Geschwindigkeiten eine auch in anderen Beziehungen wichtige Invariante. Die Beziehung zwischen den Derivierten der Geschwindigkeit, welche erfüllt sein muss, damit ein Stoff in einem seiner kleinsten Theile sich wie ein starrer Körper bewegt, ist aber nicht weniger interessant und sehr leicht aufzustellen.

Wir können diese Bedingungsgleichung auf eine ähnliche Form bringen, wie sie die Continuitätsgleichung hat, und zwar auf die Form:

$$D = 0. \tag{5}$$

Hierin ist D ein gewisses Aggregat von partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten. Diese Differentialform D, welche invariant sein soll, wollen wir die Deformationsgeschwindigkeit an dem betrachteten Orte nennen.

Die Deformationsgeschwindigkeit D ist für uns von Interesse, weil es wahrscheinlich ist, dass die Reibungswärme W eine Function von D ist, da jedenfalls $W = 0$ wird, wenn $D = 0$ ist.

Ein Stoff erfährt während seiner Bewegung an irgendeinem Punkte keine Deformation, wenn sämmtliche drei Hauptdilatationen an dieser Stelle Null sind. Diese drei Bedingungen lassen sich in eine zusammenfassen: es muss die Summe der Quadrate der drei Hauptdilatationen gleich Null sein. Die Deformationsgeschwindigkeit D wird Null sein, wenn die Summe der Quadrate der drei Hauptdilatationsgeschwindigkeiten λ_1, λ_2 und λ_3 gleich Null ist.

Seien $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ die Dilatationsgeschwindigkeiten, ferner $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ die Schiebungsgeschwindigkeiten, so sind die Hauptdilatationsgeschwindigkeiten λ bekanntlich die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda & , \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), & \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda & , \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), & \frac{\partial w}{\partial z} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ordnet man dieselbe nach Potenzen von λ und betrachtet die zwei Coefficienten:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \\ - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \\ - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

so kann man den Wert:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = D$$

leicht bilden und erhält endlich die Deformationsgeschwindigkeit D:

$$D = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2. \qquad 6)$$

Diese Ableitung gilt sowohl für elastische, als für flüssige Körper. Sie hat keinen physikalischen, sondern rein geometrischen Charakter.

Die Bedingung $D = 0$ ist nothwendig und hinreichend, damit der Stoff sich in dem betrachteten Zeit- und Raumelement wie ein starrer Körper bewegt. Die Incompressibilitätsbedingung ist natürlich von selbst erfüllt, wenn $D = 0$ ist.

Da die Hauptdilatationen λ invariant sind, so ist die Deformationsgeschwindigkeit D ein invarianter, von der Bewegung

des Coordinatensystems unabhängiger Wert, welcher ebenso bemerkenswert ist wie die Divergenz Θ der Bewegung.

Man erkennt nun sofort aus Gleichung 6) und Gleichung 3), dass die in einem Volumelement $d\tau$ und in der Zeit dt entwickelte Reibungswärme dW der Deformationsgeschwindigkeit D einfach proportional ist. Es gilt:

$$dW = 2\mu D dt d\tau, \qquad 7)$$

und wir haben hiemit ein Gesetz der Wärmewirkung der inneren Reibung gewonnen, dessen einfache Bedeutung nicht zu verkennen ist.

4.

Ich gieng ursprünglich von der Frage aus, wodurch sich die Bewegungsform einer quirlenden Strömung von der Bewegungsform eines rotierenden Körpers unterscheidet. Man erhält so, unabhängig von der Betrachtung der (nicht invarianten) Schiebungen und Dilatationen, einen Ausdruck für die Deformationsgeschwindigkeit D, welcher sich durch seine Anschaulichkeit und ersichtlich invariante Form auszeichnet.

Man bezeichnet gewöhnlich den Quirl als die doppelte Winkelgeschwindigkeit des Flüssigkeitstheilchens. Damit man sich aber überhaupt den Begriff der Winkelgeschwindigkeit bilden kann, müssen die Theile des Körpers eine ganz bestimmte Regelmäßigkeit in ihrer Bewegung erkennen lassen, so dass man eine innerhalb oder außerhalb des Körpers liegende Rotationsaxe angeben kann. Es ist dies der Fall bei jeder Bewegung eines starren Körpers und mancher Theile der Flüssigkeit, in welchen der Quirl einen constanten Wert hat. In diesen Fällen ist der Quirl gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit und ist damit eine Gleichung zwischen zwei unabhängig zu messenden Größen ausgesprochen. Wenn jedoch die Flüssigkeit eine allgemeinere Bewegungsform hat, so verliert der Begriff Winkelgeschwindigkeit jeden selbständigen Sinn. Es dürfte richtig sein, dass wenn man ein kleines Theilchen der Flüssigkeit sich plötzlich erstarrt denkt, dieses dann mit einer Winkelgeschwindigkeit rotiert, welche gleich dem halben Quirl ist, welcher vorher an dieser Stelle vorhanden war, aber eben

durch dieses Erstarren wird im allgemeinen die Bewegungsform der Flüssigkeit an dieser Stelle wesentlich geändert. Man könnte versucht sein, anzunehmen, dass, da in einem unendlich kleinen Theile der Flüssigkeit der Quirl constanten Wert hat, die kleinsten Theile der Flüssigkeit wie starre Körper rotieren. Dies wäre aber nicht richtig. Auch in den kleinsten Theilen unterscheidet sich die Bewegung einer Flüssigkeit im allgemeinen wesentlich von der Bewegung eines starren Körpers.

Die Winkelgeschwindigkeit Ω eines starren Körpers lässt sich durch zwei wesentlich verschiedene Differentialformen definieren, nämlich 1. durch die Gesetzmäßigkeit in der Vertheilung der Geschwindigkeiten und 2. durch die Gesetzmäßigkeit in der Vertheilung der Centralbeschleunigungen.

Die Centralbeschleunigung φ in einem rotierenden Körper bestimmt sich durch

$$\varphi = -\Omega^2 r,$$

worin r der Radius ist. Bezeichne α den Drehungswinkel, x die Richtung der Rotationsaxe, so bestimmt sich das Oberflächenintegral der Centralbeschleunigungen φ über eine geschlossene feststehende Oberfläche ω, deren Normale ν ist und welche den Raum τ umschließt, durch:

$$\int_\omega \varphi \cos(\varphi,\nu)\, d\omega = -\int_\omega \Omega^2 r \,.\, r\, d\alpha\, dx = -2\Omega^2 \int_\tau d\tau.$$

Würde der Körper außer seiner Rotation noch eine translative Beschleunigung haben, so würde diese das Oberflächenintegral der totalen Beschleunigungen, bezogen auf eine geschlossene Oberfläche, nicht ändern. Es ist also

$$\int_\omega \varphi \cos(\varphi,\nu)\, d\omega = \int_\omega \left(\frac{du}{dt}\, dy\, dz + \frac{dv}{dt}\, dz\, dx + \frac{dw}{dt}\, dx\, dy\right).$$

Für eine geschlossene feststehende Oberfläche ist sonach das Oberflächenintegral der totalen Beschleunigungen der Theile des rotierenden Körpers stets gleich und entgegengesetzt dem Raumintegral über das doppelte Quadrat der Winkelgeschwindigkeit.

Das Oberflächenintegral kann man in das Raumintegral der Divergenz der totalen Beschleunigungen verwandeln, welche wir mit: $\left(\mathrm{Div}\,\frac{d}{dt}\,V\right)$ bezeichnen wollen, worin V die totale Geschwindigkeit bedeutet. Es ist

$$\mathrm{Div}\,\frac{d}{dt}\,V = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{dw}{dt}.$$

Betrachten wir statt des Raumes τ nur ein Element desselben, so erhalten wir die Beziehung:

$$\mathrm{Div}\,\frac{d}{dt}\,V = -2\,\Omega^2,$$

welche eine neue differentielle Definition des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit Ω ausspricht. Hält man mit dieser die bekannte Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit Ω und dem Quirl Q zusammen

$$Q = 2\Omega,$$

so ergibt sich die gesuchte Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}\,Q^2 + \mathrm{Div}\,\frac{d}{dt}\,V = 0, \qquad 8)$$

welche eine Bedingung darstellt, dass eine Flüssigkeit in ihrem kleinsten Theile wie ein starrer Körper sich bewegt. Dieselbe reicht jedoch nicht hin, sondern es muss noch die Bedingung der Incompressibilität:

$$\mathrm{Div}\,V = \Theta = 0$$

hinzugefügt werden. Die Gleichung 8) ist also die Bedingung, dass eine incompressible Flüssigkeit sich in dem kleinsten Theile wie ein starrer Körper bewegt.

5.

Um die allgemeine Bedingung zu finden, dass eine compressible Flüssigkeit sich in dem betrachteten kleinsten Theile wie eine starre Masse bewegt, müssen wir die allgemeinste

Bewegungsform eines compressiblen Körpers betrachten, welche man noch als eine wahre Rotation ansehen kann.

Wenn in einem Körper von endlicher Ausdehnung die Geschwindigkeiten bis auf unendlich kleine Abweichungen so vertheilt sind, wie in einem rotierenden Körper, dann ist man über die Winkelgeschwindigkeit und die Lage der Rotationsaxe dieses Körpers nicht im Zweifel. Es kann also der Körper während seiner Rotation noch andere mit Deformation verbundene Bewegungen ausführen, wodurch zu den Rotationsgeschwindigkeiten V und den Centralbeschleunigungen φ sich noch die Zusatzgeschwindigkeiten V' und Beschleunigungen φ' geometrisch addieren, jedoch müssen die Zusatzgeschwindigkeiten V' unendlich klein sein.

Deshalb müssen aber keineswegs die hinzukommenden Beschleunigungen φ' unendlich klein sein,[1] und es können also in einem rotierenden compressiblen Körper die totalen Beschleunigungen wesentlich andere Werte haben als die Centralbeschleunigungen, und es gilt in einem solchen Körper die Gleichung 8) nicht allgemein.

Es ist zwar auch hier das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit Ω bestimmt durch die Divergenz der Centralbeschleunigungen φ, also:

$$\frac{1}{2}\, Q^2 = 2\Omega^2 = -\mathrm{Div}\, \varphi. \tag{9}$$

Die thatsächlich vorhandenen Beschleunigungen $\frac{dV}{dt}$ setzen sich aber aus den Centralbeschleunigungen φ und den Zusatzbeschleunigungen $\frac{dV'}{dt}$ zusammen, und es ist also

$$\mathrm{Div}\, \varphi = \mathrm{Div}\, \frac{d}{dt}\, V - \mathrm{Div}\, \frac{d}{dt}\, V'.$$

[1] Beispielsweise kann der Körper während seiner Rotation unter Deformation Schwingungen ausführen, deren Amplitude unendlich klein von zweiter Ordnung, deren Schwingungsdauer aber unendlich klein von erster Ordnung ist. Die durch diese Zusatzbewegungen bewirkten Geschwindigkeiten V' sind, wie es gefordert wird, unendlich klein, während die hiedurch bedingten Beschleunigungen φ' endlich sind.

Die Divergenz der Zusatzbeschleunigungen $\left(\text{Div}\,\frac{d}{dt}\,V'\right)$ ist ein invariabler Wert und kann durch Rotation und Translation nicht geändert werden. Wir können also für einen Augenblick die Zusatzbewegungen für sich allein betrachten. Dann sind alle vorhandenen Geschwindigkeiten V' unendlich klein, und man wird alle totalen Änderungen nach der Zeit gleich den partiellen Änderungen setzen können. In diesem Falle kann man die Folge der Differentiationen umtauschen und setzen

$$\text{Div}\,\frac{d}{dt}\,V' = \frac{d}{dt}\,\text{Div}\,V'.$$

Diese Beziehung besteht auch während der Rotation. Die endlichen Rotationsgeschwindigkeiten haben aber präcis keine Divergenz. Es ist also

$$\text{Div}\,V' = \text{Div}\,V,$$

worin V die totale Geschwindigkeit ist, und ferner

$$\frac{d}{dt}\,\text{Div}\,V' = \frac{d}{dt}\,\text{Div}\,V,$$

also endlich

$$\text{Div}\,\frac{d}{dt}\,V' = \frac{d}{dt}\,\text{Div}\,V.$$

Es ergibt sich also die Divergenz der Centralbeschleunigungen zu:

$$\text{Div}\,\varphi = \text{Div}\,\frac{d}{dt}\,V - \frac{d}{dt}\,\text{Div}\,V,$$

worin:

$$\text{Div}\,\frac{d}{dt}\,V = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{dw}{dt}$$

und

$$\frac{d}{dt}\,\text{Div}\,V = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

und wir erhalten endlich aus Gleichung 9) die gesuchte Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2} Q^2 + \operatorname{Div} \frac{d}{dt} V - \frac{d}{dt} \operatorname{Div} V = 0, \tag{10}$$

welche die allgemeinste Bedingung darstellt, dass ein Stoff an dem betrachteten Punkt in dem betrachteten Zeitelement sich wie ein starrer Körper bewegt.

Wir haben hiemit eine andere sehr anschauliche Form für die Deformationsgeschwindigkeit D gewonnen. Es ist

$$D = \frac{1}{2} Q^2 + \operatorname{Div} \frac{d}{dt} V - \frac{d}{dt} \operatorname{Div} V. \tag{11}$$

Dieser Wert wurde auf einem wesentlich anderen, ja geradezu entgegengesetzten Wege erhalten wie der in Gleichung 6) angegebene Wert. Während wir in Abschnitt 3 von der Betrachtung einer allgemeinen Bewegungsform ausgegangen sind, die Deformationen abnehmen ließen und so die Bedingung erhalten haben, dass die Bewegungsform eben anfängt, eine einfache Rotation zu werden, haben wir in diesem Abschnitte mit der Betrachtung der reinen Rotation begonnen, die Deformationen zunehmen lassen und die Bedingung erhalten, unter welcher die Bewegungsform eben aufhört, eine Rotation zu sein.

Es ist selbstverständlich, dass diese beiden Werte 6) und 11) von D gleichzeitig Null sein müssen. Dass aber diese Werte auch für beliebig große Deformationen identisch sind, ist eine bemerkenswerte Thatsache, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann, indem man in Gleichung 11) die totalen Änderungen nach dem Euler'schen Satz:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z},$$

worin a eine beliebige Function von x, y, z und t ist, durch die partiellen Änderungen ersetzt und berücksichtigt, dass

$$Q^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Hält man damit zusammen, dass auch die Reibungswärme dieser Deformationsgeschwindigkeit D proportional ist, so wird

man nicht zweifeln, dass letztere ein physikalisch wichtiger Scalar ist.

Derselbe geht in extremen Fällen einerseits in das Quadrat des Quirls der Geschwindigkeit, anderseits in die Divergenz der Beschleunigungen über. Diese beiden extremen Formen der Deformationsgeschwindigkeit sind aber an sich nicht invariante Werte, haben also keine physikalische Bedeutung, sondern ihre Summe erst ist invariant.

6.

Nach Gleichung 7) und 11) ist die in einem Volumelement $d\tau$ und in der Zeit dt entwickelte Reibungswärme dW (in mechanischem Maß) bestimmt durch:

$$dW = 2\mu\left(\frac{1}{2}Q^2 + \operatorname{Div}\frac{d}{dt}V - \frac{d}{dt}\operatorname{Div}V\right)dt\,d\tau. \qquad 12)$$

Um die Wärmeproduction in dem Raume τ zu finden, wollen wir zunächst das Raumintegral betrachten:

$$\int_\tau \frac{d}{dt}\operatorname{Div}V\,d\tau = \int_\tau \frac{d\Theta}{dt}\,d\tau,$$

worin

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Aus der Continuitätsgleichung folgt:

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho\Theta + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z},$$

worin ρ die Dichte ist. Es ist also

$$\Theta = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = +\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dt},$$

worin Δ das Volum des auf seiner Bahn verfolgten Flüssigkeitstheilchens ist. Hieraus folgt

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\Delta}\frac{d^2\Delta}{dt^2} = -\Theta^2 + \frac{1}{\Delta}\frac{d^2\Delta}{dt^2}.$$

Erfassen wir einen bestimmten Augenblick, für welchen

$$d\tau = \Delta$$

gesetzt werde, so ist

$$\frac{d\Theta}{dt} d\tau = -\Theta^2 d\tau + \frac{d^2\Delta}{dt^2}$$

und

$$\int_\tau \frac{d\Theta}{dt} d\tau = -\int_\tau \Theta^2 d\tau + \sum_\tau \frac{d^2\Delta}{dt^2}$$

Es ist aber

$$\sum_\tau \frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_\tau \Delta = \frac{d^2R}{dt^2},$$

worin R das ganze Volum einer Flüssigkeitsmasse bezeichnet, welche in dem betrachteten Augenblick den Raum τ erfüllt, dessen Oberfläche ω feststehend gedacht wird, während R sich mit der Zeit ändert. Wir haben also

$$\int_\tau \frac{d\Theta}{dt} d\tau = -\int_\tau \Theta^2 d\tau + \frac{d^2R}{dt^2}. \qquad 13)$$

Es ist ferner praktisch, das Raumintegral über die Divergenz der totalen Beschleunigungen in das Oberflächenintegral der totalen Beschleunigung $\Phi = \frac{d}{dt} V$ zu verwandeln. Sei ν die Normale der Oberfläche ω, so ist

$$\int_\tau \mathrm{Div} \frac{d}{dt} V . d\tau = \int_\omega \Phi \cos(\Phi, \nu) d\omega. \qquad 14)$$

Wir können nun die Gleichung 12) integrieren und erhalten für die Reibungswärme W, welche pro Secunde in dem Raume τ entwickelt wird, welcher durch eine beliebige unveränderliche Oberfläche ω in der bewegten Flüssigkeit begrenzt wird, den Wert (in mechanischem Maß):

$$W = 2\mu \int_\tau \left(\frac{1}{2} Q^2 + \Theta^2\right) d\tau + 2\mu \int_\omega \Phi \cos(\Phi, \nu) d\omega - 2\mu \frac{d^2R}{dt^2}. \qquad 15)$$

Diese Wärmewirkung wird also bestimmt durch das Raumintegral über das Quadrat des Quirls Q und das Quadrat der Divergenz Θ, ferner durch das Oberflächenintegral der totalen Beschleunigungen Φ und endlich durch die totale Beschleunigung, mit welcher sich das Volum R der in dem gegebenen Augenblick in dem Raume τ enthaltenen Flüssigkeitsmasse ändert.

Bewegen sich z. B. starre Körper in der Flüssigkeit, so wird hiedurch ihr Volum R nicht geändert und die Reibungswärme ist:

$$W = 2\mu \int \left(\frac{1}{2} Q^2 + \Theta^2\right) d\tau + 2\mu \int_\omega \Phi \cos(\Phi, \bar{\nu}) \, d\omega.$$

Das Oberflächenintegral ist hier sehr leicht anzugeben, weil die Beschleunigungen Φ hier ausschließlich die Centripetalbeschleunigungen an der Oberfläche der rotierenden starren Körper sind, falls die Flüssigkeit an der Oberfläche dieser starren Körper haftet.

Sind alle Grenzflächen einer Flüssigkeit starr und haben dieselben nur translative, wenn auch beschleunigte Bewegungen, so ist die pro Secunde entwickelte Reibungswärme gleich

$$W = 2\mu \int_\tau \left(\frac{1}{2} Q^2 + \Theta^2\right) d\tau.$$

Hat eine incompressible Flüssigkeit eine Potentialströmung, so ist die Reibungswärme ausschließlich durch das Oberflächenintegral der totalen Beschleunigungen bestimmt. Die Bedingung dafür, dass die Reibungswärme einer incompressiblen Flüssigkeit durch das Raumintegral über das Quadrat des Quirls bestimmt wird, ist, dass das über ihre sämmtlichen Oberflächen erstreckte Integral der totalen Beschleunigungen Null ist.

Spectralanalytische Studien

(II. Mittheilung)

von

Dr. **Eduard Haschek.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1902.)

IV. Ein Beitrag zur quantitativen Spectralanalyse.

Gelegentlich der Untersuchung über die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Dichte des leuchtenden Dampfes zeigte es sich, dass die Menge der verdampfenden Substanz einen bedeutenden Einfluss auf die Lage der Linie hat. Die Messungen wurden an Kalium gemacht, das in Form von Kalilauge verschiedener Concentration auf Kohle in die Entladungsbahn gebracht wurde. Da die sich ergebenden Regelmäßigkeiten sehr bemerkenswerte sind, die Bestimmung der zum Leuchten gebrachten Substanzmenge aber sehr unsicher ist, nahm ich die Untersuchungen wieder auf, in der Hoffnung, dass sich Gesetzmäßigkeiten ergeben würden, die einen Schluss auf die quantitative Zusammensetzung des Elektrodenmaterials gestatten. Es ist zunächst nöthig, dieses in einer immer wieder leicht reproducierbaren Weise herzustellen. Es ist klar, dass die oben angedeutete Anordnung zu dem vorliegenden Zweck nicht genügen kann, wenn sie auch den Einfluss der variierenden Dampfdichte auf die Wellenlänge erkennen ließ. Es müssen vielmehr die Gemenge der Elemente in einer solchen Form angewendet werden, dass die Zusammensetzung der Elektrode sowohl, als auch des leuchtenden Dampfes percentuell die gleiche ist. Dass dies bei Lösungen, die auf Kohle

aufgetragen werden, nicht der Fall ist, ist ohneweiters klar. Bei der unvermeidlichen starken Erhitzung der Kohle verdampft das aufgetragene Salz verhältnismäßig zu rasch, und die Entladung benützt hauptsächlich Partikel des Salzes, in geringerem Maße die der Kohle; außerdem gelangt nicht aller Kohlenstoff als solcher in die Entladungsbahn. Vielmehr bildet sich in erheblicher Menge Cyan, Kohlenoxyd, Kohlensäure und bei Gegenwart von Wasser auch Acetylen. Man hat bei dieser Versuchsanordnung also stets den Dampf der aufgetragenen Substanz als Hauptmasse vertreten, zu der sich die Kohle und ihre Producte als Verunreinigungen beigesellen. Diese Verhältnisse sind im Bogen und im Funken die gleichen, und man kann am Emissionsspectrum auch leicht die Richtigkeit der obigen Überlegungen daran erkennen, dass bei den leicht verdampfenden Substanzen, als den Salzen der Alkalien und alkalischen Erden, schon bei mäßigen Concentrationen der Lösung das Spectrum der Kohle und des Cyans stark zurücktritt, um vollständig zu verschwinden, wenn sich feste Krusten des Salzes auf den Elektroden befinden. Es ist dies ein Übelstand. Ein zweiter besteht darin, dass die Zusammensetzung der Elektrode während der Dauer der Beobachtung nicht constant bleibt. Nimmt man nämlich das Spectrum einer einmal getränkten Kohle mehreremale hintereinander auf, ohne neue Salzlösung aufzutragen, so zeigt sich, dass schon bei der dritten oder vierten Exposition die Intensität der Linien ungemein heruntergesetzt ist. Gleichzeitig zeigt auch die Verschiebung eine wesentliche Verminderung der Dampfdichte an. Besonders störend ist dieser Umstand wieder bei den leicht verdampfenden Substanzen.

Um allen diesen Übelständen zu entgehen und genau definierte, jederzeit reproducierbare Verhältnisse zu haben, wenigstens was das Elektrodenmaterial anlangt, verwendete ich bei der vorliegenden Untersuchung Mischungen der elementaren Körper, und zwar Amalgame und Legierungen. Es ist dabei ein Vortheil erreicht. Zur spectralen Reaction gelangen die Körper in ganz bestimmten Verhältnissen, die immer wieder eintreten müssen. Verdampft der eine die Körper leichter als der andere, so wird dies jederzeit in gleicher Weise eintreten;

die quantitative Zusammensetzung des Gemenges ändert sich während der Dauer des Versuches nur um einen sehr geringen, bei der erreichbaren Genauigkeit der Messung noch zu vernachlässigenden Betrag; endlich ist die Gefahr eines Substanzverlustes durch Verdampfung während der Versuchspausen auf ein Minimum herabgedrückt. Am ungünstigsten sind in dieser Beziehung vielleicht die Amalgame, namentlich dann, wenn man zur Erzeugung des Spectrums den Bogen verwendet. Es zeigt sich nämlich, dass in diesem Falle das Quecksilber in höherem Maße verbraucht wird, dass zu Ende des Versuches ein höher percentiges Amalgam resultiert, als zu Anfang vorhanden war. Die schließliche Zusammensetzung ist natürlich von der Dauer der Bogenentladung abhängig. Bei Verwendung des Funkens tritt diese Erscheinung nicht oder nur in wesentlich geringerem Maße auf. Aus diesem Grunde wurde von den Amalgamen auch nur eines im Bogen untersucht.

Die Untersuchung musste naturgemäß auf Substanzen beschränkt bleiben, die große Verschiebungen der Spectrallinien zeigen, also auf verhältnismäßig linienarme Elemente. Die Bedingung, Amalgame oder Legierungen zu verwenden, verbot von vornherein die Benützung der Alkalien und Erdalkalien zu diesen Versuchen, da die gewünschten Combinationen nur schwer herzustellen und unverändert aufzubewahren sind. Besonders die Alkalien, die die größten Verschiebungen aufweisen, lassen sich nicht verwenden. Schon während der Vorbereitungen zu den Aufnahmen und noch mehr während des Überganges der elektrischen Entladung würden solche Veränderungen mit dem Elektrodenmaterial vor sich gehen, dass einigermaßen genaue quantitative Angaben kaum zu machen wären. Es wurden daher die Elemente Zink, Zinn, Aluminium und Quecksilber herangezogen. Bei der geringen chemischen Ähnlichkeit, die diese Elemente zeigen, scheint es mir unnöthig, noch mehr Elemente in den Kreis der Untersuchung zu ziehen. Die experimentell gefundene Beziehung zwischen quantitativer Zusammensetzung und Wellenlänge der Linie ist für diese vier Elemente die gleiche, und es ist in hohem Grade wahrscheinlich, dass dieselbe Beziehung für alle

Linien aller Elemente, die überhaupt Verschiebungen erleiden, die gleiche ist.

Bevor auf die erhaltenen Resultate eingegangen wird, seien noch einige Bemerkungen über die Art, wie sie gewonnen wurden, angefügt. Die Amalgame und die Legierungen mussten naturgemäß verschieden behandelt werden. Während letztere in Form von festen Stücken als Elektroden verwendet werden konnten ohne Zuhilfenahme einer fremden Substanz, musste bei ersteren ein Kohlenstift als Gegenpol angewendet werden. Sie wurden in Porzellanröhrchen eingefüllt, die mit einem Eisendraht verschlossen waren, der als Stromzuleitung diente; vor der Füllung, die unmittelbar vor der Aufnahme geschah, wurde natürlich die Substanz, um Fehler durch Auskrystallisieren und Entmischung zu vermeiden, gut verrührt.

Die Bezirke der Spectren, welche die gewünschten Linien enthielten, wurden mit Hilfe eines Rowland'schen Gitters photographisch aufgenommen. Als Standardspectrum diente immer Eisen, für dessen Linien die Wellenlängen der Rowland'schen Tabelle der Sonnenlinien entnommen wurden. Es unterliegt dies für den vorliegenden Zweck keinen Bedenken, da immer mit metallischen Elektroden, also maximaler Dampfdichte gearbeitet wurde. Die äußeren Bedingungen im elektrischen Strom waren für alle diese Aufnahmen, die im Bogenspectrum gemacht wurden, dieselben, also Änderungen der Wellenlänge der Eisenlinie von einer Aufnahme zur anderen wohl ausgeschlossen. Auch der Umstand, dass die Wellenlängen der Linien im Bogenspectrum und Sonnenspectrum nicht vollständig übereinstimmen, hat für die vorliegende Untersuchung keine Bedeutung, da es sich hier nicht um möglichst genaue Bestimmung der Wellenlänge, sondern ihrer Veränderungen handelt.

Bei den photographischen Aufnahmen brauchte auf peinlich genaues Einhalten der Expositionszeit, wie es bei den Aufnahmen der Kaliumlinien seinerzeit geschah, nicht geachtet zu werden. Veränderungen des Elektrodenmaterials durch den Funken war hier nicht zu befürchten. Allerdings ist vor einiger Zeit von den Herren Eder und Valenta die Vermuthung ausgesprochen worden, dass die Expositionszeit, Plattensorte und

Entwickler auf den Wert der Wellenlänge, den man aus photographischen Aufnahmen ableitet, von Einfluss sein könnten. Es kann die Möglichkeit einer solchen Beeinflussung nicht geleugnet werden, allerdings nur dann, wenn die Expositionszeit oder Entwicklungsart so gewählt wird, dass die Linien keinerlei Detaillierung zeigen, man also über das Maximum der Intensität innerhalb der Linie im Unklaren ist. Wird dies jedoch vermieden, so zeigt sich die Wellenlänge stets gleich bei gleichen äußeren Bedingungen, mag man lang oder kurz exponieren oder Glycin, Hydrochinon, Metol, Rodinal oder Eikonogen als reducierende Substanz im Entwickler verwenden.

Zur Messung wurden die Aufnahmen projiciert und aus den Distanzen der unbekannten Linien von den bekannten Eisenlinien die Wellenlängen abgeleitet. Die so erreichte Genauigkeit ist, wie die folgenden Zusammenstellungen zeigen werden, eine für den vorliegenden Zweck vollständig genügende. Bezüglich der Details sei auf die Arbeiten von F. Exner und E. Haschek[1] verwiesen.

Zur Untersuchung gelangte Zinkamalgam, Zinnamalgam und Legierungen von Zink und Aluminium. Die ersteren stellte ich aus den reinen Metallen selbst dar, die letzteren verdanke ich der Güte des Herrn Dr. E. Murmann. Die Zusammensetzung der Elektroden war in Gewichtsprocenten folgende:

5·18% Zink + 94·82% Quecksilber,
11·10% Zink + 88·90% Quecksilber,
6·93% Zinn + 93·07% Quecksilber,
27·21% Zinn + 72·79% Quecksilber,
59·17% Zinn + 40·83% Quecksilber,
4·76% Zink + 95·24% Aluminium,
33·33% Zink + 66·67% Aluminium,
50·00% Zink + 50·00% Aluminium.

Außerdem wurden natürlich auch die reinen Metalle zum Vergleiche herangezogen.

---

[1] F. Exner und E. Haschek, diese Sitzungsber., Bd. 104, Abth. IIa ff.

I. Zinkamalgam.

Zur Messung der Verschiebungen wurden die Hauptlinien des Zinks im Blau mit den Wellenlängen $\lambda = 4680$ AE und 4722 AE herangezogen. Die Linien sind bei geringer Dampfdichte scharf, bei größerer jedoch nach Roth verwaschen und mäßig definiert. Die Messung ergab für

5·18% Zink $\lambda = 4680 \cdot 408$ und $4722 \cdot 401$ AE,
11·10% Zink $\lambda = 4680 \cdot 409$ und $4722 \cdot 406$ AE.

Die Wellenlängenbestimmungen an reinem Zink ergaben folgende Werte:

100·00% Zink $\lambda = 4680 \cdot 428$ und $4722 \cdot 510$ AE.

Die Linien sind sehr stark, nach Roth verwaschen und nur unter Anwendung großer Sorgfalt genau zu messen.

II. Zinnamalgam.

Im Zinnspectrum wurde nur eine Linie $\lambda = 3801$ AE der Messung unterzogen, da nur diese auch bei geringen Dampfdichten noch auftritt. Bei sehr hoher Dampfdichte kehrt sie sich um, doch liegt die kritische Dichte höher, als die der Concentration von 59% Sn in 41% Hg entspricht. Es konnte daher hier die Wellenlänge des reines Metalles nicht zum Vergleich herangezogen werden. Die beobachteten Wellenlängen sind

für 6·93% Zinn $\lambda = 3801 \cdot 176$ AE,
27·21% Zinn $\lambda = 3801 \cdot 231$ AE,
59·17% Zinn $\lambda = 3801 \cdot 315$ AE,

Die Zinnlinie ist bei geringer Dampfdichte sehr scharf und leicht zu messen. Bei höherer Concentration des Amalgams erscheint an der Seite der längeren Wellen eine leichte Unschärfe der Linie, doch lange nicht in dem Grade wie beim Zink, wie auch die Linie bei weitem nicht die Intensität und Breite der Zinklinien erreicht.

III. Quecksilber.

Im Quecksilberspectrum maß ich die Veränderung der Wellenlänge mit der Dampfdichte an der Linie $\lambda = 4358$ AE. Benützt wurden dazu die Aufnahmen des Zinkamalgams. Es ergaben sich die Werte

88·90% Quecksilber $\lambda = 4358 \cdot 736$ AE,
94·82% Quecksilber $\lambda = 4358 \cdot 741$ AE.

Reines Quecksilber lieferte

100·00% Quecksilber $\lambda = 4358 \cdot 766$ AE.

Die Linie ist sehr breit und stark verwaschen, besonders nach Roth. Die Stelle der maximalen Intensität ist in der Projection nur mühsam, unter dem Mikroskop überhaupt nicht zu erkennen.

IV. Zink aus Legierung.

Es standen mir drei Zinkaluminiumlegierungen zur Verfügung, mit deren Hilfe ich die Verschiebung der Linien λ 4680 und 4722 bestimmte. Es war mir sehr erwünscht, eine Legierung benützen zu können, um den etwaigen Einfluss der Kohle, die bei den Amalgamen als Gegenelektrode in Verwendung stand, kennen zu lernen. Es sei gleich bemerkt, dass, wohl wegen der leichten Flüchtigkeit des Amalgams im Vergleich zum Kohlenstoff, ein Einfluss nicht constatiert werden konnte. Es war dies zu erwarten, da zu wenig Kohlendampf in die Entladungsbahn gelangte, um ein ausgebildetes Spectrum zu liefern. Die erhaltenen Zahlen sind folgende:

4·76% Zink $\lambda =$ 4722·399 AE,
33·33% Zink $\lambda = 4680 \cdot 409$ und 4722·418 AE,
50·00% Zink $\lambda = 4680 \cdot 420$ und 4722·434 AE.

Es ist bemerkenswert, dass hier für die Concentration 4·76% die Linie 4680 so schwach ist, dass eine Messung unmöglich wird. Bei der nahe gleichen Concentration 5·18% des Amalgams ist, wohl wegen der größeren Flüchtigkeit, diese

Linie noch recht kräftig und gut zu messen. Es erweist sich also die spectrale Empfindlichkeit für Zink im Amalgam bedeutend größer, als in der Legierung. Die spectrale Reaction auf Zink in Form von Salzlösung auf Kohle zählt zu den allerunempfindlichsten.

V. Aluminium.

Die eben besprochenen Messungen waren an Legierungen des Zinks mit Aluminium hergestellt. Ich untersuchte auch für dieses Element die Verschiebung der Hauptlinien $\lambda = 3944$ und 3961 AE. Auch hier konnte ich den Vergleich der Zahlen mit den Werten für reines Aluminium machen, da keine Selbstumkehrung auftritt. Die beobachteten Werte sind

für	50·00% Aluminium	$\lambda = 3944 \cdot 176$	und	3961·666 AE,
	66·67% Aluminium	$\lambda = 3944 \cdot 191$	und	3961·695 AE,
	95·24% Aluminium	$\lambda = 3944 \cdot 194$	und	3961·703 AE,
	100·00% Aluminium	$\lambda = 3944 \cdot 202$	und	3961·720 AE.

Auch die Aluminiumlinien sind nach Roth verwaschen und nicht leicht genau zu messen. Namentlich bei den höchsten Dampfdichten ist diese einseitige Verbreiterung sehr störend.

Die oben mitgetheilten Zahlen zeigen deutlich den Einfluss der Dampfdichte auf die Wellenlänge und lassen erkennen, dass die Verschiebung proportional der Dampfdichte steigt. Es lässt sich selbstverständlich diese Beziehung ohneweiters zur quantitativen Bestimmung der Zusammensetzung von Legierungen verwerten, wenn sich zeigt, dass die Componenten sich nicht gegenseitig beeinflussen. Es wäre ja möglich, dass die Theile der Legierung in die Bahn des elektrischen Funkens Dampfmengen liefern, die nicht proportional der den Componenten der Legierung sind, sondern etwa bestimmt wären durch die Verdampfungstemperatur der Metalle. Die leichter flüchtigen Bestandtheile müssten dann die Hauptmasse des Dampfes liefern und relativ zu große Verschiebungen aufweisen gegen die schwer flüchtigen. Das Beispiel des Zinks zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist. Im Amalgam ist jedenfalls das Quecksilber wesentlich leichter flüchtig als das Zink,

dagegen dieses in der Legierung mit Aluminium. Wenigstens lassen sich mit der hier erreichten Genauigkeit Unterschiede nicht erkennen, und es ist wahrscheinlich, dass man die Verschiebungen müsste wesentlich präciser bestimmen können, als es durch Wellenlängenmessungen möglich ist, um den Einfluss der Componenten einer Legierung auf die Verschiebungen ihrer Linien kennen zu lernen.

Die eben besprochenen Verhältnisse treten klarer hervor, wenn man die Constanten der Gleichung bestimmt, welche die Verschiebung mit der Dampfdichte verbindet. Ich habe sie für die oben mitgetheilten Messungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet und will im folgenden die bezüglichen Tabellen anführen. In den Gleichungen bedeutet immer c den Procentgehalt des Amalgams, respective der Legierung.

I. Zink $\lambda = 4680$ AE

$$\lambda = 4680 \cdot 405 + 0 \cdot 000223\, c$$

	ber.	beob.	Δ
λ_0	4680·405	—	—
λ_5	4680·407	4680·408	0·001
λ_{11}	4680·408	4680·409	0·001
λ_{33}	4680·413	4680·409	0·004
λ_{50}	4680·417	4680·420	0·003
λ_{100}	4680·428	4680·428	0·000

II. Zink $\lambda = 4722$ AE

$$\lambda = 4722 \cdot 388 + 0 \cdot 001186\, c$$

	ber.	beob.	Δ
λ_0	4722·388	—	—
λ_5	4722·394	4722·400	0·006
λ_{11}	4722·401	4722·406	0·005
λ_{33}	4722·427	4722·418	0·009
λ_{50}	4722·447	4722·434	0·013
λ_{100}	4722·506	4722·510	0·004

III. Zinn $\lambda = 3801$ AE

$$\lambda = 3801 \cdot 158 + 0 \cdot 002658\, c$$

	ber.	beob.	Δ
λ_0	3801·158	—	—
λ_7	3801·176	3801·176	0·000
λ_{27}	3801·230	3801·231	0·001
λ_{59}	3801·315	3801·315	0·000
λ_{100}	3801·424	—	—

IV. Quecksilber $\lambda = 4358$ AE

$$\lambda = 4358 \cdot 496 + 0 \cdot 002661\, c$$

	ber.	beob.	Δ
λ_0	4358·496	—	—
λ_{89}	4358·733	4358·736	0·003
λ_{95}	4358·748	4358·741	0·007
λ_{100}	4358·762	4358·766	0·004

V. Aluminium $\lambda = 3944$

$$\lambda = 3944 \cdot 161 + 0 \cdot 000366\, c$$

	ber.	beob.	Δ
λ_0	3944·161	—	—
λ_{50}	3944·179	3944·176	0·003
λ_{67}	3944·186	3944·191	0·005
λ_{95}	3944·197	3944·194	0·003
λ_{100}	3944·198	3944·202	0·004

VI. Aluminium $\lambda = 3961$

$$\lambda = 3961 \cdot 634 + 0 \cdot 000759\, c$$

	ber.	beob.	Δ
λ_0	3961·634	—	—
λ_{50}	3961·672	3961·666	0·006
λ_{67}	3961·685	3961·695	0·010
λ_{95}	3961·707	3961·703	0·007
λ_{100}	3961·710	3961·720	0·010

Wie man aus den Zahlen ersieht, ist die Übereinstimmung eine sehr gute zu nennen, besonders wenn man bedenkt, dass alle Linien, mit alleiniger Ausnahme der Zinnlinie, sehr breit und verwaschen sind.

Bezüglich der Formel sei bemerkt, dass das constante Glied den tiefsten Wert angibt, der für die betreffende Linie unter den angewendeten Versuchsbedingungen möglich ist. Der Factor des *c* gibt den hundertsten Theil der größten Verschiebung an, definiert also das Intervall, innerhalb dessen die Wellenlänge der Linie schwankt. Diese Zahlen sind natürlich noch abhängig von den Versuchsbedingungen und nur giltig für den hier angewendeten Funken. Bezüglich der näheren Versuchsbedingungen sei auf die erste Mittheilung verwiesen.[1]

Die Anwendung der oben mitgetheilten Resultate zur quantitativen Spectralanalyse ist ohneweiters klar. Ist für eine Linie eines Elementes die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Dampfdichte zahlenmäßig bekannt, so gibt die gefundene Wellenlänge, in die Formel eingesetzt, den Procentgehalt der Legierung. Natürlich ist die erreichbare Genauigkeit keine besonders hohe. Wie sich aus den Gleichungen ergibt, würde die Bestimmung des Procentgehaltes auf ein Procent eine Genauigkeit der Wellenlängenmessung auf Zehntausendel der Angström'schen Einheit erfordern, eine Genauigkeit, die nur in den seltensten Fällen erreichbar sein dürfte. Eine praktische Verwertung kann also die hier mitgetheilte Möglichkeit der quantitativen Bestimmung nur in seltenen Fällen finden.

Die hier angegebene Methode der quantitativen Spectralanalyse ist nicht die einzig mögliche. Es ist bekannt, dass schon vor längerer Zeit Lockyer im VIII. Capitel seiner Studien zur Spectralanalyse einen erfolgreichen, wenn auch praktisch mühsamen Weg einschlug. Er verwendete die von ihm angegebene Methode der langen und kurzen Linien, um zum Ziele zu gelangen. An Legierungen mit bekanntem Procentgehalte bestimmte er die Zahl der jeweils erscheinenden, dem betreffenden Element zugehörigen Linien. Dieses Kriterium allein ist jedoch nicht empfindlich genug. Nimmt man noch den

[1] E. Haschek, diese Sitzungsber., Bd. CX, Abth. IIa, S. 181 ff.

Umstand zuhilfe, dass mit steigendem Procentgehalte auch die Helligkeit und Länge der Linien wächst, so hat man alle Mittel in der Hand, um recht genaue quantitative Bestimmungen zu machen. Leider ist jedoch diese Methode nicht leicht in der Ausführung und erfordert vor allem peinliche Constanz der äußeren Versuchsbedingungen.

Aus dem eben Angeführten erhellt, dass weder die Lockyer'sche Methode der quantitativen Spectralanalyse, noch die hier angedeutete den Grad der praktischen Brauchbarkeit hat, wie etwa die gewöhnliche qualitative. Es ist dies einerseits in der relativen Schwierigkeit der Ausführung, anderseits aber in der Beschränkung auf Legierungen begründet. Noch ein Umstand dürfte in vielen Fällen als Mangel empfunden werden. Während uns die chemische Analyse immer die mittlere Zusammensetzung der untersuchten Probe gibt, erfahren wir spectral nur die Zusammensetzung der Oberflächenschichte, die mitunter beträchtliche Unterschiede gegen das Innere aufweisen kann. Nur in Fällen, wo die untersuchte Probe schmilzt oder vollständig verbraucht wird, gibt die spectrale Analyse dasselbe, wie die chemische.

Ist auch aus den eben angeführten Gründen die quantitative Spectralanalyse in den seltensten Fällen im Laboratorium anwendbar, so scheint doch die im vorhergehenden dargelegte Methode geeignet, in der Astrophysik Verwendung zu finden, da wir uns mit ihrer Hilfe auch quantitative Aufschlüsse über die Zusammensetzung der Himmelskörper verschaffen könnten. Nöthig dazu ist nur eine möglichst präcise Wellenlängenmessung und die Kenntnis der Constanten für einige Linien jedes Elementes, die durch Laboratoriumsversuche zu erhalten ist.

Erdbewegung und Äther

von

Prof. Dr. **Egon R. v. Oppolzer** in Innsbruck.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. December 1901.)

Christian Doppler hat in einer wohl in Vergessenheit gerathenen Abhandlung, die den Titel: »Über eine bei jeder Rotation des Fortpflanzungsmittels sich einstellende Ablenkung der Licht- und Schallstrahlen«[1] führt, folgende Behauptung aufgestellt:

»Wenn eine Wellenquelle Q (siehe Fig. 1) auf ein um den Punkt O rotierendes, übrigens wie immer geformtes, und der Wellenfortpflanzung fähiges Object AB einen Wellenstrahl PQ sendet: so erleidet dieser innerhalb der Zeit seiner Bewegung durch AB nebst der etwa bei a und b stattfindenden gewöhnlichen Brechung auch noch eine andere eigenthümliche Ablenkung von seiner ursprünglichen Richtung, die zunächst in der Rotation des die Wellen fortpflanzenden Objectes selber ihren Grund hat und die ich eben deshalb die rotatorische mir zu nennen erlaube. Diese Ablenkung des Strahles ist umso bedeutender:

1. je größer die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Objectes AB ist, oder in je kürzerer Zeit sich AB um seine Achse dreht;

2. je länger der Weg ist, den der Wellenstrahl im Objecte AB zu durchlaufen hat; und

3. je geringer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Wellenstrahles in AB ist.«

[1] Böhm. Gesellsch. der Wiss. Neue Folge, Bd. V, S. 419 (1845).

Die Richtigkeit der Doppler'schen Behauptung leuchtet sofort ein, wenn das wellenfortpflanzende Medium sich sammt dem Objecte mitdreht. Man hat sich seit den Aberrationserscheinungen gewöhnt, hievon zu abstrahieren; so bemerkt Doppler weiter: »... Endlich würde die wirklich beobachtete rotatorische Ablenkung der Lichtstrahlen einen ganz augenscheinlichen Beweis für die Richtigkeit der Ansicht darbieten, dass derjenige in den Atmosphären der Planeten und Kometen enthaltene Äther, durch welchen die Fortpflanzung der Wellen bedingt ist, an ihrer rotatorischen, wie auch fortschreitenden Bewegung, gleichwie ihre Lufthüllen theilnimmt. Denn wäre dies der Fall, so könnte sich überall keine rotatorische Ablenkung zeigen, da ja die ganze obige Deduction von dieser Voraussetzung ausgeht und auch nur unter dieser Voraussetzung gilt. Es fällt in der That schwer, an die Möglichkeit zu glauben, eine solche Voraussetzung noch zu bezweifeln. Gleichwohl hat Fresnel (siehe Annal. de Chem. et Physique, IX, 57), von zwei Seiten hart gedrängt, mit sichtlichem Widerwillen zwar, aber doch sich diesem Gedanken hingegeben. Die Wissenschaft aber, so däucht mich, darf es sich niemals erlauben oder es auch nur zulassen, dass dem gesunden Verstande des Menschen solch ein unnatürlicher Zwang einer vorgeblichen Erklärung zu Liebe angethan werde ...«.

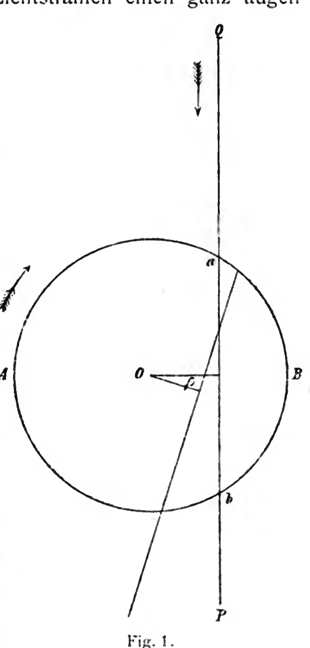


Fig. 1.

Da in jüngster Zeit Herr Michelson[1] durch Versuche zu dem Resultate gelangt ist, dass man durch die Erscheinungen der Lichtstrahlen auf der Erdoberfläche vor folgenden Alternativen steht:

1. Die Erde geht durch den Äther (oder vielmehr lässt den Äther durch ihre ganze Masse gehen) ohne merklichen Einfluss;

2. die Länge aller Körper wird verändert durch ihre Bewegung im Äther;

3. die Erde führt bei ihrer Bewegung den Äther mit sich bis auf Entfernungen von vielen tausend Kilometern über ihrer Oberfläche,

so dürfte es von Wichtigkeit sein, zu zeigen, dass der dritte Fall durch die astronomischen Beobachtungen wesentlich eingeschränkt werden kann, ganz abgesehen von den Aberrationserscheinungen, wenn man nur den Doppler'schen Gedanken an der Hand der Beobachtungen prüft.

In B (siehe Fig. 2) befinde sich ein Beobachter auf der Erdoberfläche. Ruht die Erde, so wird ein von dem Sterne S ausgehender Lichtstrahl das Auge des Beobachters so treffen, dass der Stern in der Richtung BS zu stehen scheinen wird. Bei Rotation der Erde wird aber, wenn der Lichtäther bis zur Höhe H über der Erdoberfläche mitrotiert, der im Punkte a auftreffende Strahl während seiner Fortpflanzung einfach mitgenommen und langt in B' in einer gegen die ursprüngliche Richtung SB um den Winkel ρ verschobenen Richtung $B'S'$ an. Die Größe dieses Winkels ist, wenn die Rotationsachse der Erde auf dem Lichtstrahl senkrecht steht, gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit Ω der Erde in die Zeit t, welche der Lichtstrahl von a bis B braucht. Ist die Achse gegen den Lichtstrahl um den Winkel p geneigt, so hat man nach dem Principe der Zusammensetzung von Drehungen als Winkelgeschwindigkeit ω die Projection von Ω auf eine zum Lichtstrahle senkrechte Richtung anzusehen; hiemit wird:

$$\rho = \omega . t = \Omega . \sin p . t.$$

[1] Michelson, American Journ. of Sc., Vol. III (4), p. 475 (1897).

p bedeutet offenbar die Poldistanz des Sternes oder das Complement der Declination δ, es ist daher auch

$$\rho = \Omega \cos \delta . t.$$

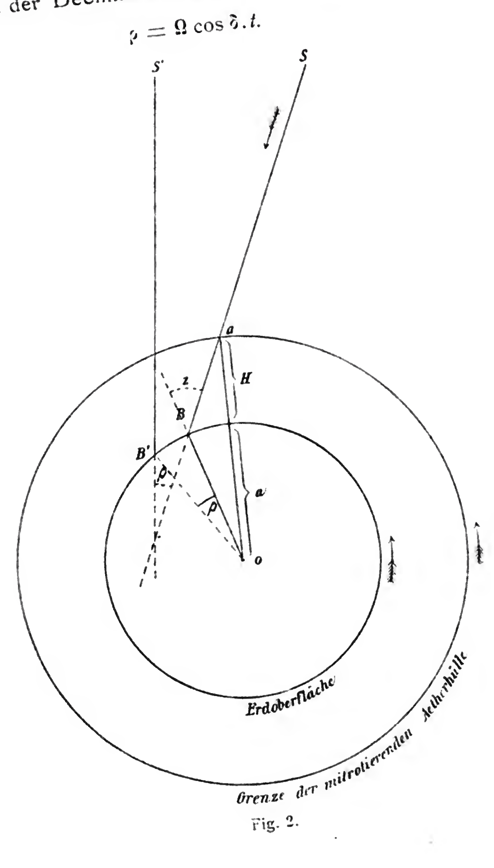


Fig. 2.

Die Zeit t ergibt sich aus:

$$t = \frac{l}{c},$$

wo l die Länge des Weges aB und c die Lichtgeschwindigkeit in der bis zur Höhe H reichenden Ätherhülle bedeutet. c wird von der im Weltraum giltigen Geschwindigkeit unmerklich abweichen. Bezeichnet a die Länge des Erdradius, z die Zenithdistanz des Sternes, so erhält man aus dem Dreiecke BaO:

$$l^2+a^2+2al\cos z = (a+H)^2 = a^2+2aH+H^2,$$

welche Beziehung sofort l als Function von a, δ, z und H darzustellen gestattet:

$$l = -a\cos z+\sqrt{a^2\cos^2 z+2aH+H^2}.$$

Die gesammte Verschiebung des Sternortes, die ersichtlich nur in der Richtung der täglichen Bewegung erfolgt, berechnet sich aus der Formel:

$$\rho'' = \Omega\cdot\frac{a}{c}\cdot\cos\delta\left[\sqrt{\cos^2 z+2\frac{H}{a}+\frac{H^2}{a^2}}-\cos z\right] =$$

$$= 0\rlap{.}''3185\cos\delta\left[\sqrt{\cos^2 z+2\frac{H}{a}+\frac{H^2}{a^2}}-\cos z\right].$$

$$\Omega = 15''$$
$$a = F.370.289\ m$$
$$c = 300,000.000\ m.$$

In Doppler's Formel fehlt der Cosinus der Declination. sie gilt daher nur für Sterne, die gerade im Äquator stehen; ein Stern, der sich in der Richtung des Poles befinden würde, erleidet durch den hier erörterten Einfluss offenbar keine Ortsveränderung; Doppler's Formel ist daher mit dem Factor $\cos\delta$ zu versehen.

Der Winkel ρ stellt eine Correction an den scheinbaren Ort vor, und zwar nur eine Correction in Rectascension, da die Verschiebung nur im Parallel der täglichen Bewegung eintreten kann; sie ist mit negativem Zeichen anzubringen, weil durch den Transport des Lichtstrahles im Sinne der täglichen Bewegung die scheinbaren Rectascensionen vergrößert werden. Nehmen wir an, dass die Luft allein den Lichtvorgang vermittelt — oder, was auf dasselbe hinauskommt — dass derselbe an die Luft gebunden ist, so kann man die Höhe H zu 300 km festsetzen, wo die Luft auf die eindringenden Meteore noch einen merk-

lichen Widerstand ausübt. Geht man mit diesem Werte in die obige Formel ein, so erhält man für Äquatorsterne folgende Correctionen (in Bogensecunden und Zeitsecunden) in den verschiedenen Zenithdistanzen:

Zenithdistanz	für $H = 300\ km$		für $H = 1000\ km$	
z	ρ''	ρ^s	ρ''	ρ^s
0°	0"015	0ˢ001	0"050	0ˢ003
10	·015	·001	·050	·003
20	·016	·001	·053	·003
30	·017	·001	·057	·004
40	·019	·001	·063	·004
50	·023	·002	·072	·005
60	·028	·002	·085	·006
70	·038	·003	·106	·007
80	·058	·004	·138	·009
82	·064	·004	·146	·010
84	·071	·005	·155	·010
86	·079	·005	·165	·011
88	·088	·006	·175	·012
90	·098	·007	·185	·012

Derartige Correctionen können sehr gut in den heutigen Beobachtungen stecken, ohne bemerkt zu werden; in 80° Zenithdistanz erreichen dieselben aber schon gerade einen Betrag, dessen Constatierung nicht unmöglich erscheint, wenn eine Beobachtungsreihe eigens für diese Frage passend angestellt würde; am geeignetsten wären Stationen in ganz geringen Breiten, die sehr genaue Passagenbeobachtungen im I. Vertical gestatten. Ist das Instrument mit einem Horrebow-Niveau versehen, das eine sehr genaue Reduction auf gleiche Höhe bei einer westlichen und östlichen Passage gestattet, so würden obige Correctionen nicht verborgen bleiben. Man wird natürlich statt eines Sternes Sternpaare, die fast gleichzeitig im I. Vertical dieselbe Zenithdistanz erreichen und deren Rectascensionen sehr genau bestimmt sind, heranziehen, um von zeitlichen Veränderungen möglichst unabhängig zu sein (Uhrgang, Änderungen in der Refraction, im Instrument u. s. w.).

Jedenfalls gestatten unsere heutigen Messmethoden mit Sicherheit die Frage zu beantworten, ob der Äther noch bis mehrere hundert Kilometer über der Erdoberfläche mitgenommen wird, wenn wir von den Theorien der Aberration ganz absehen und nur den Doppler'schen Gedanken verwerten. Deshalb habe ich oben auch die rotatorischen Ablenkungen für $H = 1000$ *km* hinzugefügt, die selbst in mäßigeren Zenithdistanzen schon messbar werden.

Die derzeitig vorliegenden Beobachtungen sind zur Untersuchung der vorliegenden Frage fast ganz ungeeignet. Die genauesten Messungen sind Zenithdistanzen im Meridiane, die von der obigen Correction ganz unberührt bleiben. Die genauesten Messungsreihen gehören dem Meridiane an, und hier können eben nur Rectascensionsbeobachtungen herangezogen werden, weil ja die Erscheinung nur in Rectascension wirkt. Die Rectascensionen müssten einen von der Zenithdistanz abhängigen Gang zeigen. Tief culminierende Sterne erhalten größere Rectascensionen, so dass ein Vergleich der aus der oberen (O. C.) und unteren (U. C.) Culmination folgenden Rectascensionen einen Unterschied, und zwar (O. C.—U. C.) einen mit negativem Zeichen behafteten, aufweisen müsste. Die genauesten, auf guten Mirenbeobachtungen beruhenden Rectascensionsbeobachtungen liefert wohl die Bearbeitung der Pulkowaer Rectascensionen durch A. Wagner;[1] diesen entnehme ich die folgenden Differenzen in Rectascension:

Declination = δ	Rectascension (O. C.—U. C.)
35°—40°	—0ˢ043
40 —45	—0·012
45 —50	—0·006
50 —55	—0·001
55 —60	—0·004
60 —65	+0·020
65 —70	+0·011
70 —75	+0·001
75 —80	+0·012

[1] A. Wagner, Die Bearbeitung der Rectascensionsbestimmungen für die Epoche 1865·0. Observ. Pulkowa, Vol. XII (1887).

Der mittlere Fehler dieser Differenzen liegt sicher etwas unter 0ˢ005, so dass nur die erste Differenz, welche aus den Passagen der tiefsten Sterne ($z = 80° - 85°$) besondere Beachtung verdient; auch lässt sich ein Gang mit der Declination ersehen; der Sinn der Differenz ist einer den obigen Betrachtungen entsprechender. Versuchen wir diese allein als Ursache dieser Differenz anzusehen, so hat die folgende Formel, in der l_o und l_u die von dem Lichtstrahl bei der oberen Culmination und unteren Culmination zurückgelegten Wegstrecken und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bezeichnen mögen, zur Ausgleichung zu dienen:

$$\zeta'' = \frac{\Omega}{c} \cos\delta [l_o - l_u] =$$

$$= 0^s3185 \cos\delta \left\{ \left[\sqrt{\cos^2(\varphi-\delta) + 2\frac{H}{a} + \frac{H^2}{a^2}} - \cos(\varphi-\delta) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\sqrt{\cos^2(\varphi+\delta) + 2\frac{H}{a} + \frac{H^2}{a^2}} + \cos(\varphi+\delta) \right] \right\}.$$

Aus dieser Formel folgt, dass die Differenzen O. C.—U. C. mit H wachsen und, wie sich leicht zeigen lässt, dem Maximalwerte

$$\left.\begin{aligned} \zeta'' &= -0^s3185 \cos\delta \{\cos(\varphi-\delta) + \cos(\varphi+\delta)\} = \\ &= -0^s3185 . 2 \cos\varphi \cos^2\delta = \\ &= -0^s21 = -0^s014 \end{aligned}\right\} \text{ für Pulkowa } \varphi = 60°,\ \delta = 35°$$

für $H = \infty$ zustreben. Die Differenzen können daher für die Pulkowaer Reihe den Betrag von 0ˢ014 und überhaupt 0ˢ021 niemals erreichen; die Differenz von 0ˢ043 kann unmöglich ganz durch die besprochene Erscheinung erklärt werden. Wie schon **Wagner** bemerkt, rührt sie von dem Umstande her, dass bei schlechteren Bildern die Rectascensionen größer beobachtet worden sind. In der unteren Culmination, wo die Sterne tiefer stehen, sind naturgemäß die Bilder schlechter. Der Unterschied der Rectascensionen bei schlechter und besserer Bildbeschaffenheit steigt bei den Beobachtungen bis zu dem Betrage von 0ˢ030 bei tiefstehenden Sternen an; der größte Theil der Differenz 0ˢ043 ist also sicherlich persönlichen Auffassungs-

fehlern zuzuschreiben, so dass selbst diese Beobachtungen keinen Beitrag für die vorliegende Frage liefern können und dass überhaupt durch Rectascensionsbeobachtungen im Meridian ein günstiger Erfolg nur dann zu erwarten ist, wenn Auffassungsunterschiede eliminiert werden. Die Methode hätte den Vortheil, von Refractionsanomalien fast frei zu sein.

Die besprochene Erscheinung nennt Doppler »rotatorische Brechung«; er bemerkt unter Voraussetzung ihrer Realität, dass dieselbe manche wahrnehmbare Wirkung an den Erscheinungen der Himmelskörper zeigen würde. Der Schattenkegel des Jupiter müsste merklich verschoben werden, so dass die Verfinsterungen der Satelliten eine $^1/_2$ Minute verspätet eintreten; auch noch andere Folgerungen werden gezogen, auf die einzugehen sich bald Gelegenheit finden wird, da begründete Aussicht vorhanden ist, dass Doppler's Arbeiten auf diesem Gebiete durch einen Neudruck in nächster Zeit allgemein zugänglich gemacht werden. Ich möchte hier aber noch darauf hinweisen, dass die »rotatorische« Ablenkung im Laboratorium mit größter Wahrscheinlichkeit verificiert werden kann.[1]

Wird eine cylindrische Scheibe einer durchsichtigen Substanz, deren Brechungsexponent μ und deren Durchmesser $2r$ heißen mögen, um ihre Achse in Rotation versetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit (in Bogensecunden)

$$\omega'' = 360.60.60.N = 1296000.N$$

wird, wo N die Anzahl der Touren pro Secunde bedeutet, so ergibt sich für die rotatorische Ablenkung nach der obigen Betrachtung:

$$\rho' = \omega.t = \omega\frac{2r}{c'} = 2r\frac{\omega}{c}\mu = = 0\cdot 00432.2r\mu.N \quad \left\{ \begin{array}{l} r \text{ in Metern} \\ N \text{ pro Zeitsecunde} \end{array} \right.$$

wenn der Äther mit der Scheibe vollständig mitrotiert: denn die Geschwindigkeit c' ist ja gleich c/μ (c Licht-

[1] Hierauf hat auch schon Doppler hingewiesen (Actenbände der böhm. Gesellsch. d. Wiss., Bd. V [4], S. 517, 1846); allerdings dürfte die dort angegebene Vorrichtung kaum das Ziel erreichen.

geschwindigkeit im leeren Raum). Nehmen wir eine Glasscheibe von 1 *m* Durchmesser aus Flintglas oder Crownglas und ertheilen ihr 1800 Touren pro Minute ($N = 30$), was durch Sicherung mittels Stahlringen technisch wohl gut ausführbar ist, so erhält man folgende messbare Ablenkungen:

für Flint ($\mu = 1{\cdot}74$): $\rho'' = 0{\cdot}226$ ⎫ bei vollständiger
für Crown ($\mu = 1{\cdot}60$): $\rho'' = 0{\cdot}207$ ⎭ Entrainierung.

Denkt man sich aber das Verhältnis von Materie zum Äther so wie Fresnel,[1] so hat man die Formel mit der Entrainierungsconstanten:

$$\alpha = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \quad \begin{cases} \text{für Flint:} & \alpha = 0{\cdot}6697 \\ \text{für Crown:} & \alpha = 0{\cdot}6094 \end{cases}$$

zu multiplicieren. Es werden dann die Ablenkungen:

für Flint: $\rho'' = 0{\cdot}151$ ⎫
für Crown: $\rho'' = 0{\cdot}126$ ⎭ bei theilweiser Entrainierung.

Diese Multiplication rechtfertigt sich so: Nach Fresnel wird bei einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Materie die Geschwindigkeit des in ihr enthaltenen Äthers nicht v, sondern

$$v . \alpha = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \alpha.$$

Der Äther bleibt gleichsam zurück, und die Winkelgeschwindigkeit ist daher mit α zu multiplicieren. Durch Versuche Fizeau's[2] und Michelson's[3] ist der Fresnel'sche Factor bestätigt, auch führen die Greenwicher[4] Versuche mit wassergefüllten Fernrohren, wenn man die gang und gäbe Aberrationstheorie als richtig ansieht, zur Fresnel'schen Formel. Nach

---

[1] Fresnel, Influence du mouvement terrestre sur les phénomènes d'Optique (Ann. de chim. et de physique, Vol. IX, p. 57).

[2] Fizeau, C. R., Vol. XXXIII, p. 349 (1851).

[3] Michelson und Morley, Sillim. Journal, Vol. XXXI (3), p. 377 (1886).

[4] Siehe z. B. Poincaré, Mathematische Theorie des Lichtes, S. 281 (1894).

alledem erscheint es sehr plausibel, dass auch bei diesen Versuchen die Entrainierungsconstante einzuführen ist, ohne damit die Fresnel'schen Vorstellungen als der Wirklichkeit entsprechend anzusehen.

Der besprochene Versuch ist deshalb von höchstem Interesse, weil hier die Bewegung der Materie senkrecht zum eindringenden Lichtstrahl erfolgt. Der Versuch wird also dieselbe fundamentale Bedeutung besitzen wie der Fizeau'sche, der Greenwicher und der Michelson'sche Interferenzversuch, der eingangs erwähnt wurde. Ja er wird die Richtigkeit der Lorentz'schen Anschauungen zu prüfen gestatten; denn, soweit ich diese übersehen kann, darf nach ihnen bei dem obigen Versuch überhaupt keine Ablenkung erfolgen. Die Rotation der Scheibe lässt den Äther in Ruhe, dieser dehnt nach Lorentz nur die Scheibe während der Rotation, was aber offenbar keine Ablenkung hervorrufen kann. Sowohl die rein phänomenologischen (vollständige Mitnahme der Wellenbewegung), wie auch die Fresnel'schen (theilweise Entrainierung des Äthers) Anschauungen führen zu merklichen rotatorischen Ablenkungen durch die Glasscheibe, die Lorentz'schen zu keinen. Die ersteren nehmen an, dass die Wellenbewegung durch das Mittel selbst fortgepflanzt, von dem Mittel einfach fortgeführt wird, die Fresnel'schen, dass bei der Rotation der Scheibe ein Ätherwirbel entsteht, dessen Winkelgeschwindigkeit kleiner ist, als die der Scheibe, die Lorentz'schen, dass der Äther in Ruhe verharrt und auch die Wellenbewegung in ihrer Richtung erhalten bleibt.[1]

[1] Sollte bei dem Versuche nicht die nöthige Ruhe der Achse zu erzielen sein, so wird man von der optischen au die photographische Beobachtung (Momentaufnahmen) übergehen müssen, welch letztere eine Elimination der Achsenunruhe gestatten wird. Auch die Ablenkungen wird man durch Vermehrung der Tourenzahl und durch innere Reflexionen wesentlich, z. B. auf nahe eine Bodensecunde steigern können.

Das Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln

von

Prof. Dr. **G. Jäger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Jänner 1902.)

Wir wollen uns eine ideale Flüssigkeit construieren. Dieselbe habe die Eigenschaft, dass ihre Verdampfungswärme unabhängig von der Temperatur eine constante Größe sei, dass ihr Volumen von der Temperatur ebenfalls unabhängig sei, was ja mit Annäherung innerhalb eines kleinen Temperaturintervalles bei Flüssigkeiten von geringem Ausdehnungscoefficienten zutrifft. Auf diese Flüssigkeit wenden wir die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung an, die wir in der Form:

$$rJ = T\frac{dp}{dT}(v-v') \qquad 1)$$

schreiben wollen. Die Bedeutung der Buchstaben ist: r Verdampfungswärme, J mechanisches Wärmeäquivalent, T absolute Temperatur, p Druck des gesättigten Dampfes, v specifisches Volumen des Dampfes, v' specifisches Volumen der Flüssigkeit. Für den Dampf wird angenommen, dass er das Boyle-Charles'sche Gesetz befolgt, dass ferner sein specifisches Volumen so groß sei, dass jenes der Flüssigkeit dagegen vernachlässigt werden kann. Wir haben demnach die Gleichung:

$$p(v-v') = RT$$

oder:

$$v-v' = \frac{RT}{p},$$

was in Gleichung 1) eingesetzt, nach Trennung der Variablen ergibt:

$$\frac{rJ}{R} \cdot \frac{dT}{T^2} = \frac{dp}{p}.$$

Durch Integration erhalten wir daraus:

$$-\frac{rJ}{RT} = lp - lC,$$

wo wir unter $-lC$ eine willkürliche Constante verstehen. Dies lässt sich weiter umformen in:

$$p = Ce^{-\frac{rJ}{RT}}. \qquad 2)$$

Ist die Arbeit, welche die Capillarkräfte leisten, wenn eine Molekel aus dem Dampf in die Flüssigkeit übergeht, a, und n die Zahl der Molekeln der Masseneinheit, so ist: $rJ = na$, ferner ist nach der kinetischen Gastheorie: $pv = RT = \frac{nm\bar{c}^2}{3}$, folglich: $\frac{rJ}{RT} = \frac{3a}{m\bar{c}^2}$ und weiter nach Gleichung 2):

$$p = Ce^{-\frac{3a}{m\bar{c}^2}}.$$

Das ist demnach die Formel für die Spannung des gesättigten Dampfes unserer idealen Flüssigkeit.

Für diese Größe wollen wir nun nach der kinetischen Theorie ebenfalls eine Formel ableiten. Dabei gehen wir von der Vorstellung aus: dass die Spannung des gesättigten Dampfes erreicht ist, wenn in der Zeiteinheit ebensoviele Molekeln aus dem Dampf in die Oberflächeneinheit der Flüssigkeit fliegen, als umgekehrt Molekeln aus der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit in den Dampf übergehen.

Wir setzen voraus, dass die Geschwindigkeiten der Dampfmolekeln sowohl, als der Flüssigkeitsmolekeln einem bestimmten Vertheilungsgesetz gehorchen. Die Vertheilung der Geschwindigkeiten im Dampf entsteht lediglich durch die Art der Zusammenstöße, welche die Molekeln miteinander machen, da ja die kinetische Gastheorie voraussetzt, dass die Kräfte, welche die Molekeln auf aufeinander ausüben, nur auf Distanzen wirken,

welche gegenüber dem mittleren Abstande der Molekeln zu vernachlässigen sind. Im flüssigen Zustande haben wir aber einen ganz ähnlichen Fall, indem wir dort annehmen können, dass die Molekeln so nahe aneinander sind, dass die Wirkung der Nachbarmolekeln nach allen Richtungen dieselben sind und sich somit bezüglich einer bestimmten Molekel gegenseitig aufheben, so dass wir auch in diesem Falle die Vertheilung der Geschwindigkeiten lediglich durch die Zusammenstöße der Molekeln hervorgebracht denken können. Wenn demnach ein bestimmtes Vertheilungsgesetz besteht, so muss es der Form nach für den Dampf und die Flüssigkeit dasselbe sein; jedoch ist von vornherein nicht einzusehen: ob die Geschwindigkeiten in beiden Aggregatzuständen auch der Größe nach dieselben sein müssen.

Die Componenten der Geschwindigkeit c einer Dampfmolekel bezüglich der drei Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems seien: u, v, w. Es sei dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine Molekel eine Geschwindigkeitscomponente zwischen u und $u+du$ habe, gegeben durch: $f(u)du$. Und analog, dass sie Componenten zwischen v und $v+dv$, w und $w+dw$ habe, sei dargestellt durch die Functionen: $f(v)dv$, $f(w)dw$. Wir wollen die ebene Oberfläche der Flüssigkeit zur yz-Ebene machen, so dass die x-Achse normal darauf steht. Ist nun die Zahl der Molekeln in der Volumseinheit des Dampfes N, so ist die Zahl jener Molekeln, welche die Flächeneinheit der Flüssigkeitsoberfläche in der Zeiteinheit treffen und die gleichzeitig eine Componente besitzen, die zwischen u und $u+du$ liegt: $Nuf(u)du$. Die Gesammtzahl der übertretenden Dampfmolekeln ist demnach:

$$N\int_{-\infty}^{0} uf(u)du = N\int_{0}^{\infty} uf(u)du,$$

da wir ja annehmen müssen, dass die Geschwindigkeiten nach allen Richtungen des Raumes gleichmäßig vertheilt sind und somit durch eine bestimmte Ebene nach der einen Richtung ebensoviel Molekeln, als nach der anderen Richtung in derselben Zeit wandern müssen. Nun ist aber:

$$N \int_0^\infty u f(u) du = \frac{N\bar{u}}{2}, \tag{3}$$

wenn wir unter $\bar{u}$ den Mittelwert der positiven u verstehen. $\frac{N\bar{u}}{2}$ ist somit die Zahl der Molekeln, welche in der Zeiteinheit per Oberflächeneinheit aus dem Dampf in die Flüssigkeit übertreten. Diese Zahl muss für den gesättigten Dampf gleich der Zahl jener Molekeln sein, welche per Flächeneinheit durch die Oberfläche der Flüssigkeit in den Dampf übertreten.

Letztere Zahl finden wir folgendermaßen: Jede Molekel, welche aus der Flüssigkeit in den Dampf übertreten soll, hat eine gewisse Arbeit zur Überwindung der Capillarkräfte zu leisten, die wir schon früher a genannt haben. Wenn demnach eine Molekel, welche in der Flüssigkeit die Geschwindigkeitscomponente u_1 senkrecht zur Oberfläche hat, imstande ist, in den Dampf überzutreten, so wird die Componente der lebendigen Kraft $\frac{mu_1^2}{2}$ dabei um die Größe a vermindert, so dass die Molekeln mit einer kleineren Geschwindigkeitscomponente in den Dampf eintreten, als jene in der Flüssigkeit war, wobei wir unter m die Masse einer Molekel verstehen. Ist $a > \frac{mu_1^2}{2}$, so wird die Molekel die Flüssigkeit überhaupt nicht verlassen können. Es können also nur jene Molekeln in den Dampf übertreten, für welche: $u_1 \gtreqless \sqrt{\frac{2a}{m}}$ ist.

Ist nun N_1 die Zahl der Molekeln in der Volumseinheit der Flüssigkeit, so werden wir die Zahl jener Molekeln, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der Flüssigkeitsoberfläche gehen, darstellen können durch:

$$\nu N_1 \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^\infty u_1 f(u_1) du_1, \tag{4}$$

wobei sowohl die Formel, als auch die Grenzen des Integrals aus den obigen Überlegungen folgen, während ν einen Factor bedeutet, welcher dem Volumen der Flüssigkeitsmolekeln Rechnung tragen soll. Während man nämlich in einem idealen Gas

das Volumen der Molekeln gegenüber dem freien Raume als verschwindend klein ansieht, kann das bei einer Flüssigkeit nicht mehr geschehen, da dort im Gegentheil der frei bleibende Raum gegenüber den von den Molekeln ausgefüllten klein ist, so dass die Zahl der Molekeln, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit passieren, infolge der Zusammenstöße untereinander eine viel größere wird, als dies durch die Formel ausgedrückt wäre, welche wir für diesen Vorgang beim idealen Gas erhalten.[1] Es muss nun für den gesättigten Dampf der Ausdruck (3) gleich der Größe (4) sein, d. h. es ist:

$$\frac{N\bar{u}}{2} = N_1\nu\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u_1 f(u_1)\,du_1$$

oder:

$$N = \frac{2N_1\nu}{\bar{u}}\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u_1 f(u_1)\,du_1. \qquad 5)$$

Für den Druck eines Gases erhalten wir nun nach der kinetischen Gastheorie $p = \frac{Nm\overline{c^2}}{3}$, wobei $\overline{c^2}$ das mittlere Quadrat der Geschwindigkeiten der Molekeln ist. Nach dieser Formel ergibt sich für den Druck des gesättigten Dampfes mit Zuziehung der Gleichung 5):

$$p = \frac{2N_1\nu m\overline{c^2}}{3\bar{u}}\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u_1 f(u_1)\,du_1. \qquad 6)$$

Wir wollen nun darangehen, einen Ausdruck für die Größe ν zu finden, und zwar benützen wir dazu den sogenannten inneren Druck der Flüssigkeit. Dieser ist gegeben durch die Gesammtbewegungsgröße, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zu einer beliebigen Ebene, die wir durch die Flüssigkeit legen, getragen wird. Nehmen wir als diese Ebene eine zur yz-Ebene parallele an, so ist diese Bewegungsgröße:

---

[1] Siehe z. B.: G. Jäger, diese Sitzungsber., CV, Abth. II, S. 15 ff. (1896).

$$N_1 \nu m \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 f(u_1) du_1 = P. \tag{7}$$

Der innere Druck P einer Flüssigkeit ist eine Folge der Capillarkräfte. Da wir nun angenommen haben, dass unsere ideale Flüssigkeit eine von der Temperatur unabhängige constante Verdampfungswärme und ein constantes Volumen besitzt, so muss auch der innere Druck von der Temperatur unabhängig sein. Da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 f(u_1) du_1 = \overline{u_1^2},$$

so folgt aus Gleichung 7):

$$P = N_1 \nu m \overline{u_1^2}$$

und somit:

$$\nu = \frac{P}{N_1 m \overline{u_1^2}},$$

was, in Gleichung 6) eingesetzt, für den Druck des gesättigten Dampfes ergibt:

$$p = \frac{2 N_1 P m \overline{c^2}}{3 N_1 m \overline{u_1^2} \bar{u}} \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u_1 f(u_1) du_1 =$$

$$= \frac{2 P \overline{c^2}}{3 \bar{u} \overline{u_1^2}} \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u_1 f(u_1) du_1 = C e^{\frac{-3a}{m\overline{c^2}}}, \tag{8}$$

wenn wir die Gleichung (2) mit in Betracht ziehen.

Das bestimmte Integral können wir als eine Function der unteren Grenze ansehen oder, wenn wir $\sqrt{\frac{2a}{m}} = x$ setzen, als eine Function von x. Gleichung 8) lässt sich sonach auch schreiben

$$\frac{2 P \overline{c^2}}{3 \bar{u} \overline{u_1^2}} \int_{x}^{\infty} u_1 f(u_1) du_1 = C e^{-\frac{3x^2}{2\overline{c^2}}}.$$

Durch Differenziation erhalten wir

$$-\frac{2 P \overline{c^2}}{3 \bar{u} \overline{u_1^2}} x f(x) dx = -\frac{3C}{\overline{c^2}} e^{-\frac{3x^2}{2\overline{c^2}}} x\, dx.$$

Damit ist auch $f(x)$ oder, was dasselbe ist, $f(u)$ bestimmt in der Form:

$$f(u) = \frac{9\,C\bar{n}\,\overline{u_1^2}}{2\,P(\overline{c^2})^2}\,e^{-\frac{3u^2}{2\overline{c^2}}} = k\,e^{-\frac{3u^2}{2\overline{c^2}}}. \tag{9}$$

Sind wir in der Lage, den Wert der Constanten k anzugeben, so ist die Function $f(u)$ und damit das Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Molekeln vollkommen bestimmt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Molekel die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w besitzt, ist gleich dem Producte der Wahrscheinlichkeiten für jede einzelne Componente. Sie ist somit:

$$f(u)\,f(v)\,f(w)\,du\,dv\,dw.$$

Sehen wir nun $u\,v\,w$ als Raumcoordinaten an, so ist $du\,dv\,dw$ ein Volumelement, welches wir nach Einführung von Polarcoordinaten auch ausdrücken können durch: $c^2 dc \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$, wobei natürlich: $c^2 = u^2+v^2+w^2$ ist. Danach erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeit, welche zwischen c und $c+dc$ liegt und eine ganz bestimmte Richtung hat, den Ausdruck:

$$k^3 c^2 e^{-\frac{3c^2}{2\overline{c^2}}}\,dc \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi.$$

Sehen wir jedoch von der Richtung der Geschwindigkeit c ab, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens, wenn wir nach Θ von 0 bis π, nach φ von 0 bis 2π, d. h. über den ganzen Raum integrieren. Auf diese Weise ergibt sich schließlich:

$$k^3 c^2 e^{-\frac{3c^2}{2\overline{c^2}}}\,dc \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi = 4\pi k^3 c^2 e^{-\frac{3c^2}{2\overline{c^2}}}\,dc. \tag{10}$$

Integrieren wir diesen Ausdruck nach c von 0 bis ∞, so muss er gleich Eins werden, da die Summe sämmtlicher Wahrscheinlichkeiten gleich Eins sein muss. Wir erhalten demnach:

$$4\pi k^3 \int_0^{\infty} c^2 e^{-\frac{3c^2}{2\overline{c^2}}}\,dc = 1. \tag{11}$$

Wir setzen wieder: $\frac{3c^2}{2\overline{c^2}} = x^2$, also:

$$c^2 = \frac{2}{3}\overline{c^2}x^2, \quad c = \sqrt{\frac{2}{3}\overline{c^2}}\,.x; \quad dc = \sqrt{\frac{2}{3}\overline{c^2}}dx.$$

Danach verwandelt sich 11) in:

$$4\pi k^3 \sqrt{\left(\frac{2}{3}\overline{c^2}\right)^3}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx = \left(\frac{2\pi}{3}\overline{c^2}\right)^{3/2} k^3 = 1,$$

wobei wir das Integral nach der Formel:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$$

berechnet haben. Es ergibt sich somit:

$$k = \sqrt{\frac{3}{2\pi\overline{c^2}}},$$

$$f(u) = \sqrt{\frac{3}{2\pi\overline{c^2}}}\, e^{-\frac{3}{2}\frac{u^2}{\overline{c^2}}}. \qquad 12)$$

Aus Gleichung 10) lässt sich leicht die wahrscheinlichste Geschwindigkeit bestimmen, da ja der Differentialquotient dieser Function, nach der Geschwindigkeit c genommen, für diesen Fall gleich Null werden muss. Daraus folgt für die wahrscheinlichste Geschwindigkeit α die Gleichung:

$$\alpha^2 = \frac{2}{3}\overline{c^2}.$$

Diese Größe ergibt sich aber sowohl für den dampfförmigen, als auch für den flüssigen Zustand. Das heißt: **Die mittlere kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung einer Molekel ist für dieselbe Temperatur in beiden Aggregatzuständen dieselbe.**

Führen wir in unserer Formel jetzt für $\overline{c^2}$ die wahrscheinlichste Geschwindigkeit α^2 ein, so folgt aus den Gleichungen 12) und 10), dass:

$$f(u) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}},$$

und die Wahrscheinlichkeit $\varphi(c)dc$, dass eine Geschwindigkeit zwischen c und $c+dc$ liegt, wird:

$$\varphi(c)dc = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} c^2 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc.$$

Das ist aber nichts anderes als das Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln, wie es zuerst von Maxwell aufgestellt worden ist.

Für die Constante C in Gleichung 2) finden wir nach Gleichung 9):

$$C = \frac{2}{9} \frac{P(\overline{c^2})^2}{\bar{u}\,\overline{u_1^2}} \cdot k.$$

Führen wir noch den Wert $k = \sqrt{\frac{3}{2\pi c_2}}$ ein, so ergibt dies:

$$C = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{P(\overline{c^2})^{3/2}}{\bar{u}\,\overline{u_1^2}}$$

Drücken wir alle Geschwindigkeiten durch die wahrscheinlichste Geschwindigkeit α aus, so wird:

$$\bar{u} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}; \quad \overline{u_1^2} = \frac{\alpha^2}{2}; \quad (\overline{c^2})^{3/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \alpha^3,$$

und wir erhalten das wichtige Resultat:

$$C = P.$$

In der Formel für die Spannung des gesättigten Dampfes unserer idealen Flüssigkeit bedeutet demnach die Constante C nichts anderes als den inneren Druck der Flüssigkeit.

Über die Änderung der Diathermansie von Flüssigkeiten mit der Temperatur

von

Otto Dechant.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1902.)

Von all den Fragen, die beim Studium der Diathermansie die verschiedenen Forscher beschäftigten, wurde die Frage, ob sich die Diathermansie mit steigender Temperatur ändert, nahezu ganz unbeantwortet gelassen. Nur zwei feste Körper, Glas und Glimmer, wurden in dieser Hinsicht untersucht. Der erste, der eine Glasplatte bei verschiedenen Temperaturen untersuchte, war Wilhelmy.[1] Er fand, wenn T die Temperatur der Platte und D die in Procenten ausgedrückte hindurchgelassene Wärmemenge bedeutet, Folgendes:

Bei T	8°	giengen	D 63·5%	durch.
»	100	»	67·2	»
»	200	»	72·2	»

Nach Wilhelmy nimmt also die Durchlässigkeit des Glases mit steigender Temperatur zu. Petinelli[2] fand, dass Glas bei 100° um 8% weniger Wärme durchließ als bei gewöhnlicher Zimmertemperatur, während Glimmer seine Diathermansie zwischen 0° und 100° nicht ändert. Weitere diesbezügliche Arbeiten wurden mir nicht bekannt.

---

[1] Pogg. Ann. 85, S. 217.

[2] Cim. (4) 2., p. 156 bis 158, 1895.

In dieser Arbeit nun wird der Versuch gemacht, festzustellen, ob Flüssigkeiten mit steigender Temperatur eine Änderung ihrer Diathermansie erfahren oder nicht, und soferne eine solche eintritt, welcher Art sie ist.

Alle früheren Untersuchungen über Wärmestrahlung wurden mit der Thermosäule und dem Bolometer ausgeführt und man begnügte sich mit den auf diese Weise gefundenen relativen Zahlenwerten. Erst in den letzten 20 Jahren wurden von einigen Forschern Methoden zur absoluten Bestimmung der Wärmestrahlung angegeben. Im Jahre 1886 veröffentlichte Ångström[1] eine calorimetrische Methode. Eine zweite theilt er im 67. Bande Wied. Ann. 1897 mit; sie fußt auf einem ähnlichen Gedanken, wie die von Kurlbaum[2] angegebene Methode, doch hat Ångström das von Kurlbaum beibehaltene bolometrische Princip fallen gelassen. Diese letzte Methode Ångström's wurde bei den folgenden Messungen angewendet. Die Beschreibung des Apparates, des »elektrischen Compensationspyrheliometers«, siehe Wied. Ann., 67., S. 633 bis 645. Die Strahlung pro Minute und Quadratcentimeter berechnet sich aus der Formel:

$$Q = \frac{m_{ti} i^2}{4 \cdot 18 . a . b} 60 \, g\text{-cal.}$$

Dabei bedeutet m_{ti} den Widerstand der Pt-Streifen[2] bei der Temperatur t in der Umgebung der Streifen und bei einer Stromstärke i.

$m_{ti} = m_0(1+\alpha t)(1+\beta i^2)$, wobei m_0 den Widerstand der Streifen bei 0°, α den Temperatur-Coefficienten und β den Stromwärme-Coefficienten bedeuten.

a ist das Absorptionsvermögen, b die Breite der Streifen.

Für das bei den folgenden Messungen verwendete Instrument waren die Constanten angegeben mit:

$$m_0 = 0 \cdot 343 \, \Omega, \quad \alpha = 0 \cdot 00325, \quad \beta = 0 \cdot 48,$$

$$b = 0 \cdot 2 \, cm, \quad a = 98 \cdot 5\%.$$

---

[1] Wied. Ann. 39, S. 294.

[2] Wied. Ann. 65, S. 746 bis 760, 1891.

Versuchsanordnung.

Von großer Wichtigkeit für die folgenden Untersuchungen war ein in zweckmäßiger Weise construierter Trog. Er musste so eingerichtet werden, dass auf möglichst einfache und bequeme Weise verschiedene Temperaturen der zu untersuchenden Flüssigkeit erzielt und längere Zeit constant erhalten werden konnten.

Auf ein U-förmiges Messingstück wurden seitlich Glimmerplatten (0·28 *mm* dick) aufgekittet. Der Kitt bestand aus Bleiglätte und Glycerin. Zur Bestimmung der Temperatur der Flüssigkeit im Troge wurde in denselben ein dünnes Thermometer eingeführt, dessen Kugel aber sorgfältig vor directer Bestrahlung geschützt werden musste. Zu diesem Zwecke wurde auf einer Seite des Troges die Glimmerplatte nicht direct auf das Messingstück aufgekittet, sondern auf vorspringende, rechtwinkelig nach abwärts gebogene Leisten, so dass nun seitlich bequem ein Thermometer in den Trog eingeführt werden kann, das durch die Leiste vor directer Bestrahlung geschützt ist.

Glimmer wurde statt Glas verwendet, weil erstens Glimmer diathermaner als Glas ist, und zweitens die Gefahr des Zerspringens in der Wärme nicht besteht.

Dieser Trog nun wurde in einen gleichfalls U-förmigen aus Eisenblech eingelöthet. Durch die Wände des dadurch entstandenen Doppeltroges circuliert nun Wasser von bestimmter Temperatur, wodurch allmählich die zu untersuchende Flüssigkeit im Troge eine ganz bestimmte stationäre Temperatur annimmt. Die niedrigste auf diese Weise erreichte Temperatur betrug 11°, die höchste 82° C. Hiebei sei gleich erwähnt, dass sich diese Methode, verschiedene Temperaturen herzustellen, bei den Messungen sehr gut bewährt hat.

Der so construierte Trog wurde nun auf einem Tischchen zwischen der Wärmequelle und dem Pyrheliometer aufgestellt. Der glühende Faden einer 50kerzigen elektrischen Glühlampe diente als Wärmequelle. Ein doppelter Asbestschirm, dessen Öffnung in der Mitte gerade nur die beiden Spaltöffnungen des Pyrheliometers hindurchsehen ließ, schützte den aus dem Troge

herausragenden Thermometerfaden vor störenden Wärmeeinwirkungen. In den Stromkreis des Thermoelementes[1] wurde ein empfindliches Spiegelgalvanometer eingeschaltet. Die Ablesung der Ausschläge geschah mit Fernrohr und Scala mit Millimetertheilung. Einem Theilstriche Ausschlag entsprach ein Strom von 5.10^{-8} Ampère Stärke. Den zur Compensation der Strahlungsenergie erforderlichen Strom lieferte ein Bleiaccumulator. Die Regulierung der Stromstärke wurde durch einen Stöpsel-Rheostaten und durch einen verschiebbaren Brückenwiderstand bewerkstelligt. An einem Milliampèremeter von Siemens und Halske konnte die Stärke des Compensationsstromes abgelesen werden.

In den folgenden Tabellen bedeutet i_n die Stärke des Compensationsstromes in Ampère, wenn die zu untersuchende Flüssigkeit die Temperatur n° besitzt. Ferner t die Temperatur im Pyrheliometer in der Umgebung der Streifen, R. und L. die Ablesungen der Stromstärke, wenn der linke, beziehungsweise der rechte Streifen der Bestrahlung ausgesetzt ist, während der rechte, beziehungsweise der linke mit dem Compensationsstrome angeheizt wird. M. bedeutet den Mittelwert aus den beiderseitigen Ablesungen.

Zuerst nun untersuchte ich, ob sich die Wärmedurchlässigkeit der Glimmerplatten mit der Temperatur ändert.

Änderung der Durchlässigkeit der Glimmerplatten.

I. Messung bei 17° und 50°.

	i_{17}	i_{50}
R.	0·0698	0·0694
L.	0·0702	0·0691
R.	0·0697	0·0696
L.	0·0704	0·0693
R.	0·0699	—
M.	0·0700	0·06935
t.	27½°	28°

[1] Siehe Ångström, Wied. Ann. 67. Bd., S. 633 bis 645.

Daraus berechnet sich nach der früher angegebenen Formel die hindurchgelassene Wärmemenge

bei 17° ... $Q_{17} = 0 \cdot 001338\,g$-cal. pro Min. und cm^2.
» 50° ... $Q_{50} = 0 \cdot 001333$ » » » » »

II. Messung bei 13° und 82°.

	i_{13}	i_{82}
L.........	0·0776	—
R.........	0·0770	0·0771
L.........	0·0773	0·0776
R.........	0·0771	0·0773
L.........	0·0777	0·0776
R.........	0·0772	0·0772
M.	0·07732	0·07736
t.........	24°	28°

Somit:

$Q_{13} = 0 \cdot 001610\,g$-cal. pro Min. und cm^2.
$Q_{82} = 0 \cdot 001636$ » » » » »

Bei Messung I zeigt sich eine geringe Abnahme der Diathermansie — ungefähr $0 \cdot 3\%$ der bei 17° hindurchgegangenen Wärmemenge — die von der inconstanten Wärmequelle herrühren dürfte, da ja die Spannung des die Glühlampe speisenden Straßenstromes zwischen 110 und 117 Volt schwankte.

Was nun Messung II betrifft, so nimmt nach derselben die Durchlässigkeit des Glimmers um $1 \cdot 3\%$ zu. Diese Zunahme scheint aber von einer Strahlung der erwärmten, dem Pyrheliometer zugekehrten Glimmerplatte herzurühren. Denn vergleicht man die Ablesungen i_{13} und i_{82}, so stimmen diese nahezu ganz überein, während sich bei den Temperaturen t in der Umgebung der Streifen ein bedeutender Unterschied ergibt. Da nun aber die Unterschiede zwischen Q_{13} und Q_{82} so gering sind, können sie wohl ohne großen Fehler vernachlässigt werden. Es bestätigt sich also hier das Resultat Petinelli's, dass Glimmer mit steigender Temperatur seine Diathermansie nicht ändert. Auf Grund dieser Eigenschaft des Glimmers wurde bei den folgenden

Versuchsreihen die durch den leeren Trog hindurchstrahlende Wärmemenge nur bei einer Temperatur gemessen.

Wasser, destilliert (Dicke der Schichte = 3·44 *mm*).

I. Messung bei 14° und 52°.

	i_{14}	i_{52}
L.........	0·0400	0·0388
R.........	0·0397	0·0383
L.........	0·0398	0·0386
R.........	0·0400	0·0387
L.........	0·0399	0·0388
M.	0·03988	0·03864
t.........	23°	27°

Durchgelassene Wärmemenge

bei 14°... $Q_{14} = 0{\cdot}000427$ *g*-cal. pro Min. und cm^2.

» 52°... $Q_{52} = 0{\cdot}000406$ » » » » »

Durchlässigkeit des Troges, gemessen bei 36°.

	i_{36}
R.........	0·0719
L.........	0·0720
R.........	0·0719
L.........	0·0722
R.........	0·0724
L.........	0·0720
R.........	0·0723
M.	0·0721; $t = 25°$.

Somit die hindurchgestrahlte Wärmemenge

$$Q_{36} = 0{\cdot}001408\, g\text{-cal. pro Min. und } cm^2.$$

Wasser lässt also

bei 14°..... 30·3%,
» 52°..... 28·8

von der durch den Trog hindurchgegangenen Wärmemenge hindurch. Es ergibt sich also hier eine Abnahme der Durchlässigkeit von 1·5% zwischen 14° und 52°.

II. Messung bei 13°, 50° und 82°.

	i_{13}	i_{50}	i_{82}
R.........	—	—	0·0414
L.........	0·0430	0·0421	0·0414
R.........	0·0427	0·0419	0·0413
L.........	0·0436	0·0421	0·0411
R.........	0·0427	0·0422	0·0411
L.........	0·0436	0·0421	0·0411
R.........	0·0430	—	0·0410
M.........	0·0431	0·04208	0·0412
t.........	23°	26°	28°

Somit:

$Q_{13} = 0·000499$ *g*-cal. pro Min. und cm^2.
$Q_{50} = 0·000480$ » » » » »
$Q_{82} = 0·000463$ » » » » »

Für diese Messung wurde die Durchlässigkeit des Troges bei 13° und 82° gemessen. Die erhaltenen Resultate sind bereits früher bei Glimmer (II. Versuch) angegeben.

Es war $i_{13} = 0·07732$ und $i_{82} = 0·07736$, gibt hiemit im Mittel $i = 0·07734$; $t = 26°$.

Somit die hindurchgegangene Wärmemenge:

$Q = 0·001625$ *g*-cal. pro Min. und cm^2.

Es gehen also durch Wasser

bei 13°..... 30·7%,
» 50°..... 29·5
» 82°..... 28·5

hindurch. Es nimmt somit die Durchlässigkeit des Wassers mit steigender Temperatur ab.

Die Abnahme scheint in erster Annäherung linear zu sein.

Zwischen 13° und 50°..... 1·2%.
» 50° » 82°..... 1·0

Alaunlösung.

Dicke der Schichte $d = 3\cdot44$ *mm*. Specifisches Gewicht $s = 1\cdot062\,g$.

Die Messungen für die Alaunlösung mussten leider auf das Temperaturintervall 12° bis 55° beschränkt bleiben, da sich bei Erwärmung über 60° hinaus in der Flüssigkeit Bläschen bildeten, die aus dem Kitte zu kommen schienen und eine Messung unmöglich machten.

I. Messung bei 12° und 52°.

	i_{12}	i_{52}
L.........	0·0429	—
R.........	0·0431	0·0401
L.........	0·0429	0·0400
R.........	0·0432	0·0400
L.........	—	0·0400
M.	0·0430	0·0400
t.........	26°	27°

Somit:

$Q_{12} = 0\cdot000501$ *g*-cal. pro Min. und cm^2.
$Q_{52} = 0\cdot000435$ » » » » »

Durchlässigkeit des Troges, gemessen bei 42°.

	i_{42}
R.........	0·0813
L.........	0·0814
R.........	0·0814
L.........	0·0813
M.	0·08135; $t = 27^1/_2$°.

Somit:

$Q_{42} = 0\cdot001807$ *g*-cal. pro Min. und cm^2.

Es lässt also Alaunlösung

bei 12°....... 27·7%,
» 52°....... 24·1

hindurch; somit ergibt sich zwischen 12° und 52° eine Abnahme von 3·6%.

II. Messung bei 12° und 55°.

	i_{12}	i_{55}
L.........	0·0414	0·0386
R.........	0·0412	0·0385
L.........	0·0413	0·0386
M.........	0·0413	0·03857
t.........	24°	27°

Also:

$Q_{12} = 0\cdot00460$ g-cal. pro Min. und cm^2.
$Q_{55} = 0\cdot0004047$ » » » » »

Durchlässigkeit des Troges, gemessen bei 42°.

	i_{42}
L.........	0·0756
R.........	0·0755
L.........	0·0757
M.........	0·0756; $t = 27\frac{1}{2}°$.

Somit:

$$Q_{42} = 0\cdot001599\, g\text{-cal. pro Min. und } cm^2.$$

Es lässt also Alaunlösung

bei 12°...... 28·77%,
» 55°...... 25·3

hindurch.

Die Abnahme der Durchlässigkeit beträgt also 3·5%, welcher Wert mit dem bei Messung I erhaltenen bis auf 0·1% übereinstimmt. Dass bei Messung I 27·7%, bei Messung II 28·77% hindurchgehen, dürfte aller Wahrscheinlichkeit nach in der Stellung der Wärmequelle seinen Grund haben, indem durch eine ganz kleine Verschiebung derselben eine andere Partie des glühenden Kohlenfadens gegen das Pyrheliometer strahlt.

Was nun überhaupt die Wärmedurchlässigkeit der Alaunlösungen betrifft, so finden sich darüber ganz widersprechende Angaben. Allgemein galt Alaunlösung als Schutzmittel gegen

strahlende Wärme. Draper[1] warf nun zuerst die Frage auf, weshalb man zur Absorption der dunklen Wärmestrahlen nicht reines Wasser statt einer Alaunlösung nehme, nachdem nach Melloni ersteres 11%, letzteres 12% der Strahlen absorbiere. Die Antworten auf diese Frage lauteten sehr verschieden. Während Bidwell[2] findet, dass Alaun eher weniger Strahlen absorbiert als Wasser, findet Porter[3] das Gegentheil und Hutchins[4] dasselbe wie Bidwell.

Die beiden hier angeführten Bestimmungen bestätigen die erste Messung Melloni's, dass sich Alaunlösung in Bezug auf die Wärmedurchlässigkeit bei Zimmertemperatur nicht bedeutend von Wasser unterscheidet. Mit steigender Temperatur jedoch nimmt die Durchlässigkeit des Alauns rascher ab, als die des Wassers.

Cobaltchlorür.

Specifisches Gewicht $s = 1 \cdot 180 g$. Dicke der Schichte $d = 7 \cdot 29$ *mm*.

Dass von dieser Flüssigkeit eine dickere Schichte untersucht wurde, hat seinen Grund darin, dass beim Reinigen des Troges derselbe zerbrach und bei der Reparatur die ursprüngliche Dicke nicht wiederhergestellt werden konnte.

	i_{11}	i_{51}	i_{78}
R.	0·0223	0·0192	0·0102
L.	0·0223	0·0193	0·0103
R.	0·0222	0·0193	0·0102
L.	0·0223	0·0193	0·0102
M.	0·022275	0·019275	0·010225
t.	$24^1/_2$°	28°	29°

Somit:

$$Q_{11} = 0 \cdot 000134\, g\text{-cal. pro Min. und } cm^2.$$
$$Q_{51} = 0 \cdot 000101 \quad » \quad » \quad » \quad » \quad »$$
$$Q_{78} = 0 \cdot 000028 \quad » \quad » \quad » \quad » \quad »$$

[1] Nature, 44, 1891.
[2] Nature, 44, 1891.
[3] Nature, 45, 1891.
[4] Sill. Journ. 43, 1892.

Durchlässigkeit des Troges, gemessen bei 38° C.

	i_{38}
L.........	0·0790
R.........	0·0789
L.........	0·0790
R.........	0·0790
M........	0·078975; $t = 27^1/_2°$.

Somit:

$$Q_{38} = 0\cdot001703\ g\text{-cal. pro Min. und } cm^2.$$

Es gehen also durch $CoCl_2$

bei 11° C.......	7·8%,
» 51°	5·9
» 78°	1·7

hindurch. Also Abnahme der Durchlässigkeit

zwischen 11° und 51°....	1·9%,
» 51° » 78°....	4·2

Wir sehen also zwischen 51° und 78° eine bedeutend größere Abnahme, wie zwischen 11° und 51°, was wahrscheinlich mit der Eigenthümlichkeit des $CoCl_2$, bei höherer Temperatur seine Farbe zu ändern, in Zusammenhang stehen dürfte.

Die Durchlässigkeit des Wassers für eine Dicke $d =$ 7·29 *mm* gibt, um einen Vergleich anstellen zu können, folgende Messung:

	i_{12}
L.........	0·0396
R.........	0·0398
L.........	0·0397
R.........	0·0398
M........	0·0397; $t = 26°$.

Somit:

$$Q_{12} = 0\cdot000427\ g\text{-cal. pro Min. und } cm^2.$$

Durchlässigkeit des Troges, gemessen bei 14°.

	i_{14}	
R.........	0·0793	
L.........	0·0794	
R.........	0·0793	
L.........	0·0793	
M.	0·0793;	$t = 28°$.

Somit:

$$Q_{14} = 0\cdot001720\, g\text{-cal. pro Min. und } cm^2.$$

Es gehen somit durch Wasser von der Dicke 7·29 *mm* bei 12° C. 30·05% von der durch den Trog hindurchgelassenen Wärmemenge hindurch. $CoCl_2$ lässt also bei 11° bedeutend weniger Strahlen hindurch als Wasser von derselben Temperatur und Dicke.

Das Resultat dieser Untersuchungen lässt sich also folgendermaßen aussprechen:

Bei allen drei untersuchten Flüssigkeiten nimmt die Diathermansie mit steigender Temperatur ab. Die Abnahme der Diathermansie des Wassers kann in erster Annäherung als linear angenommen werden.

Alaunlösung lässt ungefähr um 2% weniger Wärme als Wasser hindurch; sie als Schutzmittel gegen strahlende Wärme — wie bisher üblich — zu verwenden, empfiehlt sich somit nicht. Im Temperatur-Intervalle 10° bis 50° zeigt sich bei der Alaunlösung im Vergleiche zu Wasser eine größere Abnahme der Diathermansie.

Cobaltchlorür lässt von allen drei Flüssigkeiten die geringste Wärmemenge hindurch. Die Durchlässigkeit nimmt über 50° hinaus bedeutend rascher ab als zwischen 11° und 50°, was wohl mit der Eigenthümlichkeit dieser Flüssigkeit, mit steigender Temperatur seine Farbe zu ändern, im Zusammenhange stehen dürfte.

Magnetische Messungen, ausgeführt im Pamir im Sommer 1900

von

Prof. **B. W. Stankewitsch.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1902.)

Im folgenden sollen kurz die Resultate der von mir während meiner Pamir'schen Reise im Sommer 1900 angestellten erdmagnetischen Messungen mitgetheilt werden. Diese Messungen wurden ausschließlich mittels Neumayer'schen magnetischen Theodolits ausgeführt, der dank seiner leichten Handhabung und Transportabilität den großen Reiseschwierigkeiten möglichst entsprach und, wie wohl bekannt, alle drei erdmagnetischen Elemente: Declination, Inclination und Horizontal-Intensität bestimmen lässt.

Das erste von diesen erdmagnetischen Elementen kann mit Hilfe des Neumayer'schen Theodolits mit relativ hohem Genauigkeitsgrade bestimmt werden; was aber die zwei übrigen Elemente anbelangt, so ist dies leider in viel geringerem Maße der Fall. Nichtsdestoweniger für eine rasche Recognoscierung eines in erdmagnetischer Beziehung gänzlich unbearbeiteten Landes, wenn das Hauptinteresse in der Aufsuchung einigermaßen auffallender Anomalien in der Vertheilung dieser Elemente gipfeln soll, leistet ohne Zweifel das Neumayer'sche Instrument Genügendes.

Zur Beurtheilung der Genauigkeit dieser Messungen bemerke ich Folgendes. Der astronomische Meridian wurde aus den Sonnen- oder Polarsternbeobachtungen bestimmt, und die so erhaltenen Werte sind als bis zu 1' genau zu betrachten. Für mittlere Werte des wahrscheinlichen Fehlers einzelner Bestimmungen habe ich gefunden:

für Declination .... ± 40″,
» Inclination .... ± 4ʹ6 (Nadel Nr. 1) und ± 4ʹ3 (Nadel Nr. 2),
» Horizontal-Intensität ..... ± 0·00085 [cm. gr. sec.].

Zur Reduction der von mir beobachteten Declinationsgrößen auf Tagesmittel habe ich das Material, welches Dorandt[1] im Jahre 1875 in Nukuss mittels der Variations-Instrumente gefunden und veröffentlicht[1] hatte, nach entsprechender Vergleichung mit einigen wenigen Pamir'schen Beobachtungen benutzt.

Resultate der magnetischen Messungen.

1. **Taschkent** (Meteorologisches Observatorium).

Coordinaten:

Geographische Breite $\varphi = 41°19'31''$; Länge $\lambda = 38°58'2''$ (von Pulkowa östlich).

Höhe über das Meer $h = 457\ m$.

a) Declination *(d)*:

vom 22. bis 26. Mai ..... —6° 1′ 53″ (Mittel aus fünf Bestimmungen).
vom 21. bis 24. August .. —6° 2′ 12″ (Mittel aus acht Bestimmungen).

b) Inclination *(I)*:

im Mai	57° 32′
» August	57 38

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

im Mai	0·2670	[cm. gr. sec.]
» August..............	0·2687	
Mittel für Sommer 1900....	0·2678	

[1] Dorandt, Astronomische Ortsbestimmungen und magnetische Messungen am Unterlauf des Amu-Daria.

2. Osch (Kirchplatz, in der Nähe der meteorologischen Station).

Coordinaten:

$$\varphi = 40^\circ 31' 11''; \quad \lambda = 42^\circ 28' 32'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 1030\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
2. Juni	$1^h 30^m$ p.		—5° 46′ 10″
»	3 20 p.		—5 47 10
5. Juni	6 0 p.		—5 46 30
		Mittel	—5° 46′ 37″

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	
1. Juni	4^h 0^m p.	56° 22′
»	5 30 p.	56 21

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

Datum	*H*
2. Juni	0·2793.

3. Taldik-Pass. Höchster Punkt.[1]

Coordinaten:

$$\varphi = 39^\circ 46' 0''; \quad \lambda = 42^\circ 49' 50'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 3590\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
11. Juni	$4^h 55^m$ p.		—5° 43′ 20″
12. Juni	6 57 a.		—5 42 10
		Mittel	—5° 42′ 45″

[1] Der Ort der jeweiligen Aufstellung des Theodolits wurde jedesmal durch einen Steinhaufen markiert.

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*I*
13. Juni	$7^h 20^m$ a.		55° 19′
»	8 20 a.		55 25
		Mittel	55° 22′

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

$$H = 0 \cdot 2831$$

(Mittel aus zwei Messungen: den 11. und 13. Juni).

4. Kisil Art.

(Beobachtungsort: In einigen wenigen Schritten [nach Süd] vom Kirgisischen Grabe.)

Coordinaten:

$$\varphi = 39° 24'; \quad \lambda = 42° 59' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 4220\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
15. Juni	$2^h 33^m$ p.		−5° 26′ 40″
»	5 3 p.		−5 26 0
16. Juni	7 28 a.		−5 24 45
»	12 48 p.		−5 25 25
»	6 53 p.		−5 24 36
		Mittel	−5° 25′ 30″ ± 15″
17. Juni	$5^h 43^m$ a.		−5° 25′ 15″
»	6 28 a.		−5 24 30
»	2 33 p.		−5 24 42
»	4 38 p.		−5 24 10
18. Juni	7 3 a.		−5 25 20
		Mittel	−5° 24′ 48″ ± 9″

Allgemeines Mittel (15. bis 18. Juni) −5° 25′ 9″

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		I
16. Juni	$8^h 50^m$ a.		55° 24′
»	9 40 a.		55 14
»	3 0 p.		55 8
»	3 50 p.		55 13
		Mittel	55° 15′

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

$$H = 0 \cdot 2837.$$

5. Standort am südöstlichen Ufer des Karakulschen-Sees.

(Beobachtungsort bei dem 119. Werststein, vom Pamir'schen Posten an gerechnet.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38° 57' 30''; \quad \lambda = 43° 11' 10'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 4000\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		d (auf Tagesmittel reduciert)
11. August	$3^h 23^m$ p.		—5° 10′ 0″
»	4 55 p.		—5 10 36
12. August	6 20 a.		—5 9 10
		Mittel	—5° 9′ 55″ ± 17″

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	I
12. August	$7^h 0^m$ a.	54° 32′

c) Horizontal-Intensität:

11. August $H = 0 \cdot 2849$

6. Standort am Flusse »Muskol«.

Coordinaten:

$$\varphi = 38° 40' 0''; \quad \lambda = 43° 11' 30'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 4100\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
19. Juni	$6^h 10^m$ p.		$-5° 12' 50''$
20. Juni	6 20 a.		-5 14 30
		Mittel	$-5° 13' 40''$

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*I*
19. Juni	$5^h 20^m$ p.		$54° 25'$
20. Juni	$8^h 40^m$ a.		54 19
		Mittel	$54° 22'$

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

20. Juni $H = 0 \cdot 2933.$

7. **Ak Baital-Pass.** Höchster Punkt.

Coordinaten:

$$\varphi = 38° 33' 49''; \quad \lambda = 43° 17' 34'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 4650\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Aus den Beobachtungen (21. bis 23. Juni) wurde im Mittel (neun Beobachtungen)

$$d = -5° 7' 10''$$

gefunden.

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*I*
20. Juni	$6^h 50^m$ p.		$54° 29'$
21. »	9 30 a.		54 26
22. »	9 20 a.		54 14
» »	12 20 p.		54 12
23. »	6 40 a.		54 13
» »	8 10 a.		54 7
		Mittel	$54° 17'$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0 \cdot 2867.$$

8. Pamir'scher Posten.

(Beobachtungsort: In der Nähe der meteorologischen Station.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38°10'32''5; \quad \lambda = 43°43'45''0 \text{ (v. P.)}$$
$$h = 3660\, m.$$

a) Declination *(d)*:

	d
im Juni (24. bis 29. inclus.)	—5°1'50" (Mittel aus 23 Messungen)
im August (6. bis 9. inclus.)	—5°1'14" (Mittel aus 9 Messungen).

b) Inclination *(I)*:

	I
im Juni (25. bis 28. inclus.)	53°37' (sechs Messungen)
im August (8.)	53 36 (drei Messungen).

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

im Juni $H = 0{\cdot}2931$ (vier Messungen)
im August $H = 0{\cdot}2914$ (eine Messung).

9. Standort am Flusse »Kara Su«.

Coordinaten:

$$\varphi = 38°1'; \quad \lambda = 43°38' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 3700\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	*d* (auf Tagesmittel reduciert)
30. Juni	$7^h\ 5^m$ p.	—5°2'10"
1. Juli	4 45 a.	—5 2 0
		Mittel —5°2' 5"

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		I
30. Juni	$5^h 50^m$ p.		53° 28′
»	6 30 p.		53 36
1. Juli	6 30 a.		53 13
»	7 20 a.		53 28
		Mittel	53° 27′

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0 \cdot 2896.$$

10. Standort am Flusse »Alitschur«.

(Beobachtungsort: Am linken Alitschur-Ufer, 2 *km* nach W vom Kirgisischen Grabe »Basch Gumbes«.)

Coordinaten:

$$\varphi = 37° 47′ 40″; \quad \lambda = 43° 11′ 25″ \text{ (v. P.)}$$
$$h = 4100 \, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		d (auf Tagesmittel reduciert)
2. Juli	$5^h 40^m$ a.		—4° 41′ 40″
»	6 30 a.		—4 42 50
		Mittel	—4° 42′ 15″

b) Inclination:

2. Juli $I = 52° 49′$.

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0 \cdot 2996.$$

11. Standort am See Jaschil-Kul.

Coordinaten:

$$\varphi = 37° 48′ 0″; \quad \lambda = 42° 31′ 15″ \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 4000 \, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
3. Juli	$5^h 0^m$ a.		$-4°49'50''$
»	6 0 a.		$-4\ 51\ 20$
		Mittel	$-4°50'35''$

b) Inclination *(I)*:

$$I = 52°52' \quad \text{(3. Juli).}$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0{\cdot}2969 \quad \text{(3. Juli).}$$

12. Ui Sundy (am Flusse Großer Mardjanaj).

Coordinaten:

$$\varphi = 38°5'; \quad \lambda = 42°30' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 4000\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	*d* (auf Tagesmittel reduciert)
4. Juli	$5^h 40^m$ a.	$-5°0'40''$

b) Inclination *(I)*:

$$I = 53°19' \quad (4.\ \text{Juli},\ 7^h 20^m \text{ a.}).$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0{\cdot}2907 \quad \text{(4. Juli).}$$

13. Goop Schabar.

(Beobachtungsort: Am linken Murgabs-Ufer.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38°12'10''; \quad \lambda = 42°15'0'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 3100\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
5. Juli	$5^h 50^m$ p.		$-4° 56' 10''$
»	6 50 p.		−4 54 30
6. Juli	5 10 a.		−4 54 0
		Mittel	$-4° 54' 53'' \pm 26''$

b) Inclination *(I)*:

			I
6. Juli	$6^h 10^m$ a.		53° 31′
»	7 10 a.		53 28
		Mittel	53° 29′

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

$$H = 0 \cdot 2923 \quad \text{(5. Juli)}.$$

14. Schunderuj.

(Beobachtungsort: Am linken Murgabs-Ufer.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38° 16'; \quad \lambda = 42° 13' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2860\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
7. Juli	$6^h 40^m$ a.		$-4° 53' 25''$
8. Juli	6 10 a.		−4 51 35
		Mittel	$-4° 52' 30''$

b) Inclination:

$$I = 53° 31' \quad \text{(7. Juli)}.$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0 \cdot 3018.$$

Intensitäts-Anomalie.

15. Kischlak Bargidim.

Coordinaten:

$$\varphi = 38° 18' 40''; \quad \lambda = 42° 9' 20'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2750\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	*d* (auf Tagesmittel reduciert)
9. Juli	$6^h 40^m$ a.	—4° 54′ 30″
»	9 0 a.	—4 54 40
		Mittel —4° 54′ 35″

b) Inclination:

$$I = 52° 51'.$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0 \cdot 2991.$$

16. Kischlak Oroschor.

(Beobachtungsort: Am rechten Bartangs-Ufer.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38° 18' 30''; \quad \lambda = 41° 58' 10'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 3100\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	*d* (auf Tagesmittel reduciert)
10. Juli	$7^h 0^m$ a.	—4° 40′ 10″
»	8 30 a.	—4 40 50
		Mittel —4° 40′ 30″

b) Inclination *(I)*:

		I
10. Juli	$9^h 40^m$ a.	53° 50′
»	10 40 a.	53 51
		Mittel 53° 50′

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0 \cdot 2950.$$

17. Nischus.

(Beobachtungsort: Am rechten Bartangs-Ufer, dem am linken Ufer befindlichen charakteristischen Pick gegenüber.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38°16'; \quad \lambda = 41°55' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2600\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
10. Juli	$7^h 10^m$ p.		$-2°23'20''$
11. Juli	5 50 a.		$-2\ 25\ 0$
»	7 10 a.		$-2\ 24\ 7$
		Mittel	$-2°24'\ 9'' \pm 20''$

Ausgeprägte Declinations-Anomalie.

b) Inclination:

$$I = 53°38'.$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0\cdot2898.$$

18. Kischlak Tschaduth.

Coordinaten:

$$\varphi = 38°12'; \quad \lambda = 41°51' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 2400\, m.$$

a) Declination *(d)*:

$$d = -4°50'0'' \quad \text{(12. Juli),}$$
reduciert auf Tagesmittel.

b) Inclination *(I)*:

$$I = 53°23'.$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0\cdot2950.$$

19. Darsagré.

(Beobachtungsort: Am rechten Bartangs-Ufer, gegenüber einem kleinen Flusse — Schamoresafeht.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38°10'20''; \quad \lambda = 41°46'30'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 2300\ m.$$

a) Declination:

$$d = -4°25'20'' \quad \text{(13. Juli),}$$
reduciert auf Tagesmittel.

b) Inclination:

$$I = 53°31'.$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0\cdot2922.$$

20. Kischlak Rasutsch (am rechten Bartangs-Ufer).

Coordinaten:

$$\varphi = 38°10'40''; \quad \lambda = 41°38'0'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2200\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Während meines Aufenthaltes auf diesem Orte (13. und 14. Juli) blieb der Himmel die ganze Zeit stark bewölkt, und es bot sich keine Möglichkeit, astronomische Beobachtungen auszuführen, weshalb auch die Declinationsgröße nicht bestimmt werden konnte.

b) Inclination:

$$I = 53°45' \quad \text{(14. Juli).}$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0\cdot2852.$$

21. Kischlak Chydjis.

(Beobachtungsort: Am linken Bartangs-Ufer.)

Coordinaten:

$$\varphi = 38°3'40''; \quad \lambda = 41°36'0'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2120\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		d (auf Tagesmittel reduciert)
15. Juli	$6^h 50^m$ a.		$-4°32'20''$
»	8 10 a.		−4 31 0
		Mittel	$-4°31'40''$

b) Inclination:

$$I = 53°27' \quad (15.\text{ Juli}).$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0\cdot2890.$$

22. Kischlak Imtz.

Coordinaten:

$$\varphi = 38°0'40''; \quad \lambda = 41°27'20'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2050\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	d (auf Tagesmittel reduciert)
16. Juli	$6^h 40^m$ a.	$-4°50'0''$
»	7 35 a.	−4 49 20
		$-4°49'40''$

b) Inclination:

$$I = 53°21'.$$

c) Horizontal-Intensität:

$$H = 0\cdot2902.$$

23. Chorog (Militärposten).

(Beobachtungsort: Der Theodolit wurde in der Mitte eines dem Nordthor des Forts benachbarten Platzes aufgestellt.)

Coordinaten:

$$\varphi = 37°29'27''3; \quad \lambda = 41°12'34''0 \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2200\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Aus den 36 Messungen (17. bis 23. Juli inclus.) wurde im Mittel

$$d = -4°33'35''$$

gefunden.

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		I
18. Juli	$11^h 40^m$ a.		52° 37'
»	2 40 p.		53 0
19. Juli	7 0 a.		52 39
»	8 0 a.		52 42
22. Juli	7 40 a.		52 35
»	8 25 a.		52 39
		Mittel	52° 42'

c) Horizontal-Intensität:

Im Mittel $H = 0 \cdot 2915$.

24. Ischkaschim's Posten.

(Beobachtungsort: Am rechten Piandj's-Ufer; der Theodolit war 60 Schritte von der Garnisons-Kaserne entfernt.)

Coordinaten:

$$\varphi = 36°53'; \quad \lambda = 41°11' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 2500\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
25. Juli	$6^h 20^m$ p.		$-4° 32' 50''$
26. »	7 0 a.		-4 32 40
		Mittel	$-4° 32' 45''$

b) Inclination *(I)*:

			I
25. Juli	$5^h 50^m$ p.		51° 53′
26. »	8 40 a.		51 58
		Mittel	51° 55′

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

$H = 0 \cdot 3024$ (26. Juli, $7^h 15^m$ a. bis 8^h a. m. O.).

25. Kischlak Namadgut.

(Beobachtungsort: In der SW-Richtung vom Kirchhofe, etwa 200 Schritte von demselben entfernt.)

Coordinaten:

$$\varphi = 36° 40'; \quad \lambda = 41° 24' 30'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2600\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
27. Juli	$5^h 25^m$ a.		$-4° 27' 0''$
»	7 0 a.		-4 25 40
		Mittel	$-4° 26' 20''$

b) Inclination:

$I = 51° 0'$ (27. Juli, $7^h 10^m$ a. bis $8^h 0^m$ a. m. O.).

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

$H = 0 \cdot 2962$ (27. Juli, $5^h 35^m$ a. bis $6^h 25^m$ a. m. O.).

26. Langar's Posten.

Coordinaten:

$$\varphi = 37° 2' 36''5; \quad \lambda = 42° 18' 47''1 \text{ (v. P.)}$$
$$h = 2900\ m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit		*d* (auf Tagesmittel reduciert)
28. Juli	$6^h 20^m$ p.		$-4° 31' 0''$
29. Juli	5 40 a.		-4 31 0
»	6 45 p.		-4 30 30
		Mittel	$-4° 30' 50'' \pm 7''$

b) Inclination *(I)*:

			I
29. Juli	$7^h 20^m$ a.		$51° 50'$
»	10 50 a.		52 14
»	6 30 p.		52 1
		Mittel	$52° 1'$

c) Horizontal-Intensität:

$H = 0 \cdot 3010$ (29. Juli).

27. Standort in der Nähe vom kirgisischen Grabe »Masar Tepe« am Flusse »Pamir«.

Coordinaten:

$$\varphi = 37° 27' 0''; \quad \lambda = 42° 58' 40'' \text{ (v. P.)}$$

$$h = 4050 \, m.$$

a) Declination *(d)*:

Wegen der starken Bewölkung bot sich keine Möglichkeit, astronomische Beobachtungen anzustellen, weshalb die Declinationsgröße nicht ausgerechnet werden konnte.

b) Inclination *(I)*:

$I = 52° 42'$ (1. August, $7^h 30^m$ a. bis $8^h 30^m$ a. m. O.).

c) Horizontal-Intensität:

$H = 03016$ (1. August, 6^h a. bis 7^h a. m. O.).

28. Standort beim kirgisischen Grabe »Djarti Gumbes« am Flusse »Istik«.

Coordinaten:

$$\varphi = 37°36'40''; \quad \lambda = 43°50'30'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = 4200\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	*d* (auf Tagesmittel reduciert)
2. August	$7^h 15^m$ p.	$-4°54'\ 0''$
3. »	5 45 a.	$-4\ 53\ 30$
	Mittel	$-4°53'45''$

b) Inclination *(I)*:

$I = 52°59'$ (3. August, $7^h 40^m$ a. bis $8^h 30^m$ a. m. O.).

c) Horizontal-Intensität *(H)*:

$H = 0{\cdot}2925$ (3. August, 6^h a. bis 7^h a. m. O.).

29. Standort am Flusse »Ak-Su«.

(Beobachtungsort: Am linken »Ak-Su«-Ufer in der Nähe der Istik'schen Mündung.)

Coordinaten:

$$\varphi = 37°49'30''; \quad \lambda = 44°19'15'' \text{ (v. P.)}$$
$$h = \text{circa } 4000\, m.$$

a) Declination *(d)*:

Die Declinationsgröße konnte nicht ausgerechnet werden.

b) Inclination *(I)*:

Datum	Mittlere Ortszeit	*I*
4. August	$3^h\ 5^m$ p.	53° 16'
»	3 50 p.	53 7
5. August	6 20 a.	52 58
	Mittel	53° 7'

c) Horizontal-Intensität:

$H = 0{\cdot}2906$ (4. August, $12^h 20^m$ p. bis 1^h p. m. O.).

Schließlich stellen wir in folgender Tabelle die Endresultate unserer erdmagnetischen Messungen zusammen:

	Ort	Höhe in Metern	Breite nördlich	Länge von Pulkowa östlich	Declination	Inclination	Horizontal-Intensität
1	Taschkent	457	41°19′31″	38°58′ 2″	– 6° 2′ 2″	57°35′	0·2678
2	Osch	1030	40 31 11	42 28 32	—5 46 37	56 21	0·2793
3	Taldik	3590	39 46 0	42 49 50	—5 42 45	55 22	0·2831
4	Kisil Art	4220	39 24	42 59	—5 25 9	55 15	0·2837
5	Standort am »Kara-Kul«	4000	38 57 30	43 11 10	–5 9 55	54 32	0·2849
6	Standort am »Muskol«	4100	38 40 0	43 11 30	—5 13 40	54 22	0·2933
7	Ak Baital	4650	38 33 49	43 17 34	—5 7 10	54 17	0·2867
8	Pamir'scher Posten	3660	38 10 32	43 43 45	—5 1 32	53 36	0·2922
9	Standort am »Kara-Su«	3700	38 1	43 38	—5 2 5	53 27	0·2896
10	Standort am »Alitschur«	4100	37 47 40	43 11 25	—4 42 15	52 49	0·2996
11	Standort am »Jaschil-Kul«	4000	37 48 0	42 31 15	—4 50 35	52 52	0·2969
12	Ui Sundy	4000	38 5	42 30	—5 0 40	53 19	0·2907
13	Goop Schabar	3100	38 12 10	42 15	—4 54 53	53 29	0·2923
14	Schunderuj	2860	38 16	42 13	—4 52 30	53 31	**0·3018**
15	Kischlak Bargidim	2750	38 18 40	42 9 20	—4 54 35	52 51	0·2991
16	Kischlak Oroschor	3100	38 18 30	41 58 10	—4 40 30	53 50	0·2950
17	Nischus	2600	38 16	41 55	**—2 24** 9	53 38	0·2898
18	Kischlak Tschaduth	2400	38 12	41 51	—4 50 0	53 23	0·2950

19	Darsagré	2300	38°10′20″	41°46′30″	—4°25′20″	53°31′	0·2922
20	Kischlak Rasutsch	2200	38 10 40	41 38 0	—	53 45	0·2852
21	Kischlak Chydjis	2120	38 3 40	41 36 0	4 31 40	53 27	0·2890
22	Kischlak Imtz	2050	38 0 40	41 27 20	4 49 40	53 21	0·2902
23	Chorog	2200	37 29 27	41 12 34	—4 33 35	52 42	0·2915
24	Ischkaschims-Posten	2500	36 53	41 11	—4 32 45	51 55	0·3024
25	Kischlak Namadgut	2600	36 40	41 24 30	—4 26 20	51 0	0·2962
26	Langars-Posten	2900	37 2 36	42 18 47	—4 30 50	52 1	0·3010
27	Standort am »Masar-Tepe«	4050	37 27 0	42 58 40	—	52 42	0·3016
28	Standort am »Djarti-Gumbes«	4200	37 36 40	43 50 30	—4 53 45	52 59	0·2925
29	Standort am »Ak-Su«	4000	37 49 30	44 19 15	—	53 7	0·2906

Über die elektrostatischen Ladungen der Gase, die an der activen Elektrode des Wehnelt-Unterbrechers auftreten

von

Dr. **Josef Nabl.**

Aus dem physikalischen Kabinet der k. k. Universität in Wien.

Mit 1 Textfigur.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1902.)

Über Aufforderung des Herrn Privatdocenten Dr. A. Lampa, — dem ich gleich an dieser Stelle für die Förderung, die er den folgenden Untersuchungen angedeihen ließ, meinen wärmsten und freundschaftlichsten Dank ausspreche — unternahm ich es, die Gase, die an der activen Elektrode eines Wehnelt-Unterbrechers auftreten, auf ihren elektrischen Zustand zu prüfen.

Durch die Arbeiten von J. S. Townsend[1] ist gezeigt worden, dass frisch erzeugte Gase, so namentlich auch die bei der normalen Elektrolyse der Schwefelsäure und Kalilauge auftretenden sich erheblich geladen finden. Es war demnach zu erwarten, dass auch die durch »abnormale« Elektrolyse an der activen Elektrode des Wehnelt-Unterbrechers auftretenden Gase elektrische Ladungen tragen würden, und zwar ließ sich nach den Anschauungen, welche Lampa bei seinen Untersuchungen über den Wehnelt-Unterbrecher[2] gewonnen hat,

---

[1] Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1897; und Phil. Mag. S. 5, Vol. 45, p. 125.

[2] Diese Sitzungsber., 109. Bd., Abth. IIa., Juli 1900, und 110. Bd., Abth. IIa., Juli 1901.

vermuthen, dass sich ein Unterschied bei normaler und abnormaler Schaltung des Unterbrechers bemerkbar machen werde.

Es sei mir zunächst gestattet, wenigstens die Resultate, zu denen Townsend bei der Elektrolyse der Schwefelsäure gelangte, hier soweit kurz anzuführen, als es zum Vergleiche mit den Ergebnissen meiner Untersuchung unbedingt nöthig ist.

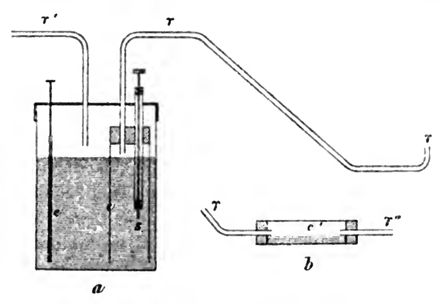
Sowohl der an der Anode auftretende Sauerstoff, als auch der Wasserstoff der Kathode erwiesen sich als positiv elektrisch und es wuchs die Ladung mit der steigenden Temperatur der Zelle. Traten die so erzeugten Gase in die Atmosphäre aus, so bildeten sie einen dichten Nebel, der sonach geradezu als Kennzeichen eines elektrisch geladenen Gases aufgefasst werden konnte, da sich diese Erscheinung bei unelektrischen Gasen niemals einstellte. Aus der Geschwindigkeit, mit der sich dieser Nebel unter dem Einflusse der Schwerkraft senkte, konnte das Gewicht eines Nebeltröpfchens, beziehungsweise dessen Radius berechnet werden. Es ergab sich auf diese Weise der Radius eines Nebeltropfens, der durch positiv geladenen Sauerstoff erzeugt worden war, zu $6 \cdot 8 \times 10^{-5}$ *cm*. Aus der Ladung, die 1 cm^3 Gas führte, dem Gewichte des 1 cm^3 Gases entsprechenden Nebelquantums und dem Gewichte endlich eines Nebeltröpfchens leitete Townsend, unter der Annahme, dass jeder Nebeltropfen nur mit einem einzigen geladenen Theilchen behaftet sei, die Größe dieser Ladung ab und fand sie zu $2 \cdot 4 \times 10^{-10}\, cm^{3/2} g^{1/2}\, \mathrm{sec}^{-1}$. Beim Wasserstoffe betrug die Größe der entsprechenden Ladung nur ungefähr die Hälfte.

Da die Nebelbildung der einfachste Nachweis für die Ladung eines Gases ist, so war es zunächst mein Bestreben, die sich entwickelnden Gase unter Bedingungen aufzufangen, die einer Nebelbildung besonders günstig sind. Folgender Weg wurde hiebei eingeschlagen:

Die Platinspitze *s* des Unterbrechers (siehe die beigegebene Figur, *a*) wurde durch die eine Öffnung eines doppelt durchbohrten Korkes, der die obere Öffnung eines Glascylinders *c* luftdicht abschloss, gleichfalls luftdicht ziemlich tief eingeführt; die untere Öffnung des Cylinders reichte nahezu an den Boden des Unterbrechergefäßes, In die zweite Bohrung des Korkes wurde, ebenfalls luftdicht, ein Glasrohr *r* eingeführt, das nur

wenig unterhalb des Korkes in den Cylinder hineinragte und durch den Deckel des Unterbrechergefäßes hindurch ins Freie führte. Auf diese Art gelang es, die Gase der activen Elektrode getrennt von den Gasen, die sich an der normalen Elektrode *e* entwickelten, aufzufangen und ins Freie zu leiten. Ein zweites Rohr *r'* besorgte den Abzug der sich an der normalen Elektrode entwickelnden Gase.

Der Unterbrecher wurde nun mit 10procentiger Schwefelsäure gefüllt und an die Straßenleitung (Gleichstrom von 110 Volt Spannung) unter Vorschaltung von circa 10 Ω Widerstand und der Primärspule eines Inductoriums von circa 20 *cm*



Schlagweite als Selbstinduction angeschlossen, welche Schaltung durch die ganze Reihe der Versuche hindurch festgehalten wurde. Hierauf wurde der Unterbrecher in Thätigkeit gesetzt und die Gase, die sich an der activen Elektrode entwickelten, ober Wasser in einem Glascylinder aufgefangen. Hiebei ergab sich Folgendes:

Wurde die active Elektrode als Anode benützt, so trat im Glascylinder, sobald die Gase das Wasser aus demselben verdrängt hatten, sofort ein ziemlich dichter, weißer Nebel auf. Wurde die active Elektrode als Kathode geschaltet, so trat gleichfalls ein Nebel im Cylinder auf, jedoch war derselbe in diesem Falle von merklich geringerer Dichte.

Damit war zunächst erwiesen, dass sowohl der im ersten Falle auftretende Sauerstoff, als auch der im zweiten Falle entwickelte Wasserstoff elektrische Ladungen führen, wobei, nach

der Dichte des Nebels zu schließen, die Ladung des Wasserstoffes eine geringere zu sein schien.

Ich will gleich an dieser Stelle bemerken, dass, wie die Versuche von Voller und Walter[1] gezeigt haben, in dem Falle, wo die active Elektrode als Anode geschaltet ist, nur etwa die Hälfte des entwickelten Gases Sauerstoff elektrolytischen Ursprunges ist, während die andere Hälfte ein Gemenge aus Sauerstoff und Wasserstoff ist, welches von durch die Stromwärme dissociiertem Wasser herstammt. Wahrscheinlich ist nun, dass nur der durch die Elektrolyse erzeugte Sauerstoff im ersten Falle, beziehungsweise Wasserstoff im zweiten Falle Antheil an der elektrischen Ladung hat. Es wurde jedoch hierauf in den nun folgenden quantitativen Untersuchungen keine Rücksicht genommen, da diese immer nur in dem Verhältnisse zwischen der Ladung eines bestimmten Gasquantums und dem Gewichte des entsprechenden Nebelquantums zum Ausdrucke kommen und eben nur der geladene Gasantheil Nebel erzeugt, wie denn auch stets neben dem Nebel noch reichlich freies Gas in dem Cylinder nachgewiesen werden konnte.

Um nun das Vorzeichen und die Größe der Ladung des Nebels zu bestimmen, schien es am einfachsten, den Cylinder sammt dem aufgefangenen Nebel in einen weiteren Blechcylinder, der mit einem Quadrantelektrometer in Verbindung stand, einzuführen und die Inductionswirkung zu messen. Allein diese Methode ergab wegen des geringen Inhaltes des Cylinders und der entsprechend geringen Nebelmenge keine zuverlässigen Resultate. Es zeigte sich jedoch hiebei aus Inductionswirkungen, welche die in der Nähe des Blechcylinders isoliert aufgestellte pneumatische Wanne auf den Cylinder ausübte, dass das Wasser in derselben nicht unerheblich positiv geladen war. Da es diese Ladung nur von dem durchströmenden Gase aufgenommen haben konnte, so ergaben schon diese Versuche, dass erstens die an der activen Elektrode auftretenden Gase positiv geladen sind und zweitens, dass diese Gase beim Durchströmen durch Wasser einen Theil ihrer Ladung an dasselbe abgeben.

[1] Wied. Ann., 1899, Bd. 68, S. 526.

Da diese Methode, wie erwähnt. quantitativ unzuverlässige Resultate ergab, entschloss ich mich, ein etwas anderes Verfahren einzuschlagen, das wesentlich in folgendem bestand:

Zunächst wurde das Gasquantum bestimmt. das sich während der Dauer einer Minute an der activen Elektrode entwickelte. Es geschah dies dadurch, dass die aufgebogene Mündung des Rohres *r* unter Wasser gebracht wurde, so dass das Gas innerhalb der Röhre *r* und des Cylinders unter einem Überdrucke von etwa 1 bis 2 *cm* Wasser stand. Wurde hierauf der Unterbrecher in Thätigkeit gesetzt, so sank der Spiegel innerhalb des Cylinders *c*, und es konnte an einer Graduierung des letzteren die in einer bestimmten Zeit entwickelte Gasmenge abgelesen werden.

Es fand sich, dass in einer Minute im Mittel circa 52 cm^3 Gas entwickelt wurden, und zwar gleichviel, ob die active Elektrode als Anode oder Kathode geschaltet war.

Sodann wurde zur Bestimmung der Ladung, welche 1 cm^3 Gas mit sich führt, folgender Weg befolgt. Der früher erwähnte Blechcylinder wurde an einem Seidenbande isoliert aufgehängt und konnte mittels einer Wippe sowohl zur Erde abgeleitet, als auch mit dem einen Quadrantenpaare des Elektrometers verbunden werden. Das zweite Quadrantenpaar blieb ständig geerdet; die Nadel war durch eine Wasserbatterie auf ein constantes hohes Potential gebracht. Die Capacität des Blechcylinders sammt der Zuleitung und dem zugehörigen Quadrantenpaare betrug circa 60 *cm*. Die Empfindlichkeit war so geregelt, dass der Nadelausschlag 6·5 Theilstriche für je 1 Volt Potentialzuwachs des Cylinders und der mit ihm verbundenen Quadranten betrug. Zunächst wurden nun beide Quadrantenpaare und der Cylinder an Erde geschlossen, hierauf der Cylinder isoliert, der Unterbrecher — zunächst mit der activen Elektrode als Anode — in Thätigkeit gesetzt und die sich an dieser Elektrode entwickelnden Gase durch eine kleine Öffnung im Cylinderboden, in welche die aufgebogene Mündung des Rohres *r* hineinragte, in den Cylinder direct eingeleitet. Nach 2 Minuten wurde der Unterbrecher außer Thätigkeit gesetzt, das eine Quadrantenpaar isoliert und mit dem Cylinder verbunden; sodann wurde die Inductionswirkung der im Cylinder

enthaltenen Gase abgelesen. Dieser Vorgang wurde mehreremale wiederholt, sowohl bei 2 Minuten, als auch bei 3 Minuten langer Entwickelungsdauer der Gase. Es ergaben sich so Messungsreihen, die untereinander recht gut übereinstimmten und von denen ich zwei herausgreife und als Muster anführe.

Active Elektrode als Anode geschaltet.

	Dauer der Gasentwickelung	
	2 Minuten	3 Minuten
Nadelausschlag, positive Ladung anzeigend	45	74
	43	76
	46	81

Hieraus ergeben sich, je nachdem man den Mittelwert der ersten oder der zweiten Versuchsreihe benützt, für die Ladung, welche $1\,cm^3$ des Gases führt, die Werte $13 \times 10^{-3} cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-1}$ und $15 \times 10^{-3} cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-1}$ positive Ladung. Es ist sonach die Ladung eine größere, wenn der Unterbrecher eine längere Zeit hindurch thätig ist, was — bei Berücksichtigung der Erfahrungen Townsend's — wohl dem Umstande zuzuschreiben ist, dass bei längerem Laufen des Unterbrechers der Elektrolyt sich erheblich erwärmt.

Diese Versuche wurden nun wiederholt bei Benützung der activen Elektrode als Kathode. Hiebei musste die Dauer der Gasentwickelung auf 2 Minuten beschränkt bleiben, da der Unterbrecher diese Schaltungsweise wegen der großen Inanspruchnahme der Platinspitze nicht lange aushält. Es ergab sich, dass auch jetzt das Gas positiv geladen war; jedoch war die Ladung wesentlich schwächer, denn der Nadelausschlag betrug im Mittel nur 5 Theilstriche, was einer Ladung von circa $1 \cdot 5 \times 10^{-3} cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-1}$ per Kubikcentimeter Gas entspricht.

Um die Ladung eines der elektrischen Theilchen, welche als Condensationskerne wirken, zu bestimmen, war es nun

noch nothwendig, das Gewicht des Nebelquantums, welches durch 1 cm^3 des elektrischen Gases erzeugt wird, und das Gewicht eines Nebeltröpfchens festzustellen. Ersteres geschah — und zwar nur für den Fall, dass die active Elektrode als Anode wirkte — auf folgende Weise:

Die Mündung des Rohres *r* wurde mittels eines durchbohrten Korkes (siehe die beigegebene Figur, *b*) in einen Glascylinder c', der bis dicht unterhalb der Mündung des Rohres *r* mit Wasser gefüllt war, eingeführt. An dem zweiten Ende des Cylinders führte, ebenfalls mittels eines durchbohrten Korkes, ein Röhrchen r'' ins Freie. Sobald nun der Unterbrecher in Thätigkeit gesetzt wurde, bildete sich in dem mit Wasserdampf gesättigten Raume des Glascylinders c' alsbald der bekannte weiße Nebel, der dann in einem ziemlich energischen, continuierlichen Strahle durch das Röhrchen r'' ausströmte. Es wurden nun für die Dauer von 3 Minuten mehrmals je eine Chlorcalciumröhre an das Röhrchen r'' angeschlossen und aus der Gewichtsdifferenz das Gewicht des Nebelquantums bestimmt, welches sich bei 3 Minuten währender Gasentwickelung bildet. Es ergab sich, dass hiebei von den in 3 Minuten gebildeten 104 cm^3 Gas im Mittel circa $2 \cdot 7 . 10^{-3}\, g$ Nebel gebildet wurden, was für 1 cm^3 Gas etwa $17 . 10^{-6}\, g$ Nebel gibt.

Zur Bestimmung des Gewichtes eines Nebeltröpfchens führte folgendes Verfahren: Eine Glasplatte wurde mit einer äußerst feinen Paraffinschichte bedeckt und dieselbe durch Überstreichen mit einem geriebenen Ebonitstabe negativ elektrisiert. Hierauf wurde der Dampfstrahl, der aus dem Röhrchen r'' trat, gegen diese Platte gelenkt und letztere dann unters Mikroskop gebracht. Zahlreiche Tröpfchen waren an der Paraffinschichte haften geblieben und deren Durchmesser konnte mittels des Ocularmikrometers geschätzt werden. Der in überwiegender Anzahl auftretende Grundtypus der Tropfen wies im Mittel einen Durchmesser von $7 \cdot 6 . 10^{-5}\, cm$ auf;[1]

[1] Ein Theilstrich des Ocularmikrometers hatte bei der angewendeten Vergrößerung einen Wert von 0·03 *mm*, wie durch Beobachtung einer in Zehntelmillimeter getheilten Glasscala festgestellt wurde; es giengen nämlich 30 Theilstriche des Ocularmikrometers auf 1 Theilstrich der Glasscala. Bei Anwendung schiefer Beleuchtung konnten Körperchen, deren Durchmesser mindestens ein

einzelne wesentlich größere Tropfen waren wohl durch Zusammenlaufen mehrerer kleiner Tröpfchen entstanden. Der für den Tropfenradius auf diese Weise gefundene Wert von $3 \cdot 8 . 10^{-5}\,cm$ ist wesentlich kleiner als der von Townsend gefundene Wert, welcher bei positiv geladenem Sauerstoffe circa $6 \cdot 8 \times 10^{-5}\,cm$ fand. Es ist nicht ausgeschlossen, dass die Verdampfung der Tropfen innerhalb dei wenn auch kurzen Zeit der Messung an diesem kleinen Wert für den Radius wenigstens theilweise schuld war; jedoch gieng diese Verdampfung — wie man im Mikroskope sehen konnte — keineswegs so rasch vor sich, um zu der Annahme zu berechtigen, dass der Tropfenradius wesentlich größer gewesen wäre.

Fasst man nun die quantitativen Ergebnisse dieser Untersuchung — wobei stets die Resultate der 3 Minuten langen Gasentwickelung in Rechnung gezogen sind — zusammen, so ergibt sich:

Active Elektrode als Anode geschaltet.

Positive Ladung eines Kubikcentimeter Gases	$15 \times 10^{-3}\,cm^{3/2}\,g^{1/2}\,sec^{-1}$.
Gewicht des Nebelquantums, welches $1\,cm^3$ Gas bildet.............	$17 \times 10^{-6}\,g$.
Gewicht eines Nebeltröpfchens	$230 \cdot 6 \times 10^{-15}\,g$.

Dividiert man nun das Gewicht des Nebelquantums durch das Tropfengewicht, so ergibt sich die Anzahl der Tropfen im Kubikcentimeter; die Ladung ferner eines Kubikcentimeter Gases durch diese Tropfenanzahl dividiert, ergibt die Ladung, welche auf einen Nebeltropfen kommt, beziehungsweise — wenn man die Annahme festhält, dass jeder Nebeltropfen nur mit einem einzigen elektrischen Theilchen verbunden ist — die

Fünftel des Abstandes zweier Theilstriche des Ocularmikrometers betrug, noch recht gut gesehen werden. Die beobachteten Tröpfchen wiesen nun in überwiegender Zahl einen Durchmesser auf, dessen Größe als zwischen ein Viertel und ein Fünftel dieses Abstandes liegend geschätzt werden konnte. Diese Schätzung führt zu dem im Texte gegebenen Werte für den Durchmesser.

Ladung dieses Theilchens. Man findet dieselbe aus den vorstehenden Zahlen zu circa $2 \times 10^{-10}\, cm^{3/2} g^{1/2}\, sec^{-1}$. Diese Zahl steht mit dem von Townsend gefundenen Werte, in Anbetracht der erheblichen Schwierigkeiten dieser Messungen, in recht befriedigender Übereinstimmung.

Für den Fall, dass die active Elektrode als Kathode benützt wurde, sind Bestimmungen des Nebelquantums und der Tropfengröße nicht gemacht worden, da hier die Bestimmung der Ladung eines Kubikcentimeter Gases nicht sicher genug schien, um eine Bestimmung des Elementarquantums zu rechtfertigen. Die Thatsache jedoch, dass in diesem Falle die positive Ladung des sich entwickelnden Wasserstoffes geringer war als die Ladung des Sauerstoffes, welcher in dem Falle entwickelt wurde, als die active Elektrode Anode war, steht fest und mag dem von Elster und Geitel[1] entdeckten Umstande zuzuschreiben sein, dass der Wasserstoff in der Umgebung einer zum Leuchten erhitzten Platinspitze — was bekanntlich in dem Falle, wo die active Elektrode Kathode ist, eintritt — negativ geladen erscheint, wodurch die positive Ladung des elektrolytischen Wasserstoffes theilweise neutralisiert wird.

Zieht man nun diese Resultate zur Interpretation der Vorgänge im Wehnelt-Unterbrecher heran, so lassen sich dieselben am einfachsten wohl so deuten, dass das an der activen Elektrode entwickelte Gas in jedem Falle eine erhebliche Ionisation erfährt. Im Falle die active Elektrode positiv ist, bleibt die Ionisation erhalten, im Falle die active Elektrode negativ ist, wird dieselbe dagegen zum größten Theile wieder rückgängig gemacht, d. h. bei positiver activer Elektrode wird die Leitungsfähigkeit der an derselben entwickelten Gase eine erheblich bedeutendere sein als bei negativer activer Elektrode. Dies steht nun in sehr guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen Lampa's, welche ihn zu dem Schlusse geführt haben, dass der Widerstand im Unterbrechungsfunken, der an der activen Elektrode auftritt, klein ist, wenn diese Elektrode positiv, groß dagegen, wenn sie negativ ist.

[1] Wied. Ann. 16, 19, 22, 26, 31 und 37, S. 315, 1889.

Über die durch den Verlauf der Zweiphasencurve bedingte maximale Arbeit

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1902.)

Im Anhange zu seiner Abhandlung: »Zur Theorie des Sättigungszustandes« hat Herr Dieterici[1] auf die Thatsache hingewiesen, dass die äußere Arbeit bei isothermer Verdampfung, die durch den Verlauf der Zweiphasencurve charakterisiert ist, ein Maximum haben müsse, da dieselbe für den Druck $\pi = 0$ und $\pi = 1$ — gemessen in kritischen Werten — verschwindet. Er suchte die zugehörigen Temperaturen aus den zugänglichen Beobachtungen an verschiedenen Substanzen zu ermitteln und fand das Maximum für alle betrachteten Körper übereinstimmend bei der gleichen Temperatur, in Einheiten der kritischen, und zwar bei $\frac{1}{1\cdot 30}$ gelegen.

Dass unter Zugrundelegung der verallgemeinerten Zustandsgleichung dieses Maximum überhaupt einer und derselben Temperatur (in Einheiten der kritischen) für alle Substanzen, die dieser Gleichung wirklich gehorchen, entsprechen muss, folgt unmittelbar aus dem Mangel an Materialconstanten in der sogenannten reducierten Gleichung

$$\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2},$$

[1] Ann. d. Phys., VI, S. 869 (1901).

in welcher π den Druck, τ die Temperatur, ω das Volumen, alle drei gemessen in Einheiten der kritischen Werte, darstellt.

Die Sättigungscurve S schneidet die durch obige Gleichung charakterisierten Isothermen in den Punkten ω_1 und ω_3, welche durch die Bedingung

$$\int_{\omega_1}^{\omega_3} \pi d\omega = \pi_s(\omega_3 - \omega_1)$$

— der Index s soll die Zugehörigkeit zur Sättigungscurve andeuten — festgelegt sind. Da eine befriedigende Gleichung für diese Curve bisher nicht aufgestellt wurde, habe ich die einzelnen Punkte graphisch an einer im großen Maßstabe angelegten Zeichnung ermittelt. Mit Rücksicht darauf, dass der Verlauf der Curven fast durchwegs ungenau gezeichnet wird, sei ein verkleinertes Bild derselben in Fig. 1 hier wiedergegeben. Die üblichsten Ungenauigkeiten liegen darin, dass der Verlauf für $\omega > 1$ meist viel zu steil, sowohl für die Isothermen, als für die Maxima-Minimacurve M, mit der Gleichung $\pi = \frac{3}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^3}$, als insbesondere für die Zweiphasen- oder Sättigungscurve S dargestellt wird und außerdem in dem Umstande, dass in der Regel nicht berücksichtigt erscheint, dass die Curve S zwischen $\omega = \frac{1}{3}$ und $\omega = 1$ noch einen Wendepunkt besitzt, so dass sie unter sehr flachem Winkel — bei $\tau = \frac{10}{32}$ ist $\omega = 0 \cdot 370$ und π_s nur mehr $= 0 \cdot 001$ — bei $\omega = \frac{1}{3}$ einläuft.

Die Einheiten für π und ω sind in der Zeichnung gleich groß genommen. Für den Abstand der einzelnen Isothermen wurde das Intervall $\tau = \frac{1}{32}$ gewählt und der Bereich zwischen $\tau = \frac{10}{32}$ und $\tau = \frac{42}{32}$ dargestellt. Die Wahl der Zweiunddreißigstel erfolgte deshalb, weil sich dann eine besonders große Zahl einfacher Beziehungen ergibt. Als solche seien nur hervorgehoben, dass z. B. für $\tau = \frac{27}{32}$ das Minimum der Isotherme auf $\omega = \frac{2}{3}$ und $\pi = 0$ fällt, oder, dass in der Isotherme

$\tau = \frac{24}{32}$ für die Punkte $\omega = \frac{1}{2}$ und $\omega = 1$, $\pi = 0$ wird. Die Ermittelung der Werte ω_1 und ω_3 geschah für die der kritischen Isotherme $\tau = 1$ naheliegenden Isothermen durch Auszählung

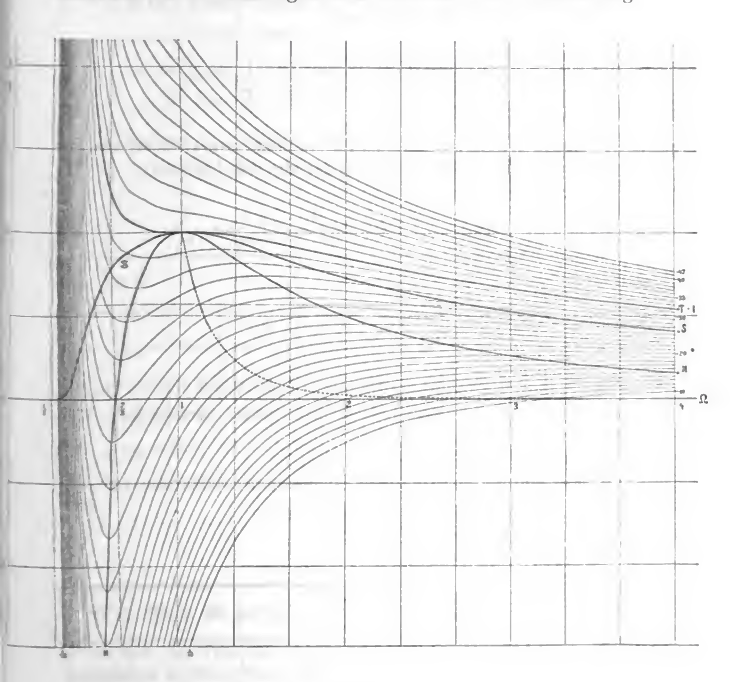


Fig. 1.

der gleich groß zu wählenden Flächen $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \pi\, d\omega - (\omega_2 - \omega_1)\pi_s$ und $\int_{\omega_2}^{\omega_3} \pi\, d\omega - (\omega_3 - \omega_2)\pi_s$ auf dem Millimeterpapier, wobei ω_2 den zweiten Schnittpunkt der Zweiphasengeraden mit der Isotherme bedeutet. Für tiefere Temperaturen versagt dieses Verfahren, weil ω_3 dann bald viel zu große Werte erreicht. Für

diese wurden dann absteigend aus dem Verlaufe der *S*-Curve und der in Fig. 1 strichulierten Verbindungscurve der ω_2 versuchsweise zu jeder Temperatur bestimmte zusammengehörige Werte von π_S, ω_1 und ω_2 aus der Zeichnung abgelesen, aus der umgeformten Zustandsgleichung

$$\omega^3 - \left(\frac{8\tau+\pi}{3\pi}\right)\omega^2 + \frac{3}{\pi}\,\omega - \frac{1}{\pi} = 0$$

das zugehörige ω_3 durch Division mit $\omega-\omega_1$ und $\omega-\omega_2$ berechnet und aus dem Vergleiche der aus den Formeln

$$\int_{\omega_1}^{\omega_3} \pi d\omega = \frac{8\tau}{3}\, l\, \frac{3\omega_3-1}{3\omega_1-1} - 3\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_3}\right)$$

und

$$\int_{\omega_1}^{\omega_3} \pi d\omega = \pi_S(\omega_3-\omega_1)$$

gewonnenen Werte auf die Richtigkeit der Wahl von π_S und ω_1 zurückgeschlossen, beziehungsweise durch neuerliches Versuchen diese Wahl corrigiert.

Man erhält so für die Temperaturen zwischen $\tau = \frac{10}{32}$ und $\tau = \frac{32}{32}$ die folgenden Werte:

$32\tau =$	32	31·5	31	30	29	28	27	26
$\pi_S =$	1	0·935	0·880	0·770	0·667	0·570	0·485	0·413
$\omega_1 =$	1	0·805	0·735	0·658	0·610	0·576	0·547	0·525
$\omega_2 =$	1	1·01	1·026	1·053	1·083	1·115	1·146	1·188
$\omega_3 =$	1	1·33	1·52	1·87	2·25	2·74	3·28	3·88
$\int_{\omega_1}^{\omega_3} \pi d\omega =$	0	0·49	0·69	0·93	1·09	1·23	1·32	1·39

$32\tau =$	25	24	23	22	21	20	19	18
$\pi_s =$	0·343	0·285	0·234	0·183	0·143	0·110	0·083	0·058
$\omega_1 =$	0·506	0·490	0·475	0·463	0·450	0·441	0·433	0·425
$\omega_2 =$	1·235	1·285	1·339	1·400	1·455	1·53	1·61	1·71
$\omega_3 =$	4·67	5·58	6·71	8·49	10·67	13·5	17·3	24·1
$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \pi d\omega =$	$1{\cdot}42_5$	1·45	1·46	1·469	1·461	1·43	1·40	1·37

$32\tau =$	17	16	15	14	13	12	11	10
$\pi_s =$	0·041	0·025	0·016	0·010	0·007	0·005	0·0015	0·001
$\omega_1 =$	0·417	0·408	0·400	0·393	0·387	0·382	0·376	0·370
$\omega_2 =$	1·82	1·930	2·056	2·213	2·43	2·66	2·92	3·25
$\omega_3 =$	32·6	51·3	76·0	114·4	151·3	197·3	608	830
$\int_{\omega_1}^{\omega_3} \pi d\omega =$	1·32	1·27	1·21	1·14	1·06	$0{\cdot}98_5$	0·91	0·83

In Fig. 2 ist die Arbeit, gemessen durch $f = \int_{\omega_1}^{\omega_3} \pi d\omega$ als Function der Temperatur, letztere abfallend von 1 bis 0, dargestellt.

Dem Verlauf der Curve für die Flächengröße f entsprechend, ist das Arbeitsmaximum in der Nähe von $\tau = \frac{22}{32}$ bei $\tau = 0{\cdot}700$ anzunehmen. Das zugehörige π_s wird $0{\cdot}200$, $\omega_1 = 0{\cdot}467$, $\omega_2 = 1{\cdot}367$, $\omega_3 = 7{\cdot}805$ und $f = 1{\cdot}472$. Der reciproke Wert, den Herr Dieterici aus praktischen Resultaten zu $1{\cdot}30$ fand, erhält also für Substanzen, welche der reducierten

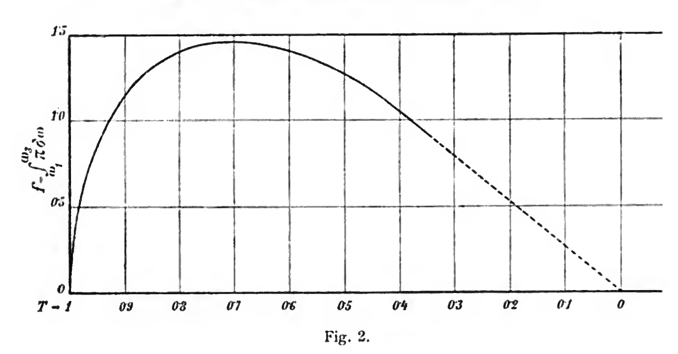


Fig. 2.

Gleichung vollkommen genügen, den etwas höheren Betrag von 1·43.

Der Zeichnung nach entspricht die Lage des dem Maximalarbeitswert zugehörigen Druckes π_s gerade dem Wendepunkte der Sättigungscurve.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

VII. SITZUNG VOM 6. MÄRZ 1902.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Band XXIII, Heft 1 (Jänner 1902).

Von dem am 22. Februar l. J. in Wien erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes der philosophisch-historischen Classe, Hofrathes Prof. Dr. Max Büdinger, wurde in der Gesammtsitzung vom 27. Februar l. J. Erwähnung gethan und dem Beileide der Mitglieder durch Erheben von den Sitzen Ausdruck verliehen.

Der Secretär, Hofrath V. v. Lang, legt folgende Arbeiten vor:

I. »Über die saure Natur des Acetylens«,
II. »Über die Fähigkeit des Kohlenstoffes, Ionen zu bilden«, beide von Dr. Jean Billitzer in Göttingen.
III. »Eine Ergänzung der van der Waal'schen Theorie des Cohäsionsdruckes«, von Prof. Dr. O. Tumlirz in Czernowitz.
IV. »Der Gefrierpunkt von Wasser und einigen wässerigen Lösungen unter Druck«, von Dr. Anton Lampa.

Das w. M. Hofrath L. Pfaundler übersendet eine Arbeit von Dr. Franz Streintz in Graz unter dem Titel: »Über die elektrische Leitfähigkeit von gepressten Pulvern. 2. Mittheilung: Die Leitfähigkeit von Metall-Oxyden und -Sulfiden«.

Das c. M. Prof. Hans Molisch in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über Heliotropismus im Bacterienlichte«.

Das c. M. Prof. Ernst Lecher übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Beeinflussung des elektrischen Funkens durch Elektrisierung«.

Herr Ing. Jos. Schornstein in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Holzdauerprobe«.

Das w. M. Hofrath Franz Steindachner überreicht eine Mittheilung von Dr. H. A. Krauss, betitelt: »Diagnosen neuer Orthopteren aus Südarabien und von der Insel Sokotra« als Vorläufer eines ausführlichen Berichtes über die von Prof. Dr. Oscar Simony während der südarabischen Expedition der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien gesammelten Orthopteren.

Das w. M. Prof. K. Grobben überreicht das von der Verlagsbuchhandlung Alfred Hölder in Wien der kaiserlichen Akademie geschenkweise überlassene III. Heft von Band XIII der »Arbeiten aus den zoologischen Instituten der Universität Wien und der zoologischen Station in Triest«.

Das w. M. Hofrath A. Lieben überreicht drei Abhandlungen aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien:

I. »Untersuchungen über die Veresterung unsymmetrischer zwei- und mehrbasischer Säuren, VI. Abhandlung«, von Rud. Wegscheider.

II. »Dasselbe, VII. Abhandlung: Über die Veresterung der 4-Oxypthalsäure«, von Rud. Wegscheider und Rich. Piesen.

III. »Dasselbe, VIII. Abhandlung: Über die Veresterung der Nitroterephthalsäure II«, von Rud. Wegscheider.

Ferner überreicht Hofrath Ad. Lieben vier Abhandlungen aus dem chem. Laboratorium des k. k. technologischen Gewerbemuseums

I. »Über Dinitrobenzaldehyd«, von P. Friedländer und P. Cohn.
II. »Über Oxynaphtochinone«, von P. Friedländer und L. Silberstern.
III. »Über Dinitrozimmtsäure«, von P. Friedländer und R. Fritsch.
IV. »Derivate der Nitrophtalsäuren«, von H. Seidel und J. C. Bittner.

Endlich überreicht Hofrath Lieben noch zwei Abhandlungen aus seinem Laboratorium:

I. »Zur Kenntnis des Gleichgewichtes zwischen Dextrose und Maltose«, von Dr. C. Pomeranz.
II. »Über die Löslichkeit der Salze optisch activer einbasischer Säuren«, von Dr. C. Pomeranz.

Dr. J. Valentin überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Der Staubfall vom 9. bis 12. März 1901«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Carte géologique internationale de l'Europe, livraison IV. Berlin, MDCCCCII.

Matiegka, Heinrich, Bericht über die Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's. Prag, 1901. 8°.

Parfait, Edmond, La Quadrature du Cercle. Nancy, 1902. 4°.

Studnička, F. J., Bericht über die Astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe. Prag, 1901. 8°.

Technische Hochschule in Berlin, Die Grenzen der Schifffahrt. Festrede zum Geburtsfeste S. Maj. des Kaisers und Königs Wilhelm II., gehalten vom Rector Bubendey. Berlin, 1902. 8°.

Université de Liège (Institut de Physiologie). Travaux de Laboratoire de Léon Fredericq; tome VI. Liège, 1901. 8°

University of Pennsylvania in Philadelphia. Publications, new series No. 6. Philadelphia, 1901. 8°.

Der Gefrierpunkt von Wasser und einigen wässerigen Lösungen unter Druck

von

Dr. Anton Lampa.

Aus dem physikalischen Kabinet der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1902.)

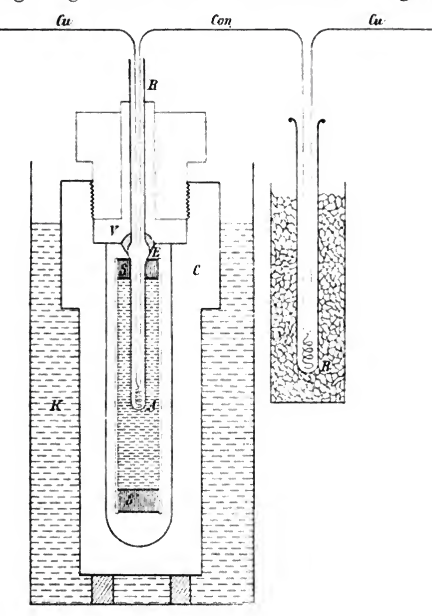
Durch eine äußere Veranlassung angeregt, habe ich einige Versuche unternommen, welche auf die Ausarbeitung einer thermoelektrischen Methode der Bestimmung von Gefrierpunktserniedrigungen abzielten.[1] Durch die im Institute des Herrn Nernst ausgeführte Arbeit von Herbert Hausrath,[2] welche vor Abschluss meiner Versuche erschien, ist jedoch diese Aufgabe erledigt worden. Im Anschlusse an diese Versuche, deren Beschreibung somit gegenstandslos geworden ist, habe ich einige Messungen gemacht, über welche ich im folgenden in aller Kürze berichten möchte. Dieselben betreffen den Gefrierpunkt von Wasser, zweier Kochsalzlösungen und einer Rohrzuckerlösung unter höheren Drucken.

---

[1] Herr Arnold Nabl, welcher eine möglichst genaue Bestimmung der Gefrierpunktserniedrigung gelegentlich einer chemischen Untersuchung benöthigte, machte mir den Vorschlag zu dem Versuche, dies Ziel auf thermoelektrischem Wege zu erreichen. Der genannte Herr war auch mein Mitarbeiter bei den durch die Hausrath'sche Arbeit überholten Versuchen. Übrigens ist auch schon früher der gleiche Vorschlag von Abegg gemacht worden (Zeitschrift für physik. Chemie, 15, 1894).

[2] Göttinger Inauguraldissertation, Königsberg 1901. Druck von Krause und Ewerlien.

Zur Erzeugung der letzteren verwendete ich die Cailletet-sche Pumpe, was, wie ich nachträglich ersah, bereits Dewar im Jahre 1880 gethan hatte.[1] Wie bei der Gleichheit des Zieles nicht anders zu erwarten ist, besteht zwischen der Versuchsanordnung des genannten Forschers und der von mir gewählten



große Übereinstimmung. Der einzige Unterschied, welcher vorhanden ist, ist durch den Umstand bedingt, dass ich auch Lösungen zu untersuchen wünschte, folglich eine Anordnung treffen musste, bei welcher eine Berührung der Pumpflüssigkeit mit der Lösung nicht stattfinden konnte. Nach mancherlei misslungenen Versuchen mit Quecksilberabschluss u. dergl.

[1] Dewar, On the lowering of the freezing-point of water by pressure. Proc. Royal Society of London, Vol. XXX, 1880, p. 533 ff.

gelangte ich zu der nebenstehend skizzierten Anordnung. Nachdem ich fand, dass das Thermoelement durch Druck beeinflusst wird (vergl. die analoge Beobachtung Dewar's), wurde dasselbe in ein mit absolutem Alkohol gefülltes Rohr R eingesenkt. Der 0·1 *mm* starke Cu-Draht desselben war durch ein Capillarrohr, welches leicht in R eingeführt werden konnte, gezogen und so vor Berührung mit dem zweiten Bestandtheile des Elementes, einem 0·3 *mm* dicken Constantandraht, geschützt. Die Enden der beiden Drähte wurden einfach auf 2 *cm* Länge fest zusammengedreht und dann zu einer Spirale aufgerollt, welche unmittelbar in dem Ende des Rohres R bei A lag. Ganz analog war das zweite Element B beschaffen, welches in die Nullmischung tauchte. Auf das Rohr R war knapp an die Erweiterung E desselben ein festansitzender, cylindrischer Kautschukpfropfen S aufgeschoben. Als Gefäß für die Flüssigkeit diente ein Kautschukschlauch von 20 *mm* innerem Durchmesser, der unten durch einen mit Gummilösung eingekitteten Kautschukstopfen S_1 verschlossen war. Die Zusammensetzung wurde in der Weise vorgenommen, dass dieses Kautschukgefäß ganz mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und dann das Rohr R mit dem Stopfen S eingeführt wurde. Auf diese Weise erzielt man eine luftfreie Füllung. Um sich gegen das Eindringen von Pumpflüssigkeit zu schützen, wird das Ende des Schlauches, welches den Stopfen S umschließt, mit starkem Bindfaden festgebunden. Als Pumpflüssigkeit verwendete ich ein entsprechendes Gemisch von Glycerin und Wasser, welches einerseits den Kautschuk nicht angreift, anderseits bei den Temperaturen, welche bei den Versuchen im Innern des Stahlcylinders C herrschen, nicht gefriert. Viel Pumpflüssigkeit ist nicht nöthig, da das Kautschukgefäß, welches im adjustierten Zustande 45 cm^3 Flüssigkeit fasst, von dem Hohlraume des Cylinders C wenig übrig lässt. In der Figur sind ungefähr die wirklichen Verhältnisse wiedergegeben. Das Kautschukgefäß hat sich ausgezeichnet bewährt, der Verschluss bei S functionierte, wie ich mich mehrmals überzeugte, tadellos; die Lösungen waren nach den Versuchen unverändert.

Die Aichung der Thermoelemente erfolgte durch Vergleichung mit den Angaben eines Normalthermometers, welches

in Zehntelgrade getheilt war. Die Ablesung desselben erfolgte mit Fernrohr. Das Intervall, über welches sich die Aichung erstreckte, betrug 8° bis 10° Temperaturdifferenz der beiden Elemente. Innerhalb dieser Grenzen, welche die zu messenden Temperaturdifferenzen weit überschritten, erwiesen sich die Ausschläge des Galvanometers (Desprez-d'Arsonval Edelmann'scher Construction) den Temperaturdifferenzen genau proportional. Die Versuche erheischen ein möglichst schnelles Arbeiten. Infolge dessen wurde nicht mit Compensation gearbeitet. Der Einfluss der Zimmertemperatur auf den Widerstand des ganzen Stromkreises wurde durch Aichung der Elemente bei verschiedenen Zimmertemperaturen, wodurch ein Temperaturfactor festgestellt wurde, berücksichtigt. Im allgemeinen jedoch erfolgte nach jeder Messungsreihe eine Aichung, wobei die Zimmertemperatur leicht constant zu erhalten war. Ich habe mit verschiedenen Thermoelementen gearbeitet, auch versucht, größere Empfindlichkeit durch Vermehrung der Elementenzahl zu erreichen. Es zeigte sich jedoch, dass auf letzterem Wege im Verhältnisse zu den Schwierigkeiten ihrer Unterbringung in dem Rohre *R*, dessen Dimensionen durch das Verschlusstück *V* und die nothwendige Festigkeit des Rohres vorgeschrieben sind, keine nennenswerten Vortheile zu erzielen sind. Durch Commutation der Stromrichtung im Galvanometer lässt sich theoretisch die Genauigkeit der Ablesung verdoppeln. Dies erfordert jedoch die Einschaltung eines Commutators in den Stromkreis, die zu bedeutenden Fehlern Anlass geben kann. Ich blieb daher nach verschiedenen Versuchen bei der Verwendung eines einzigen Elementenpaares stehen. Soviele ich deren auch herstellte und untersuchte, keines war bei Temperaturgleichheit beider Löthstellen frei von jeglicher elektromotorischer Kraft. Offenbar sind entweder die Drähte von vorneherein nicht in ihrer ganzen Ausdehnung homogen, oder verändert sie die Torsion beim Zusammendrehen; übrigens wirkt das Zusammenlöthen in ähnlicher Weise, denn gelöthete, nicht zusammengedrehte Elemente zeigten dieselbe Erscheinung. Dieselbe ist übrigens für die Messungen mit den Elementen belanglos, wenn man nur die bei der Aichung benützte Ordnung festhält, d. h. jenes Element,

welches bei Aichung das wärmere war, auch bei den Messungen das wärmere sein lässt, in unserem Falle also in die Nullmischung bringt.

Ich erwähnte schon, dass die Thermoelemente von Alkohol umgeben waren. Dies war nothwendig, um eine rasche Wärmeabgabe von der Umgebung an die Thermoelemente zu erzielen. Andere Flüssigkeiten (Petroleum, Vaselinöl, Schwefelkohlenstoff), welche angewendet wurden, verzögerten entweder bloß die Geschwindigkeit der Einstellung oder verdampften zu rasch, so dass ich bei dem auch bereits von Dewar verwendeten Alkohol blieb. Einerseits um eine bessere Wärmeleitung zu dem Thermoelement herzustellen, anderseits um die Compression zu größeren Drucken fortführen zu können, habe ich versucht, das Rohr R durch ein Metallrohr zu ersetzen. Bei dieser Anordnung wird jedoch die Wärmezuführung von außen so beträchtlich, dass die Messungen unmöglich werden. Das Glasrohr R, welches eine Wandstärke von circa 1 *mm* hatte, vertrug Drucke bis circa 250 Atmosphären. Doch konnten die Versuche meist nicht bis zu diesem Drucke fortgeführt werden, da schon früher die Temperatur unter den normalen Gefrierpunkt sank, verschiedene Versuchsreihen aber wegen der unvermeidlichen Unsicherheiten nicht aneinander angeschlossen werden konnten.

Die Ablesung des Galvanometers geschah subjectiv; hiebei wurden noch Zehntel-Scalentheile geschätzt und berücksichtigt. Die scheinbare Größe der Scalentheile betrug 2 *mm* (die wirkliche 1 *mm*); ich fand, dass die Schätzung mit großer Sicherheit möglich ist. Ein zweiter Beobachter bediente die Pumpe und Kältemischung, und besorgte die Ablesung des Manometers. Um größere Genauigkeit bei der letzteren zu erzielen, wurde der Zeiger desselben durch eine feine, aufgekittete Nadel etwas verlängert. Die Theilung des Manometers erwies sich durch Vergleich mit den Gefrierpunkten des Wassers innerhalb des benützten Intervalles mit Ausnahme des Wertes von 10 Atmosphären als correct. Die letztgenannten Operationen wurden von Dr. Josef Nabl besorgt, dem ich für seine ausdauernde Mitarbeit und Unterstützung bei den Messungen zu lebhaftem Danke verpflichtet bin.

Die Ausführung einer Versuchsreihe gestaltete sich folgendermaßen: Nachdem der Cylinder vollständig adjustiert ist, wird er mit gestoßenem Eis umgeben und bleibt so einige Stunden stehen. Die Temperatur im Innern sinkt allmählich auf circa +1° C. Die weitere Temperaturabnahme wird durch Zufügen von Kochsalz zu dem Eise herbeigeführt. Da es nicht möglich ist, das Gefrieren der in dem Kautschukgefäße enthaltenen Flüssigkeit durch Einwerfen eines Stückchens Eis einzuleiten, muss unterkühlt werden. Bei circa —4° C. tritt meistens das Gefrieren ein. Dabei hat die Kältemischung eine Temperatur von circa —6°. Sobald das Gefrieren eingetreten ist, wird die Kältemischung durch Hinzufügen von lauem Wasser soweit erwärmt, dass die Pumpflüssigkeit auf eine Temperatur kommt, welche die bei den Versuchen schließlich auftretende tiefste Temperatur nur sehr wenig unterschreitet. Wie specielle Versuche zeigten, war zur Erhaltung einer Temperatur von —2° C. der Pumpflüssigkeit — diese war die gewünschte — eine Temperatur der Kältemischung von —3·5° Celsius nothwendig.

Um über den Temperaturverlauf der untersuchten Flüssigkeit ständig orientiert zu sein, muss der Stromkreis vom Momente der Herstellung der Kältemischung ununterbrochen geschlossen sein. Es entstehen infolge dessen größere Ausschläge, welche eine Verschiebung des Nullpunktes in ihrem Sinne herbeiführen. Dieselben waren im allgemeinen nicht sehr bedeutend, doch wurden sie stets berücksichtigt, was leicht durchzuführen war. Es wurde nach jeder Drucksteigerung immer wieder auf Atmosphärendruck zurückgegangen und für die dem hohen Drucke entsprechende Einstellung das Mittel aus den Einstellungen bei normalem Drucke vor und nach dem hohen Drucke als Ausgangspunkt genommen. Wie man aus den folgenden Tabellen ersieht, sind die Schwankungen gering. Größere Abweichungen beruhten auf vollständigem Erstarren und weiterer Abkühlung. Sobald Derartiges eintrat, musste die Beobachtung abgebrochen werden.

Ich gebe nun im folgenden die Messungsresultate und bemerke nur noch, dass die Angabe für das Thermoelement sich stets auf jene Zimmertemperatur bezieht, bei welcher die

betreffende Messungsreihe vorgenommen wurde. Die Angabe für das Thermoelement ist aus den Aichungsbeobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet.

A. Wasser.

Aus einigen orientierenden Vorversuchen ergab sich übereinstimmend, dass die Werte für den Gefrierpunkt bei 10 Atmosphären weit außerhalb der Beobachtungsfehler liegen, woraus auf Ungenauigkeit der Manometerscala an dieser Stelle zu schließen ist. Die weitere Theilung erwies sich jedoch als correct. Bei den folgenden Messungen wurde daher keine Einstellung auf 10 Atmosphären gemacht, die sich ja auch wegen des geringen Unterschiedes des Gefrierpunktes gegenüber dem bei 1 Atmosphäre nicht sehr sicher beobachten lässt. Die zwei besten Messungsreihen theile ich im folgenden mit. Die eine ist mit einem Doppelelemente ausgeführt, zu welchem ich ein eigenes Rohr *R* hatte, das jedoch bei Überschreitung des Druckes von 260 Atmosphären sprang. Um solchen Störungen zu entgehen, ließ ich ein stärkeres Rohr anfertigen, das auch alle Messungen aushielt, aber nur die Anwendung eines einzigen Elementes gestattete.

In den folgenden Tabellen bedeutet p den Druck in Atmosphären, Δ die Abnahme des Gefrierpunktes gegen den Gefrierpunkt bei 1 Atmosphäre, ausgedrückt in Theilstrichen der Galvanometerscala, und Δ° dieselbe Größe, ausgedrückt in Graden Celsius.

Erste Serie.

1° C. = 36·9 Theilstriche; 1 Theilstrich = 0·0271° C.

p	Stellung des Fadenkreuzes bei Theilstrich	Δ	$\Delta°$
1	226·4		
30	234·7	8·3	0·2249
1	226·4		
50	239·8	13·4	0·3631
1	226·4		
100	253·6	27·15	0·7358
1	226·5		
130	261·9	35·25	0·9553
1	226·8		
160	271·2	44·25	1·1992
1	227·1		
200	282·1	54·65	1·4810
1	227·8		
260	297·8	69·75	1·8902
1	228·3		

Nach der Formel $\Delta = a(p-1)$ erhält man aus diesen Beobachtungen mittels der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\Delta = 0{\cdot}27462(p-1)$$

in Theilstrichen, oder

$$\Delta = 0{\cdot}00744(p-1)°\ \mathrm{C}.$$

Zweite Serie.

1° C. = 23·041 Theilstriche; 1 Theilstrich = 0·0434° C.

p	Stellung des Fadenkreuzes bei Theilstrich	Δ	Δ°
1	234·1		
20	230·3	3·75	0·1628
1	234		
30	229	5·05	0·2192
1	234·1		
40	227·6	6·45	0·2799
1	234		
50	225·7	8·3	0·3602
1	234		
60	223·9	10·15	0·4405
1	234·1		
70	222·2	11·90	0·5165
1	234·1		
80	220·6	13·55	0·5881
1	234·2		
90	218·9	15·25	0·6619
1	234·1		
100	217·1	17	0·7378
1	234·1		

Hieraus folgt

$$\Delta = 0\cdot 17164(p-1)$$

in Theilstrichen, oder

$$\Delta = 0\cdot 00745(p-1)^\circ \text{ C.}$$

Die beiden Serien gemeinsamen Einstellungen bei 30, 50 und 100 Atmosphären weisen geringfügige Differenzen im absoluten Betrage von 0·0057, 0·0029 und 0·0020° C. auf. Die Zusammenziehung beider Serien bis 100 Atmosphären würde nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\Delta = 0{\cdot}00747(p-1)^\circ \text{ C.}$$

ergeben. Mir scheint dieser Wert von den angeführten der wahrscheinlichste zu sein, denn die Beobachtungen werden, je höher die Drucke werden, unsicherer, da die Dauer der Einstellung auf Constanz des Ausschlages mit der Größe des Druckes wächst und die Sicherheit der Constatierung der Constanz abnimmt. Es wäre somit die Gefrierpunktserniedrigung des Wassers pro Atmosphäre Druckzunahme gleich **0·0075°** C. zu setzen. Dewar leitet aus seinen Versuchen, bei welchen das Thermoelement direct in die Flüssigkeit reichte, also dem Drucke mit ausgesetzt war, den Wert 0·0072° C. ab, während aus dem Kelvin'schen Versuche, durch welchen das Vorhandensein der Gefrierpunktserniedrigung das erstemal gezeigt wurde und bei welchem Drucke bis zu 16·8 Atmosphären in einem Piezometer erzeugt und die Temperaturen mittels eines Ätherthermometers abgelesen wurden, 0·0081° C. folgt.[1] Der theoretische Wert beträgt 0·00752° C. Mit diesem steht der obige Wert von 0·0075° C. in guter Übereinstimmung.

B. Lösungen.

Die Messungen an Lösungen können bei dieser Versuchsanordnung eigentlich nicht mehr als qualitativen Charakter beanspruchen. All die Vorsichtsmaßregeln, welche bei Bestimmungen von Gefrierpunktserniedrigungen nothwendig sind, können hier, wo das Gefäß, in welchem sich die Lösung befindet, abgeschlossen ist, wo kein Rührapparat in dasselbe eingeführt werden kann, nicht zur Anwendung kommen. Nur der Umstand, dass bisher Messungen an Lösungen überhaupt nicht vorgenommen wurden, veranlasst mich, die besten der

---

[1] William Thomson, Phil. Mag., III. Ser., Bd. 37.

angestellten Beobachtungen hier mitzutheilen. Wie von vorneherein zu erwarten war, steigen die Schwierigkeiten mit der Concentration der Lösung; mit Lösungen, welche eine größere Concentration als beiläufig 0·05normal hatten, waren die Resultate so unregelmäßig, dass sie nicht einmal zur Orientierung über den Verlauf der Gefrierpunktserniedrigung dienen konnten.

a) NaCl. 0·2926 *g* in 100 cm^3 H_2O (0·05normal).

Mit dieser Lösung habe ich den Vorversuch noch vor den Messungen an H_2O angestellt und ein Doppelelement (Cu-Constantan) dabei benützt; ein Scalentheil entsprach hier 0·025° C. Bei Gleichheit der Temperaturen beider Löthstellen gab das Thermoelement einen Ausschlag von 3 Theilstrichen in einem Sinne, welcher die Hinzufügung dieser 3 Theilstriche zu dem beobachteten Ausschlag erfordert, wenn es sich um die Bestimmung des Absolutwertes der betreffenden Temperatur handelt. Der Nullpunkt des Galvanometers lag bei 225. Bei dem Gefrieren der Salzlösung erfolgt eine Einstellung auf 229·2, was einer Verschiebung um 4·2 Theilstriche entspricht. Mit Anbringung der Correctur erhält man also für die Gefrierpunktserniedrigung bei 1 Atmosphäre 7·2 Theilstriche = 0·18° C., einen Wert, welcher mit den aus den Messungen von Raoult[1] und Abegg[2] interpolierten von 0·1778° C., respective 0·1786° C., in Anbetracht, dass ihm eine einzige Messung zugrunde liegt, und der übrigen ungünstigen Umstände, genügend übereinstimmt.

Die weiteren Messungen sind in der folgenden Tabelle enthalten; die Werte für das Wasser entsprechen der Gefrierpunktserniedrigung desselben von 0·0075° C. pro Atmosphäre. Dieselben sind auch in Theilstrichen angegeben, um den Unterschied, welcher in den Ablesungen unmittelbar zum Ausdrucke kommt, hervortreten zu lassen. So wird jedenfalls die Thatsache deutlich, dass die Differenz Gefrierpunktserniedrigung

---

[1] Comptes rendus, 124, p. 885 bis 889. 1897.

[2] Zeitschrift für physikalische Chemie, 20, S. 219, 1896.

der Lösung bei dem Drucke p, vermindert um ihre Gefrierpunktserniedrigung bei 1 Atmosphäre größer ist als die Gefrierpunktserniedrigung des Wassers bei p Atmosphären. Bei 150 Atmosphären z. B. beträgt diese Differenz circa 2 Theilstriche, also eine Größe, die nicht mehr auf Ablesungsfehlern beruhen kann.

p	Stellung des Fadenkreuzes bei Theilstrich	Lösung		H_2O		Differenz Lösung—H_2O
		Δ	$\Delta°$	$\Delta°$	Δ	
1	229·2					
20	234·9	5·8	0·145	0·1425	5·7	0·0025
1	229					
50	243·9	14·85	0·3713	0·3675	14·7	0·0038
1	229·1					
80	253·6	24·4	0·610	0·5925	23·7	0·0175
1	229·3					
120	266·7	37·4	0·935	0·8925	35·7	0·0325
1	229·3					
150	275·9	46·4	1·165	1·1175	44·7	0·0475
1	229·3					
200	291·3	62	1·55	1·4925	59·7	0·0575
1	234·2					

Die ganze Messungsreihe vom Momente des Gefrierens bis zur letzten Ablesung dauerte 27 Minuten. Während bis 200 Atmosphären bei Rückkehr auf 1 Atmosphäre immer wieder die alte Einstellung erfolgt, ist dies nach 200 Atmosphären nicht mehr der Fall; dieser Wert ist also mit einer weiteren Unsicherheit behaftet.

b) NaCl. 0·3 *g* in 100 cm^3 H_2O.

Bei dieser und bei der nächsten Lösung gelangte ein neues Kupfer-Constantanthermoelement zur Verwendung. Die beiden Messungsreihen wurden bei der gleichen Zimmertemperatur von 18° C. gemacht, bei welcher das Thermoelement für 1° C. einen Ausschlag von 20·45 Theilstrichen ergab, also 1 Theilstrich = 0·0489° C. war. Seine Nullpunktscorrectur hatte den geringen additiven Wert von 0·14, wie aus seiner Aichung folgt. Es war der Nullpunkt des Galvanometers bei 186·2, die Einstellung beim Gefrieren der Lösung 189·8, also eine Differenz von 3·6 Theilstrichen. Die Gefrierpunktserniedrigung bei normalem Drucke ist daher 3·74 Theilstriche = 0·1829° C. Über die weiteren Beobachtungen orientiert die Tabelle.

p	Stellung des Fadenkreuzes bei Theilstrich	Lösung		H_2O		Differenz Lösung—H_2O
		Δ	Δ°	Δ°	Δ	
1	189·8					
30	194·8	5	0·2445	0·2175	4·44	0·0270
1	189·8					
60	199·9	10·05	0·4914	0·4425	9·05	0·0489
1	189·9					
90	205·75	15·825	0·7738	0·6675	13·65	0·1063
1	189·95					
120	211·8	21·9	1·0708	0·8925	18·25	0·1783
1	189·8					
150	217·3	27·5	1·3447	1·1175	22·85	0·2272
1	189·8					
180	223·0	33·2	1·6234	1·3425	27·45	0·2809
1	189·8					
200	227·2	37·4	1·8289	1·4925	30·52	0·3364
1	189·8					

Dauer der gesammten Messung vom Momente des Gefrierens an: 20 Minuten. Stellt man Δ wieder als lineare Function des Druckes nach der Formel $\Delta = a(p-1)$ dar, so erhält man mittels der Methode der kleinsten Quadrate

$$\Delta = 0\cdot 18491\,(p-1)$$

in Theilstrichen, oder

$$\Delta = 0\cdot 0090\,(p-1)^\circ \text{ C.}$$

Der Gefrierpunkt der Lösung wird hiernach durch 1 Atmosphäre Druck um 0·0090° C. erniedrigt, also um 0·0015° C. mehr als Wasser.

c) Rohrzucker. $C_{12}H_{22}O_{11}$. 3·42 *g* in 100 cm^3 H_2O.

Der Nullpunkt des Galvanometers stand bei 213·2. Beim Gefrieren erfolgt die Einstellung auf 216·9, das gibt eine Differenz von 3·7 Theilstrichen. Dazu die Correctur von 0·14, gibt für die Gefrierpunktserniedrigung 3·84 Theilstriche oder 0·1878° C. Die Tabelle gibt die weiteren Messungen.

p	Stellung des Fadenkreuzes bei Theilstrich	Lösung		H_2O		Differenz Lösung—H_2O
		Δ	Δ°	Δ°	Δ	
1	216·9					
30	221·95	5·05	0·2469	0·2175	4·44	0·0294
1	216·9					
60	227·2	10·35	0·5061	0·4425	9·05	0·0636
1	216·8					
90	232·6	15·75	0·7702	0·6675	13·65	0·1027
1	216·9					
120	238·2	21·35	1·0440	0·8925	18·25	0·1515
1	216·8					
150	243·8	27	1·3203	1·1175	22·85	0·2028
1	216·8					
180	249·7	32·9	1·6088	1·3425	27·45	0·2663
1	216·8					

Dauer der gesammten Messung vom Momente des Gefrierens an: 15 Minuten. Berechnet man Δ als lineare Function des Druckes, so erhält man

$$\Delta = 0\cdot 18118(p-1)$$

in Theilstrichen, oder

$$\Delta = 0\cdot 00886(p-1)^\circ \text{ C.}$$

Der Gefrierpunkt der Zuckerlösung wird hiernach durch 1 Atmosphäre um 0·00886° C. erniedrigt, also um 0·00136° C. mehr als Wasser.

Schlussbemerkungen.

Auffallend ist die große Verschiedenheit der Resultate für die Lösung *a)* und *b)*, deren Concentrationen sich wenig voneinander unterscheiden. Berechnet man nämlich für die Lösung *a)* Δ als lineare Function des Druckes, so erhält man

$$\Delta = 0\cdot 30904(p-1)$$

in Theilstrichen, oder

$$\Delta = 0\cdot 00773(p-1)^\circ \text{ C.}$$

Dies gibt gegen Wasser einen Unterschied von 0·00023° C. pro Atmosphäre, während Lösung *b)* 0·0015° C. zeigt, einen Wert also, der mehr als sechsmal größer ist als jener für die Lösung *a)*. Diese Differenz ist wohl zurückzuführen auf ein Detail der Versuchsanordnung, das bei der Lösung *a)*, bei allen übrigen Messungen aber nicht mehr angewendet wurde. Es war nämlich auf das Rohr *R* in der Nähe von *A* ein Korkkragen geschoben, der einige Löcher hatte und verhindern sollte, dass der Kautschukmantel mit dem Rohre in Berührung kommen könnte. Dieser Korkkragen hindert nun den Wärmeaustausch sowohl durch Leitung, als auch durch Circulation, und kann zu bedeutenden Fehlern Veranlassung geben. Ich habe ihn deshalb auch bei den anderen Messungen ganz weggelassen, umsomehr, als die Gefahr einer directen Berührung von Rohr und Kautschukwand bei dem geringen Spielraume,

welchen das Kautschukgefäß in dem Stahlcylinder hatte, eigentlich gar nicht vorhanden war.

Was nun die Differenz in der Erniedrigung des Gefrierpunktes der Lösung gegenüber jener des Lösungsmittels unter Druck anlangt, so ist zunächst die Änderung der Concentration, die durch die Compression der Lösung herbeigeführt wird, als Ursache anzuführen. Bei den benützten geringen Concentrationen wird man den Compressionscoefficienten der Lösung jener des Wassers gleich setzen dürfen. Derselbe beträgt bei 0° C. 5177.10^{-8} (bezogen auf Atmosphären als Druckeinheit).[1] 100 *cm*³ H_2O bei 1 Atmosphäre werden hiernach durch 180 Atmosphären auf 99·07 *cm*³, durch 200 Atmosphären auf 98·97 *cm*³ comprimiert. Eine Concentration von 0·3 *g* NaCl auf 100 *cm*³ bei 1 Atmosphäre führt daher bei 200 Atmosphären auf eine Concentration von 0·30312 *g* auf 100, und von 3·42 *g* Rohrzucker auf 100 *cm*³ bei 1 Atmosphäre auf 3·456 *g* auf 100 bei 180 Atmosphären. Es würden daher die beobachteten Gefrierpunktserniedrigungen bei 1 Atmosphäre von 0·1829° C. der NaCl-Lösung und 0·1878° C. der Zuckerlösung bei den Drucken von 200, respective 180 Atmosphären mit 0·1848, respective 0·1898° C. in Rechnung zu stellen sein. Die gesammte Gefrierpunktserniedrigung würde daher bei der NaCl-Lösung

$$0\cdot 1848 + 199.0\cdot 0075 = 2\cdot 6783° \text{ C. bei 200 Atmosphären}$$

und für die Zuckerlösung

$$0\cdot 1898 + 179.0\cdot 0075 = 1\cdot 5323° \text{ C. bei 180 Atmosphären}$$

betragen, wenn nur die Concentrationsänderung für die Lösung in Betracht käme. Unter Zugrundelegung der beobachteten Δ für die beiden Lösungen hat man jedoch für die NaCl-Lösung bei 200 Atmosphären

$$0\cdot 1828 + 199.0\cdot 009 = 2\cdot 9739°$$

[1] Landolt und Börnstein, Tabellen, 2. Aufl., S. 269.

und für die Zuckerlösung bei 180 Atmosphären

$$0 \cdot 1878 + 179 . 0 \cdot 00886 = 1 \cdot 7737°,$$

also beträchtlich größere Werte.

Bei der NaCl-Lösung könnte an eine Änderung der Dissociation durch Druck gedacht werden.[1] Da aber die Zuckerlösung, bei welcher eine solche ausgeschlossen ist, eine ganz analoge Abweichung zeigt, außerdem die NaCl-Lösung bei ihrer geringen Concentration ohnedies nahezu vollständig dissociiert ist, wird dieser Factor hier nicht in Betracht kommen. Bei dem schon oben betonten qualitativen Charakter der vorliegenden Messungen wäre es aber ganz unangebracht, weitere Folgerungen zu ziehen; doch scheinen sie mir dafür zu sprechen, dass der Gefrierpunkt wässeriger Lösungen durch Druck in stärkerem Maße erniedrigt wird, als der des Wassers.

[1] Vergl. J. Fanjung, Über den Einfluss des Druckes auf die Leitfähigkeit von Elektrolyten. Zeitschrift für physik. Chemie, 14, 1894.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. VIII.

Über die entladende Wirkung verschiedener Elektroden

von

Dr. Victor Conrad.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1902.)

Pellat hat einige Untersuchungen[1] über die Wirksamkeit verschiedener Elektroden angestellt und kommt zu dem Schlusse, dass Flammenelektroden am raschesten imstande sind einer Elektrometernadel das jeweilige Luftpotential mitzutheilen; Wassertropfelektroden sind für diesen Zweck ungünstiger, und Luntenelektroden sind beinahe unbrauchbar.

Auf eine Anregung von Herrn Prof. Fr. Exner hin habe ich ebenfalls verschiedene Arten von Elektroden untersucht und bin im großen und ganzen zu ähnlichen Resultaten gekommen wie Pellat. Da die Versuche jedoch mit größerer Genauigkeit angestellt wurden und in bedeutend ausführlicherer Weise, als Pellat dies gethan hat, möchte ich sie in kurzem mittheilen, da ja gerade jetzt, wo man darangeht, internationale Luftelektricitätsbeobachtungen einzurichten, die genauere Kenntnis der Eigenschaften verschiedener Elektrodenarten vielleicht einigem Interesse begegnen könnte.

---

[1] Étude des moyens employés pour prendre le potentiel de l'air. Note de M. H. Pellat. C. R., 1885, I, p. 735.

In der nachstehenden Fig. 1 ist die Versuchsanordnung dargestellt, mittels welcher die entladende Wirkung der verschiedenen Elektroden in einer bestimmten Zeit gemessen wurde. Als erste wurde eine Wassertropfelektrode untersucht. Aus einer Mariotte'schen Flasche *F* fließt das Wasser durch den Heber *H* und durch die Glasspitze *E* in das Auffanggefäß *A*. Die Öffnung der Glasspitze befindet sich in der Mitte eines Blechcylinders von 40 *cm* Durchmesser und 50 *cm* Höhe. Die Flasche ist mit einem Schwefelcondensator und dieser mit einem Exner'schen Elektroskope verbunden. Letztere Verbindung kann durch einen geeigneten Schlüssel S_1 plötzlich

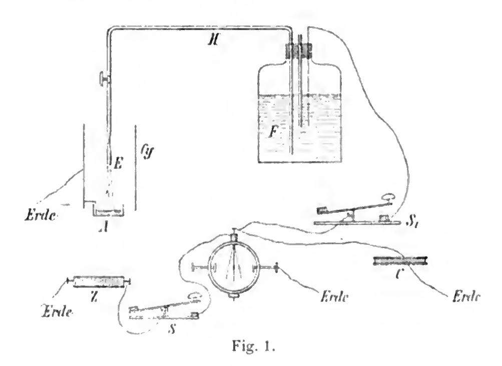


Fig. 1.

unterbrochen und geschlossen werden. Vom Kopfe des Elektroskopes führt eine weitere Drahtleitung über einen Schlüssel S_2 zu einer Zamboni'schen Säule, mittels welcher die ganze Versuchsanordnung geladen werden kann. Der Cylinder und das Auffanggefäß sind zur Erde abgeleitet. Die Flasche steht, durch Paraffin isoliert, auf einem eisernen Ringe, der an zwei hohen Stativen befestigt, gehoben und gesenkt werden kann. Sämmtliche Isolierungen wurden durch Paraffinklötze hergestellt, deren Oberfläche vor jeder Versuchsreihe mit der Flamme eines Bunsenbrenners ein wenig aufgeschmolzen wurde. Die Versuche wurden folgendermaßen angestellt: Vor allem wurde die Isolation dadurch geprüft, dass die ganze Anordnung mittels

der Zamboni'schen Säule auf ein bestimmtes Potential geladen und die Entladung innerhalb fünf Minuten bestimmt wurde. Hierauf wurde das frühere Potential wiederhergestellt und die Elektrode, die sich in der Mitte des zur Erde abgeleiteten Blechcylinders befand, in Action gesetzt; nach fünf Secunden wurde dann das Elektroskop von der Elektrode durch Öffnen des Schlüssels S_1 getrennt und die Abnahme der Divergenz der Blättchen bestimmt.

Die Wirksamkeit einer Tropfelektrode wächst offenbar mit der Ausflussmenge in der Zeiteinheit. Diese lässt sich nun auf zwei Arten vergrößern. Erstens dadurch, dass man verschieden weite Ausflussöffnungen anwendet, zweitens durch Vergrößerung des Druckes bei gleichbleibender Ausflussöffnung. Beide Methoden wurden verwendet. Die erstere wurde so ausgeführt, dass die Flasche bei allen Versuchen in der gleichen Höhe blieb (die Druckhöhe betrug 24·4 *cm*), während an das Ende des Hebers mittels eines kurzen Kautschukschlauches Glasspitzen mit verschiedenen Öffnungen angesetzt wurden. Die Durchmesser der Öffnungen wurden mittels eines Fraunhofer-schen Mikrometers bestimmt. Um die zweite Methode auszuführen, war die Glasspitze durch einen längeren Schlauch mit dem Ende des Hebers verbunden, während die Glasspitze isoliert von einem Stativ gehalten war. Die Druckhöhe wurde durch Heben der Flasche von 22 auf 94 *cm* gesteigert. Die Capacität der beiden Versuchsanordnungen war nahezu völlig gleich und betrug 64·89 $cm = 10^{-5}.7\cdot2096$ Mikrofarad.

Die beiden folgenden Tabellen geben die Versuchsdaten ziffernmäßig wieder. Die einzelnen Werte sind Mittel aus je 20 bis 30 Beobachtungen. Bei jeder Messung wurde von einem Potential von 190 Volt ausgegangen.

Tafel I enthält die Versuchsreihe, bei der die Druckhöhe constant blieb und die Ausflussöffnung verändert wurde, Tafel II die Versuchsreihe, bei der die Ausflussöffnung die gleiche blieb und der Druck variiert wurde.

Tafel I.

Durchmesser in Millimetern	Ausflussmenge in cm^3/sec	Die in 5 Secunden transportierte Elektricitätsmenge in 10^{-8} Coulomb	Entladende Wirkung innerhalb 5 Secunden	
			in Theilstrichen am Elektroskop	in Volt
0·353	0·210	0·5803	10·27	80·5
0·355	0·213	0·5840	10·35	81·0
0·382	0·245	0·6128	10·65	85·0
0·400	0·269	0·6345	10·86	88·0
0·404	0·275	0·6381	10·91	88·5
0·441	0·328	0·6669	11·20	92·5
0·466	0·365	0·6885	11·40	95·0
0·511	0·440	0·7318	11·75	101·5
0·570	0·546	0·7750	12·13	107·5
0·613	0·632	0·8053	12·36	111·7
0·659	0·730	0·8327	12·54	115·5
0·702	0·830	0·8471	12·65	117·5
0·755	0·960	0·8652	12·78	120·0
0·786	1·040	0·8760	12·85	121·5

Tafel II.

Druckhöhe in Centimetern	Ausflussmenge in cm^3/sec	Transportierte Elektricitätsmenge in 10^{-8} Coulomb	Entladende Wirkung innerhalb 5 Secunden	
			in Theilstrichen am Elektroskop	in Volt
21·6	0·265	0·5984	10·5	83·0
25·0	0·283	0·6777	11·3	94·0
31·6	0·317	0·7606	12·0	105·5
35·4	0·341	0·7844	12·2	108·8
40·2	0·369	0·8291	12·5	115·0
46·0	0·397	0·8652	12·8	120·0
54·2	0·441	0·8976	13·0	124·5
94·2	0·577	1·0130	13·7	140·5

Der Durchmesser der Ausflussöffnung betrug bei der zweiten Versuchsreihe 0·4 *mm*.

Zur besseren Versinnbildlichung der Wirkungsweise der beiden Tropfelektroden sind in Fig. 2 die Ausflussmengen als Abscissen, die transportierten Elektricitätsmengen als Ordi-

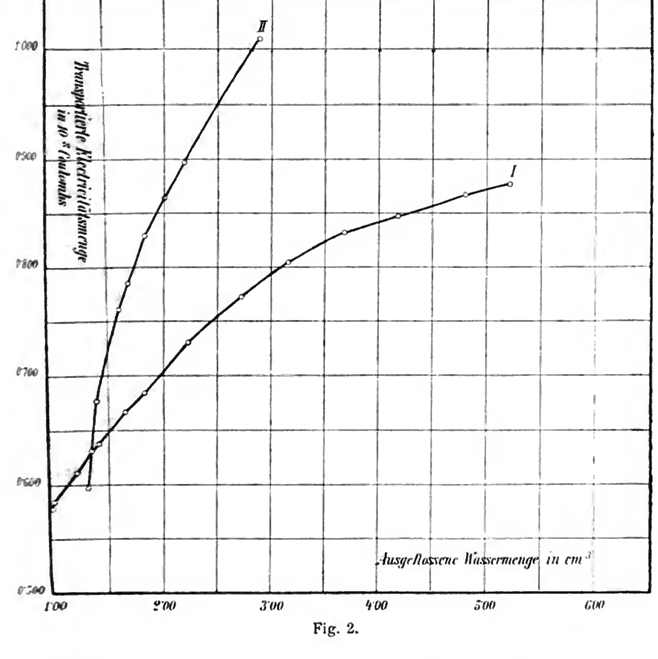


Fig. 2.

naten aufgetragen. Curve I stellt die entladende Wirkung der Tropfelektrode mit constantem Druck und variabler Ausflussöffnung, Curve II die entladende Wirkung der Tropfelektrode mit constanter Ausflussöffnung und variabler Druckhöhe dar. Der Unterschied in der Wirkungsweise ist ein auffallender: Während bei der Curve I die Menge der transportierten Elektricität nur

langsam mit der Vergrößerung der Ausflussmenge wächst, zeigt die Curve II ein sehr rasches Ansteigen der transportierten Elektricitätsmenge bei verhältnismäßig kleiner Änderung der Ausflussmenge. Der Verlauf der beiden Curven mag wohl in dem Umstande seinen Grund haben, dass wachsender Druck bei kleiner Ausflussöffnung zahlreichere und kleinere Tropfen von bedeutend größerer Gesammtoberfläche erzeugt, wie constanter Druck bei größer werdenden Ausflussöffnungen. Will man also eine rasch wirkende Tropfelektrode haben, die auch raschen Potentialänderungen nachzukommen vermag, so muss man eine kleine Ausflussöffnung und möglichst großen Druck anwenden.

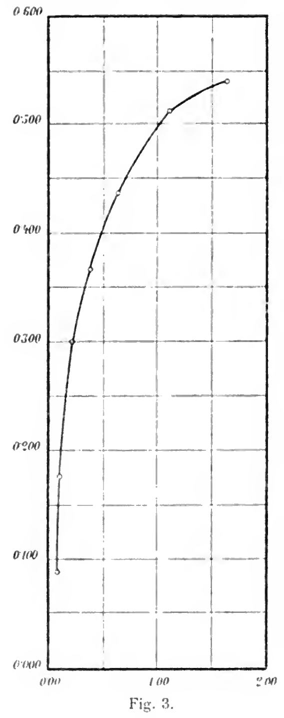


Fig. 3.

Weiter wurde eine Quecksilber - Tropfelektrode untersucht. Die Mariotte'sche Flasche war durch ein birnförmiges Gefäß ersetzt, in dessen untere Öffnung Capillarröhren von verschiedenem Lumen eingekittet wurden. Der Durchmesser des Quecksilberspiegels war so gewählt, dass bei der größten Ausflussmenge die Druckhöhe um weniger als 0·5 *mm* abnahm. In Fig. 3 sind wieder die Ausflussmengen innerhalb fünf Secunden ($2\,cm = 1\,cm^3$) als Abscissen, die in derselben Zeit transportierten Elektricitätsmengen ($2\,cm = 10^{-8}.0\cdot1$ Coul.) als Ordinaten dargestellt. Die Capacität dieser Versuchsanordnung betrug $60\cdot85\,cm = 10^{-5}.6\cdot761$ Mikrofarad. Das Ausgangspotential betrug 190 Volt. Die Tafel enthält die zur Fig. 3

gehörigen Zahlenangaben. Auch hier sind die angegebenen Zahlen Mittelwerte aus einer größeren Anzahl von Messungen.

Durchmesser in Millimetern	Ausfluss-menge in cm^3/sec	Transportierte Elektricitäts-menge in 10^{-8} Coulomb	Entladende Wirkung	
			in Theil-strichen	in Volt
0·220	0·016	0·0913	2·18	13·5
0·248	0·025	0·1792	4·25	26·5
0·323	0·048	0·2988	6·39	44·2
0·391	0·078	0·3685	7·50	54·5
0·509	0·133	0·4395	8·71	65·0
0·616	0·228	0·5138	9·88	76·0
0·671	0·331	0·5409	10·25	80·0

Schließlich wurden noch einige Flammen- und Luntenelektroden auf ihre Wirksamkeit untersucht und hiebei folgende Resultate gefunden:

Benennung der Elektrode	Entladende Wirkung in Volt in 5 Secunden	Transportierte Elektricitätsmenge in 10^{-8} Coul. in 5 Secunden	Bemerkungen
Benzinlampe . .	118·0	0·7553	Die Dochtdicke betrug 3 *mm*, die Flammenhöhe 20 *mm*
Kerzenflamme .	105·5	0·6753	Flammenhöhe = 35 *mm*
Gelbe Cigarrenlunte	9·7	0·0621	Dicke = 5 *mm*
Lunte aus Filtrierpapier in Bleinitrat getränkt	19·3	0·1235	

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass die Flammen recht gut wirkende Elektroden abgeben, die Lunten jedoch allzu langsam die Ladung dem Elektroskop mittheilen.

Auch aus einem anderen Grunde muss man die Anwendung der Lunten zur Messung der atmosphärischen Elektricität ausschließen: Da ihre entladende Wirkung vielleicht ausschließlich von der Rauchentwickelung abhängt, kann es nicht wundernehmen, dass die auf den Lunten angesammelte Asche einen maßgebenden Einfluss auf ihre Wirksamkeit nimmt. Versuche, die ich hierüber anstellte, zeigten denn auch, dass die Wirksamkeit der Cigarrenlunte um 9 Volt schwankt, je nachdem sie mit Asche beladen oder frisch abgeblasen ist.

Die für die entladende Wirkung angegebenen Werte sind Maximalwerte, indem vor jeder der zahlreichen Messungen die Asche abgeblasen wurde.

Nach Abschluss dieser Arbeit ist die Inaugural-Dissertation von Herrn Dr. F. Linke: »Über Messungen elektrischer Potentialdifferenzen vermittels Collectoren im Ballon und auf der Erde« erschienen, deren Resultate mit den meinen übereinstimmen, soweit sich die behandelten Fragen decken.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. IX.

Einige Bemerkungen zur Wolkenelektricität

von

Dr. Victor Conrad.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1902.)

Wenn man nach F. Exner[1] eine Wolke als Dielektricum auffasst, in dem die suspendierten Wassertröpfchen die leitenden Partikeln bilden, so kann man für einen bestimmten Wassergehalt der Wolke im Cubikmeter und bei gewissen Annahmen über Form, Dimension und Entfernung der Wolke von der Erdoberfläche die Störung des normalen elektrischen Erdfeldes berechnen, die durch ein solches Gebilde, dem wir vorläufig keine Eigenladung geben, hervorgerufen wird. Um nun diese Rechnung ausführen zu können, wurde der Wassergehalt der Wolken bestimmt[2] und gefunden, dass sehr dichte Wolken, in denen man nur mehr 18 *m* weit sieht, 5 *g* Wasser im Cubikmeter enthalten. Mit diesem Werte sind denn auch die folgenden Rechnungen durchgeführt worden.

Die Dielektricitäts-Constante einer solchen Wolke beträgt dann nach der Clausius-Mosotti'schen Theorie

$$k = \frac{1+2v}{1-v} = 1 \cdot 00002.$$

[1] Über die Ursache und die Gesetze der atmosphärischen Elektricität. Diese Sitzungsber., Bd. XCIII, 1886.

[2] Denkschr. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. XXIII, S. 115, 1901.

Die Kraft, die eine Cumuluswolke von 1 *km* Radius und einem Centralabstand von 3 *km* von der Erdoberfläche in der Nähe derselben ausübt, ist, wenn man $\frac{\partial v}{\partial z} = 660 \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ setzt, $2 \cdot 4 . 10^{-4} \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$.

Die Wirkung auf einen Punkt innerhalb der Wolke ist: $-3 \cdot 3 . 10^{-3} \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$.

Ist ein Stück der Erdoberfläche ganz mit einer Nebelschichte bedeckt, so wird das normale Potentialgefälle im Verhältnisse $\frac{1}{1 \cdot 00002}$ geändert.

Wie man aus diesen Zahlen ersieht, ist die Störung des elektrischen Feldes der Erde durch elektrisch nicht geladene Wolken vollkommen zu vernachlässigen. Die beobachteten Störungen sind also nur auf Rechnung der Eigenladung der Wolken zu setzen. Es soll nun mit Hilfe der ungefähren Kenntnis des Wassergehaltes der Wolken und den Angaben von Elster und Geitel über die Elektricitätsmenge, die einer bestimmten Niederschlagsmenge anhaftet, die Größenordnung dieser Störungen berechnet werden. Elster und Geitel sagen nämlich in den »Beobachtungen betreffend die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge«,[1] dass das Potentialniveau des einzelnen Tropfens, dessen Radius sie mit 1 *mm* annehmen, meist in den Grenzen 0 bis 30 Volt liegt. Rechnet man nun mit dem Potential von 10 Volt, so ergibt sich für die Wassermenge eines Tropfens d. s. ungefähr $4 . 10^{-3}$ *g* eine Elektricitätsmenge von $\frac{1}{9} . 10^{-11}$ Coulomb. Daher kommen auf 1 *g* Wasser $\frac{1}{36} 10^{-8}$ Coulomb.

Nimmt man nun wieder einen kugelförmigen Cumulus von 1 *km* Radius mit einem Wassergehalt von 5 *g* im Cubikmeter, so wird eine solche Wolke circa $2 . 10^{10}$ *g* Wasser und dementsprechend nach der obigen Annahme 5·5 Coulomb an Elektricitätsmenge enthalten. Das Centrum der Wolke sei

[1] Verhandlungen der Gesellsch. deutscher Naturf. und Ärzte, Halle, 1891 »Beobachtungen betr. die elektr. Natur der atm. Niederschläge.«

ebenso wie früher 3 *km* von der Erdoberfläche, die wir als unendliche Ebene auffassen, entfernt. Wäre die Wolke wirklich homogen, so könnte man sich die gesammte Elektricitätsmenge im Mittelpunkte concentriert denken und erhält dann den einfachen Fall der Induction einer unendlichen Ebene durch eine elektrische Masse, die sich in einem Punkte befindet. Das Princip der elektrischen Bilder ergibt als Dichte der an irgendeinem Punkte der Ebene inducierten Elektricität

$$\mu = \frac{Mn}{2\pi\nu^3},$$

wobei M die elektrische Masse, n den senkrechten Abstand des Punktes von der Ebene und ν den Abstand von dem Punkte in der Ebene bedeutet. Da es wieder auf die maximale Wirkung ankommt, wollen wir $\nu = n = 3.10^5\,cm$ setzen. Es ist dann

$$\mu = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{M}{2\pi n^2}$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{2M}{n^2}.$$

Für M setzen wir nun den gefundenen Wert $M = 5\cdot 5$ Coul. $= 3.5\cdot 5.10^9\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Man erhält dann

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{11}{30}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1} = \frac{3.10^4}{3.10^1}\,11\,\frac{\mathrm{Volt}}{\mathrm{Meter}} =$$
$$= 11000\,\frac{\mathrm{Volt}}{\mathrm{Meter}}.$$

Der so gefundene Wert stimmt mit einigen von F. Exner[1] unter schweren, aber nicht regnenden Gewitterwolken angestellten Messungen in der Größenordnung recht gut überein. Alle diese Beobachtungen ergeben ein Potentialgefälle von der Größenordnung 10^3 Volt/Meter, die Beobachtung vom 30. Juli 1887, 5^h p. ergibt sogar —8000 Volt/Meter und in manchen

[1] F. Exner, Weitere Beobachtungen über atmosphärische Elektricität. Diese Sitzungsber., März 1888.

Momenten noch höhere, die mit dem zur Verfügung stehenden Elektroskop nicht mehr gemessen werden konnten.

Das Potential einer solchen Wolkenkugel auf ihren Mittelpunkt würde 75.10^6 Volt betragen, da $V = 2\pi\rho R^2 \frac{3M}{2R}$, wobei ρ die Raumdichte bedeutet und M wie früher die gesammte Elektricitätsmenge. Das Potential auf einen Punkt der Oberfläche wäre 50.10^6 Volt. Daraus würde eine Potentialdifferenz von 25.10^6 Volt zwischen Wolkenmittelpunkt und Wolkenoberfläche resultieren.

Ein Stratus (in der Form eines Cylinders) von 4 *km* Radius und 0·2 *km* Höhe würde bei einem Wassergehalt von 5 *g* im Cubikmeter circa 12 Coulomb an Elektricitätsmenge enthalten. Das durch einen solchen Stratus in der Nähe des Erdbodens erzeugte Potentialgefälle würde $3000 \frac{V}{m}$ betragen.

Die so erhaltenen Werte scheinen nach den erwähnten Beobachtungen mit den natürlichen Verhältnissen keineswegs im Widerspruch zu stehen.

Über die elektrische Leitfähigkeit von gepressten Pulvern.

II. Mittheilung:

Die Leitfähigkeit von Metall-Oxyden und -Sulfiden

von

Franz Streintz.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1902.)

In der ersten Mittheilung[1] wurden Versuche beschrieben, die sich auf das Leitvermögen pulverförmiger Elemente, und zwar von Platinmohr und von Kohlenstoff in seinen leitenden Modificationen als gereinigter Ruß, Graphit und Gaskohle erstreckten. Die Pulver standen während der Untersuchung unter sehr hohen Drucken. Es geschah dies zu dem Zwecke, ihre Bestandtheile sowohl untereinander, als auch mit den metallischen Ableitungen möglichst innig zu verbinden. Inwiefern dadurch der Einfluss ihres physikalischen Zustandes, der in der bekannten Kohärererscheinung zur Geltung kommt, beseitigt worden ist, geht daraus hervor, dass sich Platinmohr von dem Drahte in Bezug auf den Temperaturcoefficienten wenigstens qualitativ nicht mehr unterschied. Auch Graphitpulver verhielt sich zur Temperatur ganz ähnlich wie das feste Material. Damit schien also die Vorbedingung zur Untersuchung von Metallverbindungen, die sich von ihrer Darstellung her meist im Zustande feiner amorpher Pulver befinden, gegeben.

[1] F. Streintz, diese Sitzungsber., 109 (IIa), April 1900 und Ann. der Physik, 3, S. 1 (1900).

Für die Untersuchung stand reiches Material zur Verfügung. Es wurde zunächst in zwei Gruppen geschieden, in Leiter und Nichtleiter. Dabei stellte es sich heraus, dass alle hellen — weißen, gelben, rothen, grauen — Pulver bei normaler Temperatur die Elektricität nicht leiten. Damit dürfte einer Forderung der elektromagnetischen Lichttheorie entsprochen sein. Es finden sich aber auch unter den dunkelfarbigen — schwarzen, braunen, dunkelgrauen — Pulvern ziemlich viele, die, wenigstens unter den gewöhnlichen Verhältnissen, zu den Nichtleitern zu zählen sind. Dadurch wird die Zahl der Leiter unter den genannten Metallverbindungen eine ziemlich beschränkte.

Verbesserung der Methode. Herstellung von Stiften aus Leitern. Schwierigkeiten der Untersuchung.

Die Untersuchung wurde zum Theil in derselben Weise geführt, wie sie für Platin und Kohlenstoff in Anwendung kam. Nur die Presse erhielt eine Umgestaltung. Fig. 1 stellt die neue Form in $^1/_2$ der natürlichen Größe vor. Der nadelförmige Pressstempel war von einer entsprechenden Führung umgeben, um ein Zerbrechen zu vermeiden, außerdem befand sich zwischen Stempel und Schraube eine Stahlfeder *(F)* eingeschaltet, die aus einem aufgefraisten massiven Stahlcylinder bestand. Sie hatte den Zweck, den Druck auszugleichen, wenn die im Hartgummicylinder befindliche Substanz in die Kältemischung getaucht wurde und sich zusammenzog. Unter der Stahlfeder, sowie unter dem oberen Querbalken der Presse befanden sich Hartgummistücke *(H)*, die verhindern sollten, dass die Stahlfeder durch Wärmeableitung nach unten zu stark abgekühlt wurde. Bei den Versuchen wurde dafür Sorge getragen, dass die Presse nur bis zum oberen Rande des Hartgummibehälters in die Kältemischung tauchte.

Häufig war es nothwendig, das Verhalten der Körper bei Temperaturen zu beobachten, bei denen der Hartgummi nicht mehr Stand hält. Da alle Bemühungen scheiterten, andere isolierende Substanzen, die neben dem hohen Druck auch höhere Temperaturen vertragen, als Behälter zu verwenden, so wurde versucht, unter Anwendung von sehr großen Drucken

cylindrische Stäbe aus den Pulvern zu erhalten. Dazu wurden Pressformen in folgender Weise hergestellt. Ein massiver Kreiscylinder aus Stahl von ungefähr 10 *cm* Höhe und 4 *cm* Stärke wurde der Länge nach in drei gleiche Sectionen zersägt, worauf jede der erhaltenen Schnittflächen der einen Section auf die entsprechende der benachbarten Section sorgfältig angeschliffen wurde. Nachdem mittels Loth die Sectionen wieder zum Cylinder vereinigt waren, wurde durch ihn mit dem Kanonenbohrer ein conaxialer Canal gebohrt, der dann zur Aufnahme der Pulver zu dienen hatte. Der Canal wurde auf das sorgfältigste ausgeschliffen; es erfolgte nun die Herstellung verschieden langer, dem Canal angepasster Pressstempel, die Glashärte erhielten. Ein Stahlmantel von der gleichen Höhe wie der Cylinder und einem Durchmesser von etwa 10 *cm* wurde über die vom Lothe befreiten Sectionen geschoben und durch mehrere Schrauben, die in geeigneten Abständen in entsprechender Gegenüberstellung angebracht waren, so fest als möglich mit ihnen verbunden.

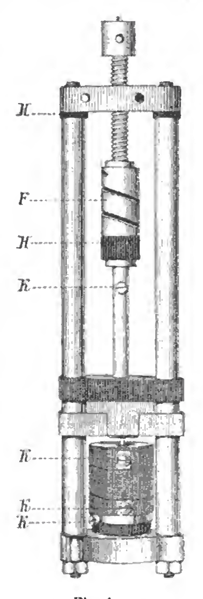


Fig. 1.

Zur Herstellung der Stäbe wurde zunächst das untere Ende des Canals durch einen kurzen Pressstempel abgeschlossen. Darauf erfolgte die Füllung des Canals mit der vorher gewogenen Pulvermenge. Nun schob man von oben einen entsprechend langen Stempel in den Canal und presste das Pulver mit einem Schraubstocke mäßig zusammen. Endlich wurde der untere Stempel durch einen ebenfalls geeignet langen ersetzt, so dass die Pressstempel auf beiden Seiten aus dem Cylinder entsprechend herausragten. Damit waren die Vorbereitungen zur Pressung gegeben. Meist trat eine hydraulische Presse in Verwendung; sie wirkte derart, dass die Stempel von beiden Seiten gleich-

mäßig in den Cylinder eindrangen. Nach einer Schätzung beliefen sich die in Anwendung gekommenen Drucke auf 10.000 bis 13.000 Atmosphären. Unter Umständen wurde bei Temperaturen von 200 bis 300° gepresst. Ein Bindemittel kam niemals in Verwendung.

Es ergab sich als merkwürdige Regel, dass nur die Pulver von Leitern gut zusammenhängende Stifte von metallischem Glanz und metallischer Härte bildeten, während die Pulver von Nichtleitern weder Metallglanz annahmen, noch die nothwendige Cohäsion besaßen. So war es z. B. vergeblich, Kupferoxyd oder Nickeloxyd, beide dunkelfarbige Verbindungen, in Formen zu bringen. Aber bereits aus dem ziemlich schlecht leitenden Ruß ließen sich kurze Stäbchen von lebhaftem Oberflächenglanz herstellen. Aus Nickelsulfid und dem amorphen Bleisulfid konnten nur sehr gebrechliche Stifte von ziemlich mattem Glanz gebildet werden, und in der That ist auch das Leitvermögen dieser Körper bei gewöhnlicher Temperatur zwar noch gut nachweisbar, aber doch schon sehr gering. Eine Ausnahme von der Regel konnte nicht gefunden werden. Es ist also die Leitfähigkeit der Pulver eine Function ihrer Cohärenz.

Nothwendig war es, die Pulver in möglichst fein vertheilter Form zu besitzen. Diese Bedingung war großentheils bei jenen Pulvern erfüllt, die aus chemischen Processen als Niederschläge gewonnen worden waren. Die Krystalle dagegen kamen zunächst auf viele Stunden in die Kugelmühle und wurden darauf noch einem sorgfältigen Schlämmverfahren unterworfen. Trotzdem pflanzte sich der auf die Pulver ausgeübte Druck nicht wie bei einer Flüssigkeit nach allen Richtungen gleichmäßig fort, was man daraus entnehmen konnte, dass in der Mitte des Stiftes eine Zone von matterem Glanze entstand. Die Mühe war vergeblich, Stifte zu erzeugen, die in den verschiedenen Querschnitten gleiche Dichte besaßen. Stellt man einen Stift dadurch her, dass man ihn durch eine Reihe von Pressungen kleiner Mengen gewissermaßen aufbaut, so spalten sich die durch die Einzelpressungen entstandenen Stückchen voneinander ab. Um eine Vorstellung über den Unterschied der Dichte an den verschiedenen Stellen zu erhalten, wurde ein Stift aus Bleiglanz

von 2·8 *cm* Länge und 0·5 *cm*² Querschnitt, dessen Enden (*KK*, Fig. 2) auf galvanischem Wege verkupfert waren, auf zwei Platinschneiden *PP* aufgelegt, die 4 *mm* voneinander entfernt waren und von dem einen Rande des Sitftes gegen den anderen verschoben werden konnten. Aus den Messungen von Strom und Spannung wurden die Widerstände der verschiedenen Schichten bestimmt; ihre Werte sind in die Figur eingetragen; sie schwanken zwischen 7·6 und 14·1 Ω.

Bei der Eigenschaft der Pulver, sich beim Pressen gegen die Wände des Füllcanales zu spreizen und dadurch Schichten von

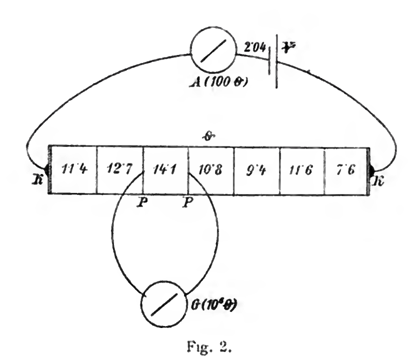


Fig. 2.

verschiedener Dichte zu bilden, erscheint es ausgeschlossen, Präcisionswerte für den specifischen elektrischen Widerstand zu ermitteln. Man muss sich damit begnügen, das Verhalten verschiedener Substanzen untereinander zu vergleichen und deren merkwürdige Beziehungen zur Temperatur aufzudecken.

Eine weitere Schwierigkeit bot die Untersuchung dadurch, dass einige als beständig anerkannte Metallverbindungen bei höheren Temperaturen Umwandlungen unterliegen, die durch Polymerie oder Polymorphie hervorgerufen werden dürften. Solche Umwandlungen kommen in einer veränderten Leitfähigkeit zum Ausdruck. Es entstehen labile Gleichgewichts-

zustände, die bei der großen Hysteresis in den Körpern lange bestehen können.

Die Verbindung der Stifte mit dem Stromkreise geschah meist in der in Fig. 3 angegebenen Art. Ein starker, ⌴-förmig gebogener Messingbügel nahm zwei Schrauben (*ss*) auf, die an ihren etwas ausgehöhlten Enden mit Porzellanmasse ausgefüllt waren. In die Masse war eine kleine Vertiefung eingedrückt, die zur Aufnahme der Spitze je eines Helmes aus Messing diente. Dieser war innen mit Platinblech gefüttert, mit einem starken Kupferdrahte in Verbindung und bedeckte ein Ende des Stiftes. Die Contacte unter den Metallen wurden durch Silberloth hergestellt. Zwischen Stift (*k*) und der Mitte des Bügels befand sich ein kleiner Messingbügel, der auf einem Lager von Porzellanmasse (*m*) zwei 1 *cm* voneinander

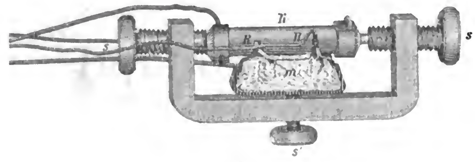


Fig. 3.

abstehende Schneiden aus starkem Platinblech trug, die gleichfalls mit Kupferdrahtstücken verlöthet waren. Eine Schraube (*s'*) in der Mitte des größeren Bügels gestattete, die Schneiden an den Stift anzudrücken. So hatte also der Stift vier Zuleitungen erhalten, so dass die in der ersten Mittheilung beschriebene Methode ohneweiters angewendet werden konnte.

Zuweilen wurden die Enden des Stiftes, um die Kupferdrähte herumgeschlungen waren, galvanisch verkupfert. Bei Stiften, die nur geringes Leitvermögen besaßen, haftete der Überzug schlecht. In diesen Fällen wurde die metallische Verbindung durch ein Verfahren bewerkstelligt, das ich Herrn Hoffmann, Ingenieur im Charlottenburger Werk der Actiengesellschaft Siemens & Halske, verdanke. Eine Kupferlitze, die aus mehreren hundert feinen Drähten bestand, wurde mit ihrem einen Ende in eine Vertiefung der Presstempel (vergl. S. 347) hineingesteckt, während das andere Ende auseinandergebreitet

und gleichzeitig mit dem Pulver zusammengepresst wurde. Auf diesem Wege erzielte man zwar vorzüglichen und haltbaren Contact, konnte aber die wirksame Länge des Stiftes nicht ermitteln. Da aber diese Verbindungsweise nur bei jenen Pulvern in Anwendung kam, deren Verhalten zur Temperatur das wesentliche Interesse beanspruchte, so kam dieser Nachtheil kaum in Betracht.

Zur Herstellung der höheren Temperaturen diente die Stromwärme, die in einer auf ein Magnesia-Öfchen gewickelten Platinspirale entwickelt wurde. Der Deckel des Öfchens enthielt die entsprechenden Ausschnitte für die Zuleitungen und zur Aufnahme eines Quecksilber-Thermometers, das Messungen bis 560° ermöglichte.[1]

Die Messungen in flüssiger Luft wurden im physikalischen Institute der Universität Wien ausgeführt. Ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich den Herren Hofrath Prof. v. Lang, Dr. v. Schweidler und Dr. Lampa für ihre gütige Unterstützung bei diesen Versuchen meinen verbindlichen Dank ausspreche.

1. Das Verhalten von Metalloxyden.

Zuerst wurden die Superoxyde untersucht; der Übersichtlichkeit wegen sollen die mit ihnen gemachten Erfahrungen vorangestellt werden.

Bleisuperoxyd (PbO_2). 0·397 *g* des auf elektrolytischem Wege hergestellten Pulvers waren im Hartgummicylinder zu einer Säule von 1·49 *cm* Höhe und 0·0276 cm^2 Querschnitt zusammengepresst worden. Das specifische Gewicht der Verbindung wurde dadurch ermittelt, dass der mittlere Hohlraum W nach beendeten Versuchen mit Quecksilber ausgewogen wurde; es ergab sich zu 8·4. Nach Messungen von Kirchknopf[2] soll festes Superoxyd ein specifisches Gewicht von 8·9 bis 9·2 besitzen.

---

[1] Herrn P. Almstedt, Mechaniker am physikalisch-chemischen Institute der Universität Göttingen, bin ich für die sorgfältige Herstellung des elektrischen Ofens, die Construction des in Fig. 3 abgebildeten Bügels, sowie für eine Reihe von Hilfeleistungen bei Ausführung dieser Untersuchung verpflichtet.

[2] Kirchknopf, vergl. Weyde, Elektrot. Zeitschr., 13, S. 657 (1892).

Die Widerstände W, X_1 und X_2 wurden in derselben Weise wie die von Platinmohr bestimmt. Unmittelbar nach dem Pressen betrug der Widerstand W bei Zimmertemperatur 0·00810 Ω, stieg im Laufe von 14 Stunden auf 0·00834, um sich in weiteren 14 Stunden nur mehr auf 0·00836 Ω zu vergrößern. Der Widerstand eines »Drahtes« von 1 *m* Länge und 1 mm^2 Querschnitt ($10^4\sigma$) ergibt sich demnach zu **2·31** Ω. Das Leitvermögen von PbO_2 beträgt mithin fast die Hälfte von dem des Quecksilbers; es konnte keine andere Verbindung ermittelt werden, die die Elektricität ebenso gut leitet. Ja, auch dem Graphit, sowohl in pulverförmig gepresster, als in fester Form ist das Superoxyd vielfach überlegen.

Für die gleichmäßig dichte Ausbildung der Stromlinien bei den elektrolytischen Processen im Accumulator ist das hervorragende Leitvermögen dieser Bleiverbindung von großer Bedeutung. Man wird auch darauf hinweisen müssen, will man alle Merkmale aufzählen, die dem Blei die Eignung zum Accumulatormetall geben.

Der Temperaturcoefficient wurde durch Eintauchen in sublimierende Kohlensäure bestimmt. Der Widerstand fiel beim ersten Versuche von 2·31 auf 2·17 Ω in der Kältemischung, um dann wieder bei Zimmertemperatur auf 2·30 Ω zu steigen. Bei einem zweiten Versuche, der an einem anderen Tage angestellt wurde, erhielt man als entsprechende Zahlen 2·37, 2·23 und 2·39 Ω. Aus diesen beiden Versuchen ergibt sich für das Leitvermögen von PbO_2 und seine Abhängigkeit von der Temperatur die Gleichung

$$10^4\sigma_t = 2{\cdot}3[1+0{\cdot}00065\,t].$$

Der Temperaturcoefficient ist zwar noch merklich positiv, steht aber noch hinter jenem von gepresstem Platinmohr (0·0015) zurück.

Mangansuperoxyd (MnO_2) zeigt ein völlig anderes Verhalten als das eben besprochene Superoxyd. Die Leitfähigkeit steht der Größenordnung nach auf der Stufe des gereinigten Rußes, der Temperaturcoefficient ist negativ und groß. Einige Zahlenangaben sollen die Behauptung bestätigen.

Als Stromquelle diente Gleichstrom von 6 Volt Spannung· der Vergleichswiderstand in der Brücke betrug 500 Ω. Einen Tag nach der Zusammenstellung fanden sich folgende Widerstände bei Zimmertemperatur:

$$W = 313 \cdot 2\,\Omega,$$
$$X_1 = 118 \cdot 0 \text{ »}$$
$$X_2 = 136 \cdot 0 \text{ »}$$

Im weiteren Verlaufe traten bei Zimmertemperatur keine wesentlichen Veränderungen ein. In der Kältemischung (—80°) ergaben die Messungen:

$$W = 456 \cdot 0\,\Omega,$$
$$X_1 = 127 \cdot 0 \text{ »}$$
$$X_2 = 432 \cdot 6 \text{ »}$$

um wieder, auf Zimmertemperatur gebracht, die Werte

$$W = 325 \cdot 2\,\Omega,$$
$$X_1 = 141 \cdot 2 \text{ »}$$
$$X_2 = 128 \cdot 0 \text{ »}$$

anzunehmen. Auffallend ist die große Veränderlichkeit in den Werten von X_2, also jenes Widerstandes, der an den Pressstempel grenzt. Da möglicherweise eine chemische Umsetzung in der an den Stempel anliegenden Superoxydschicht durch die Wirkung des Stromes eingetreten sein mochte, so wurden die Pole vertauscht. Es ergab sich bei Zimmertemperatur

$$W = 324 \cdot 6\,\Omega,$$
$$X_1 = 148 \cdot 2 \text{ »}$$
$$X_2 = 137 \cdot 2 \text{ »}$$

und bei —80°:

$$W = 456 \quad \Omega,$$
$$X_1 = 128 \cdot 3 \text{ »}$$
$$X_2 = 407 \cdot 5 \text{ »}$$

Der Widerstand X_2 hat sich somit in gleicher Weise wie vorhin verändert. Es ist möglich, dass der Widerstand an den Stellen, wo das Pulver dem größten Drucke unterworfen ist, von der Temperatur am meisten beeinflusst wird.

Die Länge der Säule betrug 1·1 *cm*, ihr Querschnitt 0·02 cm^2, die Masse des Pulvers 0·1832 *g*. Daraus ergibt sich ein specifisches Gewicht von 6·2. Der specifische Widerstand $10^4 . \sigma =$ $= 64.000\ \Omega$ ist um ein Drittel größer als der des gereinigten Rußes, welcher zu 40.000 Ω ermittelt wurde.

Bleisuperoxydmangansuperoxyd ($PbO_2 . 4\, MnO_2$). Diese Verbindung wurde nach Angabe von Gibbs[1] hergestellt, indem in kochende Lösung von überschüssigem $Mn(NO_3)_2$ Staub von Bleisuperoxyd eingestreut und durch längere Zeit umgerührt wurde. Das als Niederschlag erhaltene Pulver ist dunkler als seine beiden Componenten und enthält einige dunkelblaue Körnchen.

Die Widerstandsmessungen wurden mit Gleichstrom von 2 Volt angestellt. Als Vergleichswiderstand in der Brücke befanden sich 100 Ω. Bei Zimmertemperatur ergaben sich für

$$W = 35\cdot 9\ \Omega,$$
$$X_1 = 129\cdot 2\ »$$
$$X_2 = 8\cdot 0\ »$$

In der Kältemischung:

$$W = 31\cdot 1\ \Omega,$$
$$X_1 = 143\cdot 2\ »$$
$$X_2 = 8\cdot 7\ »$$

und abermals bei Zimmertemperatur:

$$W = 36\cdot 2\ \Omega,$$
$$X_1 = 140\cdot 0\ »$$
$$X_2 = 9\cdot 7\ »$$

Ganz ähnlich fielen die Ergebnisse bei Wiederholung des Versuches aus. Da der Querschnitt der Superoxydsäule gleich-

[1] Gibbs, vergl. Dammer, Handbuch der anorgan. Chemie. II. 2; S. 839.

falls $0 \cdot 02\, cm^2$ betrug, so ergibt sich für den specifischen Widerstand und seine Abhängigkeit von der Temperatur die Beziehung:

$$10^4 \sigma_t = 7.000[1 + 0 \cdot 0014\, t].$$

In Bezug auf die Größe des Widerstandes nähert sich diese Substanz mehr dem Mangansuperoxyd, in Bezug auf den Temperaturcoefficienten verhält sie sich wie die Bleisuperoxydcomponente.

Silberperoxyd (Ag_2O_2) wurde durch Elektrolyse von Silbernitrat zwischen Silberelektroden herzustellen versucht. Da sich das gefällte Peroxyd in Säure wieder aufzulösen scheint, so wurde die Flüssigkeit um die Anode mit Ammoniak versetzt; ferner stand die Kathode in einem Thoncylinder, der verdünnte Salpetersäure enthielt. Diese Maßregel musste getroffen werden, um die Entstehung eines Silberbaumes zu vermeiden. Der erhaltene Niederschlag wurde gewaschen und bei 30° getrocknet. Er hatte in der Flüssigkeit schwarzes Ansehen, im trockenen Zustande war er braun mit einem Stich ins Grüne. Das Oxyd war nicht pulverförmig, sondern bestand aus voluminösen, zäh zusammenhängenden Schüppchen.

Im Hartgummicylinder gepresst, zählte der Widerstand nach hunderttausenden Ohm. Als das Oxyd wieder aus dem Cylinder herausgedreht worden war, hatte es Pulverform und war wieder schwarz geworden. Ob man es bei dem Versuche mit der Verbindung Ag_2O_2 zu thun hatte, ist recht zweifelhaft. Wird doch ihr Vorkommen überhaupt von einer Reihe von Chemikern in Frage gestellt.[1]

Manganheptoxyd (Mn_2O_7). Diese an Sauerstoff reichste Verbindung entsteht, wenn man fein gepulvertes $KMnO_4$ mit concentrierter Schwefelsäure zusammenreibt. Sie besteht aus Tröpfchen, die durch ihren Glanz an Quecksilber erinnnern. Die übrige Flüssigkeit ist zunächst grün, wird aber beim Stehen an der Luft durch Aufnahme von Wasser bald violett. Die metallisch glänzenden Tröpfchen werden von der umgebenden

---

[1] So hält z. B. O. Sulc (Zeitschr. d. anorg. Chemie 12, S. 180; 1896) die bei der Elektrolyse von $AgNO_3$ bisher als das Superoxyd angesehene Verbindung für das Silbersalz der Übersalpetersäure.

Flüssigkeit nicht benetzt. Sie wurden in einem Gläschen gesammelt und in eine Kältemischung gestellt, da sie sich bei gewöhnlicher Temperatur durch Ausstoßen von violettem Nebel, der nach Franke aus MnO_3 besteht, rasch verflüchtigen.

Die in die Substanz getauchten Platinelektroden überzogen sich sofort mit einer nicht leitenden braunen Kruste; waren sie jedoch auf elektrolytischem Wege mit Bleisuperoxyd überdeckt, dann konnte ein Leitvermögen etwa von der Ordnung 5—10procentiger Schwefelsäure nachgewiesen werden.

Was nun die Oxyde im engeren Sinne anbelangt, so muss bemerkt werden, dass die Ausbeute recht gering war. Wie bereits erwähnt wurde, kommen nur dunkelfarbige Verbindungen in Betracht, da unter ihnen allein wenigstens bei normaler Temperatur Elektricitätsleiter zu finden sind.

Kupferoxyd (CuO), Eisenoxydoxydul (Fe_3O_4), Nickeloxyd (Ni_2O_3), Kobaltoxyd (Co_2O_3), Uranoxyd (U_3O_8), Molybdänoxyd (Mo_2O_3), endlich die niedrigeren Oxydationsstufen von Mangan (MnO und Mn_2O_3), sowie die des Bleis erwiesen sich sämmtlich als Nichtleiter. Die Prüfung wurde in der Weise vorgenommen, dass die in die Hartgummibehälter gepressten Pulver in einen Stromkreis geschaltet wurden, in der sich eine Stromquelle bis 70 Volt und ein empfindliches Messinstrument befanden.

Mit dem Kupferoxyd wurde noch ein anderer Versuch angestellt. Das Pulver wurde in der Gebläseflamme (Leuchtgas und Sauerstoff) zu einer Perle geschmolzen, die von schwarzgrauer Farbe war. Diese Perle zeigte, in den Stromkreis von 70 Volt gebracht, gute Leitung. Nun wurde sie in einem Mörser zerstoßen und in der Mühle zu feinem Pulver zerrieben. Das Product war kupferroth. Ein Stift ließ sich aus dem Pulver zwar nicht herstellen, allein man konnte es theilweise in einem Bröckel vereinigen. Bei gewöhnlicher Temperatur zeigte sich nun wieder die Abwesenheit von Leitung; diese trat erst ein, als der Körper auf Rothglut gebracht war; sie wurde dann vom Strom unterhalten. Möglicherweise tritt bei hoher Temperatur die Umwandlung einer nichtleitenden Modification in eine

leitende ein, die infolge der Hysteresis nach der Abkühlung bestehen bleibt. Durch den gewaltsamen Eingriff wird aber dem labilen oder metastabilen Gleichgewicht ein Ende bereitet. Ich hätte es vermieden, diese Hypothese aufzustellen,[1] wenn nicht Versuche, die im folgenden zur Sprache kommen werden, gezeigt hätten, dass auch andere Metallverbindungen das Bestreben haben, bei höherer Temperatur aus einem Gebiete schlechterer Leitfähigkeit in ein solches besserer überzutreten.

Kadmiumoxyd (CdO), ein braunschwarzes Pulver, war aus dem Nitrat dargestellt worden. Die Leitfähigkeit zeichnet sich durch große Beständigkeit aus. Der Widerstand W veränderte sich nämlich innerhalb 14 Tagen nach dem Pressen nur in den Grenzen 1·385 und 1·400 Ω, also um ungefähr ein Procent. Druckvergrößerungen durch Anziehen der Pressschraube hatten keinen Einfluss.

Weder in der festen Kohlensäure, noch in flüssiger Luft zeigt sich eine Veränderung des Widerstandes. Die Gleichung für den specifischen Widerstand ist:

$$10^4 . \sigma_t = 280\ \Omega.$$

Ein Stäbchen aus dem Material von 2·3 *cm* Länge und 0·22 cm^2 Querschnitt hatte einen Widerstand von 1·2 Ω, der zwischen —180° und +200° unverändert blieb. Über diese letztgenannte Temperatur hinaus fiel der Widerstand rasch, so dass er bei 280° nur mehr 0·47, bei 300° 0·26, bei 400° 0·11 Ω betrug. Kühlt man nun den Stift auf Zimmertemperatur ab, so findet sich nur mehr ein Widerstand von 0·060 Ω vor. Dieser verändert sich mit der Temperatur linear nach der Gleichung $10^4\sigma = 55.[1+0\cdot001\,t]$, wie aus der nachstehenden Tabelle hervorgeht:

$t°$	w_t (beob.)	w_t (ber.)	$t°$	w_t (beob.)	w_t (ber.)
22	0·0600	0·0590	300	0·0745	0·0750
100	0·0628	0·0635	350	0·0773	0·0779

[1] Es müsste nämlich erst nachgewiesen werden, dass beim Glühen keine oberflächliche Reduction des Kupferoxydes eintritt, wodurch die Perle eine leitende Schale erhielte.

$t°$	w_t (beob.)	w_t (ber.)	$t°$	w_t (beob.)	w_t (ber.)
200	0·0703	0·0692	400	0·0815	0·0808
240	0·0721	0·0715	450	0·0848	0·0837
270	0·0733	0·0733	22	0·0575	0·0590

Da das Kadmiumoxyd den Chemikern als ein auch bei sehr hoher Temperatur beständiger Körper gilt — erst bei heller Gelbglut entwickelt es Dämpfe —, so dürfte wohl der Schluss gestattet sein, dass hier eine Umwandlung aus einer Modification, die schlechter leitet und deren Leitvermögen von der Temperatur unabhängig ist, in eine andere von besserer Leitfähigkeit und »metallischem« Temperaturcoefficienten stattgefunden hat. Der Umwandlungspunkt wird wohl nicht genau zu bestimmen sein. Anzunehmen ist, dass er in der Nähe von 200° liegt.

Ein von allen übrigen Verbindungen abweichendes Verhalten zeigt Quecksilberoxydul (Hg_2O), gleichfalls ein schwarzes Pulver. Es scheint zum Theile beim Pressen Sauerstoff abzugeben, da am trichterförmigen Rande des Hartgummicylinders winzige Kügelchen von Quecksilber sichtbar werden. Übrigens soll dem Hg_2O schon von Haus aus HgO und Hg beigemengt sein.[1]

Den Strom lieferte ein Accumulator, der Vergleichswiderstand betrug 10 Ω, der Widerstand W wurde diesmal durch directe Einschaltung der mittleren (parasitischen) Elektroden in den Brückenzweig ermittelt. Unmittelbar nach der Zusammenstellung ergab sich für W 9·23 Ω, ein Wert, der sich gut erhielt. In der Kältemischung (—80°) fiel der Widerstand auf 2·25 Ω herab, also auf den vierten Theil des Wertes, der bei normaler Temperatur gefunden worden war. Dabei konnte beobachtet werden, dass die bedeutende Widerstandsänderung nicht allmählich, sondern mit einem Ruck erfolgte. Um sich über die Erscheinung ein Urtheil bilden zu können, wurden in regelmäßigen Zwischenräumen Messungen vorgenommen von dem Zeitpunkte (0 Min.) an, wo entweder die Presse aus dem Vacuumbecher entfernt oder in ihn versenkt worden war. Es ergab sich:

---

[1] Dammer, Handb. der anorg. Chemie, II, 2, S. 839.

0 Min.	(die Presse aus der Kältemischung entfernt)	2·31 Ω,
4 »		2·58 »
6 »		3·16 »
7 »		5·21 »
8 »		9·68 »
13 »		9·72 »
20 »		9·86 »
25 »		9·90 »
40 »		9·94 »

ferner:

0 Min.	(die Presse in die Kältemischung versenkt)	9·94 Ω,
1 »		9·94 »
2 »		9·49 »
3 »		4·41 »
4 »		2·72 »
5 »		2·58 »
6 »		2·51 »
25 »		2·47 »

Endlich:

0 Min.	(die Presse aus der Kältemischung entfernt)	2·47 Ω,
1 »		2·58 »
2 »		2·59 »
3 »		2·69 »
4 »		2·83 »
5 »		3·05 »
6 »		4·24 »
7 »		10·00 »
8 »		10·00 »
10 »		10·08 »

C. L. Weber[1] hat gefunden, dass festes Quecksilber das vierfache Leitvermögen von flüssigem besitzt. Hält man sich an diese Thatsache, so ist es nicht schwer, die sprungweise Änderung im Leitvermögen der »Verbindung« zu erklären. Die Leitung wird eben nur von den Quecksilberäderchen übernommen, die die Säule der Länge nach durchsetzen. Bei der Temperatur, bei der das Metall aus dem einen Aggregatzustand in den anderen übergeht, findet der Widerstandssprung statt.

[1] C. L. Weber, Wied. Ann., 25 (1885). Auch Cailletet und Bouty, Comptes rendus, 100, 1188 (1888). — Grumnach, Wied. Ann., 37, 514 (1889) fand die Widerstandsänderung beim Schmelzen geringer.

Die Temperatur, bei der der Übergang eintritt, wird trotz des großen Druckes, unter dem das Quecksilber steht, nicht sehr weit entfernt von seinem Schmelzpunkte liegen.

2. Das Verhalten von Metallsulfiden.

Unter den dunkelfarbigen Pulvern sind Kobaltsulfid (CoS), und Antimonglanz (Sb_2S_3) bei gewöhnlicher Temperatur Nichtleiter der Elektricität. Als schlechte Leiter erwiesen sich Nickelsulfid (NiS), Schwefeleisen (FeS) und das amorphe Bleisulfid (PbS). Gut leiteten unter allen Verhältnissen die beiden Schwefelkupfer (Cu_2S und CuS) und Molybdänglanz (MoS_2), während Quecksilbersulfid (HgS) in seiner schwarzen Modification, Bleiglanz (PbS) und Silbersulfid (Ag_2S), sowohl als Glanz, als auch in seinem amorphen Zustande, schon bei verhältnismäßig niedriger Temperatur gutes Leitvermögen erhielten.

Aus den beiden Kupfersulfiden wurden Stäbchen von 0·22 *cm*² Querschnitt und 1·5 bis 2·5 *cm* Länge hergestellt. Das Stäbchen von der Zusammensetzung CuS zeichnet sich durch sein metallisch glänzendes Dunkelblau aus. Es leitete um ein Mehrfaches besser als ein gleiches Stäbchen aus Cu_2S, dessen Oberfläche metallisch grauen Glanz besaß. Die Messungen wurden mit der in Fig. 3 dargestellten Vorrichtung ausgeführt.

Cu_2S zeigte zwischen den im Abstande von 1 *cm* befindlichen Platinschneiden zunächst einen Widerstand von 0·0577 Ω bei 15°. Bei der Erwärmung blieb der Widerstand vorerst unverändert bis zu einer Temperatur von 90°, um darüber hinaus langsam abzunehmen. So ergab er sich bei 105° zu 0·0570, bei 200° zu 0·0534 Ω. Kühlt man den Körper wieder auf Zimmertemperatur ab, dann erhält man einen etwas kleineren Widerstand als vor dem Erwärmen. Von nun an ist der Temperaturcoefficient positiv geworden, wie aus folgenden Zahlen hervorgeht. Es fand sich bei

245° ... 0·0555 Ω
15° ... 0·0503 »
245° ... 0·0555 »

Daraus ergibt sich unter Voraussetzung linearer Veränderung mit der Temperatur für den specifischen Widerstand

$$10^4 \sigma = 110[1 + 0 \cdot 0005\, t].$$

Es scheint sich ein ganz ähnlicher Vorgang abzuspielen wie bei Kadmiumoxyd. Gestaltet sich schon bei dieser Verbindung die Untersuchung der Abhängigkeit des Leitvermögens von der Temperatur recht heikel, so gilt dies in erhöhtem Grade von CuS. Ein Stäbchen hatte zwischen den zwei im Abstande von 1 *cm* befindlichen Platinschneiden 0·0190 Ω bei 15°, 0·0143 Ω bei 250°. Wieder auf Zimmertemperatur gebracht, zeigte es nur mehr 0·0023 Ω. Aus diesem letzten Werte würde sich ein specifischer Widerstand

$$10^4 \sigma = 5$$

ergeben. Dem Cuprisulfid wäre demnach in Hinsicht auf die Güte seiner Leitfähigkeit unter den Metallverbindungen die zweite Stelle einzuräumen.

Molybdänglanz (MoS_2) hatte die Form von dünnen, glimmerartig spaltbaren Plättchen, die sich etwas fettig anfühlten. Die metallisch grauschwarz glänzenden Plättchen unterhielten die Stromleitung. Genauer wurde das Verhalten nicht untersucht.

Eine umso größere Aufmerksamkeit wurde dagegen dem Bleiglanz (PbS) zutheil. Das Mineral war in schönen Stücken aus Freiberg i. S. bezogen worden. Die ersten Versuche mit dem geschlämmten Pulver wurden mit Hilfe des Hartgummibehälters angestellt. Zu den Messungen dienten Wechselstrom und Telephonbrücke, als Vergleichswiderstand 500 Ω. Ich theile im nachstehenden das Versuchsprotokoll mit.

		W	X_1	X_2
30./VI. 1900	10^h30^m	411·6 Ω	58·8 Ω	51·2 Ω
	11 30	413·2	56·8	50·0

Behälter in die Kältemischung (—80°) getaucht: 11^h40^m.

	W	X_1	X_2
11^h55^m	314·5 Ω	222·7 Ω	141·1 Ω
0 15	283·0	214·0	132·6
0 35	261·4	229·3	127·6

Aus der Kältemischung entfernt: $0^h 40^m$.

		W	x_1	x_2
	$4^h 45^m$	554·5 Ω	131·8 Ω	61·1 Ω
1./VII. 1900	12	462·6	90·4	53·0
2./VII. 1900	12	433·3	79·7	51·0
	4	434·0	79·8	51·2

Die Presschraube angezogen ($4^h 20^m$). Der Widerstand ist so groß, dass nur $^1/_8$-Umdrehung des Schraubenkopfes möglich war.

	$4^h 25^m$	408·4 Ω	72·6 Ω	59·4 Ω
	5 40	406·4	71·8	51·7

Behälter in die Kältemischung getaucht: $5^h 50^m$.

	6^h	345·1 Ω	70·3 Ω	79·5 Ω
	6 10^m	203·4	176·0	87·3

Aus der Kältemischung entfernt: $6^h 20^m$.

	$6^h 55^m$	444·7 Ω	137·9 Ω	55·1 Ω
	7 10	488·2	190·2	51·6
	8 10	502·5	200·5	52·0
3./VII. 1900	10 30	441·9	132·9	51·4

Die Schraube ließ sich etwas anziehen:

	$11^h 05^m$	431·1 Ω	124·9 Ω	52·0 Ω

Die Ergebnisse lassen sich in folgende Worte zusammenfassen: Unter dem großen Drucke nimmt der Widerstand W ($10^4 \sigma$ etwa 90.000 Ω) in der Kältemischung ab. Wieder auf normale Temperatur gebracht, steigt er zunächst über seinen Ausgangswert hinaus, um dann allmählich wieder auf ihn zurückzukehren. Es scheint sich somit der Körper in Bezug auf sein Leitvermögen in einem Schwingungszustande zu befinden. Ein solcher wird sich später unter günstiger gewählten Bedingungen viel schärfer nachweisen lassen.

Neben Druck und Temperatur ist also auch die Zeit zu berücksichtigen. Damit gestaltet sich das Problem zu einem sehr verwickelten. Vorversuche hatten ergeben, dass der Wider-

stand bei höherer Temperatur ganz hervorragend abnimmt. Es schien also ein Minimum des Leitvermögens zu bestehen. Möglicherweise war im Bleiglanz der gesuchte gemischtclassige, d. h. theils metallisch, theils elektrolytisch leitende Körper gefunden. Bei niedriger Temperatur tritt wahrscheinlich die metallische Componente in den Vordergrund, die elektrolytische zurück, bei hoher Temperatur müsste das Umgekehrte geschehen. Dazwischen mochten ja beide um die Vorherrschaft kämpfen. Eine Vorfrage war vorher zu erledigen. Wie verhält es sich mit der galvanischen Polarisation?

Bei Zimmertemperatur gab das Telephon, bekanntlich der Herold der Polarisation, vollkommen scharfe Minima. Unreinheiten im Ton traten nur bei den durch die Kältemischung erzeugten Temperaturen auf. Die wurden wohl durch Contactfehler hervorgerufen.

Es möge nun ein Versuch beschrieben werden, der mit einem Krystall angestellt wurde, der zu einem Cylinderchen von 2·5 *cm* Länge und 0·149 cm^2 Querschnitt geschnitten und geschliffen worden war. Die Spaltflächen des Krystalls befanden sich parallel zur Grundfläche des Cylinders. Mit Hilfe der in Fig. 3 dargestellten Vorrichtung wurde die Untersuchung vorgenommen. Es traten wieder Wechselstrom und Telephon in Verwendung. Der Widerstand W betrug zunächst 147·5 Ω, der Ton verschwand nicht vollständig. Als specifischer Widerstand ($10^4\sigma$) ergibt sich daraus ein Wert von 206.000 Ω. Das Leitvermögen des Krystalles würde demnach weniger als die Hälfte des Leitvermögens des gepressten Pulvers betragen. Wenn man bedenkt, dass die Spaltflächen des Krystalls zahlreich und zum Theil sogar mit freiem Auge wahrnehmbar sind, so wird man über die Differenz nicht staunen, sondern sie dem großen Übergangswiderstande zwischen den einzelnen Flächen zuschreiben.

In der Kältemischung nahm der Widerstand W aber nicht ab, sondern er stieg ganz im Gegensatze zum Verhalten unter großem Druck auf 3000 Ω an; wieder auf Zimmertemperatur gebracht, betrug er zunächst 212, um nach längerer Zeit auf 202 Ω herabzusinken. Ähnlich verhielt sich die Widerstandsänderung, als der Krystall zum zweitenmale in die Kälte-

mischung versenkt wurde. Nur war eine weitere Vergrößerung des Widerstandes bei normaler Temperatur eingetreten (237 Ω), es zeigte sich aber wieder das Bestreben, allmählich auf kleinere Werte herabzusinken; so betrug der Widerstand eine Stunde später nur mehr 215 Ω. Für die Untersuchung bei höheren Temperaturen erwies sich das Mineral als unbrauchbar; wenig ober 100° zersprang es in Stücke.

Die Prüfung auf Polarisation geschah mit einem hydraulisch heiß gepressten Stift von 2·8 *cm* Länge und 0·5 cm^2 Querschnitt. Er befand sich in aufrechter Stellung im elektrisch zu heizenden Öfchen und war in einen Stromkreis geschaltet, der nebst einem Accumulator noch Rheostatenwiderstand und ein Weston-Voltmeter von 100 Ω Widerstand enthielt. Durch den Stift konnte ein Strom bis 1·5 Ampère geleitet werden, wenn das Voltmeter mit $^{100}/_{99}$ Ω parallel geschaltet wurde. Mit Hilfe eines Commutators ließ sich die Stromrichtung im Stifte umkehren. Eine Wippe ermöglichte es, den Stift sehr rasch aus dem ursprünglichen Stromkreis aus- und in einen zweiten Kreis einzuschalten, der nur ein Spiegelgalvanometer von 2952 Ω Widerstand enthielt. Ein Scalentheil des Instrumentes entsprach $3·54.10^{-8}$ Ampère. Die Schaltung war derartig getroffen, dass die Richtung eines thermoelektrischen Stromes im Galvanometer abhieng von der Stellung des Commutators, während die Richtung eines etwaigen Polarisationsstromes davon unabhängig blieb. Das Ergebnis war folgendes. Bei Zimmertemperatur betrug der Widerstand des Stiftes 34 Ω, das Galvanometer blieb vollkommen in Ruhe; bei 100° belief sich der Widerstand auf 10 Ω, das Galvanometer gab einen Ausschlag von 92 Scalentheilen sowohl in der einen, als in der entgegengesetzten Richtung.

Bei 190° besaß der Stift noch einen Widerstand von 2·0 Ω, und die Ausschläge am Galvanometer betrugen 322 Striche in der einen, 325 Striche in der anderen Richtung.

Die thermoelektromotorischen Kräfte der Erze sind bekanntlich groß.[1] Die aus einer starken Kupferlitze bestehende

[1] Schon Seebeck fand, dass Bleiglanz in der thermoelektrischen Spannungsreihe über Wismut steht. Vergl. A. Abt, Annalen der Physik, 2, 266 (1900).

Zuleitung zum oberen Ende des Stiftes ragte aus dem Deckel des Öfchens theilweise hervor; durch die Ableitung der Wärme konnte wohl eine geringe Temperaturdifferenz zwischen den beiden Enden des Stiftes entstehen und die Ausbildung einer thermoelektrischen Potentialdifferenz ermöglichen. Wesentlich ist hier, dass eine galvanische Polarisation nicht nachzuweisen war.

Die Abhängigkeit des Leitvermögens bei höheren Temperaturen wurde zuerst an einem kleinen cylindrischen Stift, dessen Länge 0·92 *cm*, dessen Querschnitt 0·138 cm^2 betrug, untersucht. Auf die galvanisch verkupferten Enden des Cylinderchens waren Platinbleche gepresst.

Der Widerstand betrug bei Zimmertemperatur zunächst 150 Ω, sank mit steigender Temperatur rasch bis auf 7·1 Ω bei 210°. Wurde nun der Stift im Ofen langsam gekühlt, dann stellte sich der Ausgangswiderstand nicht wieder her, sondern es blieb ein Widerstand bestehen, der kaum halb so groß war. Nach der zweiten Erwärmung auf 210° war der Widerstand bei wiederhergestellter Zimmertemperatur abermals kleiner geworden, und diese Erscheinung wiederholte sich noch einigemale, bis endlich ein stationärer Zustand eintrat. In der nachstehenden Tabelle ist die Widerstandsänderung ersichtlich gemacht.

Zahl der vorangegangenen Erwärmungen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Widerstand bei 20° in Ohm	150	73	42	38	33·3	33·0	33·2	32·8	33·0
Widerstand bei 210° in Ohm	7·1	5·7	5	4	2·9		2·7—2·8		

Der stationäre Zustand ist mithin nach der vierten Erwärmung eingetreten. Der Widerstand beträgt dann bei 20° nur mehr ein Fünftel des Ausgangswiderstandes; eine geringere procentuelle Änderung hat jedoch der Widerstand bei 210° erfahren; nach mehrfachen Erwärmungen beträgt er noch immer mehr als ein Drittel wie bei der ersten Erwärmung.

Der specifische Widerstand $10^4 \sigma$ war also durch die aufeinanderfolgenden Erwärmungen von seinem ursprünglichen Werte von 220.000 Ω auf 50.000 Ω bei Zimmertemperatur gesunken.

Dieses Verhalten ist typisch. Um die Beziehung des Leitvermögens zur Temperatur zu einer regelmäßigen zu gestalten, wurden die Stifte daher vorher »formiert«, d. h. mindestens viermal nacheinander auf 200° erwärmt und wieder gekühlt. Eine noch einfachere Methode der Formation bestand darin, die auf über 200° erwärmten Pulver in die heißen Formen zu pressen. Für die Ausführung dieser Versuche bin ich dem Charlottenburger Werk von Siemens & Halske zu Dank verpflichtet.

Die Widerstände waren nun in dem betreffenden Temperaturintervall zuverlässig. So zeigte ein hydraulisch heiß gepresster Stift, der mit Hoffmann'schen Zuleitungen versehen war, eine Länge von 2·8 *cm*, einen Querschnitt von 0·5 cm^2 und ein specifisches Gewicht 9 besaß, das im folgenden angegebene Verhalten zur Temperatur. Der Stift zeichnete sich, wie alle aus diesem Material gepressten Formen, durch auffallend schönen Glanz aus.

Obere Grenze der Temperatur:
170°.

	Ω		Ω
21°	**44·7**	110°	10·2
40°	31·2	120°	8·6
50°	25·8	130°	7·3
60°	21·7	140°	6·5
70°	18·7	160°	4·9
80°	16·2	170°	3·9
90°	13·5		
100°	12·0	**21°**	**44·7**

Obere Grenze der Temperatur:
200°.

	Ω		Ω
23°	**42·5**	130°	7·5
40°	31·0	140°	6·5
50°	26·0	150°	5·8
60°	21·5	160°	4·8
70°	18·7	170°	4·0
80°	16·0	180°	3·4
90°	13·2	190°	2·8
100°	12·0	200°	2·2
110°	10·2		
120°	8·6	**23°**	**42·2**

Wird die Temperaturgrenze von 200° wesentlich überschritten, dann erhält der Stift, wieder abgekühlt, besseres Leitvermögen, wie aus nachstehender Tabelle hervorgeht:

Obere Grenze der Temperatur:
250°.

	Ω		Ω
23°	**41·7**	180°	3·5
100°	12·2	190°	2·9
110°	10·2	200°	2·3
130°	8·0	210°	1·8
140°	6·8	220°	1·4
150°	6·0	240°	0·8
160°	5·0	250°	0·4
170°	4·0	**23°**	**35·0**

Dieses bessere Leitvermögen blieb nun bestehen, auch wenn der Stift vorübergehend in die Kohlensäure-Kältemischung getaucht wurde. In der Kältemischung nahm er einen Widerstand von 484 Ω an. Auf Zimmertemperatur gebracht, sank er wieder auf 35 Ω herab. Auch in weiteren zehn Tagen unterlag er keinerlei bemerkenswerten Veränderung.

Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn man die Temperatursteigerung bis 350° oder 450° vornimmt. Oberhalb 250° nimmt der Widerstand nur mehr äußerst langsam ab und von etwa 350° an hat er die Tendenz, wieder anzusteigen. Wird der Stift dann wieder auf Zimmertemperatur gebracht, so ist der Widerstand viel größer geworden (100 Ω). Bleibt er mehrere Stunden sich selbst überlassen, so wächst sein Widerstand noch mehr an, erreicht ein Maximum, um dann langsam, aber beharrlich wieder abzunehmen. So stieg in dem angeführten Beispiele der Widerstand in zwei Stunden auf 109 Ω, in sechseinhalb Stunden auf 117·5 Ω. Am nächsten Tage betrug er 116, am darauf folgenden 114 Ω. Der Bleiglanz befindet sich also wieder in einem Schwingungszustande in Hinsicht auf sein Leitvermögen.

In diesem Zustande sind Temperaturerniedrigungen von größtem Einflusse; sie bewirken, dass das System aus seiner diesmal unstabilen Lage rascher in die stabile zurückkehrt.

Es stieg der Widerstand von 114 bei 20° auf 1500 Ω bei —80°, um wieder, auf 20° gebracht, bei 63·7 Ω wenigstens vorübergehend zur Ruhe zu kommen. Zum zweitenmale in die Kältemischung gebracht, stieg der Widerstand nur mehr auf 960 Ω an, um bei Zimmertemperatur allmählich auf 52 Ω herabzusinken. Ein drittesmal erhielt man bei —80° noch 600 Ω und endlich bei Zimmertemperatur (22°) **43·1** Ω. Das System befindet sich nunmehr im stabilen Gleichgewichte. Die Übereinstimmung mit dem Ausgangswerte 44·7 Ω bei 21° ist eine vorzügliche.

Einen wesentlichen Einfluss auf diese merkwürdige Erscheinung übt die Dauer der Erwärmung aus. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die Schwingung, in dem sich das Leitvermögen befindet, umso rascher abläuft, je kürzer die Erwärmung gedauert hat. Zur raschen vorübergehenden Erwärmung eignet sich ganz besonders die Stromwärme. Man braucht dazu nur den Stift an eine entsprechende Spannung anzulegen, den Strom bis zu einer gewissen Stärke ansteigen zu lassen, ihn zu unterbrechen und nun die Veränderung des Widerstandes während der Abkühlung mit Brückenwalze und Telephon messend zu verfolgen.

Ein Stift (Länge 1·7 *cm*, Querschnitt 0·22 cm^2), der bereits formiert war und den Widerstand von 73 Ω besaß, wurde an eine Spannung von 13 Volt angelegt. Nach 14 Secunden betrug die Stromstärke 1 Ampère, nach 22 Secunden 2 Ampère. Der Strom wurde nun geöffnet (0 Min.) und der Widerstand des Stiftes von Minute zu Minute gemessen. Es ergab sich:

	Ω		Ω
1 Min.	22·2	10 Min.	85·8
2 »	52·0	15 »	85·0
3 »	72·4	20 »	81·5
4 »	81·1	25 »	78·6
5 »	84·1	30 »	77·3
6 »	85·5	35 »	75·7
7 »	85·8	40 »	74·2

Die rasche Erhitzung gestattet, wie man sofort sieht, einen klaren Einblick in den Verlauf der Erscheinung. Drei Minuten

nach Unterbrechung des Stromes war bereits der Ausgangswiderstand wieder hergestellt. Der Stift war zu dieser Zeit noch ziemlich warm. Nach sieben Minuten erreichte der Widerstand einen Maximalwert von 85·8 Ω, um etwa nach drei Viertelstunden auf seinen ursprünglichen Wert zurückzukehren.

Derselbe Stift wurde nun, um die Erwärmung zu verlangsamen, an eine geringere Spannung, und zwar von 10·2 Volt gelegt. Die Stromstärke war nach 30 Secunden auf 0·8 Ampère, nach 40 Secunden auf 1·6 Ampère, nach 50 endlich wieder auf 2 Ampère angestiegen. Nach Unterbrechung des Stromes (0 Min.) ergab sich diesmal:

	Ω		Ω
3 Min....	83·1	15 Min....	102·6
5 » ...	98·8	20 » ...	99·2
7 » ...	103·7	35 » ...	92·3
8 » ...	104·1	50 » ...	88·3
9 » ...	104·1	60 » ...	87·2
10 » ...	104·1	80 » ...	84·0

Die Erscheinung geht dem Sinne nach in gleicher Weise vor sich wie bei der rascheren Erwärmung, der Maximalwert des Widerstandes liegt aber beträchtlich höher (bei 104·1 Ω) und der Schwingungsverlauf ist ein wesentlich verzögerter. Nach anderthalb Stunden war das Gleichgewicht noch nicht hergestellt.

Innerhalb der Temperaturgrenzen von 30° und 200° lässt sich, wie bereits mitgetheilt,[1] die Leitfähigkeit (K) eines formierten Stiftes recht gut durch die Formel

$$K = a \,.\, T^{\alpha},$$

in der T die absolute Temperatur, a und α Constante darstellen, zum Ausdruck bringen. Fig. 4 stellt die entsprechende Curve dar; die Leitfähigkeit ist auf einen Körper bezogen, dessen Würfel von 1 *cm* Seite den Widerstand 1 Ω besitzt. Die Constante α war zu 6·10 bestimmt worden. Die Mittelpunkte

[1] Streintz, Anz. der kaiserl. Akad. der Wiss., Nr. 17 (1901).

der Kreuzchen geben die Abweichungen der beobachteten von den aus der Gleichung berechneten Werten an.

Wird Bleiglanz in flüssige Luft gebracht, dann steigt der Widerstand zu sehr hohen Werten an. So erfuhr ein formierter Stift von etwa 2 *cm* Länge und 0·5 *cm*² Querschnitt, der bei 22° einen Widerstand von 28 Ω hatte, eine Vergrößerung des Widerstandes auf ungefähr 67.000 Ω.

Wenn man endlich Bleiglanz unter Luftabschluss schmelzt, dann verhalten sich die aus der krystallinischen und blasigen

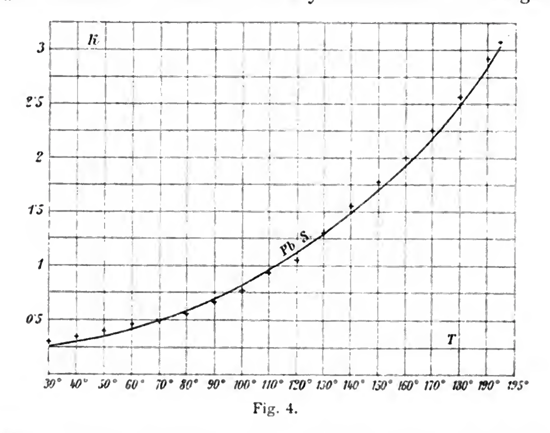


Fig. 4.

Masse gesägten Stücke schon bei gewöhnlicher Temperatur als sehr gute Leiter der Elektricität.

Es entsteht nun die Aufgabe, nach einer Erklärung für die eben beschriebenen Erscheinungen zu forschen. Nach den Erfahrungen, die an anderen Metallverbindungen, insbesondere am Kadmiumoxyd, gesammelt wurden, ist es wahrscheinlich, dass sich der Bleiglanz, ähnlich wie sein Bestandtheil, der Schwefel, in verschiedenen Modificationen befinde. Wie diese Modificationen zustande kommen, lässt sich natürlich auf Grund des bisherigen Beobachtungsmateriales nicht entscheiden. Wahrscheinlich machen es dagegen die Versuche, dass der Bleiglanz sich bei niederer Temperatur in einer

Phase schlechter Leitfähigkeit, bei höheren Temperaturen bis zu 300° in einer Phase guter Leitfähigkeit befindet. Die erste Phase scheint die stabile zu sein, die zweite wird man als metastabile bezeichnen müssen, da sie infolge der großen Hysteresis in der dichten Masse den Charakter großer Beständigkeit besitzt. Lang andauernde oder wiederholte Erwärmungen auf Temperaturen, die 300° nicht überschreiten dürfen, nöthigen eine stets steigende Zahl von Molecülgruppen, sich an der Umwandlung zu betheiligen. Je größer die Anzahl der umwandelten Molecüle in der Volumeinheit ist, desto besser ist das Leitvermögen des Systems.

Bei Temperaturen etwa von 350° an tritt der Bleiglanz wieder in eine neue Phase von geringerer Leitfähigkeit, die man jedoch als eine labile wird ansprechen müssen, da das Bestreben, in das vorhergegangene Gleichgewicht, in dem die stabile und metastabile Phase coexistieren, zurückzukehren, bei entsprechenden Temperaturerniedrigungen sehr deutlich zum Ausdruck kommt. Auch der bemerkenswerte Schwingungszustand, in den das System geräth, spricht dafür, dass die dritte Phase mehr labiler Natur ist.

Aufzuklären bliebe noch, warum sich der Bleiglanz, wenn er unter sehr hohem Drucke steht, bei niederen Temperaturen in Bezug auf seine Leitfähigkeit gerade entgegengesetzt verhält, als wenn er von dem Drucke befreit ist. Das vorliegende Beobachtungsmaterial ist leider viel zu dürftig, um einen halbwegs sicheren Schluss zu gestatten. Es möge aber doch der Vermuthung Raum gegeben werden, dass das System unter den geänderten Versuchsbedingungen in eine neue, vierte Phase getreten ist.

Messungen der specifischen Wärme und des Volumens bei verschiedenen Temperaturen können wichtige Beiträge zur Aufhellung der Vorgänge liefern.

Quecksilbersulfid (HgS) in seiner schwarzen Modification zeigt ein ähnliches Wachsthum der Leitfähigkeit mit der Temperatur wie der Bleiglanz. Ein Stift aus diesem Material von 1·7 *cm* Länge und 0·22 cm^2 Querschnitt zeigte bei guter Festigkeit schwärzlichen Metallglanz. Die Veränderung des Widerstandes mit der Temperatur war die folgende:

	W in Ohm
16°.........	41·0
30°.........	38·9
40°.........	37·9
50°.........	35·1
60°.........	32·3
70°.........	17·6
80°.........	15·3
90°.........	12·0
100°.........	11·1

Die Telephonminima waren schlecht, die Bestimmungen sind mithin recht ungenau. Oberhalb 100° waren fortwährende Stromschwankungen eingetreten, der Widerstand schien wieder zuzunehmen. Bei 120° fanden sich ungefähr 15 Ω, bei 140° etwa 25 Ω vor. Als bei etwa 200° der Deckel des Öfchens, an dem der Stift hieng, gehoben wurde, zeigte es sich, dass die Verbindung mit blauer Flamme brannte! Vielleicht könnte man die Änderung der Leitfähigkeit besser beobachten, wenn man den Stift unter Luftabschluss untersuchen würde.

Die merkwürdigste Verbindung ist unstreitig der Silberglanz (Ag_2S). Sein Verhalten wird durch den physikalischen Zustand nicht beeinflusst. Ob das als Niederschlag gewonnene amorphe Pulver, ob das durch Zerreibung eines Krystalles entstandene krystallinische Pulver in Stiftform gepresst wurde, ob endlich die Masse unter Luftabschluss geschmolzen und in Drahtform gebracht wurde, stets zeigte sich dieselbe Abhängigkeit des Leitvermögens von der Temperatur. Und die war eine geradezu märchenhafte. Vor fünfzig Jahren hat sich Hittorf[1] mit dem Leitvermögen von Stäben aus Silberglanz beschäftigt und auf die enorme Veränderlichkeit mit der Temperatur aufmerksam gemacht. Hittorf sprach die Vermuthung aus, dass es sich dabei um elektrolytische Leitung handelt, da bei höheren Temperaturen das Silber in Form von einzelnen Haaren in der Nähe des negativen Poles ausgeschieden werde. Vor Hittorf untersuchte bereits Faraday[2] das Schwefelsilber und bezeich-

[1] Hittorf, Pogg. Ann., 84, S. 20 ff. (1851).

[2] Faraday, Pogg. Ann., 31, S. 241 ff. (1834).

nete die Steigerung der Leitungsfähigkeit dieser Substanz durch die Wärme als einen »außerordentlichen Fall, der im directen Widerspruch steht mit dem Einfluss der Wärme auf metallische Körper, wie er von Humphry Davy beschrieben worden ist« (§. 432 und §. 433). »Das heiße Schwefelsilber leitete stark genug, um, wie ein Metall, helle Funken mit Kohle u. s. w. zu geben (§. 437). Es gibt meines Wissens außer Schwefelsilber keinen anderen Körper, welcher, so lange er heiß ist, hinsichtlich seiner Leitungsfähigkeit für Elektricität von niederer Spannung mit den Metallen verglichen werden kann und, ganz unähnlich ihnen, diese Fähigkeit beim Erkalten verliert, während sie bei den Metallen im Gegentheil zunimmt. Wahrscheinlich würde man jedoch noch mehrere dergleichen finden, wenn man danach suchte« (§. 439).

Mit Recht spricht Hittorf seine Verwunderung darüber aus, dass, »während sonst kein Punkt, der in jenen für den Galvanismus so wichtigen Abhandlungen angeregt wird, unerörtert geblieben ist, dieser Gegenstand bis jetzt keine weitere Beachtung gefunden hat«.

Und auch nach dem Erscheinen der Hittorf'schen Untersuchung ist es diesem Gegenstande wieder so ergangen; denn die zwei Physiker, die sich damit beschäftigt haben, Silvanus Thompson und Shelford Bidwell, haben nach einer Bemerkung von G. Wiedemann[1] nur das Ergebnis von Hittorf »nach 34 Jahren nochmals mitgetheilt«.[1]

Die aus Schwefelsilber gepressten Stifte zeichnen sich gleichfalls durch schönen, etwas dunklen Metallglanz aus. In ihrem Verhalten zur Temperatur zeigt die Verbindung manche Ähnlichkeit mit dem Bleiglanz. Wiederholte Erwärmungen und Abkühlungen haben ein Sinken des Widerstandes bei normaler Temperatur zur Folge. Ein Stift von 2 *cm* Länge, 0·15 cm^2 Querschnitt und 5·3 specifischem Gewicht besaß unmittelbar nach dem Pressen einen Widerstand von 54.500 Ω bei Zimmertemperatur. Nach lange andauernder Erwärmung auf 220° betrug der Widerstand noch 27.600 Ω, nach vielen Erhitzungen sank er allmählich von 21.700 bis auf 12.700 Ω herab. Die

[1] G. Wiedemann, Elektricität, I, S. 548 (1893).

außerordentliche Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur macht die Bestimmungen unsicher, da die geringste im Körper entwickelte Stromwärme den Widerstand bereits bedeutend herabsetzt. Man darf also nur sehr schwache Ströme in Anwendung bringen.

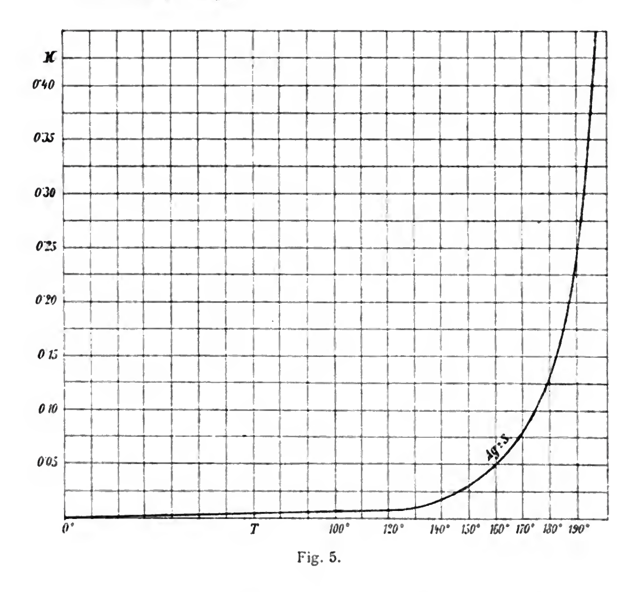


Fig. 5.

In Fig. 5 ist der Zusammenhang zwischen Temperatur und Leitfähigkeit durch eine Curve dargestellt; sie erinnert durch ihren äußerst steilen Verlauf an die Zunahme der Reactionsgeschwindigkeit mit der Temperatur.

Bei 100° zeigte der Stift einen Widerstand von 3000 bis 1000 Ω, bei 150° einen solchen von 400 bis 150 Ω, je nachdem er zum ersten- oder zweitenmale erwärmt wurde. Bei 220° betrug der Widerstand nur noch 1 bis 0·2 Ω, um von 230° aufwärts kaum mehr nachweisbar zu sein!

Legt man einen Ag_2S-Stift an eine entsprechende Spannung, so zeigt ein in den Stromkreis geschaltetes Ampèremeter zunächst nur einen äußerst schwachen Strom an. Trotzdem genügt die anfänglich geringe Stromwärme, um den Stift allmählich auf höhere Temperatur zu bringen. Der Strom steigt langsam an bis zu einer gewissen Grenze, über die hinaus plötzlich eine so ausgezeichnete Leitfähigkeit entsteht, dass der Effect im Messinstrumente ganz derselbe ist wie bei Kurzschluss. Leitet man durch einen dauernd auf 220° gehaltenen Stift Gleichstrom von 1 Ampère mehrere Stunden lang, so kann man keine Zersetzungsproducte nachweisen. Der Stift bleibt völlig unverändert. Wird er wieder abgekühlt, so begibt er sich, vorausgesetzt, dass er vorher schon einigen Erwärmungen ausgesetzt war, auf einen entsprechenden Widerstand. Nach dem Faraday'schen Gesetze hätte die gesammte Menge des im Stifte enthaltenen Silbers längst ausgeschieden sein müssen, wäre die Stromleitung auf elektrolytischem Wege zustande gekommen. Und doch treten im Silberglanz Kräfte auf, die eine Ähnlichkeit mit der galvanischen Polarisation besitzen. Es ist mir bei den Widerstandsmessungen mit dem Telephon stets aufgefallen, dass die Minima bei niederen Temperaturen verwaschen, bei hohen Temperaturen jedoch von großer Schärfe sind. Lässt man nun Gleichstrom durch den Silberglanz fließen, so weicht die Nadel des Messinstrumentes nach dem ersten Ausschlage immer mehr zurück. So vergrößerte sich der scheinbare Widerstand eines Stiftes von $3 \cdot 0$ *cm* Länge und $0 \cdot 5$ cm^2 Querschnitt, der mit Hoffmann'schen Zuleitungen versehen war, bei Zimmertemperatur allmählich von 2.100 Ω auf 3.700 Ω. Diese Widerstandsvergrößerung kann durch eine gegenelektromotorische Kraft von $0 \cdot 80$ Volt hervorgerufen werden. Wenn man aber mit Hilfe einer Wippe den Silberglanz mit einem empfindlichen Spiegelgalvanometer verbindet, dann erhält man höchstens zehn Theilstriche Ausschlag, die nur von einer äußerst geringen Spannung weit unter einem Tausendstel Volt herrühren. Auch bei höheren Temperaturen weicht die Nadel zurück. Kehrt man den Strom im Silberglanz um, dann entsteht zuerst ein viel kräftigerer Ausschlag, der meist ruckweise abnimmt. Im Spiegelgalvanometer machen sich aber nur die thermoelektrischen

Kräfte bemerkbar, die geringer sind als bei Bleiglanz. Eine Polarisation lässt sich nach Trennung des Stiftes vom Accumulator absolut nicht nachweisen, auch dann nicht, wenn man sich einer elektromagnetisch angeregten Stimmgabel als Wippe bedient. Es sieht also so aus, als wenn im Silberglanz allerdings Kräfte auftreten würden gegen die Stromrichtung, dass aber deren Wirksamkeit an das Fließen des Stromes gebunden ist. Bei Temperaturen oberhalb 190° hat der Spuk sein Ende gefunden. Die Nadel des Weston-Instrumentes verändert ihre Stellung nicht mehr, mag der Strom auch beliebig lange durch den Stift fließen. Bei Vertauschung der Stromrichtung ergibt sich genau wieder derselbe Ausschlag.

In der Kohlensäure-Kältemischung betrug der Widerstand des Stiftes von 3 *cm* Länge und 0·5 cm^2 Querschnitt $12 \cdot 4 . 10^6 \, \Omega$, in flüssiger Luft ungefähr $10^9 \, \Omega$! Der Silberglanz durchläuft mithin in einem Temperaturintervall von nur 400° das ganze Gebiet der Leitfähigkeit.

Der Versuch in flüssiger Luft macht es kaum zweifelhaft, dass Silberglanz in der Nähe des absoluten Nullpunktes der Temperatur ein vollkommener Isolator der Elektricität ist. Ich habe daher die Vermuthung ausgesprochen,[1] dass das Gesammtmolecül Ag_2S im Gegensatz zu anderen Verbindungen, z. B. den beiden Kupfersulfiden, keinen Antheil an der Elektricitätsleitung nimmt. Erst die Beweglichkeit des Metallatoms innerhalb des Molecüls, die von der jeweiligen Temperatur T bestimmt wird, bringt die Leitung zustande.

Hingegen dürfte dem Bleiglanz, der in flüssiger Luft ein bedeutend größeres Leitvermögen besitzt, eine wenn auch geringe moleculare Leitfähigkeit beim Nullpunkte kaum abzusprechen sein. Allein mit steigender Temperatur würde auch hier das Metallatom in steigendem Maße seinen Antheil an der Leitung übernehmen, so dass eine Beschleunigung des Leitvermögens eintritt, auch wenn von den Umwandlungsvorgängen abgesehen wird.

Der Grad der Beschleunigung wird in einer Beziehung zu dem Atomgewichte des Metalles stehen, das in der Verbindung

[1] Streintz, a. a. O.

enthalten ist. Verfügen die die Leitung vermittelnden Metallatome über eine geringe Masse, dann müsste der Grad der Beschleunigung ein höherer sein, als wenn die Atome große Masse besitzen. Aus diesem Grunde zeigen die Schwefelverbindungen von Blei (Atomgewicht 206·9) und Quecksilber (Atomgewicht 200·3) ungefähr die gleiche Zunahme mit der Temperatur, während die Verbindung mit dem etwa halb so schweren Silber (Atomgewicht 107·9) eine vielfach überlegene Zunahme aufweist.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, dass ein Versuch, eine Änderung der Leitfähigkeit im magnetischen

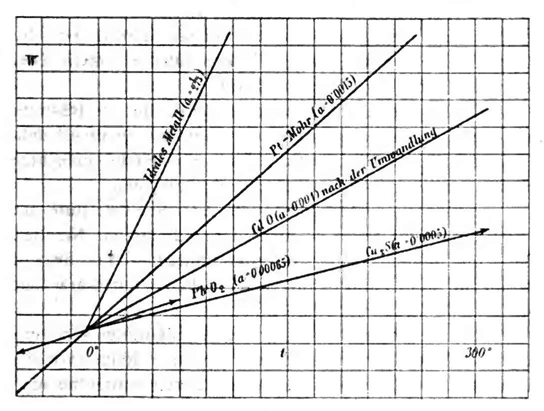


Fig. 6.

Felde nachzuweisen, nicht von Erfolg begleitet war. Auch bei Bleiglanz konnte ein derartiger Einfluss nicht festgestellt werden.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Das seinerzeit gesteckte Ziel, unter den Metall-Oxyden und -Sulfiden Körper zu finden, die gleichzeitig beiden Classen der Leiter, der metallischen und der elektrolytischen, angehören, ist nicht erreicht worden. Im Gegentheile zeigte es sich, dass keinem der untersuchten Leiter elektrolytische Leitfähigkeit

zukommt. Die positiven Ergebnisse lassen sich etwa in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Leiter bei gewöhnlicher Temperatur sind nur jene dunkelfärbigen Verbindungen, die sich unter hohen Drucken ohne Anwendung eines Bindemittels in bestimmte Formen von metallischem Glanz und metallischer Härte bringen lassen.

2. Die Verbindungen, welche schon bei gewöhnlicher Temperatur gut leiten, und zwar etwa innerhalb der Grenzen von 2·3 bis 7.000 für $10^4\sigma$, besitzen positiven Temperaturcoefficienten, der jedoch bedeutend kleiner ist als jener der reinen Metalle (vergl. Fig. 6).

3. Die Verbindungen hingegen, deren Leitvermögen bei gewöhnlicher Temperatur verhältnismäßig gering ist, etwa $10^4\sigma > 50.000$, werden von der Temperatur in hohem Grade beeinflusst (PbS, HgS, Ag_2S und MnO_2).

4. Allen untersuchten Verbindungen wohnt a s Bestreben inne, bei einer für die betreffende Verbindung wahrscheinlich charakteristischen Temperatur aus einem Gebiete schlechterer Leitfähigkeit in ein solches besserer überzugehen.

5. Leitet die höhere Sauerstoff- oder Schwefelstufe einer Verbindung nicht, dann ist auch die niedrigere ein Nichtleiter (Blei- und Mangan-Sauerstoffverbindungen); leitet aber die betreffende Stufe, dann ist die nächst höhere ein besserer Leiter (MnO_2 und Mn_2O_7, Cu_2S und CuS).

Der zuletzt ausgesprochene Satz ist allerdings sehr hypothetischer Natur und müsste erst an einer Reihe von Verbindungen, die aus verschiedenen schwarzen Stufen bestehen, erprobt werden.

Die Untersuchung wurde großentheils im physikalisch-chemischen Institute der Universität Göttingen ausgeführt. Ich danke nochmals meinem Freunde, Herrn Prof. Nernst, für die gütige Bereitwilligkeit, mit der er mir die Mittel des Institutes in so reichlichem Maße zur Verfügung gestellt hat.

VIII. SITZUNG VOM 13. MÄRZ 1902.

Erschienen: Denkschriften, Band LXX (1901). — Sitzungsberichte, Bd. CX, Abth. IIa, Heft VIII und IX (October und November 1901).

Die von der kaiserlichen Akademie im Einverständnisse mit dem k. k. Eisenbahnministerium eingeleiteten Untersuchungen über die geologischen und Temperaturverhältnisse beim Baue der Alpentunnels haben begonnen; es sind hierüber die folgenden Berichte eingelangt:

Bergrath F. Teller hatte in der Zeit vom 15. bis 20. Jänner d. J. Gelegenheit, die geologischen Aufschlüsse an den beiden Angriffspunkten des Karawanken-Tunnels zu besichtigen und erstattete darüber einen eingehenden Bericht an die Tunnelcommission der kaiserlichen Akademie.

Dr. Franz Kossmat reiste am 15. December 1901 nach Feistritz in Krain ab, um die beim Bau des Wocheiner-Tunnels vorzunehmenden geologischen Beobachtungen mit den Ingenieuren der Bauleitung zu besprechen und die bisher erzielten Aufschlüsse zu besichtigen.

Herr Ingenieur Josef Wimmer in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über die Mechanik im Menschen- und Thierkörper und deren physiologischen Einfluss auf die Entwickelung der Lebewesen«.

Herr Karl Worel in Graz übersendet eine Mittheilung über Photographie in natürlichen Farben auf Papier.

Prof. Emil Waelsch in Brünn übersendet folgende Mittheilung: »Binäranalyse zur Mechanik deformierbarer Körper«.

Das w. M. Prof. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Hans Meyer: »Über α-Cyanpyridin«.

Das w. M. Hofrath Skraup in Graz legt drei im chemischen Institute der Universität Prag ausgeführte Untersuchungen vor:

1. »Über die Verseifungsgeschwindigkeit von Monnose- und Bioseacetaten«, von R. Kremann.
2. »Über das Allocinchonin«, von A. v. Pecsics.
3. »Zur Constitution des Allocinchonins«, von Zd. H. Skraup und R. Zwerger.

Das c. M. Prof. Dr. Hans Molisch übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von Herrn stud. phil. Oswald Richter ausgeführte Arbeit unter dem Titel: »Untersuchungen über das Magnesium in seinen Beziehungen zur Pflanze«. I. Theil.

Das c. M. Dr. Emil von Marenzeller übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Südjapanische Anneliden«.

Das w. M. Director Friedrich Brauer legt eine am k. k. naturhistorischen Hofmuseum ausgeführte Arbeit des Custosadjuncten Dr. Rudolf Sturany vor, betitelt: »Beitrag zur Kenntnis der kleinasiatischen Molluskenfauna«.

Das w. M. Hofrath Lieben überreicht drei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium:

I. »Studien über die Alkyläther der Phloroglucine. V. Über den Stellungsnachweis der Mono- und Dialkyläther des Methylphloroglucins«, von J. Herzig und K. Eisenstein.

II. »Studien über die Halogenderivate der Phloroglucine. III. Über die Zersetzung des Tribromphloroglucins«, von J. Herzig und H. Kaserer.

III. »Studien über die Halogenderivate der Phloroglucine. IV. Über Chlorderivate der Phloroglucinäther«, von H. Kaserer.

Das w. M. Prof. F. Becke legt eine Arbeit von Dr. J. A. Ippen: »Über einige Ganggesteine von Predazzo« vor.

Das w. M. Prof. Dr. Franz Exner legt eine Abhandlung des Dr. H. Mache: »Über die Verdampfungswärme und die Größe der Flüssigkeitsmolekel« vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts in Paris: Carte photographique du Ciel, Zone +1, feuilles 91, 96, 110, 111, 128; — Zone +3, feuilles 129, 167; — Zone +5, feuilles 138, 151, 172, 176; — Zone +7, feuilles 138, 172, 175, 179, 180; — Zone +16, feuilles 93, 94, 171; — Zone +22, feuilles 158, 164, 171.

Rosetti, Gaetano: La Scienza pratica, ossia la vera sorgente della Febbre, della Tubercolosi, del Tifo, ecc. Turin, 1899. 8°.

Über die Verdampfungswärme und die Größe der Flüssigkeitsmolekel

von

Dr. **Heinrich Mache.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. März 1902.)

Man hat bereits wiederholt mit Erfolg versucht, die Eigenschaften der Dämpfe auf Grund der kinetischen Theorien der Dissociation zu erklären. Nach dieser Vorstellung findet sowohl bei dem Verdampfen einer Flüssigkeit, wie bei dem Vergasen eines Dampfes ein Zerfallen von Molekelaggregaten in einfachere Constituenten statt, ein Vorgang, welcher bei genügender Wärmezufuhr solange vor sich geht, bis die Substanz in den einatomigen Gaszustand übergeführt ist. Entzieht man umgekehrt Wärme, so geht mit fortschreitender Verdichtung die Bildung von immer neuen Molekelaggregaten immer höherer Ordnung Hand in Hand. Es ist dies ein im allgemeinen continuierlich fortschreitender Vorgang. Nur dort, wo die Verflüssigung eintritt, wo also gleichzeitig zwei Phasen der Substanz coexistieren, eine flüssige und eine dampfförmige, von denen sich die eine nur unter Arbeitsleistung in die andere verwandeln lässt, liegt es nahe, auch eine Discontinuität in der Aggregation anzunehmen, sich also vorzustellen, dass wir es in der Flüssigkeit mit wesentlich anderen, und zwar höheren Aggregaten zu thun haben als im Dampf. Nur im kritischen Zustande wäre dann die Flüssigkeitsmolekel gleich der ihres Dampfes.

Die hier gemachte Annahme der Verschiedenheit der Molekel in Flüssigkeit und Dampf widerspricht nun freilich der Vorstellung der meisten Flüssigkeitstheoretiker, indem diese einen derartigen Unterschied entweder selbst nicht machen

oder ihn direct bestreiten. Doch trifft man auch unsere Ansicht zu wiederholtenmalen an, und so muss bei dem gegenwärtigen Stande der Frage eine jede Hypothese erlaubt sein, deren consequente Durchführung zu keinem Widerspruche mit der Erfahrung führt.

Die oben erwähnte Methode, welche in der Anwendung der Dissociationstheorien besteht, lässt sich jedoch strenge nur auf Zustände anwenden, bei welchen die Aggregation über die Bildung von Doppel- oder höchstens von Tripelmolekeln nicht vorgeschritten ist. Es mag dies entschuldigen, wenn wir uns im folgenden eines Verfahrens bedienen, welches zwar gewiss nicht exact ist, dafür uns aber in den Stand setzt, die Substanz noch in jene Phasen zu verfolgen, in denen sich die Molekel des sogenannten einatomigen Gaszustandes bereits zu reichhaltigen Complexen vereinigt haben. Das Verfahren besteht darin, dass wir sowohl die Flüssigkeitsmolekel, wie auch die Dampfmolekel als kleine Flüssigkeitströpfchen behandeln, d. h. die Annahme machen, dass die in den Molekelaggregaten zwischen den Molekeln wirkenden inneren Kräfte ersetzbar seien durch eine über die Oberfläche der Aggregate wirkende capillare Spannung, deren Coefficient gleich ist dem der normalen Oberflächenspannung der betreffenden Flüssigkeit. Es ist dies eine Hypothese, welche von Lord Kelvin herrührt und die bereits zur Berechnung der Größe der Dampfmolekel verwendet wurde.[1] Wir wollen sie hier zunächst zur Ableitung eines Ausdruckes für die Verdampfungswärme benützen.

1. Beim Verdampfen wird erstens die Dampfmolekel aus der Flüssigkeitsmolekel gelöst, zweitens ihr ein gewisser Betrag an kinetischer Energie mitgetheilt, der sie befähigt, den äußeren Druck zu überwinden. Die Verdampfungswärme ist die Summe aus dieser inneren und äußeren Arbeit. Wir berechnen zunächst die erstere.

Aus einer Flüssigkeitskugel vom Radius r werde ein Kügelchen vom Radius ρ und der Masse m gelöst. Hiebei wird die Oberfläche der Kugel um etwas verringert, die Gesammt-

[1] Treatise on Natur. Phil., II, p. 498 (1883); G. Jäger, diese Sitzungsber., 100, S. 1233 (1891).

oberfläche hingegen um $4\rho^2\pi$ vergrößert. Die beim Loslösen des Kügelchens gegen die capillaren Kräfte geleistete Arbeit berechnet sich somit zu $dA = 4\rho^2\pi\alpha - 4r^2\pi\alpha + 4r'^2\pi\alpha$, wo r' den Radius bedeutet, welchen die große Kugel nach dem Hinausschaffen der kleinen annimmt, und wo α gleich der Capillarconstanten der betreffenden Flüssigkeit ist. Es ist aber auch:

$$dA = 4\rho^2\pi\alpha - 4r^2\pi\alpha + 4(r^3-\rho^3)^{2/3}\pi\alpha.$$

Nehmen wir zunächst an, dass ρ gegenüber r klein sei, eine Annahme, deren Berechtigung wir weiterhin erkennen werden, so wird, falls man $(r^3-\rho^3)^{2/3}$ entwickelt und nach dem zweiten Gliede abbricht:

$$dA = 4\rho^2\pi\alpha - \frac{8}{3}\rho^3\pi\alpha\frac{1}{r}\cdot$$

Bezeichnen wir mit ω das specifische Volumen der Flüssigkeit, so ist auch nach Loschmidt's Hypothese $m = \frac{4}{3}\rho^3\pi\cdot\frac{1}{\omega}$ und somit:

$$dA = 4\rho^2\pi\alpha - \frac{2m\omega\alpha}{r}\cdot$$

Es ist das diejenige Arbeit, welche beim Hinausschaffen eines Kügelchens vom Radius ρ aus der Kugel vom Radius r geleistet wird. Nach der oben entwickelten Vorstellung ist dies direct auch diejenige Arbeit, welche beim Verdampfen einer Dampfmolekel gegen die inneren Kräfte geleistet werden muss. Wir haben hier nur unter ρ den Radius der Dampfmolekel und unter r den Radius der Flüssigkeitsmolekel zu verstehen. Zur Verdampfung der Masseneinheit ist somit die capillare Arbeit $A = 4N\rho^2\pi\alpha - \frac{2\omega\alpha}{r}$ zu leisten, wo N die Zahl der Dampfmolekeln bezeichnet, welche auf die Masseneinheit entfallen.

Überdies ist zum Zurückschieben des äußeren Druckes die äußere Arbeit $p(w-\omega)$ zu leisten, wo p und w Druck und specifisches Volumen des Dampfes bezeichnen. Dann ist die Verdampfungswärme

$$L = p(w-\omega) + 4N\rho^2\pi\alpha - \frac{2\omega\alpha}{r}\cdot$$

Ist die Association der Substanz sehr weit vorgeschritten, machen wir also die Annahme, dass r sehr groß ist, so wird $L = p(w-\omega)+4N\rho^2\pi\alpha = L'$ und somit

$$L = L' - \frac{2\omega\alpha}{r},$$

wo L' derjenige Wert der Verdampfungswärme ist, welchen sie über sehr großen Flüssigkeitsmolekeln annimmt. Die Formel gibt uns daher die Abhängigkeit der Verdampfungswärme einer Flüssigkeit vom Radius ihrer Molekel.

Es hat nun L. Houllevigue die Verdampfungswärme über Flüssigkeitskugein von messbaren Dimensionen untersucht und findet die Abhängigkeit der Verdampfungswärme vom Radius der Kugel durch genau die gleiche Formel gegeben, welche wir gefunden haben.[1] Houllevigue leitet sein Resultat aus einem Carnot'schen Kreisprocess unter der vereinfachenden Annahme ab, dass der Dampf das Boyle-Charles'sche Gesetz befriedigt, eine Annahme, die ja sehr häufig gemacht wird und welche auch wir später einführen werden.

Es hängt somit die Verdampfungswärme in gleicher Weise vom Radius der Flüssigkeitsmolekel ab, wie überhaupt diese Größe vom Krümmungsradius der verdampfenden Flüssigkeitsoberfläche abhängt, woferne wir nur die eingangs formulierte Anschauung über die Constitution der Molekel und den Verdampfungsprocess acceptieren. Wir sehen auch umgekehrt in dieser Übereinstimmung eine Stütze für unsere Anschauung, welche uns eben gestattet, das für messbare Flüssigkeitskugeln giltige Gesetz auch noch auf Kügelchen von molecularen Dimensionen zu übertragen.

2. Wir fanden $L = p(w-\omega)+4N\rho^2\pi\alpha - \frac{2\omega\alpha}{r}$.

Wären wir imstande, den Radius der Flüssigkeitsmolekel zu verändern, so würde auch die Verdampfungswärme verändert. Denken wir uns z. B. das r verkleinert, so wird die capillare Arbeit und infolge dessen auch L kleiner. Es würde also auch das thermische Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit

[1] Jour. de phys., sér. III, t. 5, p. 161 (1896).

und Dampf gestört. Soll dieses erhalten bleiben, d. h. soll trotz der Verkleinerung der Flüssigkeitsmolekel kein weiteres Verdampfen stattfinden, so müssen wir die äußere Arbeit $p(w-\omega)$ solange vergrößern, bis dieses Plus an äußerer Arbeit dem Gewinn an capillarer Arbeit gleichkommt. Es ist also dann, falls man die Änderung von w mit r vernachlässigt:

$$(w-\omega)\,dp = d\left[\frac{2\,\omega\alpha}{r}\right] \quad \text{und} \quad dp = d\left[\frac{2\,\omega\alpha}{(w-\omega)\,r}\right].$$

Falls sich demnach der Sättigungsdruck einer Flüssigkeit in der durch die letzte Gleichung gegebenen Weise mit dem Radius der Flüssigkeitsmolekel ändert, dann besteht Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Dampf.

Es hat nun Lord Kelvin nachgewiesen,[1] dass sich der Sättigungsdruck über einer Flüssigkeitskugel von messbaren Dimensionen mit dem Radius der Kugel ändert. Ist nämlich p' der Druck über einer sehr grossen Kugel, so ist der über einer Kugel vom Radius r durch die Formel $p = p' + \dfrac{2\,\omega\alpha}{(w-\omega)\,r}$ gegeben. Einer Abnahme des r entspricht somit eine Zunahme von p, welche ebenfalls durch die Gleichung $dp = d\left[\dfrac{2\,\omega\alpha}{(w-\omega)\,r}\right]$ gegeben ist.

Wir sehen hieraus, dass bei Verkleinerung der Flüssigkeitsmolekel der Dampfdruck über derselben nach demselben Gesetze zunimmt, nach welchem dies über einer Flüssigkeitskugel von messbaren Dimensionen geschieht. Also auch hier gilt der für größere Flüssigkeitskugeln abgeleitete Ausdruck selbst noch für Tröpfchen von molecularen Dimensionen, woferne wir nur an der oben entwickelten Anschauung festhalten.

Es werde ausdrücklich nochmals bemerkt, dass die abgeleiteten Gleichungen nur für den Fall gelten, dass die Dampfmolekel gegenüber der Flüssigkeitsmolekel groß genug ist, um die Entwickelung von $(r^3-\rho^3)^{2/3}$ nach dem zweiten Gliede abbrechen zu können. Bei steigender Temperatur wird diese

---

[1] Vergleiche auch: E. Warburg, Wied. Ann., 28. S. 394 (1886) und V. v. Lang, diese Sitzungsber., 99, S. 900 (1890).

Bedingung umso weniger erfüllt sein, je mehr sich die Flüssigkeit dem kritischen Zustande nähert. Doch wäre es überhaupt sinnlos, unsere Betrachtungsweise auf jene Phasen anzuwenden.

3. Durch Integration der zuletzt aufgestellten Gleichung erhalten wir als Bedingung für das jeweilige Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Dampf die Beziehung:

$$p = \frac{2\omega\alpha}{(w-\omega)\,r}.$$

Es ist also dann der jeweilige Dampfdruck nichts anderes als der Kelvin'sche capillare Überdruck, wie er der jeweiligen Größe der Flüssigkeitsmolekel entspricht, wobei wir uns eben die Flüssigkeitsmolekel als Tröpfchen vom Radius r vorstellen. Oder es ist mit anderen Worten der Dampfdruck über einer Flüssigkeit unmittelbar als derjenige Druck aufzufassen, welcher ein weiteres Verdampfen der Flüssigkeitsmolekel verhindert. Da mit sinkender Temperatur auch die Dampfspannung kleiner wird, muss r größer werden, bis es in der Gegend des absoluten Nullpunktes den größtmöglichen Wert erreicht. Es entspricht dies ja auch thatsächlich unserer Vorstellung, wonach mit sinkender Temperatur die Molekeln immer mehr und mehr aggregieren. Dann ist $p(w-\omega) = \frac{2\omega\alpha}{r}$ auch die Zustandsgleichung des gesättigten Dampfes oder, wenn wir ω gegen w vernachlässigen:

$$pw = \frac{2\omega\alpha}{r}.$$

An Hand dieser Gleichung lässt sich, wie schon an anderer Stelle bemerkt wurde,[1] zunächst ein allgemeiner Satz nachweisen, welcher bereits zu wiederholtenmalen auf Grund rein molecularmechanischer Vorstellungen vermuthet worden ist.

Berechnen wir nämlich zunächst die potentielle Energie, welche in der Masseneinheit Flüssigkeit enthalten ist. Nachdem wir die zwischen den Molekeln wirkenden inneren Kräfte durch

---

[1] Eine Beziehung zwischen der specifischen Wärme einer Flüssigkeit und der ihres Dampfes. Diese Sitzungsber., 110 (1901).

eine über die Oberfläche der Flüssigkeitsmolekel erstreckte capillare Tension ersetzt haben, ist dieselbe durch den Arbeitswert dieser Tension gegeben. Ist also n die Zahl der in der Masseneinheit enthaltenen Molekel, so ist die gesuchte potentielle Energie

$$V = 4nr^2\pi\alpha.$$

Die kinetische Energie der Flüssigkeit K können wir aber ebenfalls leicht berechnen. Es ist nämlich nach dem bekannten Satze von Clausius die kinetische Energie der molecularen Progressivbewegung einer Substanz bei gleicher Temperatur in allen Aggregatzuständen die gleiche, also auch die kinetische Energie der Flüssigkeit gleich der ihres Dampfes. Diese letztere ist aber pro Masseneinheit durch $\frac{c^2}{2}$ gegeben, wo c^2 das mittlere Geschwindigkeitsquadrat bedeutet, und es ist auch unter Annahme der Giltigkeit des Mariotte'schen Gesetzes für den gesättigten Dampf

$$K = \frac{c^2}{2} = \frac{3}{2}pv = \frac{3\omega\alpha}{r}$$

und da $\frac{4}{3}nr^3\pi = \omega$ ist, auch

$$K = 4nr^2\pi\alpha.$$

Es ist somit, woferne wir an unserer Anschauung festhalten, die potentielle Energie einer Flüssigkeit gleich ihrer kinetischen.

Es haben sich nun eine Reihe von Gastheoretikern, wie Boltzmann, Richarz und Staigmüller[1] über die Constitution der Molekeln in festen und flüssigen Körpern die Vorstellung gebildet, dass in diesen Molekeln die einzelnen Constituenten nach dem Gesetze von Sinusschwingungen oscillieren, und es weist Boltzmann für derartige Systeme nach, dass der Mittelwert aus den potentiellen Energien gleich ist dem aus ihren kinetischen. Also auch auf Grund dieser Vorstellung gelangt man zu dem gleichen bemerkenswerten Satze.

---

[1] Vergleiche: L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie. J. A. Barth. Leipzig, 1898, II. Theil, S. 126, Anmerkung.

Fragt man, ob das Verhalten der Flüssigkeiten diese Beziehung rechtfertigt, so ist diese Frage unbedingt zu bejahen.

Es lässt sich nämlich aus diesem Satze eine Folgerung ziehen, deren Prüfung an der Erfahrung keinen Schwierigkeiten begegnet. Da in einem einatomigen Dampfe die kinetische Energie die Gesammtenergie vorstellt und da nach unserem Satze die Gesammtenergie der Flüssigkeit doppelt so groß ist wie die kinetische Energie des Dampfes, so muss auch die specifische Wärme einer Flüssigkeit mit einatomigem Dampfe doppelt so groß sein wie die ihres Dampfes bei constantem Volumen. Thatsächlich ist denn auch das Verhältnis der specifischen Wärmen von flüssigem Quecksilber und Quecksilberdampf gleich 2·06. Merkwürdig ist es aber, dass diese Beziehung, wie l. c. gezeigt wurde, auch noch bei mehratomigen Dämpfen eine angenäherte Giltigkeit behält. So ergibt sich z. B. für Brom das Verhältnis zu 1·93, und auch die anderen Flüssigkeiten zeigen eine bemerkenswerte Annäherung der Größe dieses Verhältnisses an den Wert 2.

4. Natürlich gelingt es vermittels der gegebenen Formeln leicht, sowohl für r, den Radius der Flüssigkeitsmolekel, wie auch für ρ, den der Dampfmolekel, einen Ausdruck aufzustellen. Es ist nämlich zunächst, da $pv = \frac{2\omega\alpha}{r}$ ist, $r = \frac{2\omega\alpha}{pv}$ oder wenn wir das Boyle-Charles'sche Gesetz einführen, also $pv = \frac{c^2}{3} = \frac{R}{\mu} T$ setzen: $r = \frac{6\omega\alpha}{c^2} = \frac{2\omega\alpha\mu}{RT}$.

Ferner ist nach Einsetzung unserer Zustandsgleichung in den für die Verdampfungswärme oben gefundenen Ausdruck diese Verdampfungswärme $L = 4N\rho^2\pi\alpha$. Das ist aber ihr bereits auf die äußere Arbeit und die Änderung der inneren Arbeit corrigierter Wert, und es wird, wenn wir $\frac{4}{3}N\rho^3\pi = \omega$ setzen, $L = \frac{3\omega\alpha}{\rho}$ und $\rho = \frac{3\omega\alpha}{L}$.[1]

[1] Es ist dies der bekannte, von Lord Kelvin herrührende Ausdruck für den Radius der Dampfmolekel.

Wir erhalten dann auch $\frac{r}{\rho} = \frac{2L}{c^2} = \frac{2}{3R} \cdot \frac{L\mu}{T}$, d. h. es verhält sich r zu ρ so wie die Verdampfungswärme zur lebendigen Kraft der Progressivbewegung.

Ich lasse zunächst in der folgenden Tabelle einige Werte für r, ρ und $\frac{r}{\rho}$ folgen. Die Angaben beziehen sich alle auf 0° C. und sind im absoluten Maße gemacht. Nur L ist in Calorien gegeben, ist also noch mit 420.10^5 zu multiplicieren. R wurde zu $1 \cdot 98.420.10^5$ angenommen. Die α entnahm ich den Messungen von G. Jäger, nur für Benzol wurde der von Bède bestimmte Wert eingeführt.

	μ	α	L	$\frac{1}{\omega}$	$r.10^9$	$\rho.10^9$	$\frac{r}{\rho}$
Wasser	18·0	77·09	607·0	1·000	122·3	9·1	13·4
Äthylalkohol......	45·9	24·79	229·0	0·810	123·8	9·5	13·0
Äthyläther	73·8	20·65	94·0	0·736	182·4	21·3	8·6
Aceton...........	57·9	27·33	140·5	0·814	171·3	17·1	10·0
Schwefelkohlenstoff	75·9	33·84	90·0	1·293	175·0	20·8	8·4
Chloroform	123·1	27·58	67·0	1·525	196·1	19·3	10·2
Benzol	77·8	27·08	107·6	0·900	206·2	20·0	10·3

Wie man sieht, schwankt der Wert des Quotienten $\frac{r}{\rho}$ innerhalb enger Grenzen. Den Grund hiefür werden wir sofort kennen lernen.

5. Wir wollen nämlich noch eine Aussage bezüglich des Ausdruckes $\frac{L\mu}{T}$ machen.[1] Die bekannte Formel Rankine's für die Spannung gesättigten Dampfes lautet:

$$\log p = -\frac{A\mu}{RT} - \frac{B\mu}{R} \log T + C,$$

worin C eine Integrationsconstante ist und wo die Constanten A und B die Änderung der Verdampfungswärme mit der

[1] Le Chatelier: Recherches exper. et théor. sur l'équilibre chimique; Ann. des Mines, 1888, p. 337.

Temperatur durch die Näherungsformel $L = A - BT$ darstellen. Die Formel Rankine's ist unter der Voraussetzung abgeleitet, dass der gesättigte Dampf das Boyle-Charles'sche Gesetz befolgt.

Machen wir die weitere Annahme, dass die Verdampfungswärme von der Temperatur unabhängig sei, was natürlich nur näherungsweise gilt, so wird $B = 0$, $A = L$, und wir erhalten

$$\frac{L\mu}{T} = R(C - \log p).$$

Für $p =$ const, d. h. für gleichen Siededruck ist somit $\frac{L\mu}{T}$ eine für alle Flüssigkeiten näherungsweise constante Größe. Dieses bekannte Gesetz wurde bereits vor längerer Zeit von F. Trouton aufgestellt,[1] allerdings rein empirisch und nur für den normalen Siedepunkt. Man sieht aus dem Obigen, dass es eine allgemeine, für jeden Siededruck giltige Beziehung ist, die freilich auf den beiden eben eingeführten, nur beiläufig zutreffenden Annahmen basiert und infolge dessen auch nur näherungsweise erfüllt sein kann.

Wir fanden nun $\frac{r}{\rho} = \frac{2L}{c^2} = \frac{2}{3R} \cdot \frac{L\mu}{T}$, und es ist hierin $\frac{2}{3R}$ eine Constante. Wir können somit auf Grund des früher Gesagten das Gesetz auch noch in folgender Weise aussprechen:

Es ist für gleichen Siededruck die Verdampfungswärme für alle Flüssigkeiten dasselbe Multiplum ihrer kinetischen Energie, und da diese gleich der potentiellen, auch dasselbe Multiplum ihrer Gesammtenergie. Oder auch:

Es ist $\frac{r}{\rho}$, nämlich das Verhältnis der Radien von Flüssigkeits- und Dampfmolekel bei gleichem Siededrucke für alle Flüssigkeiten dasselbe, d. h. es enthält dann die Molekel jeder Flüssigkeit die gleiche Anzahl von Dampfmolekeln.

Natürlich gelten auch diese Sätze nur unter der Voraussetzung, dass der Dampf der Flüssigkeit das Boyle-Charles'sche Gesetz befolgt und ihre Verdampfungswärme nicht von der Temperatur abhängt. Für die wirklichen Flüssigkeiten gelten

[1] Phil. mag. (5), 18, p. 54 (1884).

sie nur angenähert. Wie groß aber dennoch diese Annäherung ist, kann man aus der folgenden Zusammenstellung ersehen, welche sich auf den normalen Siedepunkt bezieht und in welcher $\frac{r}{\rho}$ aus den von Trouton für $\frac{L\mu}{T}$ gegebenen Werten berechnet wurde.

Wasser	8·72	Chloroform	7·32
Methylalkohol	8·66	Tetrachlorkohlenstoff	6·94
Äthylalkohol	8·87	Zinnchlorid	6·90
Amylalkohol	8·81	Äthyläther	7·39
Ameisensäure	8·29	Aceton	7·69
Essigsäure	8·11	Schwefelkohlenstoff	7·02
Buttersäure	7·80	Benzol	7·00
Valeriansäure	7·93	Terpentin	7·25
Äthylchlorid	7·13	Brom	7·33

Im Anschlusse soll noch eine, wohl auf empirischem Wege gefundene Beziehung erwähnt werden, welche im Obigen bis zu einem gewissen Grade ihre Begründung findet. Es hat nämlich O. Tumlirz gefunden,[1] dass bei normaler Siedetemperatur die Verdampfungswärme nicht in Calorien, sondern in Kilogrammetern gemessen, gleich ist dem in Metern ausgedrückten Quadrate der Schallgeschwindigkeit. Drücken wir diese Beziehung in absoluten Einheiten aus, so heißt das auch, dass das Quadrat der Schallgeschwindigkeit gleich ist dem zehnten Theile der Verdampfungswärme, d. h.

$$\varkappa p v = \frac{1}{10} L,$$

wo $\varkappa$ gleich dem Verhältnis der beiden specifischen Wärmen des Dampfes ist. Weiter wird

$$\varkappa p v = \varkappa \frac{R}{\mu} T = \frac{1}{10} L \quad \text{und} \quad \frac{L\mu}{T} = 10 R\varkappa = 19{\cdot}8\,\varkappa,$$

falls wir für R seinen Wert in Grammcalorien einführen. Insoweit nun $\varkappa$ besonders für complicierte Dämpfe innerhalb enger

[1] Diese Sitzungsber., 101, S. 184 (1892).

Grenzen schwankt, werden wir im voraus erwarten können, dass die Beziehung von Tumlirz angenähert erfüllt ist. Das Eigenthümliche und Aufzuklärende an ihr bleibt aber, dass sie den Quotienten $\frac{L\mu}{T}$ besser darstellt, als dies die Annahme seiner Constanz thut, dass wir somit imstande sind, mit ihrer Hilfe die Trouton'sche Zahl für normale Siedetemperaturen zu berechnen. Es würde also dann dem Verhalten der wirklichen Flüssigkeiten besser entsprechen, wenn wir für Atmosphärendruck nicht $\frac{r}{\rho}$, sondern $\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{r}{\rho}$ constant setzen würden.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IX. SITZUNG VOM 17. APRIL 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte: Bd. CX, Abth. II b, Heft VIII und IX (October und November 1901); Abth. III, Heft VIII bis X (October bis December 1901). — Monatshefte für Chemie: Bd. XXIII, Heft II (Februar 1902); Register zum XXII. Band (1901).

Der Vorsitzende, Präsident E. Sueß, macht Mittheilung von dem Verluste, welchen die Classe durch das am 12. April l. J. erfolgte Hinscheiden ihres correspondierenden Mitgliedes, Herrn Prof. M. Alfred Cornu in Paris, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das w. M. Hofrath K. Rabl in Prag übersendet die Pflichtexemplare seines mit Subvention der kaiserlichen Akademie gedruckten Werkes: »Die Entwicklung des Gesichtes«, I. Heft.

Dr. Wolfgang Pauli und Dr. Peter Rona in Wien übersenden die erste Mittheilung ihrer mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie ausgeführten »Untersuchungen über die physikalischen Zustandsänderungen der Kolloide, I. Verhalten der Gelatine«, welche im II. Bande, Heft 1 bis 3, der »Zeitschrift für die gesammte Biochemie« erschienen ist.

Die Geschäftsführung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte in Karlsbad übersendet eine Einladung zu der am 21. bis 27. September d. J. in Karlsbad zusammentretenden 74. Versammlung.

Dankschreiben sind eingelangt

1. vom w. M. Prof. Uhlig in Wien für eine Subvention behufs geologischer Untersuchungen in den Karpathen;

2. von Prof. Paul Czermak in Innsbruck für eine Subvention zur Ausführung von luftelektrischen Föhnuntersuchungen;
3. von Prof. Anton Heimerl in Wien für eine Subvention zur Verfassung einer Monographie der Nyctaginaceen;
4. von Gustav Paganetti-Hummler in Wien für eine Subvention zu Höhlenforschungen auf den dalmatinischen Inseln;
5. von Custos-Adjunct Anton Handlirsch in Wien für eine Reisesubvention zu Studien für die Herausgabe eines Handbuches der Hemipterologie.

Das w. M. Hofrath Zd. H. Skraup legt eine im chemischen Institute der Universität Graz ausgeführte Untersuchung des Assistenten Karl Kaas vor, betitelt: »Über Cinchomeron- und Apophyllensäure« (II. Mittheilung).

Das c. M. Prof. G. Haberlandt in Graz übersendet eine Arbeit von Ferdinand Pischinger in Graz, welche den Titel führt: »Über Bau und Regeneration des Assimilationsapparates von *Streptocarpus* und *Monophyllaea*«.

Dr. Franz Ballner in Innsbruck übersendet eine Arbeit, welche den Titel führt: »Experimentelle Studien über die Desinfectionskraft gesättigter Wasserdämpfe bei verschiedenen Siedetemperaturen«.

Dr. Anton Lampa in Wien übersendet eine Arbeit, betitelt: »Elektrostatik einer Kugel, welche von einer concentrischen, aus einem isotropen Dielektricum bestehenden Kugelschale umgeben ist«.

Dr. Josef Tuma in Brünn übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Eine Methode zur Vergleichung von Schallstärken und zur Bestimmung der Reflexionsfähigkeit verschiedener Materialien«.

Prof. W. Müller-Erzbach in Bremen übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Über das Wesen und über die Unterschiede der Adsorption«.

Dr. Josef Grünwald in Wien übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Über die Ausbreitung elastischer und

elektromagnetischer Wellen in einachsig-krystallinischen Medien«.

Das c. M. Hofrath A. Bauer übersendet eine im Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: »Autoxydationsproducte des Anthragallols (II. Mittheilung) von M. Bamberger und A. Praetorius.

Stud. phil. Otto Weininger in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Zur Theorie des Lebens«.

Das w. M. k. u. k. Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung von Custos Friedrich Siebenrock, betitelt: »Zur Systematik der Schildkrötengattung *Podocnemis* Wagl.«.

Prof. Dr. Rud. Wegscheider überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Über die stufenweise Dissociation zweibasischer Säuren«.

Das w. M. Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Berthold König: »Über die Einwirkung von Hydrazin auf Formisobutyraldol«.

Ferner überreicht derselbe eine Abhandlung von Dr. A. Jolles: »Ein vereinfachtes Verfahren zur quantitativen Eiweißbestimmung«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt folgende Abhandlungen vor:

I. »Eine einfache Methode zur directen Bestimmung von Dielektricitätsconstanten«, von Dr. J. Billitzer.
II. »Versuch einer Theorie der mechanischen und colloidalen Suspensionen«, von Dr. J. Billitzer.
III. »Einige Versuche über Leitung und Rückstandsbildung in Dielektricis«, von Dr. E. v. Schweidler.
IV. »Einige Fälle der Energieverwandlung bei der Ladung von Condensatoren«, von Dr. E. v. Schweidler.

V. »Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. X. Über ein mechanisch registrierendes Elektrometer für luftelektrische Messungen«, von Dr. H. Benndorf.

Das w. M. Hofrath Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung von Dr. C. Storch, Professor am k. u. k. Militär-Thierarznei-Institute und der Thierärztlichen Hochschule in Wien, betitelt: »Beiträge zur Kenntnis des Caseinogens der Eselinmilch«.

Das w. M. Hofrath J. Hann überreicht eine Abhandlung: »Zur Meteorologie des Äquators. Nach den Beobachtungen am Museum Goeldi in Pará«.

Das w. M. Prof. R. v. Wettstein legt eine Arbeit von Dr. Alexander Zahlbruckner in Wien vor, betitelt: »Studien über brasilianische Flechten«.

Das w. M. Hofrath G. Tschermak legt eine Arbeit von Prof. A. Pelikan in Prag vor: »Beiträge zur Kenntnis der Zeolithe Böhmens. — 1. Ein neues Vorkommen von Groß-Priesen«.

Das w. M. Prof. K. Grobben legt das von Dr. A. Voeltzkow in Strassburg der kaiserlichen Akademie gespendete 4. Heft des 26. Bandes der »Abhandlungen der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft« vor, worin sich die Fortsetzung der »Wissenschaftlichen Ergebnisse der Reisen in Madagaskar und Ostafrika in den Jahren 1889 bis 1895« des Spenders befindet.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Belar, Albin: Die Erdbebenwarte. I. Jahrgang, 1901—1902. Laibach, 1901—1902; 8°.

Bordage, Edmond: Sur la possibilité d'édifier la géométrie euclidienne sans le postulatum des parallèles. Saint-Denis (Réunion), 1902; 8°.

Dirección general de Estadística de la Provincia de Buenos Aires: Boletin mensual, Nr. 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17.

Hippauf, Hermann: Die Rectification und Quadratur des Kreises. 1901; 8⁰.

Loewenthal, N.: Questions d'Histologie. La cellule et les tissus au point de vue général. Paris, 1901; klein 8°.

Machado, Virglio: A medicina na exposição universal de Paris em 1900. Lissabon, 1901; 8⁰.

Machado, Virglio: As applicações medicas e cirurgicas da electricidade. Lissabon, 1895; 8⁰.

— L'identité entre les lois de Pflüger et celles de Brenner, prouvée par ma découverte de la double polarisation. Lissabon, 1892; 8⁰.

— O exame do coração no vivo pelos raios X. Lissabon, 1900; 4⁰.

— O exame dos doentes pelos raios X. Lissabon, 1898; 4⁰.

Riefler, S.: Das Nickelstahl-Compensationspendel D. R. P. Nr. 100870. München, 1902; 8⁰.

Spariosu, Basil: Über die Ursache der Wettertrübungen als Grundlage einer Wetterprognose. Mostar, 1902; 8⁰.

Stiatessi, Raffaello: Nuovo sismoscopio elettrico e nuovo sismografo fotografico. Pavia, 1902; 8⁰.

Universität in Aberdeen: Aberdeen University Studies, Nr. 4 und 5.

Eine Methode zur Vergleichung von Schallstärken und zur Bestimmung der Reflexionsfähigkeit verschiedener Materialien

von

Dr. Josef Tuma.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Die Anregung zu den folgenden Untersuchungen verdanke ich einer Anfrage aus dem Kreise der Architekten des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines in Wien um eine Bestimmungsmethode des Reflexions- und Absorptionsvermögens von Baumaterialien für Schall.

Als erstes Erfordernis zur Erreichung des angestrebten Zieles erschien mir ein Apparat zur Vergleichung von Schallstärken.

Nach dieser Richtung liegen bereits verschiedene Arbeiten vor.

Besonders zu nennen sind Vierordt, Max Wien, Schäfer und Lord Rayleigh.

Unter diesen Autoren sind es besonders Wien und Lord Rayleigh, welche exacte Messungsmethoden für Schallstärke beschreiben.

Doch war für die Zwecke, welche ich verfolge, die Wien'sche Methode zu unempfindlich und der Lord Rayleigh'sche Apparat für die Praxis zu subtil. Daher war ich von Anfang an bestrebt, eine Vorrichtung zu construieren, welche einen Ton von variabler und ablesbarer Stärke zu liefern vermag, mit welchem Tone dann ein anderer gleich hoher Ton verglichen werden sollte.

Ich versuchte dies zuerst mit Hilfe einer Wellensirene, bei welcher der Ton mittels zweier Anblasespalten, von denen

eine gegen die andere verstellt werden konnte, hervorgebracht wurde.

Die von beiden Spalten ausgehenden Luftströme wurden nach Passieren der Sirene mittels eines gegabelten Rohres vereinigt und so ein resultierender Ton erzeugt, dessen Intensitätsverhältnis aus der ablesbaren Distanz der Spalten bestimmt wurde.

Leider verursachte der Apparat so viel Nebengeräusch, welches sich nur durch gänzliche Neuconstruction hätte beseitigen lassen, dass ich einen anderen Weg einschlug, der aus dem Folgenden ersichtlich ist.

Wir stellen uns das Problem, die Druckänderungen δp in einem Resonator, welcher aus einem einerseits geschlossenen Rohre, dessen Länge gleich einer ungeraden Zahl von Wellenlängen sei, gebildet ist, zu berechnen.

Wir bezeichnen die am offenen Ende anlangende Wellenbewegung mit $\xi_0 = a \sin 2\pi \frac{t}{T_1}$.

In der Tiefe x herrscht dann eine Bewegung, welche durch die ein- und mehrmals am Boden und an der freien Luft reflectierten Wellen verursacht und durch die Formeln

$$\xi = \sqrt{\alpha^2 + 4(1-\alpha)\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}}\;\frac{a}{1-(1-\alpha)(\alpha_1-1)}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}-\varphi\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{2-\alpha}\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}$$

dargestellt wird. Die Constanten α und α_1 haben die Bedeutung, dass, wenn a die Amplitude eines am festen Boden anlangenden Wellenzuges ist, αa die Amplitude der Schwingungen im festen Materiale und $-(1-\alpha)a$ jene in der reflectierten Welle ist. Ebenso ist bei der Reflexion an der freien Luft oberhalb des offenen Endes der Resonanzröhre $\alpha_1 a$ die Amplitude der in die freie Luft übergegangenen und $(\alpha_1-1)a$ jene der reflectierten Bewegung.

Da $\alpha < 1$ und $\alpha_1 > 1$ angenommen werden müssen, sind die Factoren $1-\alpha$ und $\alpha_1 - 1$ positive Größen.

Sie geben ein Maß für das Reflexionsvermögen des festen Bodens des Resonators, respective der freien Luft über dem Rohre ab.

Die Druckänderungen δp stehen zu den Werten von ξ in der Beziehung

$$\delta p = -p \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Die Amplitude von δp, $\mathrm{Am}(\delta p)$, kann dann dargestellt werden durch die Gleichung:

$$[\mathrm{Am}\,(\delta p)]^2 = \varkappa \frac{(2-\alpha)\,\alpha^2 + 4\,(1-\alpha)^2 \sin^2 \frac{4\pi x}{\lambda}}{\alpha^2 + 4\,(1-\alpha)\cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}}.$$

Speciell in dem Falle, als $\alpha = 0$ ist, d. h. bei totaler Reflexion, wird $\mathrm{Am}(\delta p) = 2\varkappa \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$.

Nur in diesem Falle also kommt eine reine stehende Welle zustande, wobei $\mathrm{Am}(\delta p)$ in den Wellenbäuchen gleich Null ist.

Andernfalls wird $\frac{d}{dx}[\mathrm{Am}\,\delta p]^2$ zwar für $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$ oder $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$ zur Nulle, es sind also für $x = \frac{n\lambda}{2}$, respective $x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ Minima und Maxima von $\mathrm{Am}(\delta p)$ vorhanden, aber die Minima sind nicht gleich Null.

In diesem letzteren Falle erhält man

$$\text{für } x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \ldots \mathrm{Am}(\delta p)_{\frac{\lambda}{4}} = \sqrt{\varkappa(2-\alpha)}$$

$$\text{für } x = n\frac{\lambda}{2} \ldots\ldots\ldots \mathrm{Am}(\delta p)_{\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{\varkappa}\;\frac{\alpha}{\sqrt{2-\alpha}}.$$

Daraus folgt die einfache Beziehung:

$$\frac{\mathrm{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{4}}}{\mathrm{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{2}}} = \frac{2-\alpha}{\alpha}.$$

Gelingt es, dieses Verhältnis der Amplituden im Knoten und im Wellenbauche experimentell zu bestimmen, so kann α gefunden werden.

Man kann diesem Resultate auch noch eine andere Form geben. Bezeichnet a die Amplitude einer am reflectierenden Boden auftreffenden, $\alpha' = \alpha a$ jene der eindringenden und $a'' = -(1-\alpha)a$ die der reflectierten Welle, so folgt

$$\frac{\mathrm{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{4}}}{\mathrm{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{2}}} = \frac{a - a''}{a'}.$$

Erster Versuch.

Ein 4 *cm* weites Glasrohr wurde an einem Ende verjüngt und daselbst durch einen Schlauch mit einem Wasserreservoir verbunden. Die Röhre war vertical an einem hölzernen Gestell befestigt, welches sich über das obere offene Ende des Rohres erhob und daselbst einen vertical verschiebbaren, mittels einer Schraube festzuklemmenden Schlitten trug.

An letzterem war ein enges (3 *mm* Durchmesser) Glasrohr befestigt, welches, ohne zu streifen, in die Resonanzröhre eingeschoben werden konnte. Dieses Hörrohr war mit einem Schlauche versehen, der sich gabelte, so dass die beiden Enden in die Gehörgänge eingeführt werden konnten.

Möglichst nahe über dem Resonator befanden sich die Enden der Zinken einer König'schen Stimmgabel, welche beiläufig 500 Schwingungen vollführte.

Der Fuß der Gabel war in ein 10 *kg* schweres Eisengewicht eingeschraubt, das mit Hilfe von Filzunterlagen am Experimentiertische befestigt wurde.

Durch diese Befestigungsweise der Stimmgabel wurde erreicht, dass, sobald die Röhre nicht resonierte, die Schwingungen der Gabel kaum hörbar waren.

Zunächst wurde das Wasserreservoir im Resonator auf maximale Resonanz eingestellt. Dann wurde das Hörrohr benützt und constatiert, dass die Tonstärke in den Bäuchen nicht vollständig Null war. Um zu untersuchen, ob durch die Wand des Hörrohres Schall eindringe, wurde das untere

Ende dieses Rohres mit Watte verstopft. Der Ton wurde unhörbar.

Nun wurde der Pfropfen wieder entfernt und das Rohr eingeschoben, bis es die Wasserfläche berührte, wobei etwas Wasser infolge der Capillarität in das Rohr eindrang.

Auch jetzt blieb der Ton aus. Nun wurde das Rohrende auf ein Minimum der Schallstärke, also in die Nähe eines Bauches eingestellt und dann abwechselnd das Wasserniveau und das Hörrohr etwas verschoben.

So gelang es endlich, den Ton im Bauche unhörbar zu machen. Es war erst jetzt die richtige Einstellung des Wasserniveaus getroffen. Da das Rohr nur $^3/_4$ Wellenlänge lang war, konnte zur Bestimmung nur ein, nämlich der untere, Wellenbauch verwendet werden.

Die Entfernung dieses vom Wasser war 19·1 *cm*.

Nachdem die zugehörigen Stellungen des Schlittens markiert waren, wurde diese Distanz nach oben zweimal aufgetragen.

Dadurch gelangte ich zum oberen Knoten und zum oberen Wellenbauche. Bei Einstellung auf den letzteren war das Ende des Hörrohres bereits circa 2 *cm* ober der Mündung des Resonators neben der Stimmgabelzinke, und in der That war hier nahezu kein Ton zu vernehmen.

Diese Untersuchung scheint mir das Recht zu geben, Wasser als ein praktisch total reflectierendes Medium aufzufassen, und ich nehme an, dass in diesem Resonator $\mathrm{Am}(\delta p) = 2\varkappa \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ sei, wobei die x vom oberen Wellenbauche zu rechnen sind.

Will man nun zwei Töne derselben Höhe, auf welche der Resonator gestimmt ist, vergleichen, so genügt es, das Hörrohr solange zu verschieben, bis Gleichheit der Tonstärke mit dem einen der beiden Töne eintritt, und man liest an einem neben dem Schlitten angebrachten Maßstabe den Wert x_1 ab. Es ist $\mathrm{Am}(\delta p)_1 = 2\varkappa \sin \frac{2\pi}{\lambda} x_1$. Ebenso bildet man nach dem zweiten Tone $\mathrm{Am}(\delta p)_2 = 2\varkappa \sin \frac{2\pi}{\lambda} x_2$ und erhält schließlich:

$$\frac{\mathrm{Am}\,(\delta p)_1}{\mathrm{Am}\,(\delta p)_2} = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} x_1}{\sin \frac{2\pi}{\lambda} x_2} = \frac{\sin 360 \frac{x_1^0}{\lambda}}{\sin 360 \frac{x_2^0}{\lambda}}.$$

Bei Einführung von $\lambda = 76 \cdot 4$ *cm* erhält man

$$\frac{\mathrm{Am}\,(\delta p)_1}{\mathrm{Am}\,(\delta p)_2} = \frac{\sin 4 \cdot 71 x_1^0}{\sin 4 \cdot 71 x_2^0}.$$

Dabei sind die eventuellen negativen Vorzeichen nicht zu berücksichtigen.

Zweiter Versuch.

Ein beiderseits offenes Glasrohr von ungefähr derselben Weite wie das vorige wurde an einem Ende mit einer aufgekitteten Fassung versehen.

Es wurden zwei kurze Stücke Messingrohr ausgewählt, welche sich ineinanderschieben ließen.

Das weitere und kürzere der beiden hatte einen etwas größeren Durchmesser als das Glasrohr und wurde auf dieses so aufgekittet, dass etwa die Hälfte seiner Länge über das Glasrohr vorstand. Wurde dann das engere Messingrohr, dem ein Boden eingelöthet wurde, in diese Fassung eingeschoben, bis es das Glas berührte, so war die Gesammtlänge des Rohres definiert.

Nun wurde der Versuch von früher wiederholt. Es wurde in die untere Messingfassung Wasser eingegossen und dessen Niveau, sowie die Stellung eines von oben eingeführten Hörrohres solange geändert, bis der Ton nicht mehr wahrnehmbar wurde. Der nunmehrige Wasserstand wurde durch eine eingekratzte Marke notiert, das Probierrohr an seiner Stelle, d. h. im unteren Wellenbauche, dauernd fixiert, die Entfernung bis zum nächsten Knoten aufgetragen und daselbst das Ende eines zweiten Hörrohres eingestellt.

Nach dieser Vorbereitung wurde ein zweites Messingrohr, welches sich ebenfalls in die Fassung einschieben ließ, im Inneren mit einer Marke versehen, die ebenso weit von dem einen Ende entfernt war wie in dem ersten Rohre jene, welche

den Wasserstand bezeichnete. Ferner waren eine Anzahl Ringe vorbereitet, welche in dieses Rohr eingeschoben werden konnten und zur Aufnahme der zu untersuchenden reflectierenden Materialien dienten. Letztere wurden in die Ringe eingekittet und dann bis zur Marke eingeschoben, wodurch die Länge des Resonators ungeändert blieb.

Nun wurden beide Resonatoren mit ihren Gestellen am Experimentiertische nebeneinander angeschraubt und die Stimmgabel zwischen beiden Resonatoren befestigt, so dass in jeden derselben die von je einer der Zinken ausgehenden Wellen gelangten.

Ein beiderseits gegabeltes Rohr wurde einerseits mit Schläuchen versehen, die in die Gehörgänge führten, anderseits durch zwei weitere Schläuche mit den Hörrohren der Resonatoren verbunden.

Das Vergleichen erfolgte, indem diese letzteren Schläuche abwechselnd zwischen den Fingern zusammengedrückt wurden. Die Stellung der Stimmgabel zwischen den Resonatoren wurde noch so gewählt, dass bei Anwendung von Wasser als reflectierendes Medium in beiden Resonatoren die Tonstärken in den Knoten merklich gleich wurden. Bei Anwendung anderer reflectierender Medien war die Tonstärke im Knoten kleiner. Dagegen nahm jene in den Bäuchen zu, je geringer das Reflexionsvermögen war.

Um die Stellen gleicher Tonstärke im Vergleichsresonator zu finden, wurde das Hörrohr einmal nach der Richtung der abnehmenden und dann nach jener der zunehmenden Tonstärke verschoben.

Bezeichnen x_1 und x_2 die beiden Einstellungen, so kann man setzen

$$\text{Am}\,(\delta p)+\varepsilon = 2l \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1$$

$$\text{Am}\,(\delta p)-\varepsilon = 2l \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2.$$

Woraus folgt: $\text{Am}(\delta p) = l\left(\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 + \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2\right)$ oder,

wenn man $\cos\frac{\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) = 1$ setzt: $\text{Am}(\delta p) = 2l\sin\frac{\pi}{\lambda}(x_1 + x_2)$.

Setzen wir für $\lambda = 76\cdot 4\,cm$ seinen Wert ein und ersetzen wir das Bogenmaß durch das Winkelmaß, so folgt:

$$\text{Am}\,(\delta p) = 2\,l \sin 2\cdot 35(x_1 + x_2)^0.$$

Es sollen im folgenden die Ablesungen im Knoten mit y_1 und y_2 und jene im Bauche mit x_1 und x_2 bezeichnet werden. Wir erhalten somit:

$$\frac{\text{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{4}}}{\text{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{2}}} = \frac{\sin 2\cdot 35(y_1 + y_2)}{\sin 2\cdot 35(x_1 + x_2)} = Q$$

$$\alpha = \frac{2}{1+Q}.$$

Betrachten wir nun nochmals die Gleichungen

$$\text{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{4}} = \sqrt{\alpha}\,\sqrt{2-\alpha} \quad \text{und} \quad \text{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{\alpha}\,\frac{\alpha}{\sqrt{2-\alpha}},$$

so können wir, wenn α klein ist, also das Medium, welches den Boden des Resonators bildet, gut reflectiert, annäherungsweise setzen:

$$\text{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(4-\alpha) \qquad \text{Am}\,(\delta p)_{\frac{\lambda}{2}} = 2\sqrt{2\alpha}\,\frac{\alpha}{4-\alpha}.$$

Da wir noch α neben der Größe 4 vernachlässigen können, so zeigt sich, dass in diesem Fälle die Tonstärke in den Knoten durch die Natur des Bodens des Resonators nicht merklich beeinflusst werden kann. Jene im Wellenbauche ist dann dem α proportional.

Die Einstellung des Hörrohres auf diese geringe Tonstärke ist nur durch sehr kleine Verschiebungen ausführbar und da meine Vorrichtung infolge des Mangels einer Mikrometerschraube eine so genaue Einstellung nicht ermöglichte, musste ich bisher auf die Bestimmung von α bei sehr gut reflectierenden Körpern verzichten. Doch konnte ich den Ton im Wellenbauche bei Anwendung harten Holzes oder Bleches als reflectierendes Medium sehr wohl wahrnehmen.

Ich beschränkte mich also vorläufig auf die Bestimmung von α für Kork, Kork mit Tuchüberzug und ein 2 *mm* dünnes Tannenbrettchen.

Dabei ergaben sich folgende Resultate:

Material	y_1	y_2	x_1	x_2	Q	α
Kork	30·1	31·6	38·5	38·7	23·15	0·083
Tuch	28·1	29·9	39·7	39·1	7·65	0·231
Tannenholz..	25·3	26·1	40·2	40·4	5·25	0·381

Hier ist der hohe Wert des α für das Tannenbrettchen überraschend. Dieser Wert ist wohl eine Folge der Transversalschwingungen des Brettchens.

Es möge mir gestattet werden, einstweilen nur diese wenigen Messungen zur Illustration der Methode anzuführen. An dem von mir verwendeten Apparate sind noch viele mechanische Vervollkommnungen zu treffen. Auch ist es erwünscht, die Methode zu einer Nullmethode zu machen, indem man die von beiden Resonatoren in die Hörrohre gesandten Wellenzüge unter Einschaltung einer veränderbaren Wegstrecke zur Interferenz bringt. Dies gelingt besser mit kurzen Wellen, etwa durch solche, die mittels eines longitudinal schwingenden Stahles hervorgebracht werden.

Ich werde über die weiteren Ergebnisse in einer späteren Publication berichten.

Über die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in einaxig-krystallinischen Medien

von

Dr. **Josef Grünwald** in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Einleitung.

Bei der Untersuchung der Wellenbewegungen in einem unbegrenzt gedachten Medium von gegebener Beschaffenheit sind es vor allem folgende zwei eng mit einander verknüpfte Aufgaben, deren Lösung von der mathematischen Theorie verlangt wird:

I. Es wird gefragt nach der Ausbreitung eines vorgeschriebenen Anfangszustandes des Mediums bei Abwesenheit äußerer störender Einwirkungen.

II. Es wird gefragt nach der Wellenbewegung, welche in einem anfänglich ruhenden Medium durch gegebene äußere störende Einwirkungen hervorgerufen wird.

Für die Lichtwellen in optisch zweiaxigen krystallinischen Medien ist es bisher nicht gelungen, diese Aufgaben zu lösen. Der von Frau Sophie Kowalewski (Acta Mathematica, Band VI: »Über die Brechung des Lichtes in krystallinischen Mitteln«) unternommene Versuch, die Aufgabe I für optisch zweiaxige Medien zu lösen, muss als missglückt bezeichnet werden. Es hat nämlich Volterra (Acta Mathematica, Bd. XVI: »Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents«) nachgewiesen, dass die von Frau Kowalewski ihrer Unter-

suchung zugrunde gelegten Lamé'schen particulären Integrale[1] der Bewegungsgleichungen sich längs gewisser Unstetigkeitsflächen sprungweise ändern, und damit die Unrichtigkeit der von Frau Kowalewski gefundenen Resultate, bei deren Ableitung dieses unstetige Verhalten der Lamé'schen Integrale nicht berücksichtigt worden war, dargethan.

In Anbetracht der großen analytischen Schwierigkeiten, welche der Lösung der Aufgaben I und II für optisch zweiaxige Medien noch entgegenstehen, dürfte es nicht ohne Nutzen sein, diese Aufgaben vorerst einmal für den speciellen Fall eines einaxig-krystallinischen Mediums zu erledigen. Dies ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Mit den hier zu untersuchenden Wellenbewegungen beschäftigt sich auch eine Abhandlung von Brill (Mathematische Annalen, Band I: »Über die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen«); doch werden dort nur allgemeine Integralausdrücke der Bewegungsgleichungen aufgestellt, ohne dass auf die oben mit I und II bezeichneten Aufgaben eingegangen würde.

In vorliegender Arbeit werden zunächst die elastischen Wellen in einem Medium von besonderer Beschaffenheit, dann in einem allgemeinen Medium unter der Voraussetzung, dass Compressionen und Dilatationen des Mediums ausgeschlossen sind, untersucht und die Lösung der Aufgaben I und II für diese Wellen gegeben. Es ergibt sich das bemerkenswerte Resultat, dass von einer Erregungsstelle aus nicht nur — wie bekannt — ordinäre und extraordinäre Wellen sich fortpflanzen, dass vielmehr noch eine dritte Art von Wellen hinzukommt: die »intermediären« Wellen, welche in jedem Augenblicke den zwischen der ordinären und der extraordinären Wellenfläche enthaltenen Raumtheil erfüllen und so mit den genannten Wellenflächen fortschreiten.

Sodann werden die Aufgaben I und II für elektromagnetische Wellenbewegungen gelöst, wobei sich analoge Resultate ergeben. Die Lösung der Aufgabe II drückt sich in Formeln

---

[1] Vergl. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Vingt-troisième leçon.

aus, welche geradeso gebaut sind wie jene Formeln, mit welchen die alte Fernwirkungstheorie die Wirkung gegebener Ladungen und Ströme darstellt. Es zeigt sich, dass von den verschiedenen Erregungsstellen aus das Vectorpotential in ordinären, extraordinären und intermediären Wellen sich fortpflanzt, während das scalare Potential von denjenigen Stellen, an welchen wahre elektrische Ladungen vorhanden sind, lediglich in extraordinären Wellen fortschreitet.

Erster Theil.

Die elastischen Wellen in einaxig-krystallinischen Medien.

§. 1. Bei Zugrundelegung des Green'schen Ausdruckes für das Potential der inneren elastischen Kräfte lauten die Differentialgleichungen der Bewegung für ein homogenes, krystallinisches, zusammendrückbares Medium, wenn dieses zunächst noch als ein optisch zweiaxiges angenommen wird:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + X \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} + g^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + Y \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + g^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + Z,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Hierin bedeuten (u, v, w) die Componenten der elastischen Verschiebung an irgendeiner Stelle, (X, Y, Z) die Componenten der störenden äußeren Kraft an dieser Stelle pro Masseneinheit; a, b, c, g sind constante, dem Medium eigenthümliche Geschwindigkeiten.

Bei einem einaxig-krystallinischen Medium sind zwei von den Größen a, b, c, etwa a und b, einander gleich.[1] Die obigen Differentialgleichungen lassen sich dann auf folgende einfachere Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u + (a^2 - c^2) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (g^2 - a^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} + X \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v - (a^2 - c^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (g^2 - a^2) \frac{\partial \theta}{\partial y} + Y \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w + (g^2 - a^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} + Z,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

gesetzt wird.

Die Untersuchung der durch das System (2) dargestellten elastischen Wellen gestaltet sich besonders einfach, wenn man es mit einem Medium zu thun hat, bei welchem $a = g$ ist. Daher soll mit der Betrachtung eines derartigen Mediums begonnen werden, und zwar empfiehlt es sich, die Aufgabe II vor der Aufgabe I zu behandeln, da aus der Lösung der ersteren sich die Lösung der letzteren in ungezwungener Weise ergibt.

1. Capitel.

Die Aufgabe II für ein einaxig-krystallinisches, elastisches Medium von der besonderen Beschaffenheit $g = a$.

§. 2. Die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung (2) nehmen für $g = a$ die einfachere Form an:

[1] Bei dieser Annahme ist die z-Achse des zugrundegelegten rechtwinkeligen Coordinatensystems parallel zur krystallographischen Achse des Mediums.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + X \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + Y \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w + Z.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Zur größeren Bequemlichkeit der Ausdrucksweise möge jetzt die folgende Bezeichnung eingeführt werden:

Wenn irgend eine Function von x, y, z, t die Eigenschaft besitzt, zu verschwinden, wenn $t < \tau_0$ ist, wo τ_0 eine constante Größe bedeutet, so soll diese Eigenschaft dadurch bezeichnet werden, dass man sagt, die betreffende Function genüge der Anfangsbedingung (α).

Die Aufgabe II ist dann gleichbedeutend mit der Forderung, das System (3) zu integrieren durch solche Functionen (u, v, w), welche der Anfangsbedingung (α) genügen; unter der Voraussetzung, dass X, Y, Z gegebene eindeutige Functionen von x, y, z, t sind, welche ihrerseits die Anfangsbedingung (α) erfüllen. Um die Aufgabe II zu einer lösbaren zu machen, ist es ferner nothwendig anzunehmen, dass die Functionen X, Y, Z gewissen Stetigkeitsbedingungen unterworfen sind, und zwar soll angenommen werden, dass diese Functionen endlich, stetig und differenzierbar seien, desgleichen ihre ersten Ableitungen, und dass ihre zweiten Ableitungen endlich und stetig seien. Von einer Function, welche den eben mit Bezug auf X, Y, Z gemachten Annahmen entspricht, soll gesagt werden, sie genüge den Stetigkeitsbedingungen (β).

Es würde zwar vom principiellen Standpunkte aus keine nennenswerte Erschwerung der folgenden Untersuchung bedeuten, wenn man eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsflächen zulassen würde, bei welchen eine sprungweise Änderung der Functionen X, Y, Z, beziehungsweise ihrer Ableitungen erfolgt; doch soll hier im Interesse einer größeren Einfachheit und Durchsichtigkeit der Rechnung das Vorhandensein solcher Unstetigkeitsflächen ausgeschlossen bleiben, zumal es ja bei derartigen Untersuchungen üblich ist, Unstetigkeiten als Grenzfälle von sehr raschen, aber continuierlichen Übergängen anzusehen.

§. 3. Im folgenden wird Gebrauch gemacht werden von einem Satze,[1] der unter anderen von Beltrami in der Abhandlung: »Sull' espressione analitica del principio di Huyghens« (Rend. della R. Acc. dei Lincei 1892, Serie V, Vol. I, 1⁰ Sem.) abgeleitet wird (S. 103 bis 105). Dieser Satz kann, mit einer unwesentlichen Änderung der Bezeichnungsweise, so ausgesprochen werden: Ist $k(x, y, z, t)$ eine den Bedingungen (α) und (β) genügende Function, so wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U + k,$$

wo

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

integriert durch:

$$U = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint k\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right) \frac{dx'dy'dz'}{r},$$

wo $r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$, und die Integrationen nach x', y', z' von $-\infty$ bis ∞, also über den ganzen unendlichen Raum zu erstrecken sind.

Es ist klar, dass die obige Lösung U der in Rede stehenden Differentialgleichung den Bedingungen (α) und (β) genügt (aus der Untersuchung von Beltrami geht auch hervor, dass diese Lösung die einzige mit den genannten Bedingungen verträgliche ist).

Aus dem eben angeführten Satze kann nun leicht, indem man mit den unabhängigen Veränderlichen x, y, z eine einfache lineare Substitution vornimmt, ein anderer, unten zu benutzender Satz abgeleitet werden:

Ist $\bar{k}(x, y, z, t)$ eine den Bedingungen (α) und (β) genügende Function, so wird die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \bar{k},$$

---

[1] Vergleiche hierüber auch: Lord Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neese, II. Band, §. 276.

wo c eine reelle Constante ist, integriert durch:

$$\overline{U} = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint \overline{k}\left(x', y', z', t - \frac{\rho}{a}\right) \frac{dx'dy'dz'}{\rho},$$

wo

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x'-x)^2 + \frac{a^2}{c^2}(y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

und die Integrationen nach x', y', z' wieder von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken sind. Die obige Lösung $\overline{U}$ genügt den Bedingungen (α) und (β) (und zwar ist sie die einzige mit diesen Bedingungen verträgliche Lösung).

§. 4. Nunmehr soll die Integration des Systems (3) in Angriff genommen werden, wobei die gesuchten Integrale u, v, w der Bedingung (α) genügen müssen.

Die dritte Gleichung im Systeme (3) kann auf Grund des oben Gesagten sofort integriert werden. Man findet:

$$w = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint Z\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right) \frac{dx'dy'dz'}{r}. \tag{4}$$

Um die beiden ersten Gleichungen des Systems (3) kürzer schreiben zu können, setze man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= D_1\{u, v\} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \Delta v + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= D_2\{u, v\}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hiebei ist zu bemerken, dass man den Ausdrücken D_1 und D_2 noch eine andere Form geben kann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= D_1\{u, v\} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= D_2\{u, v\}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Die beiden ersten Gleichungen des Systems (3) können jetzt geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} D_1\{u, v\} &= X \\ D_2\{u, v\} &= Y \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Die Integration dieses Systems durch Functionen (u, v), welche der Bedingung (α) genügen, kann zunächst in zwei besonderen Fällen leicht bewerkstelligt werden:

Erstens, wenn an die Stelle von X, Y in $(3')$ die Functionen X_1, Y_1 treten, welche außer den Bedingungen (α) und (β) noch der Beziehung:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

genügen.

Zweitens, wenn an die Stelle von X, Y in $(3')$ die Functionen X_2, Y_2 treten, welche außer den Bedingungen (α) und (β) noch der Beziehung:

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

genügen.

§. 5. Im ersteren Falle findet man die gesuchten Lösungen des Systems:

$$\left.\begin{array}{l} D_1\{u, v\} = X_1 \\ D_2\{u, v\} = Y_1 \end{array}\right\} \tag{8}$$

durch folgende Überlegung: Sind u, v die der Anfangsbedingung (α) genügenden Lösungen von (8), dann erfüllt der Ausdruck $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, welcher für den Augenblick mit $\overline{U}$ bezeichnet sei, die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2},$$

wie sich ohne Schwierigkeit aus (8) mit Rücksicht auf $(5')$ und (6) ergibt.[1] Da $\overline{U}$ natürlich auch der Bedingung (α) genügt, so folgt aus dem in §. 3 Gesagten, dass $\overline{U}$ verschwindet, indem die dort mit $\overline{k}$ bezeichnete Größe hier den Wert Null hat. Trägt man die Beziehung:

$$\overline{U} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

in (8) ein, so nimmt dieses System mit Rücksicht auf (5) die einfachere Form an:

[1] Hiebei wird provisorisch angenommen, dass die dritten Ableitungen von u, v und also auch die zweiten Ableitungen von $\overline{U}$ wirklich existieren sollen.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u + X_1 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v + Y_1.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Nach §. 3 wird dieses System unter Erfüllung der Anfangsbedingung (α) integriert durch:

$$\left.\begin{aligned} u = u_1 &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint X_1\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right) \frac{dx'dy'dz'}{r} \\ v = v_1 &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint Y_1\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right) \frac{dx'dy'dz'}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Functionen $u = u_1$, $v = v_1$ genügen thatsächlich der Beziehung $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ und mithin auch dem Systeme (8).

§. 6. In ganz analoger Weise findet man die der Anfangsbedingung (α) entsprechenden Integrale des Systems:

$$\left.\begin{aligned} D_1(u, v) &= X_2 \\ D_2(u, v) &= Y_2. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Sind u, v die gesuchten Integrale von (11), so erfüllt der Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, welcher für den Augenblick mit U bezeichnet sei, die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U,$$

wie sich ohne Schwierigkeit aus (11) mit Rücksicht auf (5) und (7) ergibt.[1] Da U auch der Bedingung (α) genügt, so folgt nach §. 3:

$$U \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

indem die dort mit k bezeichnete Größe hier den Wert Null hat. Trägt man die Beziehung $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ in (11) ein, so

[1] Hiebei wird wieder provisorisch angenommen, dass die dritten Ableitungen von u, v und also auch die zweiten Ableitungen von U wirklich existieren sollen.

nimmt dieses System mit Rücksicht auf (5′) die einfachere Form an:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + X_2 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Y_2 .\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Nach §. 3 wird dieses System unter Erfüllung der Anfangsbedingung (α) integriert durch:

$$\left.\begin{aligned}u = u_2 &= \frac{1}{4\pi c^2} \iiint X_2\left(x', y', z', t - \frac{\rho}{a}\right) \frac{dx'dy'dz'}{\rho} \\ v = v_2 &= \frac{1}{4\pi c^2} \iiint Y_2\left(x', y', z', t - \frac{\rho}{a}\right) \frac{dx'dy'dz'}{\rho} .\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Functionen $u = u_2$ und $v = v_2$ genügen thatsächlich der Beziehung $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ und mithin auch dem Systeme (11).

§. 7. Die Integration des allgemeinen Systems:

$$\left.\begin{aligned}D_1(u, v) &= X \\ D_2(u, v) &= Y\end{aligned}\right\} \quad (3')$$

kann nun auf die Integration der eben behandelten speciellen Systeme (8) und (11) zurückgeführt werden. Es werde jetzt die Annahme (γ) gemacht — die sich später als überflüssig herausstellen wird — dass die Functionen X, Y nur in einem begrenzten endlichen Raumtheile von Null verschieden seien; d. h. es soll sich eine Kugel von solcher Größe angeben lassen, dass außerhalb derselben die Functionen X, Y zu jeder Zeit verschwinden. Dann kann man sicherlich die Functionen (X, Y) in folgender Weise zerlegen:

$$\left.\begin{aligned}X &= X_1 + X_2 \\ Y &= Y_1 + Y_2 ,\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

so zwar, dass die Functionen (X_1, Y_1) der Bedingung (6), die Functionen (X_2, Y_2) der Bedingung (7) genügen. Man gelangt zu dieser Zerlegung, indem man setzt:

$$X_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$Y_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

und die Function Φ so bestimmt, dass die Bedingung:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \tag{15}$$

erfüllt wird. Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass Φ der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

genüge. Nach der Lehre vom logarithmischen Potential wird dieser Gleichung genügt durch jene Function $\Phi(x, y, z, t)$, deren Wert in irgend einem »Aufpunkte« (x', y', z') zur Zeit t' gegeben ist durch die Formel:

$$\Phi(x', y', z', t') = -\frac{1}{2\pi}\iint \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right]\Bigg|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx'' dy'',$$

wo die Integration nach x'' und y'' von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist; der Buchstabe l bedeutet den natürlichen Logarithmus, R_{12} ist eine abkürzende Bezeichnung für: $R_{12} = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}$; der Substitutionsstrich $|^{x'', y'', z', t'}$ soll anzeigen, dass in dem vorangehenden Ausdrucke die Argumente x, y, z, t durch x'', y'', z', t' zu ersetzen sind. — Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} p_1(x', y', z', t') &= \frac{1}{2\pi}\iint X|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx'' dy'' \\ p_2(x', y', z', t') &= \frac{1}{2\pi}\iint Y|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx'' dy'', \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

so kann die obige Formel weiter geschrieben werden:

$$\Phi(x', y', z', t') = -\left(\frac{\partial p_1}{\partial x'} + \frac{\partial p_2}{\partial y'}\right).$$

In der That, wenn man in der letzteren Gleichung rechts die dort auftretenden Differentialquotienten der Größen p_1 und p_2 wirklich berechnet und einsetzt, ergibt sich nach einer einfachen partiellen Integration, dass die rechte Seite der letzteren Gleichung genau mit der rechten Seite der ursprünglich für $\Phi(x', y', z', t')$ gefundenen Formel übereinstimmt.

Für die Functionen X_1 und Y_1 ergeben sich hieraus die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} X_1(x', y', z', t') &= \frac{\partial \Phi(x', y', z', t')}{\partial x'} = -\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial x' \partial y'}\right) \\ Y_1(x', y', z', t') &= \frac{\partial \Phi(x', y', z', t')}{\partial y'} = -\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y'^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Offenbar genügen die so bestimmten Functionen $X_1(x, y, z, t)$ und $Y_1(x, y, z, t)$ der Bedingung (6). Die Größen X_2 und Y_2 sind aus (14) zu berechnen; man hat also zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X - X_1 \\ Y_2 &= Y - Y_1 . \end{aligned}\right\} \quad (14')$$

Die so bestimmten Functionen $X_2(x, y, z, t)$ und $Y_2(x, y, z, t)$ genügen dann von selbst der Bedingung (7):

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} = 0,$$

wie sich aus (14') und (15) sofort ergibt. Es ist also die oben behauptete Zerlegung der Functionen X, Y thatsächlich geleistet.

§. 8. Die Functionen X_1, Y_1 und X_2, Y_2 genügen offenbar — wie die Functionen X, Y — der Anfangsbedingung (α); hingegen ist es nicht möglich, auf Grund der bisher gemachten Voraussetzungen nachzuweisen, dass diese Functionen den Stetigkeitsbedingungen (β) genügen. Es soll daher jetzt zu den bisher in Bezug auf die Functionen (X, Y) gemachten Voraussetzungen noch eine weitere Annahme (δ) hinzugefügt werden — welche später gleich der Annahme (γ) sich als überflüssig herausstellen wird — dahingehend, dass auch die zweiten und dritten Ableitungen der Functionen X, Y

endlich, stetig und differenzierbar, und dass die vierten Ableitungen endlich und stetig sein sollen. Schreibt man statt x, y, z, t für den Augenblick x_1, x_2, x_3, x_4, so erhält man aus (16) durch Differentiation und partielle Integration folgende Formeln:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x'_i} = \frac{1}{2\pi}\iint\left[\frac{\partial X}{\partial x_i}\right]\Bigg|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx'' dy'',$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x'_i \partial x'_j} = \frac{1}{2\pi}\iint\left[\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right]\Bigg|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx'' dy'',$$

$$\frac{\partial^3 p_1}{\partial x'_i \partial x'_j \partial x'_k} = \frac{1}{2\pi}\iint\left[\frac{\partial^3 X}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right]\Bigg|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx'' dy'',$$

$$\frac{\partial^4 p_1}{\partial x'_i \partial x'_j \partial x'_k \partial x'_l} = \frac{1}{2\pi}\iint\left[\frac{\partial^4 X}{\partial x'_i \partial x'_j \partial x'_k \partial x'_l}\right]\Bigg|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx'' dy''$$

und analoge Formeln für die Ableitungen der Function p_2. Hieraus geht hervor, dass die Functionen p_1 und p_2 nebst ihren ersten, zweiten, dritten und vierten Ableitungen endlich, stetig und differenzierbar sind. Da nun nach (17) die Functionen $X_1(x', y', z', t')$ und $Y_1(x', y', z', t')$ durch die zweiten Ableitungen von p_1 und p_2 linear-homogen sich darstellen, so folgt, dass die Functionen X_1 und Y_1 nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen endlich, stetig und differenzierbar sind; es werden mithin die Bedingungen (β) von den Functionen X_1, Y_1 erfüllt. Aus (14′) ist zu ersehen, dass dann auch die Functionen X_2, Y_2 die Bedingungen (β) erfüllen.

§. 9. Das allgemeine System (3′) wird nun unter Erfüllung der Anfangsbedingung (α) integriert, indem man aus dem speciellen Systeme:

$$\left.\begin{aligned} D_1(u_1, v_1) &= X_1 \\ D_2(u_1, v_1) &= Y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

die der Anfangsbedingung (α) entsprechenden Lösungen (u_1, v_1) bestimmt (nach §. 5), ferner aus dem speciellen Systeme:

$$\left.\begin{aligned} D_1(u_2, v_2) &= X_2 \\ D_2(u_2, v_2) &= Y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

die der Anfangsbedingung (α) entsprechenden Lösungen (u_2, v_2) ermittelt (nach §. 6); die Functionen:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ v &= v_1 + v_2 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

sind dann offenbar die gesuchten Lösungen des allgemeinen Systems (3′).

Für (u_1, v_1) ergibt sich aus (10) und (17):

$$u_1(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 p_2}{\partial x'\partial y'}\right)_{t'=t-\frac{r}{a}}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz',$$

$$v_1(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x'\partial y'}+\frac{\partial^2 p_2}{\partial y'^2}\right)_{t'=t-\frac{r}{a}}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz'; \qquad \ldots(19)$$

ferner für (u_2, v_2) aus (13), (17) und (14′):

$$u_2(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\left\{\begin{aligned} &\iiint X\left(x',y',z',t-\frac{\rho}{a}\right)\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz' \\ &+\iiint\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 p_2}{\partial x'\partial y'}\right)_{t'=t-\frac{\rho}{a}}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz', \end{aligned}\right.$$

$$v_2(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\left\{\begin{aligned} &\iiint Y\left(x',y',z',t-\frac{\rho}{a}\right)\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz' \\ &+\iiint\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x'\partial y'}+\frac{\partial^2 p_2}{\partial y'^2}\right)_{t'=t-\frac{\rho}{a}}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz'. \end{aligned}\right. \qquad \ldots(20)$$

Setzt man, wenn $i = 1, 2$:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint (p_i)_{t'=t-\frac{r}{a}}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz' = q_i(x,y,z,t) \\ &\iiint (p_i)_{t'=t-\frac{\rho}{a}}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz' = \mathfrak{q}_i(x,y,z,t), \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

so findet man leicht durch Differentiation in Verbindung mit partieller Integration:

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \iiint \left(\frac{\partial p_i}{\partial x'_j}\right)_{t'=t-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{r}\, dx'dy'dz',$$

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j \partial x_k} = \iiint \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial x'_j \partial x'_k}\right)_{t'=t-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{r}\, dx'dy'dz',$$

wenn für den Augenblick statt $x, y, z \ldots x_1, x_2, x_3$ gesetzt wird, und ebenso:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{q}_i}{\partial x_j} = \iiint \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial x'_j}\right)_{t'=t-\frac{\rho}{a}} \cdot \frac{1}{\rho}\, dx'dy'dz',$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{q}_i}{\partial x_j \partial x_k} = \iiint \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial x'_j \partial x'_k}\right)_{t'=t-\frac{\rho}{a}} \cdot \frac{1}{\rho}\, dx'dy'dz'.$$

Mit Rücksicht auf diese Formeln können jetzt die Systeme (19) und (20) einfacher geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,y,z,t) &= -\frac{1}{4\pi a^2}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial x \partial y}\right) \\ v_1(x,y,z,t) &= -\frac{1}{4\pi a^2}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (19')$$

$$u_2(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{q}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{q}_2}{\partial x \partial y}\right) + \iiint X\left(x',y',z',t-\frac{\rho}{a}\right)\frac{dx'dy'dz'}{\rho}\right]$$

$$v_2(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{q}_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{q}_2}{\partial y^2}\right) + \iiint Y\left(x',y',z',t-\frac{\rho}{a}\right)\frac{dx'dy'dz'}{\rho}\right]$$

$$\ldots (20')$$

Setzt man ferner:

$$\frac{\mathfrak{q}_i}{c^2} - \frac{q_i}{a^2} = Q_i, \qquad (22)$$

$$(i = 1, 2)$$

so lauten nach (18) die gesuchten Lösungen des allgemeinen Systems (3'):

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{c^2}\int\!\!\int\!\!\int X\left(x',y',z',t-\frac{\rho}{a}\right)\frac{dx'dy'dz'}{\rho}\right]$$

$$v(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^2} + \frac{1}{c^2}\int\!\!\int\!\!\int Y\left(x',y',z',t-\frac{\rho}{a}\right)\frac{dx'dy'dz'}{\rho}\right] \quad \ldots (23)$$

§. 10. Berechnung der Functionen q_i. — Aus (21) und (16) ergibt sich folgende Darstellung der Functionen q_i durch fünffache Integrale:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int X\Big|^{x'',y'',z',t-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{r} \cdot l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx''dy''dx'dy'dz' \\ q_2 &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int Y\Big|^{x'',y'',z',t-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{r} \cdot l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx''dy''dx'dy'dz', \end{aligned}\right\} \quad \ldots (24)$$

wo die Integrationen nach sämmtlichen Integrationsvariablen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken sind und die Größen r und R_{12} die nachstehende Bedeutung haben:

$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

$$R_{12} = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}.$$

Es soll nun zunächst der Ausdruck für q_1 vereinfacht werden durch Einführung neuer Integrationsvariabler. Man setze:

$$t - \frac{r}{a} = t',$$

also:

$$r = a(t-t').$$

Dann ist:

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2 = a^2(t-t')^2-(z-z')^2,$$

so dass man weiter setzen kann:

$$x'-x = \cos\lambda . \sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2},$$

$$y'-y = \sin\lambda . \sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}.$$

Um nun statt der ursprünglichen Integrationsvariablen x', y' die neuen t', λ einzuführen, hat man unter dem Integralzeichen $dx'dy'$ zu ersetzen durch:

$$\left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(\lambda, t')} \right| d\lambda\, dt',$$

wofür man durch eine einfache Rechnung findet:

$$a^2(t-t')\, d\lambda\, dt'.$$

Der Ausdruck für q_1 kann also geschrieben werden:

$$q_1 = \frac{a}{2\pi} \underbrace{\int\int\int}\int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{|z'-z|}{a}} \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} X \Big|^{x'', y'', z', t'} . l \frac{1}{R_{12}}\, d\lambda\, dt'\, dx''\, dy''\, dz',$$

wo die mit einer Klammer zusammengefassten drei Integralzeichen den von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstreckenden Integrationen nach x'', y'', z' entsprechen, die folgenden Integrationszeichen den Integrationen nach t' und λ; unter $|z'-z|$ ist der absolute Betrag von $z'-z$ zu verstehen.

Hier kann nun die Integration nach λ wirklich ausgeführt werden. Wenn — bei festgehaltenen Werten der übrigen Integrationsvariablen — λ das Wertsystem von 0 bis 2π durchläuft, so bleibt hiebei $X|^{x'', y'', z', t'}$ constant; der Punkt (x', y', z') beschreibt in der Ebene $z' = \text{const.}$ einen Kreis K vom Radius $\sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}$ um den Punkt (x, y, z') als Mittelpunkt. Das Integral

$$\int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} X \Big|^{x'', y'', z', t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) d\lambda$$

ist nun nichts anderes als das logarithmische Potential einer auf dem Kreise K gleichmäßig ausgebreiteten Massenschicht von der Gesammtmasse $2\pi X|^{x'', y'', z', t'}$ in Bezug auf den Punkt (x'', y'', z'). Bei der Auswertung dieses Potentials sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Der Punkt (x'', y'', z') kann innerhalb des Kreises K liegen; dies ist der Fall, wenn:

$$a^2(t-t')^2-(z'-z)^2 > (x''-x)^2+(y''-y)^2$$

oder, was dasselbe ist, wenn:

$$t-t' > \frac{r''}{a}, \quad \text{also} \quad t' < t - \frac{r''}{a},$$

wo $r'' = \sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z'-z)^2}$.

b) Der Punkt (x'', y'', z') kann außerhalb des Kreises K liegen; dies ist der Fall, wenn:

$$t-t' < \frac{r''}{a}, \quad \text{also} \quad t' > t - \frac{r''}{a}.$$

Im Falle *a)* hat das in Rede stehende Potential den Wert:

$$2\pi X\Big|^{x'', y'', z', t'} l\left(\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}}\right),$$

im Falle *b)* den Wert:

$$2\pi X\Big|^{x'', y'', z', t'} l\left(\frac{1}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2}}\right).$$

Der obige Ausdruck für q_1 kann hiernach jetzt als die Summe zweier vierfacher Integrale dargestellt werden:

$$q_1 = a\left\{\begin{aligned} &\iiint \int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{r''}{a}} X\Big|^{x'', y'', z', t'} l\left(\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t')^2-(z'-z)^2}}\right) dt'dx''dy''dz' \\ &+\iiint \int_{t'=t-\frac{r''}{a}}^{t'=t-\frac{|z'-z|}{a}} X\Big|^{x'', y'', z', t'} l\left(\frac{1}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2}}\right) dt'dx''dy''dz'. \end{aligned}\right.$$

In den Integralen, die hier auf der rechten Seite auftreten, kommt nirgends der Buchstabe x' oder y' vor. Man kann also, da es ja bei einem bestimmten Integral auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen nicht ankommt, die Integrationsvariablen x'', y'' durch x', y' ersetzen; natürlich muss dann auch statt der Größe r'', welche in den Integrationsgrenzen vorkommt, jetzt

$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

geschrieben werden.

Man erhält so:

$$q_1 = a \left\{ \begin{aligned} & \iiint \int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|' \, l\left(\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t')^2-(z'-z)^2}}\right) dt'dx'dy'dz' \\ & + \iiint \int_{t'=t-\frac{r}{a}}^{t'=t-\frac{|z'-z|}{a}} X|' \, l\left(\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\right) dt'dx'dy'dz', \end{aligned} \right. \qquad \ldots(25)$$

wo $X|'$ in leicht verständlicher Abkürzung für $X|^{x', y', z', t'}$ gesetzt ist.

Der analoge Ausdruck für q_2 geht aus dem obigen Ausdrucke für q_1 dadurch hervor, dass man X mit Y vertauscht:

$$q_2 = a \left\{ \begin{aligned} & \iiint \int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{r}{a}} Y|' \, l\left(\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t')^2-(z'-z)^2}}\right) dt'dx'dy'dz' \\ & + \iiint \int_{t'=t-\frac{r}{a}}^{t'=t-\frac{|z'-z|}{a}} Y|' \, l\left(\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\right) dt'dx'dy'dz'. \end{aligned} \right. \qquad \ldots(25')$$

§. 11. Berechnung der Functionen $\mathfrak{q}_i$. — Aus (21) und (16) ergibt sich folgende Darstellung der Functionen $\mathfrak{q}_i$ durch fünffache Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{q}_1 &= \frac{1}{2\pi} \iiiiint X \Big|^{x'', y'', z', t-\frac{\rho}{a}} \cdot \frac{1}{\rho} \, l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx''dy''dx'dy'dz' \\ \mathfrak{q}_2 &= \frac{1}{2\pi} \iiiiint Y \Big|^{x'', y'', z', t-\frac{\rho}{a}} \cdot \frac{1}{\rho} \, l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) dx''dy''dx'dy'dz', \end{aligned} \right\} \qquad \ldots(26)$$

wo die Integrationen nach sämmtlichen Integrationsvariablen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken sind und die Größen ρ und R_{12} die nachstehende Bedeutung haben:

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x'-x)^2 + \frac{a^2}{c^2}(y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

$$R_{12} = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}.$$

Um den obigen Ausdruck für $\mathfrak{q}_1$ zu vereinfachen, setze man zunächst:

$$t - \frac{\rho}{a} = t', \quad \text{also} \quad \rho = a(t-t').$$

Dann ist:

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = \frac{c^2}{a^2}[a^2(t-t')^2 - (z'-z)^2],$$

so dass man weiter setzen kann:

$$x'-x = \frac{c}{a}\cos\lambda .\sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}$$

$$y'-y = \frac{c}{a}\sin\lambda .\sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}.$$

Es sollen nunmehr statt der Integrationsvariablen x', y' die Variablen t', λ als neue Integrationsvariable eingeführt werden; man hat zu dem Zwecke unter dem Integralzeichen $dx'dy'$ zu ersetzen durch $\left|\frac{\partial(x', y')}{\partial(\lambda, t')}\right| d\lambda dt'$, wofür man durch eine einfache Rechnung findet: $c^2(t-t')d\lambda dt'$. Der Ausdruck für $\mathfrak{q}_1$ kann also geschrieben werden:

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{c^2}{a}\underbrace{\iiint}\int_{t'=-\infty}^{t'=\frac{|z'-z|}{a}}\int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} X\Big|^{x'',y'',z',t'} . l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) d\lambda dt' dx'' dy'' dz'.$$

Hier kann nun wieder die Integration nach λ wirklich ausgeführt werden. Wenn — bei festgehaltenen Werten der übrigen Integrationsvariablen — λ das Wertsystem von 0 bis 2π durchläuft, so bleibt hiebei $X\big|^{x'', y'', z', t'}$ unverändert; der Punkt (x', y', z') beschreibt in der Ebene $z' =$ const. einen Kreis $\varkappa$ vom Radius $\frac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t')^2-(z'-z)^2}$ um den Punkt (x, y, z') als Mittelpunkt.

Das Integral

$$\int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} X\Big|^{x'',y'',z',t'} l\left(\frac{1}{R_{12}}\right) d\lambda$$

ist nun nichts anderes als das logarithmische Potential einer auf dem Kreise $\varkappa$ gleichmäßig ausgebreiteten Massenschicht von der Gesammtmasse $2\pi X|^{x'',y'',z',t'}$ in Bezug auf den Punkt (x'', y'', z'). Bei der Auswertung dieses Potentials sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Der Punkt (x'', y'', z') kann innerhalb des Kreises $\varkappa$ liegen; dies ist der Fall, wenn:

$$\frac{c^2}{a^2}[a^2(t-t')^2-(z'-z)^2] > (x''-x)^2+(y''-y)^2,$$

oder, was dasselbe ist, wenn:

$$t-t' > \frac{\rho''}{a}, \quad \text{also} \quad t' < t-\frac{\rho''}{a},$$

wo

$$\rho'' = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x''-x)^2+\frac{a^2}{c^2}(y''-y)^2+(z'-z)^2}.$$

b) Der Punkt (x'', y'', z') kann außerhalb des Kreises $\varkappa$ liegen; dies ist der Fall, wenn:

$$t-t' < \frac{\rho''}{a}, \quad \text{also} \quad t' > t-\frac{\rho''}{a}.$$

Im Falle *a)* hat das in Rede stehende Potential den Wert:

$$2\pi X\Big|^{x'',y'',z',t'} l\left(\frac{a}{c\sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}}\right),$$

im Falle *b)* den Wert:

$$2\pi X\Big|^{x'',y'',z',t'} l\left(\frac{1}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2}}\right).$$

Der obige Ausdruck für $\mathfrak{q}_1$ kann demnach jetzt als die Summe zweier vierfacher Integrale dargestellt werden:

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{c^2}{a}\left\{\begin{array}{l}\iiint\int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{\rho''}{a}} X\Big|^{x'',y'',z',t'} l\left(\frac{a}{c\sqrt{a^2(t-t')^2-(z'-z)^2}}\right) dt'dx''dy''dz' \\ +\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho''}{a}}^{t'=t-\frac{|z'-z|}{a}} Y\Big|^{x'',y'',z',t'} l\left(\frac{1}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2}}\right) dt'dx''dy''dz'.\end{array}\right.$$

Hier kann man nun wieder anstatt x'', y''... x', y' schreiben, indem man gleichzeitig ρ'' durch

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x'-x)^2 + \frac{a^2}{c^2}(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

ersetzt:

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{c^2}{a}\left\{\begin{array}{l}\iiint\int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{\rho}{a}} X\Big|' \, l\left(\frac{a}{c\sqrt{a^2(t-t')^2-(z'-z)^2}}\right) dt'dx'dy'dz' \\ +\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{|z'-z|}{a}} X\Big|' \, l\left(\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\right) dt'dx'dy'dz'.\end{array}\right. \quad \ldots(27)$$

Der entsprechende Ausdruck für die Function $\mathfrak{q}_2$ wird erhalten, indem man X mit Y vertauscht:

$$\mathfrak{q}_2 = \frac{c^2}{a}\left\{\begin{array}{l}\iiint\int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{\rho}{a}} Y\Big|' \, l\left(\frac{a}{c\sqrt{a^2(t-t')^2-(z'-z)^2}}\right) dt'dx'dy'dz' \\ +\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{|z'-z|}{a}} Y\Big|' \, l\left(\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\right) dt'dx'dy'dz'.\end{array}\right. \quad \ldots(27')$$

§. 12. Aus den Formeln (25) und (27) für q_1, $\mathfrak{q}_1$ und den Formeln (25′) und (27′) für q_2, $\mathfrak{q}_2$ ergeben sich nach (22) folgende Ausdrücke für Q_1 und Q_2:

$$Q_1 = \frac{1}{a} \left\{ \begin{array}{l} \iiint \int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{\rho}{a}} X|'.l\left(\frac{a}{c}\right) dt'dx'dy'dz' \\ + \iiint \int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|'.\chi.dt'dx'dy'dz', \end{array} \right.$$

$$\ldots (28)$$

$$Q_2 = \frac{1}{a} \left\{ \begin{array}{l} \iiint \int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{\rho}{a}} Y|'.l\left(\frac{a}{c}\right) dt'dx'dy'dz' \\ + \iiint \int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} Y|'.\chi.dt'dx'dy'dz', \end{array} \right.$$

wenn zur Abkürzung:

$$l\left(\frac{\sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\right) = \chi \qquad (28\,a)$$

gesetzt wird.

Die Formeln (23) in Verbindung mit den eben abgeleiteten Formeln (28) für die Q_i enthalten die Lösung der Aufgabe, das System (3′) — oder was dasselbe ist — die ersten zwei Gleichungen des Systems (3) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen (α) zu integrieren [die dritte Gleichung des Systems (3) ist bereits durch Formel (4) integriert]. Es sollen nunmehr die in (23) vorkommenden Ableitungen der Q_i berechnet werden.

§. 13. Zur Abkürzung führe man jetzt die Relativcoordinaten des Punktes (x', y', z') in Bezug auf den Punkt (x, y, z) ein:

$$x'-x = \mathfrak{x}, \qquad y'-y = \mathfrak{y}, \qquad z'-z = \mathfrak{z},$$

$$r = \sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}\mathfrak{x}^2 + \frac{a^2}{c^2}\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}. \qquad (29)$$

Durch die hier eingeführten Relativcoordinaten drücken sich χ und die Ableitungen von χ nach x, y in nachstehender Weise aus:

$$\chi = l\,\frac{\sqrt{a^2(t-t')^2-\mathfrak{z}^2}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}; \quad \frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}; \quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2};$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} = \frac{\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2}{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2}; \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y} = \frac{2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2}; \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} = \frac{-(\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)}{(\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)^2}. \qquad \ldots(30)$$

Die Function Q_1 kann, indem man setzt:

$$\int_{t'=-\infty}^{t'=t-\frac{\rho}{a}} X|'\,l\left(\frac{a}{c}\right)dt' + \int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|'.\chi\,dt' = F(x,y,z,t;x',y',z'),$$

geschrieben werden:

$$Q_1 = \frac{1}{a}\underbrace{\iiint} F\,dx'dy'dz'.$$

Die Größe χ in dem obigen Ausdrucke für F durchläuft, wenn t' von $t-\frac{\rho}{a}$ bis $t-\frac{r}{a}$ sich ändert, das Wertsystem von $l\left(\frac{a}{c}\right)$ bis 0. Mit Rücksicht darauf findet man durch Differentiation von F nach kurzer Rechnung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|'\frac{\partial\chi}{\partial x}\,dt' = \frac{\partial\chi}{\partial x}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|'\,dt'.$$

Hieraus folgt durch nochmaliges Differenzieren, indem man die Gleichungen:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mathfrak{x}}{r}; \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\mathfrak{y}}{r},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{a^2}{c^2}\,\frac{\mathfrak{x}}{\rho}; \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = -\frac{a^2}{c^2}\,\frac{\mathfrak{y}}{\rho}$$

beachtet und für $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ den Wert aus (30) setzt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|' dt' + \frac{1}{a} \frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2} \left\{ \frac{1}{r} X \Big|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} - \frac{a^2}{c^2 \rho} X \Big|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \cdot \int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|' dt' + \frac{1}{a} \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2} \left\{ \frac{1}{r} X \Big|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} - \frac{a^2}{c^2 \rho} X \Big|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \right\}.$$

Um die Functionen $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ von x, y, z, t, x', y', z' hinsichtlich ihrer Endlichkeit und Stetigkeit zu prüfen, ist es zweckmäßig, für den Augenblick anstatt x', y', z' Polarcoordinaten einzuführen vermittels der Gleichungen:

$$x'-x = r \sin \mu \cos \lambda; \quad y'-y = r \sin \mu \sin \lambda; \quad z'-z = r \cos \mu.$$

Solange r nicht unendlich klein ist, sind die Größen $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, als Functionen von x, y, z, r, λ, μ betrachtet, überall endlich und stetig (zwar wird, wenn μ unendlich klein von der ersten Ordnung wird, $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ unendlich groß von der ersten, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$ unendlich groß von der zweiten Ordnung; dafür wird aber in diesem Falle das Integral $\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|' dt'$ unendlich klein von der zweiten Ordnung, wie man

sich leicht überzeugen kann, indem man die Differenz der oberen und unteren Grenze dieses Integrals bildet). Wird r unendlich klein, so bleibt $\frac{\partial F}{\partial x}$ endlich und stetig, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ werden zwar unendlich groß, doch so, dass die Functionen $r\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ und $r\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ endlich und stetig bleiben; hiebei bezieht sich die Aussage der Stetigkeit auf das unabhängige Variablensystem x, y, z, r, λ, μ.

Aus der soeben angestellten Betrachtung geht hervor, dass es gestattet ist, die in (23) vorkommenden Differentialquotienten der Function

$$Q_1 = \frac{1}{a}\underbrace{\iiint} F\, dx' dy' dz'$$

nach der gewöhnlichen Regel durch Differentiation unter dem Integralzeichen zu bilden. Man erhält so:

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\underbrace{\iiint}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|^{t'} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\, dt' + \frac{1}{a^2}\underbrace{\iiint} X\Big|^{x', y', z', t-\frac{r}{a}} \frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{r}\, dx' dy' dz'$$

$$-\frac{1}{c^2}\underbrace{\iiint} X\Big|^{x', y', z', t-\frac{\rho}{a}} \frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{\rho}\, dx' dy' dz',$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{a}\underbrace{\iiint}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} X|' \frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial y}\,dt' + \frac{1}{a^2}\underbrace{\iiint} X\Big|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz'$$

$$-\frac{1}{c^2}\underbrace{\iiint} X\Big|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz'.$$

Analoge Formeln ergeben sich für die in (23) vorkommenden Ableitungen von Q_2:

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{a}\underbrace{\iiint}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} Y|' \frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial y}\,dt'dx'dy'dz' + \frac{1}{a^2}\underbrace{\iiint} Y\Big|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \cdot \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz'$$

$$-\frac{1}{c^2}\underbrace{\iiint} Y\Big|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \cdot \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz',$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^2} = \frac{1}{a}\underbrace{\iiint}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} Y|' \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\,dt'dx'dy'dz' + \frac{1}{a^2}\underbrace{\iiint} Y\Big|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \cdot \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz'$$

$$-\frac{1}{c^2}\underbrace{\iiint} Y\Big|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \cdot \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz'.$$

§. 14. Durch Einsetzen der obigen Ausdrücke in die Gleichungen (23) findet man:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\iiint\left[X - \frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz' \\ &+\frac{1}{a^2}\iiint\left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \frac{1}{r}\,dx'dy'dz' \\ &+\frac{1}{a}\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left[X|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + Y|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\right]dt'dx'dy'dz', \end{aligned}\right.$$

$$v(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\iiint\left[Y - \frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz' \\ &+\frac{1}{a^2}\iiint\left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \frac{1}{r}\,dx'dy'dz' \\ &+\frac{1}{a}\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left[X|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} + Y|'\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right]dt'. \end{aligned}\right.$$

$$\ldots(31)$$

Hierin beziehen sich die Substitutionsstriche lediglich auf die Functionen X, Y. Die Componente w der elastischen Verschiebung ist bereits in (4) ermittelt worden:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint Z\Big|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz. \qquad (4)$$

Die Gleichungen (31) und (4) enthalten die Lösung der Aufgabe, das System (3) unter Erfüllung der Anfangsbedingung (α) zu integrieren. Sie stellen die gesuchte Wellenbewegung dar, welche in dem anfänglich ruhenden, elastischen Medium durch die Einwirkung der äußeren störenden Kräfte (X, Y, Z) hervorgerufen wird. Man kann sich diese Wellenbewegung

entstanden denken durch lineare Superposition der Elementarwellen, welche von den in den einzelnen Volumelementen $dx'dy'dz'$ angreifenden, störenden Kräften erzeugt werden. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \iiint f_1\,dx'dy'dz' \\ v(x,y,z,t) &= \iiint f_2\,dx'dy'dz' \\ w(x,y,z,t) &= \iiint f_3\,dx'dy'dz', \end{aligned}\right\} \qquad (31')$$

wo:

$$f_1 = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c^2\rho}\left[X - \frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{x}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \\ &+\frac{1}{a^2 r}\left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{x}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \\ &+\frac{1}{a}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left(X'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+Y'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right)dt', \end{aligned}\right.$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c^2\rho}\left[Y - \frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{y}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \\ &+\frac{1}{a^2 r}\left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{y}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \\ &+\frac{1}{a}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left(X'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}+Y'\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right)dt', \end{aligned}\right.$$

$$f_3 = \frac{1}{4\pi a^2 r}\,Z\Big|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}}. \qquad \ldots(32)$$

Die Größen f_1, f_2, f_3 geben, mit $dx'dy'dz'$ multipliciert, die Componenten derjenigen elastischen Verschiebung, welche der vom Volumelement $dx'dy'dz'$ ausgehenden Elementarwelle entspricht. Diese Elementarwelle kann nun in drei Theile zerlegt werden, indem man den Vector (f_1, f_2, f_3) als geometrische Summe der drei Vectoren $(f_1^{(e)}, f_2^{(e)}, f_3^{(e)})$, $(f_1^{(o)}, f_2^{(o)}, f_3^{(o)})$ und $(f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)})$ darstellt, wo:

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(e)} &= \frac{1}{4\pi c^2 \rho}\left[X - \frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{x}\right]^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \\ f_2^{(e)} &= \frac{1}{4\pi c^2 \rho}\left[Y - \frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,.\,\mathfrak{y}\right]^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \\ f_3^{(e)} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (33)_e$$

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(o)} &= \frac{1}{4\pi a^2 r}\left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{x}\right]^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \\ f_2^{(o)} &= \frac{1}{4\pi a^2 r}\left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,.\,\mathfrak{y}\right]^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \\ f_3^{(o)} &= \frac{1}{4\pi a^2 r}\,Z^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad (33)_o$$

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(i)} &= \frac{1}{4\pi a}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left[X'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + Y'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right]dt' \\ f_2^{(i)} &= \frac{1}{4\pi a}\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left[X'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y} + Y'\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right]dt' \\ f_3^{(i)} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (33)_i$$

Der dem Vector $(f_1^{(e)}, f_2^{(e)}, f_3^{(e)})$ entsprechende Theil der Elementarwelle schreitet vom Erregungscentrum (x', y', z') aus fort auf den concentrischen Rotationsellipsoiden $\rho = a(t-t')$ $\left[\rho = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x-x')^2 + \frac{a^2}{c^2}(y-y')^2 + (z-z')^2}\right]$. Dieser Theil der

Elementarwelle ist als die extraordinäre Welle zu bezeichnen. Versteht man unter dem Hauptschnitte eines beliebigen Punktes (x, y, z) jene durch den Punkt (x, y, z) und das Erregungscentrum (x', y', z') hindurchgelegte Ebene, welche zur krystallographischen Hauptaxe parallel ist, so sind nach $(33)_e$ die elastischen Verschiebungen, welche von der extraordinären Welle in einem beliebigen Punkte (x, y, z) hervorgebracht werden, senkrecht zum Hauptschnitte.

Der dem Vector $(f_1^{(o)}, f_2^{(o)}, f_3^{(o)})$ entsprechende Theil der Elementarwelle ist als die ordinäre Welle zu bezeichnen. In der ordinären Welle, welche vom Erregungscentrum (x', y', z') aus auf den concentrischen Kugelflächen $r = a(t-t')$ fortschreitet $[r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}]$, erfolgen nach $(33)_o$ die elastischen Verschiebungen im Hauptschnitte.

Der dem Vector $(f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)})$ entsprechende Theil der Elementarwelle endlich ist sinngemäß als die intermediäre Welle oder kurz als die Zwischenwelle zu bezeichnen. Diese Welle breitet sich nicht wie die ordinäre und extraordinäre Welle in Wellenflächen aus, sie erfüllt vielmehr in jedem Augenblicke t den ganzen zwischen der extraordinären Wellenfläche $\rho = a(t-t')$ und der ordinären Wellenfläche $r = a(t-t')$ enthaltenen Raumtheil und schreitet so mit den genannten Wellenflächen fort.[1]

In sehr großer Entfernung von den durch Einwirkung äußerer Kräfte gestörten Theilen des Mediums sind die Zwischenwellen im Vergleiche zu den ordinären und extraordinären Wellen von verschwindend kleiner Intensität. Es folgt dies unmittelbar aus (31') und (32), indem man beachtet, dass die den Zwischenwellen entsprechenden Glieder in (32) die Factoren:

---

[1] Es sei hervorgehoben, dass den drei Theilen, in welche die Elementarwelle zerlegt worden ist, eine selbständige physikalische Existenz nicht zukommt, dass vielmehr stets alle drei Theile zusammen auftreten. Von diesem Gesichtspunkte aus wären die ordinären, extraordinären und intermediären Wellen genauer als Wellentheile zu bezeichnen.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2}{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \frac{2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{-(\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2)}{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2}$$

enthalten, die den ordinären und extraordinären Wellen entsprechenden Glieder hingegen den Factor $\frac{1}{r}$, beziehungsweise $\frac{1}{\rho}$. Ferner zeigt sich, dass auch schon in gewöhnlicher Entfernung von den gestörten Theilen des Mediums die Zwischenwellen vernachlässigt werden können, wenn die störenden Kräfte, als Functionen der Zeit betrachtet, periodisch von sehr großer Schwingungszahl sind; in diesem Falle nähern sich nämlich die den Zwischenwellen entsprechenden Glieder in (32) bei unbegrenzt wachsender Schwingungszahl der Grenze Null. Bei solchen Wellenbewegungen, die den optischen ähnlich sind, wird man also im allgemeinen von den Zwischenwellen ganz absehen können.

2. Capitel.

Verification des gewonnenen Resultates. — Lösung der Aufgabe I.

(Für ein Medium von der besonderen Beschaffenheit $g = a$).

§. 15. Es kann nun auch direct nachgewiesen werden, dass die oben in (31), beziehungsweise in (31′) angegebenen Ausdrücke für die Componenten u, v, w thatsächlich Lösungen der Aufgabe II sind; bei dieser Gelegenheit zeigt es sich, dass die im vorigen Capitel (in §. 7 und §. 8) vorübergehend gemachten Annahmen (γ) und (δ) in Bezug auf die Functionen X, Y ganz überflüssig sind.

Die Richtigkeit des eben Gesagten hinsichtlich der Componente w braucht mit Rücksicht auf §. 3 nicht erst besonders bewiesen zu werden. Es wird daher bloß zu zeigen sein, dass die Ausdrücke für u, v in (31), beziehungsweise (31′) Integrale des Systems (3′) sind; dass diese Ausdrücke der Anfangsbedingung (α) genügen, ist nach dem, was in §. 2 über die Functionen X, Y angenommen wurde, unmittelbar evident.

Es wird sich jetzt darum handeln, die Ableitungen der Ausdrücke u, v in (31′) zu berechnen; zu dem Zwecke müssen die durch (32) definierten Functionen f_1 und f_2, welche in (31′) unter dem Integralzeichen auftreten, genauer untersucht werden. Die Functionen f_1 und f_2 in (32) hängen ab von x, y, z, t, x', y', z'; von x, y, z insoferne, als in den Ausdrücken (32) die Größen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, r, \rho, \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}$ vorkommen, welche die Veränderlichen x, y, z lediglich in den Verbindungen $x'-x=\mathfrak{x}$, $y'-y=\mathfrak{y}$, $z'-z=\mathfrak{z}$ enthalten.

Man kann demnach die Functionen f_1 und f_2 auch dargestellt denken als Functionen der unabhängigen Veränderlichen: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t, x', y', z'$. Beim Differenzieren dieser Functionen muss nun sorgfältig unterschieden werden, auf welches System von unabhängigen Veränderlichen sich die zu bildenden Differentialquotienten beziehen sollen.

Neben den Bezeichnungen x, y, z; x', y', z'; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mögen im folgenden, wo es zweckmäßig ist, die Bezeichnungen x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ in der gleichen Bedeutung stellvertretend verwendet werden. Diejenigen Ableitungen von f_1, f_2, bei deren Bildung diese Größen als Functionen des unabhängigen Variablensystems (x_i, t, x'_j) $[i, j = 1, 2, 3]$ aufzufassen sind, sollen wie gewöhnlich mit »∂« bezeichnet werden; hingegen jene Ableitungen, die sich auf das unabhängige Variablensystem $(\mathfrak{x}_i, t, x'_j)$ beziehen, mit dem entsprechenden deutschen Buchstaben »$\mathfrak{d}$«. Es gelten dann folgende unten zu benützende Formeln:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d}\mathfrak{x}_i}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x'_i} = \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i} + \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d}\mathfrak{x}_i},$$

also weiter:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i} - \frac{\partial f_1}{\partial x'_i}$$

und analoge Formeln für die Ableitungen von f_2.

Für das Folgende ist es wichtig, das Verhalten der Functionen f_1, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x'_i}$, $\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}$, $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}\right)$ hinsichtlich ihrer Endlichkeit und Stetigkeit zu kennen. Führt man für den

Augenblick, indem man sich die genannten Functionen durch die unabhängigen Veränderlichen (x_i, t, x'_j) dargestellt denkt, jetzt an Stelle der x'_j durch die Gleichungen:

$$x'-x = r \sin\mu \cos\lambda, \quad y'-y = r \sin\mu \sin\lambda, \quad z'-z = r \cos\mu$$

Polarcoordinaten ein (ähnlich wie bei der Untersuchung der Ableitungen von F in §. 13), so zeigt sich, dass die Functionen f_1 und $\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'}$, als Functionen von $x, y, z, t, r, \lambda, \mu$ betrachtet, überall mit Ausnahme des Punktes $r = 0$ endlich und stetig sind. In letzterem Punkte werden die Functionen f_1 und $\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}$ unendlich groß in der Weise, dass $r . f_1$ und $r . \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}$ endliche und stetige Functionen von $x, y, z, t, r, \lambda, \mu$ bleiben. Die Functionen $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x'_i}$, $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}\right)$ verhalten sich als Functionen von $x, y, z, t, r, \lambda, \mu$ überall endlich und stetig mit Ausnahme des Punktes $r = 0$ und der beiden Halbstrahlen $\mu = 0$, $\mu = 2\pi$; sie werden an den genannten Stellen unendlich groß in der Weise, dass

$$r^2 \sin\mu . \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad r^2 \sin\mu \frac{\partial f_1}{\partial x'_i}, \quad r^2 \sin\mu \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}\right)$$

endliche und stetige Functionen von $x, y, z, t, r, \lambda, \mu$ bleiben.

Bestimmt man bei festem x, y, z, t einen Raum T als den Ort jener Punkte (x', y', z'), welche den Bedingungen:

$$r > r_0, \quad \mu_0 < \mu < 2\pi - \mu_0$$

genügen, wo r_0 und μ_0 beliebig klein zu machende positive Größen sind, so sind f_1 und die sämmtlichen ersten und zweiten Ableitungen von f_1 in Bezug auf das System der unabhängigen Variablen x_i, t, $x_{j'}$ innerhalb des Raumes T überall endliche und stetige Functionen.

Die Function f_1 und ihre Ableitungen sind ferner (bei festem x, y, z, t) nur in einem endlichen Theile des von den Punkten (x', y', z') erfüllten Raumes von Null verschieden; es

folgt dies unmittelbar aus (32), wenn man beachtet, dass die Functionen X, Y nach §. 2 der Anfangsbedingung (α) genügen.

Von der Function f_2 gilt dasselbe, was hier über die Function f_1 gesagt worden ist. Es mag noch besonders hervorgehoben werden, dass bei den bisherigen Betrachtungen dieses Capitels lediglich vorausgesetzt worden ist, dass die Functionen X, Y den Bedingungen (α) und (β) genügen (vergl. §. 2).

§. 16. Differenziert man in (31′) die erste Gleichung nach x_i, so erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \iiint \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\, dx' dy' dz'.$$

Dass das hier angewendete Verfahren der Differentiation unter dem Integralzeichen in der That statthaft ist, erkennt man leicht, indem man in der obigen Gleichung nachträglich an Stelle von x', y', z' die Polarcoordinaten r, λ, μ als neue Integrationsvariable einführt. Hingegen ist es nicht mehr erlaubt, die Ableitung des obigen Ausdruckes für $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ nach x_k durch abermalige Differentiation unter dem Integralzeichen zu bilden; vielmehr muss man, um diese Ableitung bestimmen zu können, den obigen Ausdruck vorerst umformen. Zufolge der Beziehung

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x_i'} - \frac{\partial f_1}{\partial x_i'}$$

(siehe oben §. 15) kann der Ausdruck für $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ weiter geschrieben werden:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \underbrace{\iiint} \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x_i'}\, dx' dy' dz' - \underbrace{\iiint} \frac{\partial f_1}{\partial x_i'}\, dx' dy' dz'.$$

Das Integral $\underbrace{\iiint} \frac{\partial f_1}{\partial x_i'}\, dx' dy' dz'$ ist nun aber gleich Null, wie folgende Überlegung zeigt. Es ist:

$$\underbrace{\iiint} \frac{\partial f_1}{\partial x_i'}\, dx' dy' dz' = \lim_{r_0 = 0,\, \mu_0 = 0} \iiint_T \frac{\partial f_1}{\partial x_i'}\, dx' dy' dz'.$$

In der That nähert sich das hier auf der rechten Seite stehende, über den Raum T (siehe oben §. 15) erstreckte Integral unbegrenzt dem Werte des linksstehenden, über den ganzen unendlichen Raum erstreckten Integrals, wenn die den Raum T bestimmenden Größen r_0 und μ_0 unbegrenzt gegen Null convergieren. Das auf der rechten Seite stehende Integral kann nun durch Ausführung der Integration nach x'_i [1] in ein Oberflächenintegral über die Begrenzungsfläche S_0 des Raumes T verwandelt werden:

$$\iiint_T \frac{\partial f_1}{\partial x'_i}\, dx'dy'dz' = -\iint_{S_0} f_1 \cos nx_i\, dS_0,$$

wo dS_0 ein Flächenelement von S_0, n die zugehörige, nach dem Inneren von T gerichtete Normale bedeutet. Die Begrenzungsfläche S_0 besteht aus drei Theilen: Der erste Theil — S_{01} — liegt auf der Kugel $r = r_0$, der zweite Theil — S_{02} — auf dem durch die Gleichungen $\mu = \mu_0$, $\mu = 2\pi - \mu_0$ dargestellten Kegel; der dritte Theil — S_{03} — endlich wird gebildet durch eine unendlich große Kugel $r = \infty$. Man findet, dass der der Fläche S_{03} entsprechende Theil des obigen Flächenintegrals verschwindet und dass auch die den Flächen S_{01} und S_{02} entsprechenden Theile des obigen Flächenintegrals für $\lim r_0 = 0$, $\lim \mu_0 = 0$ sämmtlich gegen Null convergieren. Also ist

$$\lim_{r_0=0,\ \mu_0=0} \iiint_T \frac{\partial f_1}{\partial x'}\, dx'dy'dz'$$

und daher auch

$$\underbrace{\iiint} \frac{\partial f_1}{\partial x'}\, dx'dy'dz'$$

gleich Null, und die Formel für $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ kann jetzt einfacher geschrieben werden:

[1] Die Ausführung dieser Integration ist möglich, weil bei dieser Integration und ebenso bei Bildung der Ableitung $\frac{\partial f_1}{\partial x'_i}$ unter dem Integralzeichen die Größen (x, y, z) lediglich die Rolle constanter Parameter spielen.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \underbrace{\iiint} \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i} \, dx' dy' dz'.$$

Mit Rücksicht auf die oben hervorgehobenen Eigenschaften der Functionen $\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}$ und $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}\right)$ kann man hier die Ableitung des Ausdruckes $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ nach x_k durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden und erhält so:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \underbrace{\iiint} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}\right) dx' dy' dz' =$$

$$= \lim_{r_0 = 0,\ \mu_0 = 0} \iiint_T \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i}\right) dx' dy' dz'.$$

Dies kann nun wegen $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \frac{\mathfrak{d} f_1}{\mathfrak{d} x'_i} - \frac{\partial f_1}{\partial x'_i}$ weiter geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \underbrace{\iiint} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial x'_i}\right) dx' dy' dz'$$

$$= \lim_{r_0 = 0,\ \mu_0 = 0} \iiint_T \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x'_i \partial x_k}\right) dx' dy' dz'.$$

Analoge Formeln ergeben sich für die zweiten Ableitungen von v nach x_i, x_k:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} = \lim_{r_0 = 0,\ \mu_0 = 0} \iiint_T \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x'_i \partial x_k}\right) dx' dy' dz'.$$

Die zweiten Ableitungen von u, v nach t kann man aus (31′) ohneweiters durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{\iiint} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \, dx' dy' dz' = \lim_{r_0 = 0,\ \mu_0 = 0} \iiint_T \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \, dx' dy' dz'.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \underbrace{\iiint} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \, dx' dy' dz' = \lim_{r_0 = 0,\ \mu_0 = 0} \iiint_T \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \, dx' dy' dz'.$$

§. 17. Man findet auf diese Weise für die Ausdrücke $D_1(u, v)$, $D_2(u, v)$ [vergl. Gleichung (5)] nachstehende Formeln:

$$D_1(u, v) = \lim_{r_0=0,\ \mu_0=0} \iiint_T \left| D_1(f_1, f_2) - a^2 \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x'_i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x'_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \right| dx'dy'dz',$$

$$D_2(u, v) = \lim_{r_0=0,\ \mu_0=0} \iiint_T \left| D_2(f_1, f_2) - a^2 \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x'_i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right) + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x'_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \right| dx'dy'dz',$$

wo die Ausdrücke $D_1(f_1, f_2)$, $D_2(f_1, f_2)$ zu bilden sind, indem man f_1, f_2 als Functionen von (x_i, t, x'_j) dargestellt denkt; die in den Operationssymbolen D_1, D_2 enthaltenen Differentiationen beziehen sich natürlich nach (5) auf t und die x_i.

Die Rechnung ergibt nun, dass identisch gilt:

$$\left.\begin{aligned} D_1(f_1, f_2) &= 0 \\ D_2(f_1, f_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Trägt man dies in den obigen Formeln für $D_1(u, v)$ und $D_2(u, v)$ ein, so können dann die rechtsstehenden Raumintegrale über T durch wirkliche Ausführung der Integrationen nach x'_i, beziehungsweise x'_1, x'_2 in Oberflächenintegrale über die Begrenzungsfläche S_0 des Raumes T verwandelt werden; also folgt:

$$D_1(u,v) = \lim_{r_0=0,\ \mu_0=0} \iint\limits_{S_0} \left[a^2 \sum_1^3 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cos \underline{|nx_i} + (a^2-c^2)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \cos \underline{|nx_2}\right] dS_0,$$

$$D_2(u,v) = \lim_{r_0=0,\ \mu_0=0} \iint\limits_{S_0} \left[a^2 \sum_1^3 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \cos \underline{|nx_i} - (a^2-c^2)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \cos \underline{|nx_1}\right] dS_0.$$

Die Oberflächenintegrale rechterhand setzen sich zusammen aus den entsprechenden Theilintegralen über die Theile S_{01}, S_{02}, S_{03} der Fläche S_0 (siehe oben §. 16). Nähern sich nun die Größen r_0, μ_0 unbegrenzt der Null, so findet man durch eine allerdings etwas umständliche Rechnung, dass die über S_{01} erstreckten Theilintegrale unbegrenzt gegen $X(x, y, z, t)$, beziehungsweise $Y(x, y, z, t)$, die über S_{02} erstreckten Theilintegrale gegen Null convergieren. Das Theilintegral über S_{03} ist an sich Null, so dass man erhält

$$D_1(u, v) = X(x, y, z, t), \qquad D_2(u, v) = Y(x, y, z, t).$$

Bei der zu diesem Resultate führenden Rechnung sind außer den in §. 2 über die Functionen X, Y gemachten Annahmen weiter keine Voraussetzungen gemacht worden. Die Ausdrücke u, v in (31') oder (31) genügen also thatsächlich dem Systeme (3'), wobei von den Functionen X, Y bloß anzunehmen ist, dass sie den Bedingungen (α) und (β) genügen.

§. 18. Das System (31) enthält eine Rechenvorschrift, durch welche aus den Functionen X, Y von x, y, z, t zwei andere Functionen u, v von x, y, z, t abzuleiten sind. Bezeichnet man die Functionaloperation, durch welche in (31) aus den Functionen X, Y die Function u gebildet wird, mit Ω_x, die

entsprechende Functionaloperation, durch welche aus den Functionen X, Y die Function v gebildet wird, mit Ω_y, so kann das System (31) kurz geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} u &= \Omega_x[X, Y] \\ v &= \Omega_y[X, Y]. \end{aligned}\right\} \tag{31''}$$

Das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen dieses Capitels spricht sich dann in den folgenden Identitäten aus:

$$\left.\begin{aligned} D_1\{\Omega_x[X, Y], \Omega_y[X, Y]\} &= X, \\ D_2\{\Omega_x[X, Y], \Omega_y[X, Y]\} &= Y. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Bezeichnet man ferner die Differentialoperation:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$$

mit D_3, die Functionaloperation, durch welche in Formel (4) aus der Function Z von x, y, z, t die Function w von x, y, z, t abgeleitet wird, mit Ω_z, dann kann die Thatsache, dass die Function w in Formel (4) die dritte Gleichung des Systems (3), d. i. die Gleichung $D_3(w) = Z$, integriert, durch nachstehende Identität ausgedrückt werden:

$$D_3\{\Omega_z[Z]\} = Z. \tag{35a}$$

Die Giltigkeit dieser Identitäten (35) und (35a) ist hiebei lediglich an die Voraussetzung geknüpft, dass die Functionen X, Y, Z den Bedingungen (α) und (β) genügen.

Die genannten Identitäten sind für die Untersuchung der Wellenbewegungen in dem betrachteten Medium von grundlegender Bedeutung. In einer anderen Abhandlung soll gezeigt werden, wie aus denselben mit Leichtigkeit die mathematische Präcisierung des Huyghen'schen Principes im Kirchhoff'schen Sinne sich ergibt; hier sollen dieselben lediglich zur Lösung der Aufgabe I verwendet werden.

§. 19. Der Ausdruck $\Omega_x[X, Y]$, d. i. der Ausdruck für u in (31), setzt sich zusammen aus zwei dreifachen und einem vierfachen Integrale; diese Integrale können nun auf eine andere Form gebracht werden. Zunächst kann das Integral:

$$\iiint \left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{r}\,dx'dy'dz'$$

umgeformt werden, indem man an Stelle von x', y', z' Polarcoordinaten mit (x, y, z) als Pol einführt vermittels der Gleichungen:

$$x'-x = r\sin\mu\cos\lambda,$$
$$y'-y = r\sin\mu\sin\lambda,$$
$$z'-z = r\cos\mu.$$

An die Stelle von $dx'dy'dz'$ unter dem Integralzeichen hat man dabei den Ausdruck $(r^2\sin\mu d\lambda d\mu)dr$ einzusetzen; man kann dafür schreiben $dS.dr$, indem man den Ausdruck $(r^2\sin\mu d\lambda d\mu)$, welcher ein unendlich kleines Flächenelement der Kugel $S(r = \text{const.})$ bedeutet, mit dS bezeichnet. Sodann kann durch die Substitution:

$$t-\frac{r}{a} = t'$$

die Größe r durch t' ausgedrückt werden:

$$r = a(t-t').$$

Das obige Integral kann nunmehr geschrieben werden:

$$\int_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{dt'}{t-t'} \iint_{S\{r=a(t-t')\}} \left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Bigg|^{x',y',z',t'} .dS.$$

Ganz analog behandelt man das dreifache Integral:

$$\iiint \left[X-\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}} \cdot \frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz'.$$

Hier führt man an Stelle von x', y', z' »Quasi-Polarcoordinaten« mit (x, y, z) als Pol ein, indem man setzt:

$$x'-x = \frac{c}{a}\rho\sin\mu_1.\cos\lambda_1,$$

$$y'-y = \frac{c}{a}\rho\sin\mu_1\sin\lambda_1,$$

$$z'-z = \rho\cos\mu_1.$$

Diese Substitution steht offenbar in vollem Einklange mit der schon früher eingeführten Bezeichnung:

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x'-x)^2 + \frac{a^2}{c^2}(y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Die hier eingeführten »Quasi-Polarcoordinaten« haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung: sie sind nichts anderes als die gewöhnlichen Polarcoordinaten jenes Punktes (x'', y'', z''), welcher dem Punkte (x', y', z') in der affinen Transformation:

$$x''-x = \frac{a}{c}(x'-x)$$

$$y''-y = \frac{a}{c}(y'-y)$$

$$z''-z = (z'-z)$$

entspricht. Den Flächen $\rho = \text{const.}$ entsprechen in dieser Affinität die Flächen $r = \text{const.}$

An die Stelle von $dx'dy'dz'$ unter dem Integralzeichen hat man hier zu schreiben:

$$\frac{c^2}{a^2}(\rho^2 \sin \mu_1 \, d\lambda_1 \, d\mu_1)\, d\rho = \frac{c^2}{a^2}\, d\Sigma_1 \, d\rho;$$

dabei bedeutet $d\Sigma_1 = \rho^2 \sin \mu_1 \, d\lambda_1 \, d\mu_1$ die Größe des unendlich kleinen Flächenelementes, welches einem Flächenelemente $d\Sigma$ des Rotationsellipsoids $\rho = \text{const.}$ in der oben definierten Affinität auf der Kugel $r = \text{const.}$ entspricht.

Anstatt ρ führe man nun durch die Substitution:

$$t - \frac{\rho}{a} = t'$$

die Veränderliche t' ein; es ist dann $\rho = a(t-t')$ und das obige Integral kann geschrieben werden:

$$\frac{c^2}{a^2}\int_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{dt'}{t-t'} \iint_{\Sigma\{\rho = a(t-t')\}} \left[X - \frac{X\mathfrak{x} + Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{x} \right] \Bigg|^{x', y', z', t'} . \, d\Sigma_1 .$$

Bei der Umformung des vierfachen Integrals:

$$\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}} \left[X|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+Y|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right]dt'dx'dy'dz'$$

müssen die beiden Fälle $a > c$ (bei positiv einaxigen Medien nach der in der Optik gebräuchlichen Bezeichnungsweise) und $a < c$ (bei negativ einaxigen Medien) auseinandergehalten werden. Im ersteren Falle ist $\rho > r$ und das obige Integral kann geschrieben werden:

$$\int_{t'=-\infty}^{t'=t} dt' \iiint_{\substack{r < a(t-t') \\ \rho > a(t-t')}} \left[X|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+Y|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right]dx'dy'dz',$$

wobei das Raumintegral, wie aus der unterhalb des Integralzeichens angefügten Bemerkung ersichtlich ist, über den Zwischenraum zwischen der Kugel $r=a(t-t')$ und dem Rotationsellipsoid $\rho=a(t-t')$ zu erstrecken ist.

Im zweiten Falle ist $\rho < r$ und das obige Integral kann geschrieben werden:

$$-\int_{t'=-\infty}^{t'=t} dt' \iiint_{\substack{r > a(t-t') \\ \rho < a(t-t')}} \left[X|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+Y|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\right]dx'dy'dz'.$$

§. 20. Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a^2}\frac{1}{t-t'}\iint_{\Sigma\{\rho=a(t-t')\}}\left[X-\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]|'\,d\Sigma_1\\&+\frac{1}{a^2}\frac{1}{t-t'}\iint_{S\{r=a(t-t')\}}\left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]|'\,dS\\&\pm\frac{1}{a}\iiint_{\substack{r\lesseqgtr a(t-t')\\ \rho\gtreqless a(t-t')}}\left[X|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+Y|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\right]dx'dy'dz'\end{aligned}\right\}=\omega_x[X,Y]_{t'},$$

. . . (36)

dann kann der Ausdruck $\Omega_x[X, Y]$ in folgender Weise dargestellt werden:

$$\Omega_x[X, Y] = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \omega_x[X, Y]_{t'} dt'. \tag{37}$$

In dem Ausdrucke auf der linken Seite von (36) gilt, wo ein doppeltes Vorzeichen oder Ungleichheitszeichen vorkommt, das obere Zeichen für ein Medium $a > c$, das untere für ein Medium $a < c$. Der genannte, symbolisch mit $\omega_x[X, Y]_{t'}$ bezeichnete Ausdruck ist im wesentlichen eine Function von x, y, z, t, welche auch noch vom Parameter t' abhängt, insoferne bei der Bildung dieser Function die zur Zeit t' vorhandene Vertheilung der Functionen X, Y von x, y, z maßgebend ist.

Analoge Darstellungen ergeben sich für $\Omega_y[X, Y]$ und $\Omega_z[Z]$, indem man setzt:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{1}{t-t'}\iint\limits_{\Sigma\{\rho=a(t-t')\}} \left[Y - \frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]' d\Sigma_1 \\ &+\frac{1}{a^2}\frac{1}{t-t'}\iint\limits_{S\{r=a(t-t')\}} \left[\frac{X\mathfrak{x}+Y\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]' dS \\ &\pm\frac{1}{a}\iiint\limits_{\substack{r\lesseqgtr a(t-t')\\ \rho\gtreqless a(t-t')}} \left[X'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} + Y'\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right] dx'dy'dz' \end{aligned}\right\} = \omega_y[X, Y]_{t'}. \tag{36a}$$

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{S\{r=a(t-t')\}} Z'\cdot\frac{1}{t-t'}dS = \omega_z[Z]_{t'}. \tag{36b}$$

Es ist dann:

$$\Omega_y[X, Y] = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \omega_y[X, Y]_{t'} dt', \tag{37a}$$

$$\Omega_z[Z] = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \omega_z[Z]_{t'} dt'. \tag{37b}$$

Hierin sind die Ausdrücke $\omega_y[X, Y]_{t'}$ und $\omega_z[Z]_{t'}$ im wesentlichen Functionen von x, y, z, t, welche auch noch vom Parameter t' abhängen, insoferne bei der Bildung dieser Functionen die Vertheilung der Functionen X, Y, beziehungsweise Z zur Zeit t' maßgebend ist.

Die Ausdrücke $\omega_x[X, Y]_{t'}$; $\omega_y[X, Y]_{t'}$; $\omega_z[Z]_{t'}$ haben eine einfache Bedeutung: sie sind die nach der x, y, z-Axe genommenen Componenten jener elastischen Verschiebung, welche in dem anfänglich als ruhend gedachten Medium durch die Wirkung von Stoßkräften, welche im Zeitintervalle $(t'-dt', t')$ angreifen und (pro Masseneinheit) die Componenten X, Y, Z haben, im Punkte (x, y, z) zur Zeit $t (> t')$ hervorgerufen wird.

§. 21. Die genannten Ausdrücke sind zunächst nur definiert für $t > t'$. Nähert sich t unbegrenzt dem Werte t', so convergieren diese Ausdrücke gegen Null; setzt man daher jetzt fest, dass diese Ausdrücke für $t = t'$ den Wert Null haben sollen, so stellen diese Ausdrücke für $t \geqq t'$ endliche und stetige Functionen von x, y, z, t vor.

Differentiiert man die in Rede stehenden Ausdrücke, so findet man mit Rücksicht darauf, dass die Functionen X, Y, Z der Bedingung (β) genügen, dass die ersten und zweiten Ableitungen dieser Ausdrücke für $t \geqq t'$ endliche und stetige Functionen sind. Nach der obenerwähnten physikalischen Bedeutung dieser Ausdrücke muss man erwarten, dass dieselben identisch den nachstehenden Differentialgleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} &D_1\{\omega_x[X, Y]_{t'},\ \omega_y[X, Y]_{t'}\} = 0 \\ &D_2\{\omega_x[X, Y]_{t'},\ \omega_y[X, Y]_{t'}\} = 0 \\ &D_3\{\omega_z[Z]_{t'}\} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Diese Differentialgleichungen gelten zunächst nur für $t > t'$ und bringen die Thatsache zum Ausdrucke, dass die Ausdrücke $\omega_x[X, Y]_{t'}$, $\omega_y[X, Y]_{t'}$, $\omega_z[Z]_{t'}$, wenn man sie als Componenten einer elastischen Verschiebung auffasst, einer Wellenbewegung entsprechen, welche — im Zeitintervalle $(t'-dt', t')$ durch die Wirkung von Stoßkräften hervorgerufen

— im weiteren Verlaufe, d. i. für $t > t'$, ohne irgendwelche Störung seitens äußerer Kräfte sich ausbreitet.

Die Gleichungen (38) können auf folgende Weise bewiesen werden. Man gehe aus von den Identitäten (35) und (35a) und setze linkerhand an die Stelle der $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ die aus den Formeln (37), (37a), (37b) sich ergebenden Werte; mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$\frac{\partial^2 \Omega_{x_i}}{\partial x_j \partial x_k} = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{\partial^2 \omega_{x_i}}{\partial x_j \partial x_k} dt', \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial \Omega_{x_i}}{\partial t} = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial t} dt' + [\omega_{x_i}]_{t'=t} = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial t} dt',$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_{x_i}}{\partial t^2} = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{\partial^2 \omega_{x_i}}{\partial t^2} dt' + \left[\frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial t}\right]_{t'=t}$$

können dann die Identitäten (35) und (35a) geschrieben werden:

$$\int_{t'=-\infty}^{t'=t} D_1 \{\omega_x[X,Y]_{t'}, \omega_y[X,Y]_{t'}\} . dt' + \left\{\frac{\partial \omega_x[X,Y]_{t'}}{\partial t}\right\}_{t'=t} = X^{x,y,z,t}$$

$$\int_{t'=-\infty}^{t'=t} D_2 \{\omega_x[X,Y]_{t'}, \omega_y[X,Y]_{t'}\} dt' + \left\{\frac{\partial \omega_y[X,Y]_{t'}}{\partial t}\right\}_{t'=t} = Y^{x,y,z,t}$$

$$\int_{t'=-\infty}^{t'=t} D_3 \{\omega_z[Z]_{t'}\} dt' + \left\{\frac{\partial \omega_z[Z]_{t'}}{\partial t}\right\}_{t'=t} = Z^{x,y,z,t}.$$

In diesen Identitäten hängen die Ausdrücke unter den Integralzeichen ab von der Vertheilung der Functionen X, Y, Z in den Zeitpunkten $t' < t$; die übrigen Glieder dieser Identitäten hingegen hängen ab von dem Werte dieser Functionen in dem Punkte (x, y, z) zur Zeit t. Die genannten Identitäten können hiernach nur bestehen, wenn die Ausdrücke unter den Integralzeichen identisch verschwinden, d. h. wenn die Formeln (38)

identisch erfüllt sind. Damit ist der verlangte Nachweis erbracht; zugleich ergeben sich die folgenden Formeln, welche unmittelbar durch die Rechnung bestätigt werden können:

$$\left.\begin{aligned}
\left\{\frac{\partial \omega_x[X,Y]_{t'}}{\partial t}\right\}_{t=t'} &= X\,|^{x,y,z,t} \\
\left\{\frac{\partial \omega_y[X,Y]_{t'}}{\partial t}\right\}_{t=t'} &= Y\,|^{x,y,z,t} \\
\left\{\frac{\partial \omega_z[Z]_{t'}}{\partial t}\right\}_{t=t'} &= Z\,|^{x,y,z,t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Die Formeln (38), deren Giltigkeit zunächst nur für $t > t'$ gezeigt wurde, bleiben wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungen der Ausdrücke ω_{x_i} für $t \geqq t'$ auch noch bestehen, wenn $t = t'$ wird. Da nun für $t = t'$ nach einer früheren Bemerkung die ω_{x_i} verschwinden, so gilt dasselbe von ihren zweiten Ableitungen nach x, y, z; aus (38) folgt dann aber, dass auch die zweiten Ableitungen der ω_{x_i} nach t für $t = t'$ verschwinden müssen:

$$\left\{\frac{\partial^2 \omega_x[X,Y]_{t'}}{\partial t^2}\right\}_{t=t'} = \left\{\frac{\partial^2 \omega_y[X,Y]_{t'}}{\partial t^2}\right\}_{t=t'} = \left\{\frac{\partial^2 \omega_z[Z]_{t'}}{\partial t^2}\right\}_{t=t'} = 0, \quad \ldots (39a)$$

was auch unmittelbar durch die Rechnung bestätigt werden kann. — Es ist hervorzuheben, dass alle hier dargelegten Eigenschaften der Ausdrücke ω_x, ω_y, ω_z einzig und allein an die Voraussetzung geknüpft sind, dass die Functionen X, Y, Z für $t = t'$ den Bedingungen (β) genügen.

§. 22. Die Aufgabe I kann nunmehr leicht gelöst werden. Es seien in einem bestimmten Zeitpunkte t_0 die Componenten u, v, w der elastischen Verschiebung, sowie die entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ als Functionen von x, y, z gegeben:

$$
\left.\begin{aligned}
u(x, y, z, t_0) &= u_0(x, y, z) \\
v(x, y, z, t_0) &= v_0(x, y, z) \\
w(x, y, z, t_0) &= w_0(x, y, z) \\
\left\{\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \mathfrak{u}_0(x, y, z) \\
\left\{\frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \mathfrak{v}_0(x, y, z) \\
\left\{\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \mathfrak{w}_0(x, y, z).
\end{aligned}\right\} \qquad (40)
$$

Die Aufgabe I verlangt dann die Ermittelung der Functionen $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ für $t > t_0$; unter der Voraussetzung, dass für $t \geqq t_0$ keine äußeren störenden Kräfte auf das Medium einwirken. Die gesuchten Functionen u, v, w müssen daher für $t \geqq t_0$ den Differentialgleichungen:

$$
\left.\begin{aligned}
D_1(u, v) &= 0 \\
D_2(u, v) &= 0 \\
D_3(w) &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (41)
$$

genügen. Es handelt sich also im wesentlichen hier um die Integration des Systems (41) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen (40).

Zunächst kann die Lösung in dem besonderen Falle, dass die Functionen u_0, v_0, w_0 verschwinden, ohneweiters angegeben werden; dabei soll, um die Aufgabe zu einer lösbaren zu machen, angenommen werden, dass die Functionen $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ den Stetigkeitsbedingungen (β) genügen.

In diesem Falle lautet die Lösung:

$$
\begin{aligned}
u &= \omega_x[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0]_{t_0}, \\
v &= \omega_y[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0]_{t_0}, \\
w &= \omega_z[\mathfrak{w}_0]_{t_0},
\end{aligned}
$$

wo nach den Formeln (36), (36a), (36b) die auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke die nachstehende Bedeutung haben:

$$\omega_x[\mathfrak{u}_0,\mathfrak{v}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{\Sigma\{\rho=a(t-t_0)\}}\left[\mathfrak{u}_0-\frac{\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}+\mathfrak{v}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{x}\right]\Big|'\,d\Sigma_1\\&+\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{S\{r=a(t-t_0)\}}\left[\frac{\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}+\mathfrak{v}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Big|'\,dS\\&\pm\frac{1}{a}\iiint\limits_{\substack{r\lesseqgtr a(t-t_0)\\ \rho\gtreqless a(t-t_0)}}\left[\mathfrak{u}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\mathfrak{v}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\right]dx'dy'dz',\end{aligned}\right.$$

$$\omega_y[\mathfrak{u}_0,\mathfrak{v}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{\Sigma\{\rho=a(t-t_0)\}}\left[\mathfrak{v}_0-\frac{\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}+\mathfrak{v}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{y}\right]\Big|'\,d\Sigma_1\\&+\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{S\{r=a(t-t_0)\}}\left[\frac{\mathfrak{u}_0\mathfrak{x}+\mathfrak{v}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]\Big|'\,dS\\&\pm\frac{1}{a}\iiint\limits_{\substack{r\lesseqgtr a(t-t_0)\\ \rho\gtreqless a(t-t_0)}}\left[\mathfrak{u}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}+\mathfrak{v}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right]dx'dy'dz',\end{aligned}\right.$$

$$\omega_z[\mathfrak{w}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\iint\limits_{S\{r=a(t-t_0)\}}\mathfrak{w}_0\Big|'\,dS. \qquad \ldots(42)$$

Hiebei beziehen sich die Substitutionsstriche lediglich auf die Functionen $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ und zeigen an, dass in diesen Functionen die Argumente x, y, z durch x', y', z' zu ersetzen sind. Dass die oben angegebenen Functionen u, v, w thatsächlich die gesuchten Lösungen der Aufgabe I in dem vorliegenden besonderen Falle sind, ergibt sich sofort aus den im vorangehenden Paragraphen festgestellten Eigenschaften der Ausdrücke ω_x, ω_y, ω_z. Aus den Identitäten (38) folgt, dass die obigen Functionen u, v, w dem Systeme (41) genügen; die genannten Functionen nehmen ferner für $t = t_0$ den Wert Null an, während ihre Ableitungen nach t: $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, wie mit Rücksicht auf die Formeln (39) ohneweiters ersichtlich ist, für $t = t_0$ die Werte $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ annehmen.

§. 23. In ähnlicher Weise findet man die Lösung der Aufgabe I in einem anderen besonderen Falle. Es werde jetzt angenommen, dass in (40) die Functionen $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ identisch verschwinden; die Functionen u_0, v_0, w_0 sollen den Stetigkeitsbedingungen (β) genügen, und außerdem noch der Bedingung (δ'), welche besage, dass auch noch die dritten Ableitungen dieser Functionen endlich und stetig sind. In diesem Falle lautet die Lösung der Aufgabe I:

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\{\omega_x[u_0, v_0]_{t_0}\},$$

$$v = \frac{\partial}{\partial t}\{\omega_y[u_0, v_0]_{t_0}\},$$

$$w = \frac{\partial}{\partial t}\{\omega_z[w_0]_{t_0}\}.$$

Hiebei ist die Bedeutung der Ausdrücke $\omega_x[u_0, v_0]_{t_0}$ etc. aus (42) zu ersehen, indem man dort $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ mit u_0, v_0, w_0 vertauscht.

Man überzeugt sich zunächst leicht, dass die hier angegebenen Functionen u, v, w dem Systeme (41) genügen. Nach (38) bestehen die Identitäten:

$$D_1\{\omega_x[u_0, v_0]_{t_0},\ \omega_y[u_0, v_0]_{t_0}\} = 0,$$
$$D_2\{\omega_x[u_0, v_0]_{t_0},\ \omega_y[u_0, v_0]_{t_0}\} = 0,$$
$$D_3\{\omega_z[w_z]_{t_0}\} = 0.$$

Da aus dem Umstande, dass die Functionen u_0, v_0, w_0 der Bedingung (δ') genügen, die Existenz der dritten Ableitungen der Ausdrücke $\omega_x[u, v]_{t_0}$, $\omega_y[u, v]_{t_0}$, $\omega_z[w]_{t_0}$ hervorgeht, so kann man diese Identitäten nach t differenzieren; auf diese Weise ergibt sich, dass die obigen Functionen u, v, w thatsächlich das System (41) integrieren. Aus den Formeln (39) und (39a) ist ferner zu ersehen, dass für $t = t_0$ die Functionen u, v, w die Werte u_0, v_0, w_0 annehmen und dass für $t = t_0$ die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ gleich Null werden. Die Functionen u, v, w sind also thatsächlich die gesuchten Lösungen.

§. 24. Nunmehr ist der allgemeine Fall zu behandeln, dass die den Anfangszustand des Mediums charakterisierenden Functionen $u_0, v_0, w_0, \mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}_0$ in (40) ganz willkürlich vorgeschrieben sind; dabei soll aber, um die Aufgabe I zu einer lösbaren zu machen, angenommen werden, dass die Functionen $u_0, v_0, w_0, \mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}_0$ den Stetigkeitsbedingungen (β), die Functionen u_0, v_0, w_0 außerdem noch der Bedingung δ' (siehe oben) genügen.

Man findet die Lösung der Aufgabe I im allgemeinen Falle durch lineare Superposition der Lösungen, welche sich in §. 22 und §. 23 für die dort betrachteten besonderen Fälle ergeben haben; also:

$$\begin{aligned} u &= \omega_x[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t}\{\omega_x[u_0, v_0]_{t_0}\} \\ v &= \omega_y[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t}\{\omega_y[u_0, v_0]_{t_0}\} \qquad (43) \\ w &= \omega_z[\mathfrak{w}_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t}\{\omega_z[w_0]_{t_0}\}. \end{aligned}$$

Die Formeln (43) geben die gesuchte Lösung der Aufgabe I; in der That genügen die Functionen (u, v, w) in (43) den Differentialgleichungen (41) und den Anfangsbedingungen (40). Die elastische Verschiebung (u, v, w) im Punkte (x, y, z) zur Zeit t $(t > t_0)$ hängt demnach — mit Rücksicht auf (42) — ab von den Anfangswerten der Functionen $u, v, w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$, welche zur Zeit t_0 auf der Kugel $r = a(t-t_0)$, auf dem Ellipsoid $\rho = a(t-t_0)$ und in dem zwischen diesen beiden Flächen enthaltenen Raumtheile vorhanden waren; entsprechend den ordinären, extraordinären Wellen und den Zwischenwellen, von denen am Schlusse des vorigen Capitels die Rede war.

Besonders einfach verhält sich die Componente w, indem dieselbe bloß von den Anfangswerten von w und $\frac{\partial w}{\partial t}$ auf der Kugel $r = a(t-t_0)$ abhängt, und zwar — wie von vorneherein zu erwarten war — vermittels einer Formel, welche mit der

bekannten Poisson'schen Formel (vergl. Stokes, Mathematical and Physical Papers, Vol. II, p. 254),[1] für die Wellenbewegung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U$$

identisch ist.

§. 25. Die gefundenen Lösungen der Aufgaben I und II für ein Medium von der besonderen Beschaffenheit $g = a$ bleiben nun auch noch richtig, wenn man gewisse beschränkende Voraussetzungen fallen lässt. Es ist nicht nothwendig, dass die Functionen X, Y, Z; $u_0, v_0, w_0, \mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}_0$ in ihrem ganzen Bereiche überall den obigen Stetigkeitsbedingungen genügen; es ist vielmehr gestattet, dass eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsflächen existiere, woferne nur die dort vorhandenen Unstetigkeiten als Grenzfälle von sehr raschen, aber continuierlichen Übergängen angesehen werden dürfen. Die genauere Prüfung der hier anzustellenden Grenzbetrachtungen fällt indes aus dem Rahmen dieser Arbeit heraus.

Im besonderen kann man ohne jede Grenzbetrachtung erkennen, dass die gefundene Lösung der Aufgabe II noch richtig bleibt, wenn die Functionen X, Y, Z nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen, als Functionen von t betrachtet, für eine endliche Anzahl von Werten t sich sprungweise ändern, während sie bei constantem t den Stetigkeitsbedingungen (β) im ganzen Raume genügen. Der Beweis folgt unmittelbar aus den oben aufgeführten Eigenschaften der $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, wenn man sich die Lösung in der Form geschrieben denkt:

$$u = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \omega_x[X, Y]\,dt',$$

$$v = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \omega_y[X, Y]\,dt',$$

$$w = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \omega_z[Z]\,dt'.$$

[1] Vergl. auch Riemann-Hattendorf, Partielle Differentialgleichungen, §. 106 bis 109.

III. Capitel.

Lösung der Aufgaben I und II für ein allgemeines Medium $g \neq a$, unter Beschränkung auf solche Wellenbewegungen, bei welchen Compressionen oder Dilatationen des Mediums ausgeschlossen sind $\left[\theta \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\right]$.

§. 26. Die Differentialgleichungen der Bewegung für ein allgemeines Medium $g \neq a$ sind in (2) angegeben. Beschränkt man die Betrachtung auf solche Wellenbewegungen, bei welchen Compressionen oder Dilatationen des Mediums ausgeschlossen sind, so fallen im Gleichungssysteme (2) die Glieder, welche die Größe $\theta \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ enthalten, fort, und dieses Gleichungssystem nimmt die einfachere Form (3) an. Die Componenten X, Y, Z der äußeren störenden Kräfte sind aber jetzt nicht mehr unabhängig von einander; sie müssen vielmehr, wie sich aus (3) mit Rücksicht auf $\theta = 0$ sofort ergibt, der Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \qquad (\varepsilon)$$

genügen.

Die Aufgabe II fordert die Integration des Systems (3), wenn X, Y, Z gegebene Functionen von x, y, z, t sind, welche den Bedingungen (α), (β), (ε) genügen. Die verlangte Integration ist aber bereits geleistet, und zwar spricht sich das Resultat derselben aus in den Formeln (31) und (4) in §. 14. Die so bestimmten Functionen u, v, w genügen thatsächlich der Bedingung $\theta \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$; man kann dies direct durch die Rechnung verificieren, indem man aus (31) und (4) den Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ berechnet und die Bedingung (ε):

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

berücksichtigt.[1] Die Lösung der Aufgabe II im vorliegenden Falle ist also identisch mit der im I. Capitel für die entsprechende Aufgabe gefundenen Lösung.

Die Aufgabe I verlangt die Ermittelung der Functionen u, v, w für $t > t_0$, wenn für $t \geqq t_0$ keine äußeren Kräfte einwirken und für $t = t_0$ die Werte der elastischen Verschiebungen und Geschwindigkeiten vorgeschrieben sind:

$$(u)_{t=t_0} = u_0, \qquad (v)_{t=t_0} = v_0, \qquad (w)_{t=t_0} = w_0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathfrak{u}_0, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathfrak{v}_0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathfrak{w}_0.$$

Diese Größen sind hier nicht mehr — wie früher — von einander unabhängig, sondern durch die Beziehungen:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \mathfrak{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_0}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}_0}{\partial z} = 0$$

mit einander verknüpft anzunehmen. Ferner müssen — wie oben im II. Capitel — die Functionen $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}_0$ den Stetigkeitsbedingungen (β), die Functionen u_0, v_0, w_0 den Stetigkeitsbedingungen (β) und (δ') genügen. Da die gesuchten Functionen u, v, w für $t = t_0$ denselben Anfangsbedingungen, für $t > t_0$ denselben Differentialgleichungen (41) zu genügen haben, wie oben in §. 24, so geben die Formeln (43) die Lösung der Aufgabe I auch in dem hier vorliegenden Falle. Die aus (43) sich ergebenden Functionen u, v, w genügen hiebei nach dem, was hier in Bezug auf $u_0, v_0, w_0, \mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}_0$ angenommen worden ist, thatsächlich der Bedingungsgleichung:

$$\theta \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

was durch directe Rechnung verificiert wird.

---

[1] Bei Ausführung dieser Rechnung kommt es im wesentlichen darauf an, den Ausdruck für $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ in geschickter Weise durch partielle Integration umzuformen.

Zweiter Theil.

Die elektromagnetischen Wellen in optisch einaxigen, krystallinischen Medien.

I. Capitel.

Die Aufgabe I.

§. 1. Die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen[1] für das elektromagnetische Feld in einem homogenen krystallinischen, nichtleitenden Medium, welches als unbegrenzt und als frei von äußeren störenden Einwirkungen angenommen werden möge, lauten:

$$A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad A \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$A\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \qquad A \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$A\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \qquad A \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \qquad \ldots(1)$$

Hiebei sind, wie auch sonst üblich, die Magnetisierungsconstanten des Mediums gleich Eins vorausgesetzt.

In einem optisch einaxigen Medium — und lediglich ein solches soll hier Gegenstand der Untersuchung sein — sind zwei von den drei Dielektricitätsconstanten ε_1, ε_2, ε_3 einander gleich; es werde also:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

angenommen.

Zu dem Gleichungssysteme (1) treten noch hinzu die mit diesem verträglichen Bedingungsgleichungen:

[1] Vergl. Hertz, Gesammelte Abhandlungen, II. Bd., Abh. 13: Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik, 20. Krystalloptik (S. 253...).

$$\frac{\partial(\varepsilon_1 X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon_2 Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon_3 Z)}{\partial z} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \tag{1b}$$

welche besagen, dass in dem betrachteten Medium wahre elektrische und magnetische Ladungen ausgeschlossen bleiben sollen.[1]

Setzt man zur Abkürzung:

$$A^2 \varepsilon_1 = A^2 \varepsilon_2 = \frac{1}{a^2}; \qquad A^2 \varepsilon_3 = \frac{1}{c^2}, \tag{2}$$

so können die Gleichungen, welche aus (1) durch Elimination von (L, M, N), beziehungsweise (X, Y, Z) sich ergeben, geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= a^2 \left[\Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right] \\
\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= a^2 \left[\Delta Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right] \\
\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= c^2 \left[\Delta Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} &= \left[c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right)\right] \\
\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} &= \left[a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right] \\
\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= \left[a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3b}$$

§. 2. Diese Gleichungen lassen sich bedeutend vereinfachen, indem man von den Bedingungen (1a) und (1b) Gebrauch macht. Aus (1a) und (2) folgt:

[1] Würde man festliegende, wahre, elektrische Ladungen zulassen, so würde sich über das hier betrachtete veränderliche elektromagnetische Feld das den Ladungen entsprechende constante elektrostatische Feld einfach superponieren.

$$0 = c^2\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + a^2\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach x, y, z und addiert man die so entstehenden Gleichungen zur ersten, zweiten und dritten Gleichung in ($3a$), so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= a^2\Delta X - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= a^2\Delta Y - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3'a)$$

Differentiiert man ebenso die Gleichung ($1b$) nach x, y, z und addiert die so entstehenden Gleichungen, nachdem man sie mit a^2 multipliciert hat, zu der ersten, zweiten und dritten Gleichung in ($3b$), so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} &= a^2\Delta L + (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} &= a^2\Delta M - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= a^2\Delta N.
\end{aligned}\right\} \qquad (3'b)$$

Durch geeignete Bezeichnung der hier auftretenden Differentialoperationen können die Gleichungen ($3'a$), ($3'b$) noch auf eine kürzere Form gebracht werden. Man setze in Übereinstimmung mit dem ersten Theile (vergl. §. 4 und §. 18):

$$\left.\begin{aligned}
D_1\{L, M\} &= \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - a^2\Delta L - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\\
D_2\{L, M\} &= \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - a^2\Delta M + (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\\
D_3\{N\} &= \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - a^2\Delta N.
\end{aligned}\right\} (4a)$$

Ferner setze man:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D}_1\{X,Y\} &= \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - a^2\Delta X + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\\ \mathfrak{D}_2\{X,Y\} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - a^2\Delta Y + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\\ \mathfrak{D}_3\{Z\} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.\end{aligned}\right\}\quad(4b)$$

Die Differentialgleichungen $(3'a)$, $(3'b)$ können dann kurz geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D}_1\{X,\, Y\} &= 0\\ \mathfrak{D}_2\{X,\, Y\} &= 0\\ \mathfrak{D}_3\{Z\} &= 0.\end{aligned}\right\}\quad(3''a)$$

$$\left.\begin{aligned}D_1\{L,\, M\} &= 0\\ D_2\{L,\, M\} &= 0\\ D_3\{N\} &= 0.\end{aligned}\right\}\quad(3''b)$$

Zwischen den Differentialoperationen D_1, D_2, D_3 einerseits und den Differentialoperationen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ anderseits besteht nun eine einfache Beziehung, welche für das Folgende von grundlegender Bedeutung ist. Um zu dieser Beziehung zu gelangen, schreibe man in $(4a)$ statt L, M, N jetzt X, Y, Z; nach einer einfachen Umformung erhält man dann [vergl. I. Theil, §. 4, Gleichung $(5')$]:

$$D_1\{X,Y\} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$D_2\{X,Y\} = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$D_3\{Z\} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - a^2\Delta Z.$$

Durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit den obigen Formeln (4b) folgt die wichtige Thatsache, dass die Differentialoperationen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ aus den Differentialoperationen D_1, D_2, D_3 dadurch hervorgehen, dass man in den letzteren zunächst die Größen a und c miteinander vertauscht und sodann noch die Veränderliche z, soferne sie außerhalb der Functionen X, Y, Z vorkommt, durch $\frac{c}{a}z$ ersetzt.

§. 3. Es seien nun zu irgendeinem Zeitpunkte t_0 die Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft gegeben:

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z, t_0) &= X_0(x, y, z) \\ Y(x, y, z, t_0) &= Y_0(x, y, z) \\ Z(x, y, z, t_0) &= Z_0(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (5a)$$

$$\left.\begin{aligned} L(x, y, z, t_0) &= L_0(x, y, z) \\ M(x, y, z, t_0) &= M_0(x, y, z) \\ N(x, y, z, t_0) &= N_0(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (5b)$$

Die Functionen X_0, Y_0, Z_0 und L_0, M_0, N_0 sind hier nicht unabhängig von einander, sondern den Bedingungen (1a), (1b) unterworfen. Ferner soll angenommen werden, dass diese Functionen nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen endlich, stetig und differenzierbar, und dass ihre dritten Ableitungen endlich und stetig sein sollen.

Mit Hilfe der Gleichungen (1) lassen sich aus (5a) und (5b) Formeln für die Werte der Functionen $\frac{\partial X}{\partial t}, \ldots; \frac{\partial L}{\partial t}, \ldots$ zur Zeit $t = t_0$ ableiten; man findet, wenn zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} A a^2\left(\frac{\partial M_0}{\partial z} - \frac{\partial N_0}{\partial y}\right) &= \Xi_0 \\ A a^2\left(\frac{\partial N_0}{\partial x} - \frac{\partial L_0}{\partial z}\right) &= \mathrm{H}_0 \\ A c^2\left(\frac{\partial L_0}{\partial y} - \frac{\partial M_0}{\partial x}\right) &= \mathrm{Z}_0, \end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z_0}{\partial y}-\frac{\partial Y_0}{\partial z}\right) &= \Lambda_0\\ \frac{1}{A}\left(\frac{\partial X_0}{\partial z}-\frac{\partial Z_0}{\partial x}\right) &= \mathrm{M}_0\\ \frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y_0}{\partial x}-\frac{\partial X_0}{\partial y}\right) &= \mathrm{N}_0\end{aligned}\right\} \qquad (6b)$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}\left\{\frac{\partial X(x,y,z,t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \Xi_0(x,y,z)\\ \left\{\frac{\partial Y(x,y,z,t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \mathrm{H}_0(x,y,z)\\ \left\{\frac{\partial Z(x,y,z,t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \mathrm{Z}_0(x,y,z)\end{aligned}\right\} \qquad (5'a)$$

$$\left.\begin{aligned}\left\{\frac{\partial L(x,y,z,t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \Lambda_0(x,y,z)\\ \left\{\frac{\partial M(x,y,z,t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \mathrm{M}_0(x,y,z)\\ \left\{\frac{\partial N(x,y,z,t)}{\partial t}\right\}_{t=t_0} &= \mathrm{N}_0(x,y,z).\end{aligned}\right\} \qquad (5'b)$$

Die Aufgabe I verlangt nun die Integration des Systems (1) unter Erfüllung der Bedingungen (1*a*), (1*b*) und der Anfangsbedingungen (5*a*), (5*b*). Die dieser Aufgabe entsprechenden Functionen *L, M, N* müssen demnach dem Systeme (3″*b*) und den Anfangsbedingungen (5*b*), (5′*b*) genügen. Die Forderung, das System (3″*b*) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen (5*b*), (5′*b*) zu integrieren, ist nun aber im wesentlichen vollständig identisch mit der im ersten Theile [§. 22,...] gelösten Aufgabe, das System (41) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen (40) zu integrieren. Überträgt man die dort (in §. 24) gefundene Lösung auf den hier vorliegenden Fall, so ergeben sich folgende Ausdrücke für die Functionen *L, M, N*:

$$\left.\begin{aligned}
L(x, y, z, t) &= \omega_x[\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t}\,\omega_x[L_0, M_0]_{t_0} \\
M(x, y, z, t) &= \omega_y[\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t}\,\omega_y[L_0, M_0]_{t_0} \\
N(x, y, z, t) &= \omega_z[\mathfrak{N}_0] \qquad + \frac{\partial}{\partial t}\,\omega_z[N_0]_{t_0},
\end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

wo die Functionaloperationen ω_x, ω_y, ω_z nach Gleichung (42) des ersten Theiles definiert sind durch:

$$\omega_x[\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{\Sigma\,\{\rho = a(t-t_0)\}} \left[\mathfrak{L}_0 - \frac{\mathfrak{L}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{M}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Big|'\, d\Sigma_1 \\
&+ \frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{S\,\{r = a(t-t_0)\}} \left[\frac{\mathfrak{L}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{M}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Big|'\, dS \\
&\pm \frac{1}{a}\iiint\limits_{\substack{r \lesseqgtr a(t-t_0) \\ \rho \gtreqless a(t-t_0)}} \left[\mathfrak{L}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right] dx'dy'dz'
\end{aligned}\right.$$

$$\omega_y[\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{\Sigma\,\{\rho = a(t-t_0)\}} \left[\mathfrak{M}_0 - \frac{\mathfrak{L}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{M}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]\Big|'\, d\Sigma_1 \\
&+ \frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{S\,\{r = a(t-t_0)\}} \left[\frac{\mathfrak{L}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{M}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]\Big|'\, dS \\
&\pm \frac{1}{a}\iiint\limits_{\substack{r \lesseqgtr a(t-t_0) \\ \rho \gtreqless a(t-t_0)}} \left[\mathfrak{L}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y} + \mathfrak{M}_0\Big|'\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right] dx'dy'dz'
\end{aligned}\right.$$

$$\omega_z[\mathfrak{N}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\cdot\iint\limits_{S\,\{r = a(t-t_0)\}} \mathfrak{N}_0\Big|'\, dS. \qquad \ldots(7a)$$

Hierin beziehen sich die Substitutionsstriche lediglich auf die Functionen $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ und zeigen an, dass in diesen die Argumente x, y, z durch x', y', z' zu ersetzen sind. Wo doppelte Vorzeichen oder Ungleichheitszeichen auftreten, gelten die

oberen Zeichen für $a > c$, die unteren für $a < c$. Die Bedeutung der Größen: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, r, \rho, \chi, \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$ ist aus den Formeln (29) und (30) in §. 13 des ersten Theiles zu ersehen; über die Bedeutung von dS, $d\Sigma_1$ ist §. 19 des ersten Theiles zu vergleichen.

Die in ($6a$) bestimmten Functionen L, M, N genügen thatsächlich der Bedingungsgleichung ($1b$).

§. 4. Die der Aufgabe I entsprechenden Functionen X, Y, Z müssen dem Systeme (1), sowie den Bedingungen ($1a$), ($5a$) genügen und daher auch dem Systeme ($3''a$) und den Anfangsbedingungen ($5a$), ($5'a$). Die Forderung, das System ($3''a$) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen ($5a$), ($5'a$) zu integrieren, steht nun wiederum in der engsten Beziehung zu der im ersten Theile (§. 22, . . .) gelösten Aufgabe, das System (41) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen (40) zu integrieren. In der That gehen aus den Gleichungen (40) und (41) des ersten Theiles die Gleichungen ($5a$), ($5'a$) und ($3''a$) dieses Theiles hervor durch folgende einfache Transformation ($\mathfrak{T}$): Man setze an Stelle der dort vorkommenden Functionen u, v, w; u_0, v_0, w_0; $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}_0$ die Functionen X, Y, Z; X_0, Y_0, Z_0; $\Xi_0, \mathrm{H}_0, \mathrm{Z}_0$; man vertausche ferner a und c mit einander und ersetze endlich die Veränderliche z, insoferne sie außerhalb der eben aufgezählten Functionen auftritt, durch $\frac{c}{a} z$ (vergl. die am Schlusse des §. 2 dieses Theiles gemachte Bemerkung). Nimmt man nun eben diese Transformation ($\mathfrak{T}$) mit den Gleichungen (43) und (42) vor, welche die Lösung der Aufgabe, das System (41) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen (40) zu integrieren, enthalten, so erhält man die Lösung der hier vorliegenden Aufgabe, das System ($3''a$) unter Erfüllung der Anfangsbedingungen ($5a$), ($5'a$) zu integrieren: man findet:

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z, t) &= \bar{\omega}_x[\Xi_0, \mathrm{H}_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_x[X_0, Y_0]_{t_0} \\ Y(x, y, z, t) &= \bar{\omega}_y[\Xi_0, \mathrm{H}_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_y[X_0, Y_0]_{t_0} \\ Z(x, y, z, t) &= \bar{\omega}_z[\mathrm{Z}_0]_{t_0} \qquad + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_z[Z_0]_{t_0}, \end{aligned}\right\} \quad (6b)$$

wo die Functionaloperationen $\overline{\omega}_x$, $\overline{\omega}_y$, $\overline{\omega}_z$ nachstehende Bedeutung haben:

$$\overline{\omega}_x[\Xi_0, \mathrm{H}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{S\,\{r=a(t-t_0)\}} \left[\Xi_0 - \frac{\Xi_0\mathfrak{x}+\mathrm{H}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,\mathfrak{x}\right]\Big|'\, dS \\ &+\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{\Sigma\,\{\rho=a(t-t_0)\}} \left[\frac{\Xi_0\mathfrak{x}+\mathrm{H}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Big|'\, d\Sigma_1 \\ &\mp\frac{1}{a}\iiint\limits_{\substack{r\lesseqgtr a(t-t_0)\\ \rho\gtreqless a(t-t_0)}} \left[\Xi_0\,|'\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\mathrm{H}_0\,|'\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right] dx'dy'dz' \end{aligned}\right.$$

$$\overline{\omega}_y[\Xi_0, \mathrm{H}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{S\,\{r=a(t-t_0)\}} \left[\mathrm{H}_0 - \frac{\Xi_0\mathfrak{x}+\mathrm{H}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\,.\,\mathfrak{y}\right]\Big|'\, dS \\ &+\frac{1}{a^2(t-t_0)}\iint\limits_{\Sigma\,\{\rho=a(t-t_0)\}} \left[\frac{\Xi_0\mathfrak{x}+\mathrm{H}_0\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\right]\Big|'\, d\Sigma_1 \\ &\mp\frac{1}{a}\iiint\limits_{\substack{r\lesseqgtr a(t-t_0)\\ \rho\gtreqless a(t-t_0)}} \left[\Xi_0\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}+\mathrm{H}_0\,\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right] dx'dy'dz' \end{aligned}\right.$$

$$\overline{\omega}_z[\mathrm{Z}_0]_{t_0} = \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\iint\limits_{\Sigma\,\{\rho=a(t-t_0)\}} \mathrm{Z}_0\,|'\, d\Sigma_1 . \qquad \ldots (7b)$$

Hier beziehen sich die Substitutionsstriche wiederum nur auf die Functionen Ξ_0, H_0, Z_0; wo doppelte Vorzeichen oder Ungleichheitszeichen auftreten, gilt das obere Zeichen für $a > c$, das untere für $a < c$.

Die hier bewerkstelligte Ableitung der Gleichungen (6*b*) und (7*b*) aus den Gleichungen (43) und (42) des ersten Theiles vermittels der Transformation ($\mathfrak{T}$) wird wesentlich erleichtert durch die Bemerkung, dass durch diese Transformation die

Größen $\frac{r}{a}$ und $\frac{\rho}{a}$, die Flächen S und Σ, endlich die Flächenelemente $\frac{dS}{a^2}$ und $\frac{d\Sigma_1}{a^2}$ untereinander vertauscht werden.

Die in den Gleichungen (6*a*), (7*a*), (6*b*), (7*b*) bestimmten Functionen L, M, N, X, Y, Z genügen in der That den Gleichungen (1) und den Bedingungen (1*a*), (1*b*); sie genügen ferner den Anfangsbedingungen (5*a*), (5*b*). Sie sind also die gesuchten Lösungen der Aufgabe I.

Hiernach hängt die elektrische und magnetische Kraft im Punkte (x, y, z) zur Zeit t ($> t_0$) ab von den Anfangswerten der elektrischen und magnetischen Kraft, welche zur Zeit t_0:

1. auf der Kugel $r = a(t - t_0)$,
2. auf dem Rotationsellipsoid $\rho = a(t - t_0)$,
3. in dem zwischen diesen beiden Flächen enthaltenen Raumtheile vorhanden waren.

Dementsprechend sind auch hier, wie im ersten Theile, drei Arten von Wellen zu unterscheiden:

1. die ordinäre Welle,
2. die extraordinäre Welle,
3. die intermediäre Welle oder kurz die Zwischenwelle.

Die magnetische Kraft, welche sich überhaupt ganz so verhält, wie die elastische Verschiebung im ersten Theile, ist in der extraordinären Welle senkrecht zum Hauptschnitte, in der ordinären Welle hingegen liegt sie im Hauptschnitte. Die elektrische Kraft zeigt gerade das umgekehrte Verhalten; sie ist in der ordinären Welle senkrecht zum Hauptschnitte, in der extraordinären Welle fällt sie in den Hauptschnitt.

II. Capitel.

Die Aufgabe II.

(Für elektromagnetische Wellen in einem optisch einaxigen, krystallinischen Medium).

Die Aufgabe II verlangt die Ermittelung derjenigen Wellenbewegungen, welche durch gegebene äußere störende Einwirkungen in einem Medium hervorgerufen werden, in welchem

zu Anfang überhaupt gar kein elektromagnetisches Feld vorhanden war, d. h. in welchem zu Anfang die elektrische und die magnetische Kraft überall gleich Null war. Damit diese Aufgabe einen bestimmten Sinn habe, ist vor allem nothwendig, den Einfluss der störenden äußeren Einwirkungen auf das Medium mathematisch zu präcisieren. Jedenfalls werden in denjenigen Theilen des Mediums, welche äußeren Einwirkungen unterliegen, die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen nicht mehr in der obigen Form (1) Geltung haben; vielmehr werden diese Gleichungen zu modificieren sein durch Hinzufügung gewisser Glieder, welche eben den Einfluss der störenden äußeren Einwirkungen darstellen.

Die so modificierten Maxwell-Hertz'schen Gleichungen sollen in folgender Form angenommen werden:

$$\left.\begin{aligned}
A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi A u &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \\
A\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi A v &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \\
A\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi A w &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \\
A \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\
A \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\
A \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die Größen u, v, w sind hier als von einander unabhängige Functionen anzusehen; demgemäß wird jetzt auch die im I. Capitel in Betreff der Functionen X, Y, Z aufgestellte Bedingungsgleichung (1a) in denjenigen Raumtheilen, welche äußeren Einwirkungen unterworfen sind oder unterworfen waren, ihre Giltigkeit im allgemeinen verlieren.[1] Hingegen soll

[1] Indem hier die Bedingung (1a) fallen gelassen wird, erhalten die Untersuchungen dieses Capitels einen allgemeineren Charakter im Vergleiche zum vorangehenden Capitel.

die Bedingungsgleichung (1 *b*) für die Functionen *L, M, N* unverändert bestehen bleiben:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \qquad (8a)$$

In der That befindet sich diese Bedingung auch mit den neuen Gleichungen (8) vollständig im Einklange.

Die in den obigen Annahmen liegende Unsymmetrie in Bezug auf das Verhalten der elektrischen und magnetischen Kraft ist durch die Natur der Sache gerechtfertigt, da es erfahrungsgemäß zwar wahre elektrische Ladungen, aber keine wahren magnetischen Ladungen gibt. Der Zusammenhang der obigen Annahmen mit den neueren Anschauungen in der Elektrodynamik, wornach das elektromagnetische Feld in einem Medium als durch Ladung, Lage und Bewegung der in ihm eingebetteten Ionen bedingt angesehen wird (Lorentz), ist nicht zu verkennen. Vom Standpunkte dieser neueren Theorien sind die Größen (u, v, w) als die Componenten einer Strömung derartiger Ionen oder Elektronen aufzufassen, welche Strömung sich über die gewöhnlichen Verschiebungsströme superponiert. Zum Unterschiede von den Verschiebungsströmen, welche auch bei Abwesenheit äußerer störender Ursachen in einem veränderlichen elektromagnetischen Felde vorhanden sind, mögen hier die Größen u, v, w als die Componenten der »erregenden« oder der »äußeren« Strömung bezeichnet werden.

Bedient man sich der im ersten Theile eingeführten Redeweise: Irgendeine Function von x, y, z, t genüge der Anfangsbedingung (α), wenn sie für $t < \tau_0$ verschwindet, so kann die Aufgabe II jetzt in folgender Weise mathematisch formuliert werden:

Es ist das System (8) durch solche Functionen *X, Y, Z, L, M, N* zu integrieren, welche der Bedingung (α) genügen; unter der Voraussetzung, dass u, v, w bekannte Functionen von x, y, z, t sind, welche ihrerseits der Bedingung (α) genügen.

§. 6. Es ist zweckmäßig, durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}(x, y, z, t) &= -4\pi \int_{t'=-\infty}^{t'=t} u(x, y, z, t')\,dt' \\ \mathfrak{Y}(x, y, z, t) &= -4\pi \int_{t'=-\infty}^{t'=t} v(x, y, z, t')\,dt' \\ \mathfrak{Z}(x, y, z, t) &= -4\pi \int_{t'=-\infty}^{t'=t} w(x, y, z, t')\,dt'\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

die Functionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ einzuführen, welche ebenso wie die Functionen u, v, w als bekannt anzusehen sind und wie diese der Bedingung (α) genügen.

Indem man die ersten drei Gleichungen in (8), beziehungsweise nach x, y, z differenziert, dann addiert und schließlich nach t integriert, findet man leicht für das 4π-fache der »wahren Dichte« Elektricität folgenden Ausdruck:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 4\pi\sigma(x, y, z, t), \qquad (10)$$

so ist also:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\sigma(x, y, z, t), \qquad (11)$$

wobei σ nach (10) und (9) eine bekannte Function ist, die der Bedingung (α) genügt. Nach (11) ist σ nichts anderes als die »wahre« Dichte der Elektricität.

In dem hier allein zu untersuchenden Falle eines einaxig-krystallinischen Mediums ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Mit Rücksicht auf die oben eingeführte Bezeichnung:

$$A^2\varepsilon_1 = A^2\varepsilon_2 = \frac{1}{a^2}; \qquad A^2\varepsilon_3 = \frac{1}{c^2} \qquad (2)$$

kann die Gleichung (11) weiter geschrieben werden, indem man sie mit $a^2c^2A^2$ multipliciert und dann transponiert:

$$0 = c^2\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + a^2 \frac{\partial Z}{\partial z} - 4\pi a^2c^2A^2\sigma. \qquad (11')$$

Durch Elimination von L, M, N aus dem Systeme (8) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= a^2\left[\Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right] - \frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial u}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= a^2\left[\Delta Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right] - \frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial v}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= c^2\left[\Delta Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right] - \frac{4\pi}{\varepsilon_3}\frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Addiert man zu der ersten, zweiten, dritten Gleichung in (12), beziehungsweise die nach x, y, z abgeleitete Gleichung (11′), so folgt, indem man von den in System (4*b*) dieses Theiles eingeführten Differentialoperationen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ Gebrauch macht:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_1\{X, Y\} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial u}{\partial t} - 4\pi a^2 c^2 \Lambda^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\
\mathfrak{D}_2\{X, Y\} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial v}{\partial t} - 4\pi a^2 c^2 \Lambda^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\
\mathfrak{D}_3\{Z\} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_3}\frac{\partial w}{\partial t} - 4\pi a^2 c^2 \Lambda^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Diese Gleichungen sind nunmehr [unter Erfüllung der Anfangsbedingung (α)] zu integrieren.

§. 7. Werden unter ξ, η, ζ irgendwelche Functionen von x, y, z, t verstanden, welche endlich und stetig sind, ferner endliche und stetige erste und zweite Ableitungen besitzen, und endlich der Bedingung (α) genügen, so findet man die der Bedingung (α) genügenden Integrale des Systems:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_1\{X, Y\} &= \xi \\
\mathfrak{D}_2\{X, Y\} &= \eta \\
\mathfrak{D}_3\{Z\} &= \zeta
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

leicht durch folgende Überlegung. Nach §. 2 dieses Theiles gehen die Differentialoperationen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ aus den Differentialoperationen D_1, D_2, D_3 [vergl. System (4*a*) dieses Theiles] dadurch hervor, dass man in den letzteren a und c miteinander vertauscht und sodann die unabhängige Veränderliche z — insoferne sie außerhalb der Functionen, auf welche die Differentialoperationen sich beziehen, vorkommt — durch $\frac{c}{a}z$ ersetzt. Nun ist im ersten Theile das System (3), welches mit Hilfe der oben eingeführten Differentialoperationen kurz geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} D_1(u, v) &= X \\ D_2(u, v) &= Y \\ D_3(w) &= Z, \end{aligned}\right\} \quad \text{[Gleichung (3) des ersten Theiles]}$$

durch die Gleichungen (31) und (4) [siehe §. 14 des ersten Theiles] integriert worden. Vermöge der engen Beziehung, welche nach dem Gesagten zwischen dem Systeme (3) des ersten Theiles und dem Systeme (14) dieses Theiles besteht, findet man die Lösung des letzteren Systems, indem man in den Gleichungen (31) und (4) des ersten Theiles, welche die Lösung des ersteren Systems enthalten, statt u, v, w, X, Y, Z jetzt beziehungsweise $X, Y, Z, \xi, \eta, \zeta$ schreibt, ferner a und c miteinander vertauscht, und endlich die Veränderliche z — insoferne sie außerhalb der eben aufgezählten Functionen vorkommt — durch $\frac{c}{a}z$ ersetzt. Man gelangt auf diese Weise zu folgender Lösung des Systems (14):

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z, t) &= \ddot{\Omega}_x[\xi, \eta] \\ Y(x, y, z, t) &= \ddot{\Omega}_y[\xi, \eta] \\ Z(x, y, z, t) &= \ddot{\Omega}_z[\zeta], \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo die Symbole $\ddot{\Omega}_x$, $\ddot{\Omega}_y$, $\ddot{\Omega}_z$ die nachstehende Bedeutung haben:

$$\bar{\Omega}_x[\xi,\eta] = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\iiint\left[\xi - \frac{\xi\mathfrak{x}+\eta\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz' \\ &+\frac{1}{c^2}\iiint\left[\frac{\xi\mathfrak{x}+\eta\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{x}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz' \\ &-\frac{1}{a}\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left[\xi|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\eta|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\right]dt'dx'dy'dz' \end{aligned}\right.$$

$$\bar{\Omega}_y[\xi,\eta] = \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\iiint\left[\eta - \frac{\xi\mathfrak{x}+\eta\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{r}{a}}\cdot\frac{1}{r}\,dx'dy'dz' \\ &+\frac{1}{c^2}\iiint\left[\frac{\xi\mathfrak{x}+\eta\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\cdot\mathfrak{y}\right]\Bigg|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}}\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz' \\ &-\frac{1}{a}\iiint\int_{t'=t-\frac{\rho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left[\xi|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}+\eta|'\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right]dt'dx'dy'dz' \end{aligned}\right.$$

$$\bar{\Omega}_z[\zeta] = \frac{1}{4\pi c^2}\iiint\zeta|^{x',y',z',t-\frac{\rho}{a}}\cdot\frac{1}{\rho}\,dx'dy'dz'. \qquad \ldots(16)$$

Hierin beziehen sich die Substitutionsstriche lediglich auf die Functionen ξ, η, ζ. —

Für die Ableitungen der Ausdrücke $\bar{\Omega}_x$, $\bar{\Omega}_y$, $\bar{\Omega}_z$ gelten, wie man leicht verificieren kann, nachstehende, unten zu benutzende Formeln:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Omega}_x[\xi,\eta] = \bar{\Omega}_x\left[\frac{\partial\xi}{\partial t},\frac{\partial\eta}{\partial t}\right];\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\Omega}_x[\xi,\eta] = \bar{\Omega}_x\left[\frac{\partial\xi}{\partial x_i},\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Omega}_y[\xi,\eta] = \bar{\Omega}_y\left[\frac{\partial\xi}{\partial t},\frac{\partial\eta}{\partial t}\right];\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\Omega}_y[\xi,\eta] = \bar{\Omega}_y\left[\frac{\partial\xi}{\partial x_i},\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Omega}_z[\zeta] = \bar{\Omega}_z\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right];\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\Omega}_z[\zeta] = \bar{\Omega}_z\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\right]$$

und ähnliche Ausdrücke für die zweiten Ableitungen.

§. 8. Um nun auf Grund des in §. 7 Gesagten das System (13) integrieren zu können, ist es nothwendig, die Annahme zu machen, dass die Functionen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$ denselben Bedingungen wie die Functionen ξ, η, ζ in §. 7 genügen. Es soll also fortan vorausgesetzt werden, dass die genannten Functionen nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen endlich und stetig seien. Die Integration des Systems (13) kann dann in folgender Weise vorgenommen werden.

Man bestimme zunächst die Functionen X_d, Y_d, Z_d, welche den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_1\{X_d, Y_d\} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial u}{\partial t} \\ \mathfrak{D}_2\{X_d, Y_d\} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial v}{\partial t} \\ \mathfrak{D}_3\{Z\} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_3}\frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

und der Anfangsbedingung (α) genügen; sodann die Functionen X_s, Y_s, Z_s, welche den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_1\{X_s, Y_s\} &= -4\pi a^2 c^2 A^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \mathfrak{D}_2\{X_s, Y_s\} &= -4\pi a^2 c^2 A^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \mathfrak{D}_3\{Z_s\} &= -4\pi a^2 c^2 A^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{17b}$$

und der Anfangsbedingung (α) genügen. Die gesuchten Integrale des Systems (13) sind dann gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_d + X_s \\ Y &= Y_d + Y_s \\ Z &= Z_d + Z_s. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Nach §. 7 erhält man für die Functionen X_d, Y_d, Z_d:

$$X_d = \bar{\Omega}_x\left[-\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial u}{\partial t}, -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial v}{\partial t}\right] = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Omega}_x[u, v]$$

$$Y_d = \bar{\Omega}_y\left[-\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial u}{\partial t}, -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial v}{\partial t}\right] = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Omega}_y[u, v]$$

$$Z_d = \bar{\Omega}_z\left[-\frac{4\pi}{\varepsilon_3}\frac{\partial w}{\partial t}\right] = -\frac{4\pi}{\varepsilon_3}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Omega}_z[w].$$

Setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= +\frac{4\pi}{\varepsilon_1 A}\cdot\bar{\Omega}_x[u, v] \\ V(x, y, z, t) &= +\frac{4\pi}{\varepsilon_1 A}\cdot\bar{\Omega}_y[u, v] \\ W(x, y, z, t) &= +\frac{4\pi}{\varepsilon_3 A}\cdot\bar{\Omega}_z[w], \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

so wird:

$$X_d = -A\frac{\partial U}{\partial t}; \quad Y_d = -A\frac{\partial V}{\partial t}; \quad Z_d = -A\frac{\partial W}{\partial t}. \quad (20)$$

Bei der Ermittelung der Functionen X_s, Y_s, Z_s aus dem Systeme (17*b*) möge ein etwas anderer Weg eingeschlagen werden. Die Differentialoperationen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ können, wie aus System (4*b*) dieses Theiles durch eine einfache Umformung folgt, auch in folgender Weise definiert werden:

$$\mathfrak{D}_1\{X, Y\} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$\mathfrak{D}_2\{X, Y\} = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$\mathfrak{D}_3\{Z\} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

Mit Rücksicht darauf kann das System (17*b*) integriert werden, indem man setzt:

$$X_s = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad Y_s = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad Z_s = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{21}$$

und die Function Ψ so bestimmt, dass sie der Anfangsbedingung (α) und der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 4\pi a^2 c^2 A^2 \sigma$$

genügt. Nach §. 3 des ersten Theiles findet man:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \iiint 4\pi a^2 c^2 A^2 \sigma \Big|^{x', y', z', t - \frac{\rho}{a}} \frac{1}{\rho} \, dx' dy' dz'$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (2) dieses Theiles weiter:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_1} \iiint \sigma \Big|^{x', y', z', t - \frac{\rho}{a}} \cdot \frac{1}{\rho} \, dx' dy' dz'. \tag{22}$$

Damit ist nun die Aufgabe, das System (13) unter Erfüllung der Anfangsbedingung (α) zu integrieren, vollständig gelöst. Aus (18), (20), (21) folgt:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - A \frac{\partial U}{\partial t} \\ Y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - A \frac{\partial V}{\partial t} \\ Z &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} - A \frac{\partial W}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Trägt man diese Ausdrücke für X, Y, Z in die letzten drei Gleichungen des Systems (8) ein und integriert dann nach t, so ergeben sich folgende Ausdrücke für L, M, N:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \\ M &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \\ N &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

§. 9. Die obigen Ausdrücke für X, Y, Z, L, M, N genügen thatsächlich dem Systeme (8) und der Anfangsbedingung (α). Die Gleichungen (23) und (24) stellen also in Verbindung mit den Gleichungen (19) und (22), aus denen sich die Functionen U, V, W, Ψ bestimmen, die Lösung der Aufgabe II für das betrachtete Medium dar, d. h. sie geben das elektromagnetische Feld an, welches durch die vorgeschriebenen »äußeren« Strömungen (u, v, w) hervorgerufen wird. Das genannte elektromagnetische Feld lässt sich aus dem Vectorpotential (U, V, W), welches den äußeren Strömungen (u, v, w) entspricht, und aus dem scalaren Potential Ψ, welches den durch diese Strömungen erzeugten wahren Ladungen von der Raumdichte σ entspricht, in ganz derselben Weise ableiten, wie dies in der alten Fernwirkungstheorie geschieht. Das hier gefundene Resultat unterscheidet sich aber dadurch wesentlich von den Ergebnissen der alten Theorie, dass bei der Berechnung der Potentiale (U, V, W) und Ψ nach (19) und (22) der zeitlichen Ausbreitung der elektromagnetischen Zustände Rechnung getragen wird.

Die innere Verwandtschaft des obigen Resultates mit einem bemerkenswerten Satze, der unter Beschränkung auf das elektromagnetische Feld in isotropen Nichtleitern von Levi-Cività (in der Zeitschrift Il Nuovo Cimento, Jahrg. 1897: »Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana«) aufgestellt worden ist,[1] mag hier kurz berührt werden.

Nach (19) pflanzt sich das Vectorpotential (U, V, W) von den verschiedenen Erregungsstellen aus in Wellen fort, welche — wie aus der Definition der Symbole $\overline{\Omega}_x$, $\overline{\Omega}_y$, $\overline{\Omega}_z$ in (16) unmittelbar zu erkennen ist — aus ordinären, extraordinären und intermediären Wellentheilen bestehen.

[1] Vergl. hiezu: Wiechert, Die Grundlagen der Elektrodynamik (in der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig 1899). S. 78.

Ein wesentlich einfacheres Verhalten zeigt nach (22) das scalare Potential Ψ, indem dieses von denjenigen Stellen, an denen wahre Ladungen vorhanden sind, lediglich in extraordinären Wellen fortschreitet.

Die obigen Lösungen können noch auf eine etwas andere Form gebracht werden, indem man in denselben die Functionen u, v, w, σ ausdrückt durch die Functionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. Specialisiert man dann die obigen Lösungen durch die Annahme, dass die Functionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ nur in einem sehr kleinen Raumtheile von Null verschieden sind, und dass der Vector $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ einer festen Richtung parallel ist, so gelangt man zur Theorie des Hertz'schen linearen Erregers in dem betrachteten Medium, wie der Verfasser in einer folgenden Abhandlung näher auszuführen gedenkt.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. X.

Über ein mechanisch registrierendes Elektrometer für luftelektrische Messungen

von

Dr. Hans Benndorf.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

In einer vorläufigen Mittheilung habe ich im Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften (38, S. 200 bis 203, 1901) die Gesichtspunkte hervorgehoben, die mich bei der Construction eines mechanisch registrierenden Elektrometers geleitet haben, und das Princip des Instrumentes auseinandergesetzt.

Im Laufe des letzten Jahres hatte ich Gelegenheit, den Apparat nach verschiedenen Richtungen hin auszuprobieren und einige Verbesserungen anzubringen.

In der jetzt vorliegenden Form scheint er billigen Anforderungen zu genügen und bewährt sich an den drei Stationen (Wien, Triest, Kremsmünster), die ihn zur Registrierung der atmosphärischen Elektricität aufgestellt haben.

Ich möchte daher im folgenden eine ausführliche Beschreibung der Construction und Wirkungsweise des Apparates[1] und eine Anleitung zu seiner Aufstellung geben. So viel mir bekannt,

[1] Das Ausführungsrecht habe ich dem Mechaniker des physiologischen Institutes der Universität Wien Herrn Ludwig Castagna übertragen, der den Apparat um den Preis von 420 Kronen liefert.

sind Elektrometer noch nicht für mechanische Registrierung eingerichtet worden, obwohl Galvanometer schon von verschiedenen Seiten in einer der unten beschriebenen prinzipiell ähnlichen Construction verwendet worden sind. Die Idee, Zigerausschläge durch Niederdruck zeitweilig zu markieren, stammt, glaube ich, von Crova.

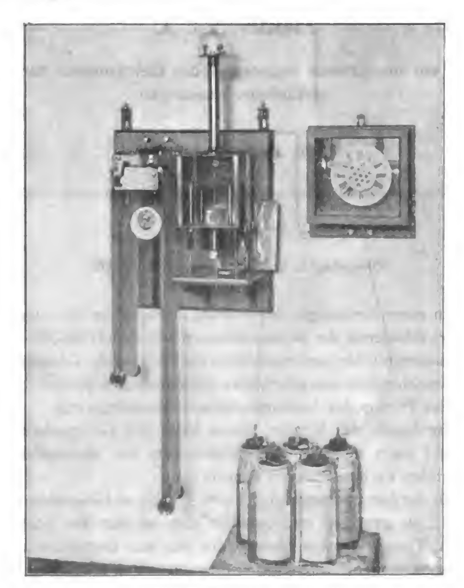


Fig. 1.

Der ganze Apparat, den Fig. 1 darstellt, besteht in seiner Hauptsache aus drei Theilen: dem eigentlichen Elektrometer, der elektromagnetisch betriebenen Druckvorrichtung, die gleichzeitig die Bewegung des Papierstreifens besorgt, und dem Uhrwerk, das zu bestimmten Zeiten die elektrischen Contacte auslöst.

Zu Fig. 1 ist nur noch zu bemerken, dass die weiter unten besprochene Stundenmarkenvorrichtung an dem dargestellten Apparat nicht angebracht ist.

Die Dimensionen sind genügend genau aus den Figuren zu entnehmen.

I. Beschreibung des Instrumentes.

1. Das Elektrometer.

Das Elektrometer ist ein Quadranteninstrument und ist in Fig. 2 im Aufriss, in Fig. 3 im Grundriss schematisch dargestellt. Es steht auf einer Holzconsole C, die an einem mit Stellschrauben versehenen Wandbrett W fix befestigt ist.

Auf drei mit Stellschrauben (s) versehenen Füßen (F) ruht die quadratische Bodenplatte; sie trägt an den vier Ecken vierkantige Säulen, die die Deckplatte mit dem Boden verbinden und die Führungsnuthen für die herausnehmbaren Seitenwände enthalten.

In der Mitte der Deckplatte aufgeschraubt, trägt das Schutzrohr (R) den Torsionskopf T_k.

In der Grundplatte, durch polierte und mit Schellack überzogene Hartgummischeibchen von ihr isoliert, sind die vier Quadrantenträger befestigt, die an ihrem oberen Ende die vier Quadrantenpaare ($Q_1 .. Q_4$) tragen. Die Distanz eines Quadrantenpaares beträgt 1 *cm*.

An die unteren Enden der Träger der Quadrantenpaare Q_2 und Q_3 sind Bleche angeschraubt, die über das Elektrometergehäuse hinausragen und die Klemmschrauben K_4 und K_6 tragen.

Die oberen vier Quadranten haben jeder einen Zapfen (in Fig. 2 weggelassen, in Fig. 3 mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet), die wechselweise 1 mit 3 und 2 mit 4 durch zwei Spiralfedern verbunden sind und den elektrischen Contact zweier diagonal gegenüberliegender Quadrantenpaare vermitteln, so dass K_4 mit Q_2 und Q_4, K_6 mit Q_1 und Q_3 dauernd leitend verbunden sind.

Die Lemniscate L (0·2 *mm* dickes Aluminiumblech), deren relative Größe Fig. 3 wiedergibt, ist bifilar an einem Platindraht (0·05 *mm*) aufgehängt.

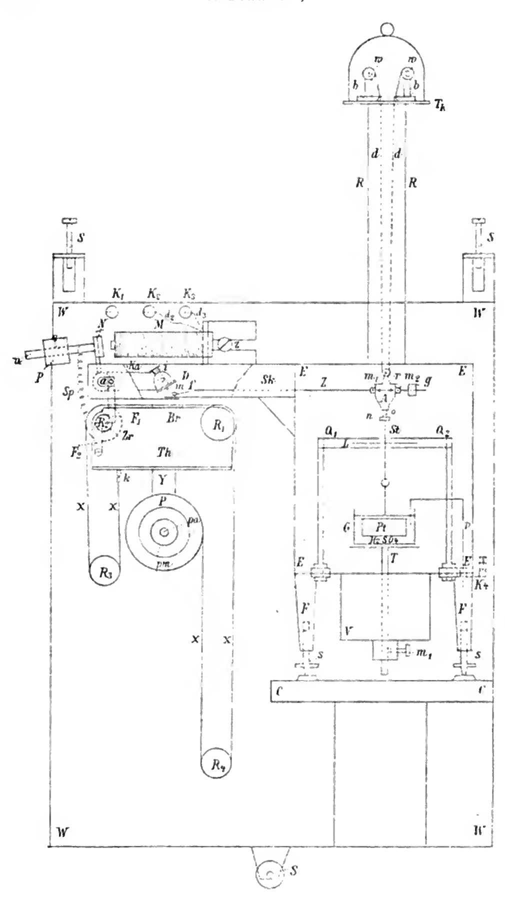

w
w
b
b
T_k
d
d
R
R
S
S
K_1
K_2
K_3
W
W
M
u
P
Sp
Sk
E
Z
E
g
F_1
Br
R_1
Zr
F_2
Th
k
Y
x
x
P
pa
pm
R_3
St
a_1
a_2
L
G
Pt
T
E
E
K_4
F
F
V
x
x
m_1
s
s
C
C
R_4
W
W
S

Fig. 2.

0 5 10 cm

Zu diesem Zweck trägt der Torsionskopf zwei Schneiden *b* (Fig. 2), deren Distanz durch Schrauben zwischen 0·1 und 10 *mm* variiert werden kann.

Auf den Schneiden stehen kleine Säulchen, welche den beiden Walzen *w* zur Führung dienen.

Der Aufhängedraht wird mit einem Ende an einer Walze befestigt, läuft an der einen Schneide vorbei durch das Rohr *R* in das Innere des Elektrometergehäuses, um die kleine Rolle *r* herum und denselben Weg auf der anderen Seite hinauf zur

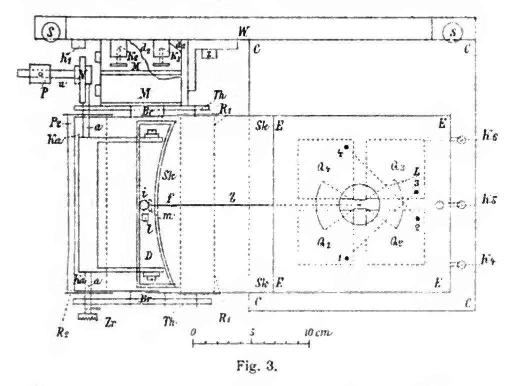


Fig. 3.

zweiten Walze; es genügt daher, das Drehen einer Walze um den Draht zu verkürzen und die Rolle *r* zu heben.

Die obere Distanz der beiden Äste des Platindrahtes ist also durch die jeweilige Entfernung der Schneiden *b* gegeben, während die untere fix ist und dem lichten Durchmesser der Rolle *r* (circa 3 *mm*) entspricht.

Die Achse der Rolle *r* läuft in zwei Lappen des Blechstückes *A*, dessen Gestalt aus Fig. 2 ersichtlich ist.

Unten ist an *A* eine Hülse angelöthet, in die der kleine Bernsteincylinder *o* eingekittet ist. Das andere Ende von *o* ist ebenfalls in eine Hülse *n* eingekittet, in deren Bodenplatte ein Schraubengewinde eingeschnitten ist, in das der Lemniscaten-

träger *St* (Aluminiumdraht 1·5 *mm*) eingeschraubt werden kann; an ihm, durch eine federnde Hülse verschiebbar, sitzt die Lemniscate.

Zur Dämpfung des schwingenden Systems und zugleich zur Ladung der Elektrometernadel dient das Platinblech *Pt*, welches in concentrierte Schwefelsäure taucht; es ist durch einen 0·2 *mm* dünnen Platindraht in dem pincettenförmig gespaltenen unteren Ende des Lemniscatenträgers *St* eingeklemmt.

Das Glasgefäß *G*, das die Schwefelsäure enthält, steht auf einem verstellbaren Tischchen *T*, durch Hartgummiklötze von ihm isoliert. In der Bodenplatte des Elektrometergehäuses ist eine cylindrische Versenkung *V* angebracht, in die das Tischchen sammt Glasgefäß versenkt wird, wenn man das gesammte bewegliche System des Elektrometers (*A*, *St*, *L*, *Pt*) einsetzen oder herausnehmen will.

Die Zuleitung zum Gefäß geschieht derart, dass aus der Schwefelsäure ein Platindraht zur Messingstange *p* führt, die durch ein Bernsteinstück in der Bodenplatte isoliert befestigt ist und an ihrem unteren Ende den Arm mit der Klemmschraube K_5 (Fig. 3) trägt.

Die Ausschläge der Lemniscate zu registrieren dient ein Zeiger aus Aluminiumdraht *Z*, der durch eine Hülse in *A* hindurchgeht und mittels der beiden Mütterchen m_1 und m_2 festgeklemmt wird; das Gegengewicht *g* lässt sich durch Schrauben verstellen. Am anderen Ende des Zeigers *Z* ist eine circa 4 *cm* lange, sehr dünne Messingfeder *f* angelöthet, die ihrerseits wieder den Schreibstift trägt; einem Stückchen Messingblech *m* (2×6 *mm*) ist auf der unteren Seite ein 1 *mm* hoher, mit einer stumpfen Spitze versehener Messingstift eingeschraubt, der, wenn er durch die später zu beschreibende Druckvorrichtung auf das Papier niedergedrückt wird, die Stellung des Zeigers *Z* und somit auch die der Lemniscate markiert.

Neuerdings habe ich versucht, den kleinen Messingstift durch einen in dem Messingblech *m* gefassten, spitz zugeschliffenen Granaten zu ersetzen, weil er feinere Punkte erzeugt als der Messingstift, der sich bald bis zu einem gewissen Grade abstumpft. Stahl und Eisen dürfen leider am beweg-

lichen Theile des Instrumentes nicht verwendet werden wegen der Nähe der Elektromagnete.

Gegen äußere Einflüsse ist das Instrument geschützt oben auf dem Torsionskopf durch einen Glassturz, an den vier Seiten durch Metallschuber, die in Nuthen der vierkantigen Eckpfeiler des Elektrometers laufen.

Zieht man sie nach oben heraus, so ist der Apparat von allen Seiten leicht zugänglich, was für das Einhängen der Lemniscate und des Zeigers von Wichtigkeit ist.

Die vom Beschauer linke Seitenwand (Fig. 2) kann natürlich nicht bis zur Deckplatte des Elektrometergehäuses reichen, weil sonst der Zeiger Z nicht herausragen könnte.

Es ist deshalb in geeigneter Höhe an dieser Seitenwand ein kastenartiger Fortsatz S_k befestigt und durch eine Dreieckstütze versteift; er ist nach oben zu offen und durch einen leicht wegnehmbaren Deckel zu schließen. In Fig. 2 ist ein Theil der vorderen Seitenwand von S_k weggebrochen gedacht, um den Zeiger Z und die Druckvorrichtung sichtbar zu machen.

Das dem Elektrometer abgewandte Ende von S_k greift knapp über einen zweiten Kasten Ka, in dem die Druckvorrichtung liegt; auch er besitzt einen abnehmbaren Deckel. Beide Kasten zusammengeschoben bilden also eine Art Büchse, in der der Zeiger Z, vor Luftströmungen geschützt, schwingen kann.

2. Die Registriervorrichtung.

Auf dem Wandbrett W (Fig. 2 und 3) ist auf einer eisernen Console Y auch die Registriervorrichtung angebracht. Zwei vertical auf der Console angeschraubte Seitentheile Th dienen den Achsen der beiden Rollen R_1 und R_2 als Widerlager; außerdem sind sie oben durch eine Brücke Br verbunden, über der das Ende des Zeigers Z schwingt.

Die beiden Rollen R_1 und R_2 dienen dem wandernden Papierstreifen zur Führung parallel mit der Schwingungsebene des Zeigers.

Der Papierstreifen läuft in folgender Weise: Die Papierrolle von 12 *cm* Breite wird auf ihre Achse *pa* aufgesteckt, und

zwar so, dass sich der Streifen, von vorne gesehen, im Sinne des Uhrzeigers abrollen kann, ein genügend langes Stück abgewickelt und die Rolle dann durch die Mutter *pm* so fest geklemmt, dass sie sich nicht mehr drehen kann.

Das Papierband *x* wird nun um die Spannrolle R_4 herum über R_1, *Br*, R_2 um die zweite Spannrolle R_3 zur Klemme *k* geführt und sein Ende dort fixiert. Die beiden Spannrollen haben keine Achsen und liegen nur in den Papierschleifen, den Streifen durch ihr Gewicht spannend.

Die Länge des abzuwickelnden Papierstreifens hängt davon ab, wie lange man den Apparat sich selbst überlassen will. Zweieinhalb bis drei Meter genügen für eine Woche vollständig; natürlich befinden sich dann die Rollen R_3 und R_4 viel tiefer als in Fig. 2, wo das Papierband *x* der Raumersparnis halber so kurz gezeichnet ist.

Das Weiterführen des Papieres wird durch die Rolle R_2 besorgt, die auf ihrer Mantelfläche mit rauhem Papier überzogen ist, so dass die Reibung des Papierstreifens auf ihr genügend groß ist, um ein Gleiten zu verhindern.

Um auf dem Papier Marken zu erhalten, wenn der Schreibstift des Zeigers *Z* niedergedrückt wird, ist über das weiße Papier ein 12 *cm* breiter Streifen Blaupapier (im Handel auch Indigopapier genannt) gelegt, wodurch jedesmal ein blauer Punkt entsteht.

Der zweite Theil des Registrierapparates besteht in der Druckvorrichtung, verbunden mit dem Verschiebungsmechanismus für den Papierstreifen.

An der Rückwand der Console *Y* ist ein zweipoliger Elektromagnet *M* mit horizontalen Schenkeln durch die Schraube *z* befestigt. Durchfließt ihn ein Strom, so zieht er den weichen Eisenanker *N* an, der an einem Arm an der Achse *a* befestigt ist und sie daher um ein Stück im Sinne des Uhrzeigers dreht. Wird der Strom unterbrochen, so ziehen eine Spiralfeder *Sp* und ein Gewicht *P* am Hebel *u* den Anker *N* wieder in seine Ruhelage. Die Zuleitung zum Magneten besorgen die Klemmschrauben K_2 und K_3.

Im schon oben erwähnten Kasten *Ka*, durch dessen Seitenwände die Achse *a* hindurchgeht, ist an ihr ein Hebelpaar

befestigt, das die Druckplatte D, deren Form aus dem Grundriss zu entnehmen ist, trägt.

Der Form der Druckplatte entsprechend, unter der der Schreibstift spielt, ist in der Bodenplatte der Kasten Ka und Sk ein Stück herausgesägt, so dass D, wenn der Zeiger nicht eingehängt ist, zur Berührung mit der Papierfläche gebracht werden könnte.

Die eine Grenzlage des Ankers N ist gegeben durch den Anschlag am Magneten (damit er infolge des remanenten Magnetismus nicht hängen bleibt, ist er mit Papier überzogen), die andere durch eine Stellschraube, die in der Zeichnung weggelassen ist.

Es wird so jedesmal, wenn der Magnet den Anker anzieht, die Druckplatte auf den Schreibstift niedergedrückt und seine jeweilige Stellung durch einen Punkt markiert.

Um unabhängig von den kleinen seitlichen Verschiebungen des Papierstreifens (senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung), da er ja immer etwas schmäler als die Rollen R sein muss, eine Nullinie zu erhalten, ist in der Mitte von D ein in einer Hülse federnder, unten spitzer Stift i angebracht, der beim jedesmaligen Niederdrücken einen Punkt markiert.

Um nun den Papierstreifen weiterzubewegen, ist an dem dem Beschauer zugewendeten Ende der Achse a außerhalb des Kastens Ka ein Arm angebracht, der eine nach unten gehende, am Ende rechtwinklig umgebogene Feder F_1 (Fig. 2 und 4) trägt; sie gleitet beim Niedergange des Armes über die Zähne eines Kronenrades Zr, welches an der Achse der Rolle R_2 angebracht ist, und nimmt beim Heben das Zahnrad um einen Zahn mit, so dass sich, erst nachdem der Punkt markiert ist, der Papierstreifen von rechts nach links um ein Stück (circa 2·5 *mm*) verschiebt. Damit die Drehung aber genau nur um eine Zahnbreite geschieht und damit sich die Rolle R_2 nicht in entgegengesetzter Richtung bewegen kann, ist eine Sperrfeder F_2 angebracht, die mit einer Schneide auf der anderen Seite des Zahnrades eingreift.

Um das lästige Zählen der einzelnen Punkte zu erleichtern und eine Controle gegen etwaiges Ausbleiben von Marken zu

haben, ist am zuletzt gebauten Apparat eine eigene Stundenmarkierung angebracht worden.

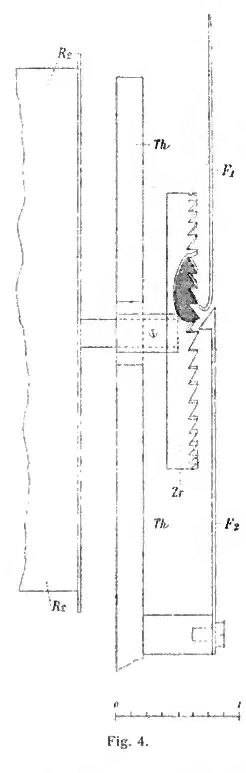


Fig. 4.

Auf dem Deckel *D* (Fig. 5) des Kastens *Ka* befindet sich ein kleiner Elektromagnet *M*; seine Drahtenden werden, wenn der Deckel aufgesetzt ist, mit den Klemmschrauben K_1 und K_2 verbunden. Dieser Magnet zieht einen Anker *a* an, der am Ende einer auf dem Säulchen *A* mit der Schraube *s* geklemmten Feder befestigt ist und an seiner Unterseite einen Stift *B* trägt; liegt der Deckel *D* auf dem durch den Kasten und ein dazu angebrachtes Loch *l*. (Fig. 3) in der Druckplatte hindurch und ist in seiner Ruhelage noch circa 2 *mm* vom Papierstreifen entfernt. Wird der Strom geschlossen, so zieht der Magnet den Anker an, und der Stift *B* macht mit seinem schraubenzieherförmigen Ende einen kurzen Strich.

So erhält man ungefähr 1 *cm* neben der Mittellinie, nach einer gewissen Anzahl von Punkten (bei den jetzigen Apparaten nach je sechs) eine Marke.

Den Strom für die beiden Magnete liefert eine Batterie von sechs hintereinander geschalteten großen Leclanché-Elementen.

Da Druckvorrichtung und Elektrometer metallisch miteinander verbunden sind, genügt eine einzige, am Boden des

Elektrometers angebrachte Klemmschraube (in der Zeichnung weggelassen), um das ganze System zur Erde abzuleiten und so vor elektrostatischen Einflüssen zu schützen.

3. Die Uhr.

Um die Druckvorrichtung zu bestimmten Zeiten auszulösen, stellt eine Uhr die Stromschlüsse[1] her. Bei den bis jetzt verfertigten Instrumenten wird alle zehn Minuten der Strom für die Druckvorrichtung, eventuell alle Stunden für die Stundenmarke geschlossen. Man kann leicht, wenn besondere Zwecke es fordern sollten, die Marken rascher hintereinander etwa bis zu zwei Minuten-Intervallen heruntergeben.

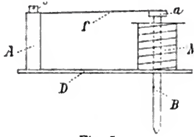


Fig. 5.

Die Uhr ist ein fertig käufliches, circa 14 Tage gehendes Federuhrwerk mit Ankerhemmung, das in entsprechender Weise adaptiert und in einem Schutzkasten mit Glasdeckel montiert ist. Auf der Minutenachse ist vor dem Zifferblatt eine Messingscheibe A (Fig. 6a und b) befestigt, in die sechs dreikantige Stifte, in der Zeichnung mit (0, 10, 20, ... 50) bezeichnet, eingeschraubt sind. Auf dem Träger H, der mit einer Platine des Uhrwerks fest verbunden ist, sind zwei Stahlfedern f_1 und f_2 angeschraubt; beide sind spitz zugefeilt, und zwar ist die Feder f_2 etwas länger als die f_1. Die Höhe, in der die Federn angebracht sind, sowie ihre Ruhelage gibt Fig. 6a wieder.

Dreht sich nun die Scheibe A, durch das Uhrwerk getrieben, von der in der Figur gezeichneten Stellung weiter, so werden nach einer gewissen Zeit beide Federn durch den Stift o gleichzeitig und allmählich gehoben oder besser gesagt aufgebogen.

---

[1] Die Contactvorrichtung ist einem zuerst von Arzberger bei einer elektrischen Uhr verwendeten Contacte nachgebildet.

Der Stift gleitet längs der Federn weiter; in dem Augenblick, in dem das Ende der Feder f_1 erreicht ist, wird sie in ihre Ruhelage zurückschnappen, während die etwas längere Feder f_2 noch aufruht. Nach Verlauf von etwa fünf Secunden fällt auch sie ab, und das Spiel beginnt nach zehn Minuten von neuem. Um nun diese Aufeinanderfolge der Federbewegungen zum

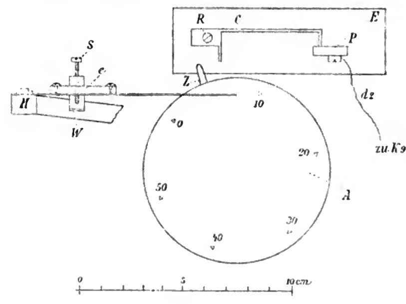


Fig. 6*a*.

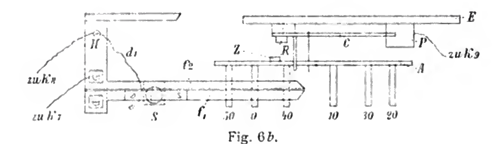


Fig. 6*b*.

Strom-Schluss und -Öffnen zu verwenden, ist auf Feder f_1 ein Ebonitstückchen *e* angeschraubt, wodurch die Schraube S von der Feder isoliert wird; beide Federn sind nämlich durch den Träger H mit dem ganzen Uhrwerk und auch der Scheibe A leitend verbunden. Das untere Ende der Schraube S ist aus Platin. An der correspondierenden Stelle ist an der anderen Feder f_2 ein Metallwinkel w befestigt, der unter die Schraube S herunterragt, sie aber in der Ruhelage der Federn nicht berührt und circa 1 *mm* vom unteren Ende der Schraube S absteht; hebt man z. B. mit dem Finger das Ende der Feder f_2

etwas in die Höhe, so tritt zwischen w und S Contact ein. Dasselbe findet statt in dem Augenblick, wo die Feder f_1 vom Stift herunterfällt, während f_2 noch gehoben ist; fällt auch f_2 ab, ist die Berührung wieder unterbrochen. Zur Zuleitung des Stromes sind am Uhrkasten drei Klemmschrauben angebracht, ich will sie K_7, K_8, K_9 nennen.

K_7 ist mit dem Ständer H und so mit dem ganzen Uhrwerk, K_8 durch den von H isolierten Draht d_1 mit S verbunden.

Die oben beschriebene Contactvorrichtung musste relativ so compliciert sein, weil der Stromschluss nicht kürzer als eine Secunde (wegen der großen zu bewegenden Massen) und nicht länger als ein paar Secunden (um die Batterie nicht allzustark zu schwächen) sein durfte.

Der Stundencontact jedoch ließ sich in einfacherer Weise ausführen. An der Scheibe A ist der Minutenzeiger Z befestigt; kurz vor einer vollen Stunde berührt er die Nase des Winkelhebels C, der um die Schraube R als Achse auf einem Ebonitstück E drehbar montiert ist. Das andere nach abwärts gebogene Ende des Winkelhebels berührt in der Ruhelage die Metallplatte P, von der ein Draht zur Klemme K_9 führt. In dem Augenblick, wo Z den Winkelhebel berührt, kann der Strom von K_7 durch das Uhrwerk, die Scheibe A, den Zeiger Z, den Winkelhebel C nach P und K_9 fließen; kurz darauf ist aber durch die Weiterbewegung von Z der Contact bei P unterbrochen, der Winkelhebel wird weiter gehoben, bis nach einer Minute circa der Zeiger unter der Nase durchgerutscht ist. Dieser Contact dient dazu, den Strom für den kleinen Magneten auf dem Kastendeckel zu schließen.

II. Aufstellung und Justierung des Instrumentes.

Da das registrierende Elektrometer vielleicht öfter von Nichtphysikern wird aufgestellt werden müssen, sei es mir gestattet, in der Anleitung zur Aufstellung des Instrumentes ausführlicher zu sein, als es für einen Fachmann nöthig wäre.

Was zunächst den Aufstellungsraum betrifft, so ist nur erforderlich, dass er nicht zu feucht sei und dass eine directe Bestrahlung des Instrumentes durch Sonnenlicht abgehalten

werden kann. Starke Temperaturdifferenzen sind nur dann schädlich, wenn sie zur Thaubildung führen.

Nach den Erfahrungen an dem in Kremsmünster aufgestellten Elektrometer braucht der Raum im Winter nicht geheizt zu werden, bis zu Temperaturen von —10° C. wenigstens haben sowohl die Uhr, wie die Batterien den Dienst nicht versagt. Bei noch tieferen Temperaturen ist es vielleicht nothwendig, Uhr und Leclanché-Elemente in einem wärmeren Raum unterzubringen, was für den Betrieb der Apparate ja gleichgiltig ist.

1. Das Elektrometer.

Ist die Stelle, an der das Elektrometer stehen soll, bestimmt, so wird zunächst das Wandbrett *W* ohne weitere Justierung an zwei Haken aufgehängt, wozu jede halbwegs erschütterungsfreie Wand benützt werden kann.

Hierauf wird das Elektrometergehäuse auf seine drei Unterlagsscheibchen auf die Console *C* möglichst weit nach rechts gesetzt und an den Stellschrauben *s* so lange verstellt, bis der Kasten *Sk*, ohne sich zu klemmen oder zu viel Spielraum zu lassen, über den Kasten *Ka* greift, wenn man das Instrument von rechts nach links auf der Console verschiebt. Der Kasten *Sk* muss bis zum Ausschlag über *Ka* geschoben werden, wobei zu beachten ist, dass die Symmetrie-Achse des Gehäuses, die in Fig. 3 durch die Lage des Zeigers *Z* gegeben ist, senkrecht zu den Rollen R_1 und R_2 steht, damit das Ende des Zeigers *Z* einen der Begrenzungslinie der Druckplatte *D* parallelen Kreisbogen beschreibt und den Kasten *Sk* nicht etwa an den Rändern der Rolle R_1 streift.

Nachdem dies geschehen, wird zur Einhängung des beweglichen Systems geschritten.

Man nehme den Torsionskopf *Tk* von der Röhre *R* herunter und befestige ihn, etwa auf einem Stativ, so, dass der Platindraht eingezogen werden kann. Es wird das eine Ende des Platindrahtes mittels eines kleinen Messingstiftes in dem Loch einer der beiden Walzen *w* geklemmt, das andere Ende zwischen den Schneiden *b* durchgeführt und, nachdem das Blech *A* unter der Rolle *r* aufgefädelt ist, wieder zwischen den Schneiden hin-

durch im Loch der anderen Walze befestigt. Hierauf wird der Platindraht, der jetzt durch das Gewicht von *A* gespannt ist, mit einem Zündholz einigemale ausgeglüht, bis alle seine Ausbiegungen verschwunden sind.

Jetzt lässt man das ganze System von oben durch die Röhre *R* hinunter, setzt den Torsionskopf auf und wickelt, wenn der Platindraht zu lang sein sollte, so viel von ihm auf, dass der Träger *St* sammt Lemniscate *L* in das untere Ende von *A* eingeschraubt werden kann, wozu eine der Federn, welche die Quadranten verbinden, auszuhängen ist.

Die freihängende Elektrometernadel wird nun als Senkel benützt und mittels der Schrauben *S* die Stellung des Wandbrettes so lange corrigiert, bis der Stiel *St* genau in der Mitte der vier Quadrantenpaare schwebt. Ist diese Einstellung gemacht, wird *St* sammt Lemniscate bis auf weiteres wieder aus *A* herausgeschraubt.

Nun erfolgt das Einsetzen des Zeigers *Z*; das Gegengewicht *g* und m_2 werden abgeschraubt und die Lage von m_1 ungefähr durch Abmessen mit einem Maßstab fixiert; *Z* führt man durch den Kasten *Sk* vorsichtig ein, steckt ihn durch seine Rille in *A* hindurch, schraubt m_2 auf und verstellt das Gegengewicht *g* so lange, bis der Zeiger ungefähr horizontal steht. Die endgiltige Lage von m_1 ist dann so zu bestimmen, dass der Schreibstift circa 3 *mm* unter die Druckplatte *D* hineinragt.

Die Feineinstellung für die Höhe des Schreibstiftes, der etwa 1 — 2 *mm* über dem Papiere schweben soll, kann durch Drehen an den Walzen *w* ausgeführt werden.

Die Feder am Ende des Zeigers *Z* muss so gebogen werden, dass nicht sie, sondern nur der Schreibstift *m* von der niedergehenden Druckplatte getroffen wird. Ist dies alles geschehen, so kann das definitive Einsetzen der Lemniscate erfolgen.

Das Glasgefäß *G* wird mit concentrierter staubfreier englischer Schwefelsäure gefüllt, auf das Tischchen *T* gesetzt und mit ihm in die Versenkung *V* herabgelassen. Die Lemniscate wird mit ihrem Träger *St*, nachdem in dessen unteres Ende der Draht mit dem Dämpfungsblech eingeklemmt worden ist, wieder in *A* eingeschraubt und mit einer Pincette so verschoben, dass sie in der Mitte zwischen den Quadranten schwingt und ihre

Symmetrie-Achse parallel zu einem der Quadrantenränder steht, wenn der Zeiger Z in der Ruhelage sich befindet.

Hierauf wird das Schwefelsäuregefäß gehoben und so geklemmt, dass das Platinblech vollkommen eintaucht; setzt man noch den Platindraht ein, der die Schwefelsäure mit dem Stiel p der Klemme K_5 verbindet, so ist die Aufstellung des Elektrometers beendet, und es erübrigt nur mehr eine Prüfung der Isolationen, auf die ich weiter unten zurückkomme.

2. Die Registriervorrichtung und Uhr.

Etwas difficiler ist die Justierung der Registriervorrichtung; sie wird zwar im allgemeinen nicht nothwendig sein, da die Apparate vor ihrer Versendung durch den Mechaniker einer längeren Prüfung von mir unterzogen werden, kann aber immerhin durch Unfälle beim Transport gestört werden.

Das Einziehen des Papierstreifens ist schon im ersten Abschnitt besprochen worden. Hinzuzufügen wäre nur noch, dass es wünschenswert ist, dass das Ende des Papierstreifens genau in der Mitte in der Klammer k befestigt wird, weil andernfalls die Rolle R_3 nicht mit R_2 parallel sein würde und dadurch eine seitliche Reibung des Papierstreifens an den Rändern der Rollen entstünde, die unter Umständen zum Versagen des Verschiebungsmechanismus führen kann. Zweitens ist zu vermeiden, dass eine zu große Höhendifferenz zwischen R_3 und R_4 (etwa mehr als 1 m) eintritt, damit nicht das Gewicht des längeren Papierstreifens einen beträchtlichen Theil des Gewichtes der Rollen R_3 oder R_4 erreicht und als störendes Übergewicht wirkt.

Der 1 bis 2 m lange Streifen Blaupapier wird am leichtesten von links her über das Papierband gezogen und braucht nicht weiter befestigt zu werden, da er durch Reibung mitgenommen wird.

Um die eigentliche Registriervorrichtung zu justieren, muss folgender Gang eingehalten werden.

Zunächst wird das Gegengewicht so verstellt, dass es imstande ist, den Anker N in seine Ruhelage zu bringen, wenn zugleich der Papierstreifen weiterbewegt wird, und zwar ist es bei tieferem Stande der Rolle R_4 und bei gleichzeitig hohem

Stande von R_3 durchzuführen. Diese Bewegung muss sicher und nicht zögernd ausgeführt werden.

Hierauf drückt man die Druckplatte *D* durch ein entsprechendes Gewicht so weit nieder, dass der Schreibstift gerade leicht das Papier berührt und einen schwachen Punkt markiert, verschiebt bei dieser Lage des Ankers *N* den Magnet *M* nach Lösen der Schraube *Z* so lange, bis seine Pole den Anker berühren, und zieht die Schraube *Z* möglichst fest an.

Nun werden die Schrauben, mit denen die Feder f_1 an ihrem Arm befestigt ist, gelockert und f_1 dann so eingestellt, dass sie (immer noch bei niedrigster Stellung der Druckplatte) etwa 0·2 *mm* unterhalb eines Zahnes des Zahnrades *Zr* einschnappt. Sollte dies durch Verstellen der Feder f_1 allein nicht möglich sein, so muss das Zahnrad durch Verstellen der Feder f_2 um das entsprechende Stück gedreht werden.

Lässt man nun die Druckplatte los, so dass der Anker *N* bis zum Anschlag an seine Stellschraube, die auf der Zeichnung fehlt, zurückgeht, so erübrigt bloß, durch Drehen der Stellschraube, die Amplitude der Bewegung des Ankers *N* und der mit ihm starr verbundenen Theile so zu regulieren, dass bei jeder Hebung das Zahnrad *Zr* so weit mitgenommen wird, dass die Feder f_2 immer um nur einen Zahn weiter einschnappt.

Da die Zähne des Zahnrades nicht alle ideal gleich sind, muss für alle Zähne das prompte Mitnehmen ausprobiert werden; auch darf das Festziehen der Gegenmutter der Ankerstellschraube, wenn alles reguliert ist, nicht vergessen werden. Die Anzahl der Elemente, die zur Speisung des Magnets dienen sollen, muss so gewählt werden, dass die zur Bewegung des Ankers nöthige Stromstärke (etwa 0·1 Ampère) nicht viel überschritten wird.

Der Vorschaltwiderstand für den Stundenmagneten ist auch am Deckel des Kastens *Ka* angebracht und so gewählt, dass zu seinem Betriebe dieselbe Batterie verwendet werden kann.

Wenn der Deckel von *Sk* aufgelegt ist, kann auch der Deckel des Kastens *Ka* mit zwei Schrauben fixiert werden. Beim Stundenmagneten ist dann nur darauf zu sehen, dass der Stift *B* (Fig. 5) mit seinem unteren Ende von dem Papier-

streifen circa 2 *mm* absteht. Hierauf werden die Drahtenden des Magnetes mit den Klemmen K_1 und K_2 verbunden.

An der Uhr kann sich beim Transport wohl nur an der Stellung der Federn f_1 und f_2 eventuell etwas ändern; sollte es der Fall gewesen sein, so müssen sie möglichst nahe voneinander in ihrer Länge so reguliert werden, dass der Contact nicht länger als etwa sechs Secunden dauert.

Will man das Verschmutzen der beiden Platincontacte bei starken Funken vermeiden, so genügt es, die Funkenbildung dadurch zu verhindern, dass man den beiden Magneten inductionsfreie Widerstände passender Größe parallel schaltet. Am besten eignen sich dazu mit stark verdünnter Zinksulfatlösung beschickte Glasröhrchen, in die Zinkdrähte als Elektroden eintauchen. Man fängt mit großer Verdünnung an und setzt langsam so lange Zinksulfat zu, bis die Funkenbildung aufhört. Man kann diese Röhrchen direct zwischen die Klemmschrauben $K_1 K_2$ und $K_2 K_3$ einschalten. Doch sind sie nur nöthig, wenn man statt der Leclanché-Elemente etwa den Straßenstrom von 110 Volt mit Vorschaltwiderstand gebrauchen würde.

Die zum Betrieb des Registrierapparates nöthigen Schaltungen gehen aus nachstehendem Schema in Fig. 7 hervor; M_1 ist der Minuten- und M_2 der Stundenmagnet, V der Vorschaltwiderstand, p_1, p_2 die Flüssigkeitsnebenschlüsse, U_1 und U_2 die Unterbrechungsstellen für die dazugehörigen Magnete.

Die Prüfung, ob die einzelnen Theile des Elektrometers isolieren, wird mit Hilfe eines Exner'schen Elektroskopes in folgender Weise durchgeführt.

Es wird zunächst das Elektroskop allein geladen und beobachtet, um wie viel die Blättchen in einer bestimmten Zeit, z. B. in zwei Minuten, zusammenfallen; dieser Ladungsverlust darf natürlich nicht groß sein, sonst ist das Elektroskop zur Isolationsprüfung nicht zu verwenden. Nun verbindet man den Knopf des Elektroskopes der Reihe nach mit den Klemmen K_5, K_4, K_6 und ertheilt dem System jedesmal eine Ladung. Sind die Isolationen gut, darf keine merkliche Vergrößerung der Entladungsgeschwindigkeit eintreten; besonders ist dies nothwendig für die mit Klemme K_5 verbundenen Theile. Bemerkt

man aber ein wesentlich rascheres Zusammenfallen der Blättchen des Elektroskopes, wenn es mit den Elektrometertheilen verbunden ist, dann müssen die betreffenden nicht gut isolierenden Theile aufgesucht werden. Sind sie aus Bernstein, genügt ein Abreiben mit einem trockenen Lappen, sind sie aber aus Ebonit, müssen sie herausgenommen, gut getrocknet und entweder frisch mit Schellack überzogen oder in heißes Paraffin getaucht werden. Hat man das einmal sorgfältig gemacht, ist die Isolation für längere Zeit gewährleistet.

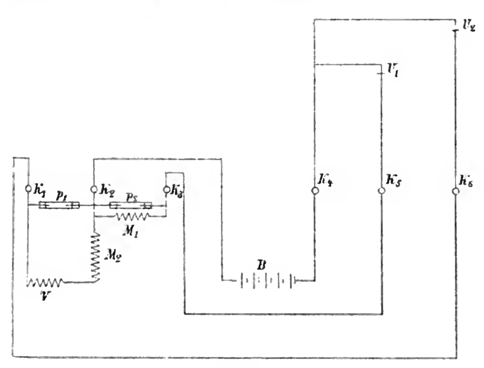


Fig. 7.

Mit dieser Isolationsprüfung ist die Justierung des Apparates vollendet. Um sich zu überzeugen, dass der mechanische Theil des Instrumentes tadellos functioniert, verbinde man die Klemmen K_4, K_5, K_6 mit dem zur Erde abgeleiteten Gehäuse des Elektrometers und lasse ihn eine längere Zeit registrieren. Der Schreibstift muss dann eine Linie von Punkten markieren, die parallel mit der Mittellinie läuft und nicht merklich, d. h. nicht um Punktbreite (circa 0·2 *mm*) von einer Geraden abweicht; die einzelnen Punkte sollen gleich beschaffen sein. Die vom Stift gezeichnete Linie wird je nach der Stellung des Torsionskopfes näher oder weiter von der

Mittellinie liegen. Man kann leicht nach einigem Probieren durch Drehen des Torsionskopfes dem Zeiger eine solche Stellung geben, dass seine Spitze die Punkte auf der Nullinie des Stiftes i zeichnet.

III. Eigenschaften des Apparates als Messinstrument und sein Gebrauch.

Durch die bifilare Aufhängung ist eine von Temperatur und elastischer Nachwirkung praktisch unabhängige Ruhelage des Zeigers gewährleistet, wie aus den weiter unten folgenden Zahlen hervorgeht. Ich habe, nachdem das Instrument einige Tage in Gang war, keine merkliche Änderung des Nullpunktes mehr bemerken können, ein Umstand, der für den praktischen Gebrauch wesentlich ist.

Das Drehungsmoment einer bifilaren Aufhängung ist[1]

$$D = \left(mg\frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} + \frac{2\pi}{5}[E]\frac{\rho^4}{h}\right)\sin\alpha,$$

wobei m die Masse des aufgehängten Systems, e_1 und e_2 den oberen und den unteren Fadenabstand, h die Länge der Fäden, δ die Correctur wegen der Fadensteifheit, $[E]$ den Elasticitätsmodul in absolutem Maß, ρ den Radius der Fäden bedeutet. Bei unserem Instrument haben die einzelnen Größen folgende Werte:

$m = 8$ Gramm, $g = 981\frac{cm}{\sec^2}$, $0 < e_1 < 1\,cm$, $e_2 = 0\cdot 3\,cm$,

$h = 25\,cm$, δ ist, wie die Rechnung lehrt, zu vernachlässigen,

$$[E] = 17 . 10^{11}\frac{\text{Dyn}}{cm^2}, \quad \rho = 0\cdot 0025\,cm;$$

setzt man diese Zahlenwerte ein, so wird

$$D = (24 e_1 + 3\cdot 3)\sin\alpha.$$

Das zweite Glied allein ist es, das durch Temperatur und elastische Nachwirkung beeinflusst wird; es sind also kleine

---

[1] F. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Physik, S. 103.

Änderungen von ihnen auf D von keinem wesentlichen Einfluss.

Wir wollen nun mit V_4, V_5, V_6 das Potential der Theile des Elektrometers bezeichnen, die mit den Klemmen K_4, K_5, K_6 verbunden sind, also der Quadranten $Q_2 Q_4$, der Nadel L und $Q_1 Q_3$; es ist dann das Drehmoment der elektrischen Kräfte[1] bekanntlich unabhängig vom Winkel und gleich

$$D' = C_1 (V_4 - V_6)\left[V_5 - \frac{1}{2}(V_4 + V_6)\right],$$

wobei C_1 eine von den Dimensionen des Elektrometers abhängige Constante ist.

Den Ablenkungswinkel der Nadel erhält man aus der Gleichung $D = D'$ zu

$$\sin\alpha = C_2 (V_4 - V_6)\left[V_5 - \frac{1}{2}(V_4 + V_6)\right],$$

wobei $C_2 = \dfrac{C_1}{24 e_1 + 3\cdot 3}$ ist.

Führen wir noch den Abstand a des Zeigerendes von der Nullinie und die Zeigerlänge L ein, so wird, wenn $C = \dfrac{LC_1}{24 e_1 + 3\cdot 3}$ ist,

$$a = C(V_4 - V_6)\left[V_5 - \frac{1}{2}(V_4 + V_6)\right];$$

C ist ein Maß für die Empfindlichkeit des Apparates.

Bei ihrer Bestimmung an einem der Instrumente fand ich $a = 1\,cm$, wenn $L = 20\,cm$, $V_4 = +50$ Volt, $V_6 = -50$ Volt, $V_5 = 100$ Volt und $e_1 = 0\cdot 5\,cm$ war. Es berechnet sich daraus $C_1 = 77.10^{-6} \dfrac{cm^2\, g}{\sec^2 \mathrm{Volt}^2}$ für die beiden Grenzwerte von e_1, 0 und $1\,cm$ wird $C = 46.10^{-5}$ und $5\cdot 6.10^{-5}$, die Empfindlichkeit kann also durch Verschieben der Schneiden um circa das Achtfache geändert werden. Eine Änderung der Schneidendistanz um $de_1\,cm$ bringt eine Änderung von a hervor, die durch die Gleichung

[1] Maxwell, Lehrbuch der Elektricität, I, S. 352.

$$da = \frac{37.10^{-3}}{(24e_1+3 \cdot 3)^2}(V_4 - V_6)\left[V_5 - \frac{1}{2}(V_4 + V_6)\right] de_1$$

gegeben wird. Eine Variation der Schneidendistanz um 0·1 *mm* entspricht im Mittel einer Empfindlichkeitsänderung um 1%, man kann also leicht, wenn nöthig, das Instrument genügend genau auf eine gewünschte Empfindlichkeit, z. B. 1 *mm* = 10 Volt einstellen.

Die einzige Schaltungsart, die praktischerweise für die luftelektrischen Messungen in Betracht kommt, ist die Nadelschaltung.

Man macht darnach $V_4 = -V_6$ und verbindet K_5 mit dem zu messenden Potential; es ist dann $a = 2CV_4V_5$ oder $a = CVV_5$, wenn man $2V_4 = V$ setzt. Diese Schaltung hat vor allem den Vortheil, dass der Ausschlag dem zu messenden Potential exact proportional ist.

Da das Directionsmoment der Bifilarsuspension und die Capacität des Elektrometers sich mit der Zeit nicht merklich ändern, ist auch die Elektrometerconstante C_1 unveränderlich.

Es genügt daher, wenn man an der Schneidendistanz nichts mehr ändert, eine einmalige Bestimmung der Constanten.

Die Empfindlichkeit des Instrumentes hängt dann nur noch von V_4 ab, dessen Constanz leicht zu erzielen und auch einfach zu controlieren ist.

Um die Klemmen K_4 und K_6 auf gleiches und entgegengesetztes Potential zu bringen, verwendet man am einfachsten eine Batterie.

Zambonische Säulen sind für Registrierungen längerer Dauer nicht zu empfehlen, da sie zu inconstant sind.

Bei den drei bis jetzt aufgestellten Instrumenten habe ich Batterien von je 100 Kalomelelementen verwendet, die, in einem Holzkasten in kleinem Raume zusammengestellt, vor äußeren Einflüssen geschützt sind.

Das einzelne Element besteht aus einer Eprouvette von 8 *cm* Länge und 2 *cm* Durchmesser. Zuerst wird auf den Boden circa 1 *cm* hoch chemisch reines Quecksilber gegossen; die Zuleitung geschieht durch ein Glasrohr, in dessen unteres

Ende ein Platindraht eingeschmolzen ist. Hierauf wird das Quecksilber mit einer einige Millimeter dicken Schichte fein gepulverten Kalomels (Hg_2Cl_2) bedeckt und dann eine Zinkchloridlösung ($ZnCl_2$) vom specifischen Gewichte 1·4 eingefüllt. Die zweite Elektrode bildet ein nicht zu dünner (etwa 3 *mm*) amalgamierter Zinkdraht, an dessen herausragendes Ende ein Kupferdraht angelöthet ist, der so gebogen ist, dass er in das Glasröhrchen des nächsten Elementes reicht; das Röhrchen ist mit etwas Quecksilber gefüllt, um den sicheren Contact zwischen dem Kupferdraht und dem eingeschmolzenen Platindraht herzustellen. Die einzelnen Gläschen sind verkorkt und können mit Paraffin vergossen werden.

Der eine Pol des ersten Elementes, sowie der andere des 100. werden durch Ebonit isoliert zu zwei Klemmen geführt, die an der Außenwand des Batterieschutzkastens isoliert befestigt sind. Der Verbindungsdraht zwischen dem 50. und 51. Element führt ebenfalls zu einer Klemme, damit die Mitte der Batterie zur Erde abgeleitet werden kann.

Diese Elemente sind infolge des Platindrahtes und des verwendeten Quecksilbers (eine Batterie von 100 Elementen braucht circa 3 *kg* Hg) zwar ziemlich theuer, haben aber den Vortheil, dass ihre elektromotorische Kraft (fast genau 1 Volt) jahrelang constant bleibt und von der Temperatur vollkommen unabhängig ist; auch erholen sich die Elemente rasch wieder nach einem Kurzschluss.

Der letzte Umstand ist für die Praxis wichtig, denn es kann leicht auch bei vorsichtiger Behandlung passieren, dass ein Draht oder die Lemniscate bei einer Manipulation eine metallische Verbindung der beiden Pole der Batterie herbeiführt, wodurch viele andere Batterien, z. B. Zink-Platin-Elemente, dauernd polarisiert würden. Die einzige Störung, die mir bei einer Kalomelbatterie vorgekommen ist, war, dass einzelne Elemente unbrauchbar wurden, wenn ein Stückchen vom Zinkdraht, der durch das Amalgamieren an einer Stelle durchgefressen war, in das Quecksilber herabfiel; durch genügend dicke Zinkstäbe kann dem aber vorgebeugt werden.

Bei der Aufstellung werden die beiden Pole mit K_4 und K_6 verbunden und dann die Mitte der Batterie zur Erde abgeleitet.

Ob die Batterie ihre Normalspannung behalten hat, kann von Zeit zu Zeit entweder mit einem Exner'schen Elektroskop oder mit dem Registrierapparat selbst geprüft werden.

Untersucht man sie mit dem Elektroskop, so muss natürlich die Erdleitung entfernt werden; der eine Pol wird mit dem Gehäuse, der andere mit den Blättchen des Elektroskopes verbunden.

Das Elektrometer kann verwendet werden, wenn seit seiner letzten Aichung keine Änderung der Schneidendistanz vorgenommen worden ist.

Man verbindet bei eingeschalteter Batterie zunächst K_5 mit K_4, markiert einige Punkte, hierauf K_5 mit K_6, macht wieder einige Marken und misst dann den Abstand $2a$ der Punktreihen aus. Es ist dann $2a = CV^2$, a die Spannung der Batterie, $V = \sqrt{\frac{2a}{C}}$.

Die Aichung des Elektrometers geschieht am einfachsten, indem man an K_5 ein bekanntes Potential V_1 anlegt, etwa ein Stück einer Zambonisäule, das gleichzeitig mit einem Exner-schen Elektroskop gemessen wird und die Stellung des Zeigers markiert; hierauf wird ein nahezu gleich großes negatives Potential $-V_2$ angelegt und eine Marke gemacht. Ehe man durch Stromschluss die Marken gibt, muss seit Anlegung des Potentials mindestens ein Zeitraum von 50 Secunden verstrichen sein, damit der Zeiger ganz zur Ruhe gekommen ist.

Will man vom Fehler der einzelnen Einstellung unabhängig sein, lässt man für jedes Potential mehrere Punkte machen und misst dann die mittlere Distanz der Marken von der Nullinie. Es ist dann

$$a_1 + a_2 = CV(V_1 + V_2) \quad \text{und} \quad C = \frac{a_1 + a_2}{V(V_1 + V_2)};$$

man ist dabei unabhängig von der Nullage des Zeigers Z.

Ist der Registrierapparat einmal im Betrieb, erfordert es außer dem Aufziehen der Uhr und dem Nachschieben der Papierstreifen keinerlei regelmäßige Bedienung. Aichung und Isolationsprüfungen werden bei halbwegs günstiger Aufstellung nur

selten vorgenommen zu werden brauchen; auch die Schwefelsäure erfordert nur in feuchten Räumen eine Auswechslung.

Welche Collectoren man schließlich verwendet, um das Potential der Luft zu bestimmen, ist principiell gleichgiltig, wenn sie nur genügend rasch nachladen.

Ich möchte aber nicht unterlassen, auf die Radiumelektroden hinzuweisen, die eine für eine längere Registrierung ungemein bequeme Collectorenform darstellen.

Mitternacht 6. März 1902 — Mittag — 7. März 1902.

Fig. 8.

Da ich[1] mich durch gelegentliche Messungen überzeugte, dass Radiumelektroden im freien Felde bei mäßig bewegter Luft denselben zeitlichen Verlauf des Potentialgefälles angaben, wie ein gleichzeitig als Controle verwendeter Flammencollector, wenn auch die Absolutwerte etwas niedriger waren, werden bei den drei bis jetzt aufgestellten Instrumenten probeweise Radiumelektroden verwendet.

Einer genauen Prüfung, die ich im Begriffe stehe, mit zwei registrierenden Instrumenten, das eine mit Radiumelektroden, das andere mit Tropfencollector ausgerüstet, auszuführen, soll vorbehalten werden, zu entscheiden, ob Radiumelektroden auch in der Nähe von Gebäuden und bei Windstille verwendet werden können.

[1] Auch M. A. Witkowski hat zufriedenstellende Resultate mit Radiumelektroden erhalten. Bulletin de l'académie des sciences de Cracovie, Janvier 1902. Desgl. Le Cadet, C. R., 1. April 1902.

Ich behalte mir vor, in einer späteren Mittheilung darauf zurückzukommen und eine Beschreibung der Construction der Radiumelektroden zu geben. Beispielsweise gebe ich in Fig. 8 eine Curve wieder, die vom Apparate in Kremsmünster aufgezeichnet wurde; Herr Director P. Franz Schwab war so freundlich, seine Aufzeichnungen mir zu senden. Der Durchmesser der Punkte in Fig. 8 entspricht ungefähr der wirklichen Punktgröße.

Das Ausmessen der Curven geschieht am einfachsten mit einem transparenten rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete man längs eines Lineals, das auf der Nullinie liegt, verschiebt, während die Ablesung an der anderen Kathete, die man eventuell direct in Volt theilen kann, vorgenommen wird.

Beeinflussung des elektrischen Funkens durch Elektrisierung

von

Prof. Dr. **Ernst Lecher.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(**Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1902.**)

Beim Durchgange der Elektricität durch Gase sind so zahlreiche Umstände maßgebend, dass wir trotz vieler und vorzüglicher Forschungen selbst von den einfachsten Funkenentladungen in Luft uns kein befriedigendes Bild ausdenken können. Die Vorstellung, dass für eine bestimmte elektrische Spannung das Dielektricum der Luft gleichsam bricht, zeigt sich beim genaueren Studium minder einfach als auf den ersten Blick, weil zu vielerlei Factoren für diese »dielektrische Stärke« oder »elektrische Festigkeit« bestimmend sind.

Im folgenden soll nun ein neuer derartiger Factor besprochen werden, auf dessen Vorhandensein, wie ich glaube, noch nicht hingewiesen worden ist. Ich elektrisiere nämlich die in atmosphärischer Luft arbeitende Funkenstrecke eines Inductoriums mittels einer zweiten Elektricitätsquelle.

Versuche mit dem Funken eines Inductoriums.

Ein mittelgroßer Ruhmkorff mit Neef'schem Hammer wird durch vier Accumulatoren gespeist. R (Fig. 1) sei die Secundärspule desselben, F die Funkenstrecke. Überdies führen zu den beiden Polen des Inductoriums zwei nasse Schnüre a, a' (in Kautschukröhrchen eingekittet), je 60 *cm* lang. Dieselben sind

gemeinsam mit einem Pole P einer vierplattigen Voss'schen Influenzmaschine verbunden. Der andere Pol P' der Influenzmaschine ist zur Erde abgeleitet. Dadurch wird erreicht, dass beide Funkenelektroden unabhängig von der Ruhmkorff, Schwingung gemeinsam auf eine positive oder negative Potentialdifferenz gegenüber der Luft des Schlagraumes gebracht werden können.

Die Ladung durch die nassen Schnüre gleicht wohl eventuelle Potentialschwankungen der Influenzmaschine ganz aus.

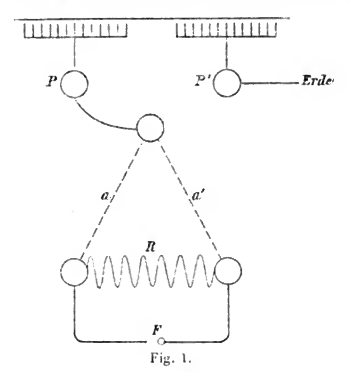


Fig. 1.

Diese Schnüre sind ferner als Nebenschluss der Rhumkorff-Entladung von so großem Widerstande, dass der Funke in F darunter kaum leidet.[1]

Versuch 1.

Die beiden Elektroden bei F seien weit über die Schlagweite hinaus auseinandergezogen; es ist also keine Möglichkeit einer Funkenbildung gegeben.

Wenn der Ruhmkorff unthätig ist und die Influenzmaschine allein gedreht wird, so dass die ganze Secundärspule und die

[1] Verwendet man statt der nassen Schnüre zwei Drosselspulen, so wird der Funke zu sehr geschwächt.

Elektroden durch die beiden nassen Schnüre a, a' hindurch mit positiver oder negativer Elektricität geladen sind, so zeigen sich im verdunkelten Zimmer sehr schwache Lichtpunkte und -Büschel. Ist anderseits die Influenzmaschine unthätig und wirkt nur der Ruhmkorff allein, so zeigen sich an der positiven Elektrode und am positiven Zuleitungsdrahte sehr schwache Lichtbüschel. Sowie Ruhmkorff und Influenzmaschine gleichzeitig arbeiten, werden durch eine positive Elektrisierung der Secundärspirale die durch Ruhmkorffentladung allein erzeugten Büschel der positiven Elektrode und ihrer Zuleitung überraschend verstärkt. Durch dieses gleichzeitige Zusammenwirken der vom Inductorium und von der Influenzmaschine gelieferten positiven Elektricität wird die Gesammtspannung des positiven Drahtes gegen die umgebende Luft größer. Vielleicht wird überdies durch die (auch während der Pausen des Inductoriums gelieferte) positive Elektricität der Influenzmaschine die dielektrische Festigkeit der Luft für positive Entladungen so geschwächt, dass die Büschelentladungen des Inductoriums leichter einsetzen können. Über den Antheil dieser beiden Ursachen habe ich mir bisher noch keine Meinung gebildet.

Versuch 2.

Umgekehrt werden die durch die Inductionsentladung allein erzeugten schwachen Lichtbüschel durch negative Elektrisierung vollständig zum Verschwinden gebracht.

Ich habe diese Beobachtungen an die Spitze meiner Mittheilung gesetzt, weil ich glaube, dass die später zu schildernden Experimente sich so am leichtesten werden überblicken lassen.

Soweit es sich um sichtbare Entladung handelt, wird wohl immer dann eine eindeutige und auffallende Wirkung einer Elektrisierung zu erwarten sein, wenn durch die ganze Anordnung der Funkenstrecke eine Büschelentladung einen besonderen Antheil an der Funkenbildung hat. Dies ist ja nach den bisherigen Versuchen meistens der Fall. Sehr schön zeigt dies Walter[1] an gewöhnlichen Inductionsentladungen

[1] Wied. Ann., 66, S. 636 (1898); 68, S. 776 (1899).

zwischen Platinspitzen. Der Funke entsteht da nicht momentan; es muss sein Weg vielmehr durch einige ihm vorausgehende und stoßweise aufeinanderfolgende Büschelentladungen gebahnt werden. Diese Vorentladungen sind in erster Reihe am positiven Pol zu beobachten. Das Spectrum dieser Büschelentladungen enthält kein Metall; es lässt sich auch chemisch in demselben keine Spur von Elektrodenmaterial nachweisen.[1] Es sind solche Büschelentladungen elektrische Vorgänge in Gasen, welche in der Nähe der positiven Elektrode in immer wachsender Größe einigemal einsetzen müssen, bevor eine Entladung die ganze Funkenstrecke überspringt.

Wenn ich daher durch positive oder negative Elektrisierung diese Büschelentladungen, das Vorstadium des Funkens, beeinflussen kann, so wird auch die Entladung selbst sich durch Elektrisierung ändern müssen. Besonders deutliche Resultate sind nach dem Gesagten wohl immer dann zu erwarten, wenn der positive Theil mit seiner Büschelentladung durch die Versuchsanordnung sehr begünstigt erscheint. Darum wählte ich nach Cook eine kugelförmige Kathode und eine mäßig stumpfe Anode.[2]

Versuch 3.

In Fig. 2 sind die beiden Elektroden in natürlicher Größe gezeichnet. Die Elektrode *e* ist für die Entladung des Inductoriums Anode, die Kugel *f* Kathode. Die Entfernung sei zunächst so, dass kein Funke überspringt, etwa $4^1/_2$ bis 5 *cm*.

Arbeitet das Inductorium allein, so geben von *e* Büschel aus, an *f* zeigt sich nur ein Lichtpunkt und der ganze Zwischenraum ist dunkel. Ebenso erscheinen die Zuleitungsdrähte von *e* und *f* dunkel. Sowie nun positive Elektrisierung durch die Influenzmaschine hinzutritt, ergeben sich folgende Veränderungen: Der Zuleitungsdraht zu *e* ist übersäet mit Büscheln, die nach allen Seiten herausschießen. An der Kathodenzuleitung ist fast nichts zu bemerken. Zwischen *e* und *f* springen plötzlich kräftige Funken über, wobei es scheint, als ob im ersten

---

[1] Cook, Phil. Mag. (5), 47, S. 40 (1899).

[2] L. c., S. 43.

Augenblick, bevor noch die zickzackförmigen Funken einsetzen, die Endladung von *e* momentan nach außen böge. Stellen wir die Zufuhr der positiven Elektricität ab, so ist wieder der früher dargestellte Anfangszustand vorhanden.

Dieser Versuch gelingt natürlich ebenso in umgekehrter Reihenfolge. Das Inductorium stehe still und es arbeite die Influenzmaschine allein. Von der Anode *e* geht nur ein schwaches Büschel aus, ebenso an einigen Stellen der Zuleitungsdrähte. Setzt nun das Inductorium auch ein, so beginnt plötzlich das Funkenspiel zwischen *e* und *f*; längs der ganzen Anodenzuleitung treten zahlreiche Büschel auf, während jene an der Kathodenleitung verschwinden.

Versuch 4.

Es sei zunächst die Intensität des primären Stromes des Inductoriums so, dass zwischen *e* und *f* (in einer Entfernung von etwa $3^1/_2$ *cm*) eben noch ein kräftiger Funke überspringt: an den Zuleitungsdrähten ist dann nichts zu sehen. Sowie negative Elektricität von der Influenzmaschine zugeleitet wird, löscht der Funke sicher aus, und man bemerkt nur ein schwaches Leuchten des negativen Zuleitungsdrahtes.

Die Experimente 3 und 4 gelingen auch sehr schön, wenn man die Kathode an die innere Belegung einer kleinen Leydnerflasche anlegt, deren äußere Belegung zur Erde abgeleitet ist.

Beide Versuche lassen sich in verschiedenster Weise umgestalten, ich bescheide mich aber, nur die typisch wichtigen Fälle wiederzugeben.

Versuch 5.

Die beobachteten Wirkungen zeigten sich auch, wenn die Funkenstrecke von einem Glascylinder umgeben war, wodurch eine Änderung der Funkenverzögerung durch ultraviolette Zustrahlung von außen unmöglich war. Dabei war aber, um die Wirkung der Glaswand zu schwächen, der primäre Strom und die Funkenstrecke viel kleiner als in dem oben geschilderten Beispiel. Öftere Wiederholung dieses Versuches ist zu vermeiden, weil die Glaswand Ladungen annimmt.

Versuch 6.

Bisher haben wir die Ausbildung des positiven Büschels durch die Elektrodenform begünstigt. Übertreibt man aber diese Begünstigung des positiven Entladungsantheiles, indem man z. B. nach Töpler[1] als Kathode einen Halbleiter, eine Schiefertafel, wählt, so werden die positiven Büschel der Inductionsentladung so stark, so dass die von mir geübte Elektrisierung der Funkenstrecke mittels Influenzmaschine in ihrer Wirkung minder auffallend wird. Aus ebendemselben Grunde versagten die Erscheinungen auch bei zu starken Inductionsströmen mit einem Kohl'schen Inductorium von 40 *cm* Schlagweite.

Eine weitere Complication tritt dadurch ein, dass durch Elektrisierung mittels Influenzmaschine auch längs der Zuleitungsdrähte die Büschelbildung begünstigt oder gehemmt wird. Dadurch ist die Isolierung der Zuleitungsdrähte des secundären Inductionsstromes gegen die Luft von Fall zu Fall geändert. Sorgfältige Umhüllung der Zuleitungsdrähte mit Glasröhrchen und Umgeben der blanken Klemmschrauben mit Guttaperchahüllen machen daher Versuche 3 und 4 besser. Ganz vermeiden lässt sich aber diese Fehlerquelle nicht, welche mir die folgenden Versuchsergebnisse zu erklären scheinen.

Versuche 7 und 8.

Macht man die stumpfe Spitze *e* zur Kathode und die Kugel *f* zur Anode, so bemerkt man immer noch eine Förderung des Funkens durch positive Elektricität und eine Hemmung durch negative.

Die Erscheinungen sind aber minder auffallend als in 3 und 4, ja sie versagen sogar manchmal bei positiver Elektrisierung der Funkenstrecke. Die am Anodenzuleitungsdrahte auftretenden Büschel sind nämlich hier besonders kräftig, und dieser Nebenschluss (mit eventueller Rückentladung durch den Ruhmkorff) schwächt die Wirkung.[2]

---

[1] Max Toepler, Habilitationsschrift, Leipzig, J. A. Barth, 1900, S. 31.

[2] Dies erscheint mit Rücksicht auf die Versuche von Trowbridge (Phil. Mag. [5], 46, p. 243, 1898) sehr verständlich. Dieser Forscher bekam bei Entladungen von 1,200.000 V. durch seine Büschel überall directen Nebenschluss. Eine Andeutung dieser Wirkung muss natürlich schon bei viel tieferen Spannungen auftreten.

Umgekehrt hebt eine negative Elektrisierung alle durch Ausströmung in die Luft eingeleiteten Nebenschlüsse auf, und die Schwächung des Funkens ist weniger markant, weil die bessere Zuleitung die Hemmung des Funkens durch die negative Elektrisierung zum Theil ausgleicht.

Versuch 9.

Springt der Inductionsfunke zwischen zwei Kugeln (1 *cm* Durchmesser) über, so verstärkt sowohl positive, als auch negative Elektrisierung den Funken. Hier dürften wohl schon elektrische Schwingungen die Einseitigkeit der Entladung stören.

Versuche mit dem Funken eines Wehnelt-Unterbrechers.

Es wurde durch einen Rheostaten hindurch der Strom von 30 Accumulatoren mittels eines Wehnelt-Unterbrechers in einen kleinen Ruhmkorff geleitet. Die Verbindung der Secundärspule mit den Elektroden *e*, *f* und mit den feuchten Schnüren *aa'* geschah genau wie in Fig. 1.

Versuch 10.

Analogon mit dem Versuch 1. Die spitze Anode *e* und die kugelförmige Kathode *f* waren in einer Entfernung von etwa 2·5 *cm*. Zunächst stehe die Influenzmaschine still und der primäre Strom werde durch den Rheostaten so eingestellt, dass sich im Dunkeln folgende Erscheinung zeigt (siehe Fig. 2).

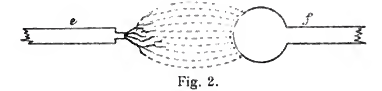


Fig. 2.

An der Anode *e* sitzen etwa vier Lichtstiele, je $^1/_4$ *cm* lang, auf, und auf diesen die Verästelungen. Der Mittelraum ist schwach blau, und rechts an der Kugel sieht man etwa 10 Lichtpunkte ohne Stiele (manchmal in den Intervallen von etwa 10 Secunden zucken ganz schwache Fünkchen auf). Mechanisches

Anblasen der Funkenstrecke ändert die Erscheinung kaum. Tritt nun auch noch die Influenzmaschine in Thätigkeit und führt der Secundärspule sammt Funkenstrecke positive Elektricität zu, so ist der anodische Zuleitungsdraht voll Büschel, im Elektrodenraume selbst werden die Büschelstiele links viel länger, die Büschel selbst gehen trichterförmig nach außen, der Querdurchmesser des blauen Lichtes wird größer, die ganze, früher mehr ovale Erscheinung wird kugelförmiger.

Nun beschreibe ich eine merkwürdige Erscheinung. Nähert man eine in der Hand gehaltene Bleistiftspitze oder eine andere geerdete Spitze dem Entladungsraume *ef* auf etwa 25 *cm*, so wird dieser Raum plötzlich ganz dunkel, an der Bleistiftspitze selbst zeigt sich ein kleiner, sehr schwacher Lichtpunkt. Nähert man von entgegengesetzter Seite eine zweite Spitze, so ändert sich die Erscheinung kaum, so dass wir wohl nicht von der Wirkung eines elektrischen Windes im gewöhnlichen Sinne sprechen dürfen, wie denn auch mechanisches Blasen keine Änderung hervorbrachte. Schiebt man zwischen Bleistiftspitze und Funkenstrecke eine Glas- oder Metallplatte, so verschwindet die Wirkung. Nähern des Fingers oder einer geerdeten Kugel auf etwa 10 *cm* ist ohne Einfluss.

Erwähnenswert erscheint mir auch, dass beim Annähern der Spitze an die Zuleitungsdrähte nur die der Spitze gegenüberliegenden Büschel reagieren und verschwinden, indes die Erscheinung zwischen *e* und *f* ungeändert bleibt. Wir haben es also hier nicht mit einer Wirkung auf das Gesammtpotential der Secundärspule, sondern nur mit einem rein localen Effecte zu thun. Es erscheint mir unwahrscheinlich, dass eine ultraviolette Strahlung des Lichtpunktes an der Bleistiftspitze die Ursache der Erscheinung sein kann, da sich ein zu bestimmter, von der Spitze ausgehender activer Raum in Form eines Kegels ergibt, wie ein solcher ja auch anderweitig zu wiederholtenmalen als Spitzenwirkungsgebiet beschrieben wurde. Ob die Bleistiftspitze oberhalb oder unterhalb oder seitlich der Funkenstrecke steht, ist gleichgiltig, wenn sie nur gegen *ef* gerichtet ist.

Bei zu starkem Nähern auf 2 *cm* wird ein Theil der Entladung in die Spitze abgelenkt.

Versuch 11.

Schiebt man *e* und *f* etwas näher (die Influenzmaschine stehe still und es arbeite nur der Wehnelt-Unterbrecher), so wird die in Fig. 2 dargestellte Erscheinung kräftiger, bleibt aber nur im Dunkeln sichtbar. Jetzt lässt Zuführung von positiver Elektricität plötzlich einen kräftigen (natürlich auch im Tageslichte sichtbaren) Funken überspringen. Das Nähern einer geerdeten Spitze löscht den Funken aus. Dieser Versuch schien mir besonders gut mit einer abgestumpften Kohlenspitze als Anode *e* zu gelingen, wiewohl ich sonst keinen besonderen Einfluss des Elektrodenmaterials fand. Man zündet also durch Zufuhr von positiver Elektricität den Funken an, indes Annäherung einer geerdeten Spitze denselben auslöscht.

Diese Versuche sind sehr prompt und sicher; capriciös ist die Wirkung der Spitze nur insofern, als ich manchmal bis auf 20 *cm* an *ef* herangehen musste, während ich auch oft schon aus Entfernungen von 45 *cm* schöne Wirkungen erzielte.

Versuch 12

als Umkehr von 10. Die in Fig. 2 geschilderte Entladungsform wird, wenn durch aa' negative Elektricität zugeführt wird, ausgelöscht, während die Annäherung einer geerdeten Spitze wieder die alte Erscheinung auftreten lässt.

Versuch 13

als Umkehr von 11. *e* und *f* sind auf 1·5 *cm* genähert, und es springt unter alleiniger Wirkung des Wehnelt-Unterbrechers ein lebhafter Funke über.[1] Zuführung von negativer Elektricität löscht den Funken aus, Annäherung einer geerdeten Spitze zündet ihn an.

---

[1] Für meine Anschauung, dass alles, was die Büschelentladung fördert, also die Potentialdifferenz der Spitze gegen die umgebende Luft steigert, auch die Entladung fördert, spricht die Thatsache, dass hier Erdung von Kathode die Funkenbildung unterstützt, Erdung der Anode die Funkenbildung hemmt.

Auch hier wirkt die geerdete Spitze nur gegen die Funkenstrecke, nicht aber gegen die Zuleitung, selbst in ganz geringen Entfernungen (von 5 *cm*).

Diese Resultate sind sehr sicher und leicht zu erhalten, aber wie bei den Ruhmkorff-Entladungen werden auch bei den Wehnelt-Funken die Ergebnisse etwas weniger verlässlich, wenn man die stumpfe Spitze zur Kathode und die Kugel zur Anode macht.

Versuch 14.

Es sei also für die Wehnelt-Entladung *e* Kathode und *f* Anode. Dann ist das Ergebnis der positiven Elektrisierung sehr unsicher. Doch möchte ich eher an eine Schwächung, als eine Verstärkung des Funkens glauben. Bei einer Elektrodendistanz von 1·8 *cm* erhält man ohne Elektrisierung einen flammenförmigen, nach aufwärts gekrümmten Lichtbogen. Mit positiver Elektricität wird aus dem Lichtbogen ein gerader weißer Funken.

Eine geerdete Spitze muss bis auf eine Distanz von etwa 10 *cm* herangebracht werden, und dann erscheint der elektrische Funke in eine Reihe von rothen Lichtbogen auseinandergeblasen.

Versuch 15.

Zuführung negativer Elektricität löscht oder schwächt den Funken. Lässt sich z. B. ein derartiger nicht elektrisierter Funke nicht ausblasen, so gelingt dies leicht, wenn der Funke negativ elektrisch ist.

Nähert man eine geerdete Spitze auf etwa 10 *cm*, so wird aus der gebogenen röthlichen Wehnelt-Flamme ein gerader, weißlicher, sehr unscheinbarer Funke. Es sieht so aus, als ob hier durch das Nähern der Spitze die Aureole zum Verschwinden gebracht würde.

Versuche mit Kugelelektroden ergeben ähnliche Resultate.

Bei viel stärkeren Wehnelt-Strömen ist der Einfluss der Elektrisierung auch vorhanden, aber derselbe scheint mir ganz anderer Natur zu sein. Es sieht so aus, als ob die Elektricität aus dem Lichtbogen herausgeblasen würde. Da ja die umliegenden Leiter nicht symmetrisch liegen, ähnelt die Wirkung

jener Erscheinung, wie sie durch mechanisches Anblasen erzeugt werden kann.

Schlussbemerkungen.

Alle die geschilderten Experimente lassen es wohl zweifellos erscheinen, dass die Elektrisierung einer Funkenstrecke, welche die Potentialdifferenz der einzelnen Elektroden gegenüber dem Dielektricum ändert, auf die auftretenden Lichterscheinungen von allergrößtem Einflusse ist.

Leider lässt sich mit der in Fig. 1 geschilderten Anordnung das Inductorium nicht direct durch eine Influenzmaschine ersetzen, da infolge des Kurzschlusses durch die nassen Schnüre kein Funke zustande kommt. Man müsste zwei ganz gleich gebaute, hintereinander geschaltete Influenzmaschinen zur Erzeugung des Funkens verwenden und die Zuleitung der Elektrisierung von einer großen Maschine her in die Mitte dieser beiden Influenzmaschinen verlegen. Nur bei einer solchen Anordnung sind dann messende Versuche über die factisch erreichten Potentiale und Entladungsmengen anzustellen.

Das ganze Gebiet scheint mir manche Ähnlichkeit zu haben mit der Wirkung magnetischer Kräfte auf Entladungen, wie sie Precht[1] geschildert. Vielleicht hat man es auch hier nur damit zu thun, dass durch Elektrisierung die eine Ionenart aus dem Entladungsraume hinausgeführt wrd.

---

[1] Wied. Ann., 66, S. 676 (1898).

Eine Ergänzung der van der Waals'schen Theorie des Cohäsionsdruckes

von

Prof. Dr. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1902.)

Die van der Waals'sche Theorie der Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes führt bekanntlich zu der Zustandsgleichung

$$p+\frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v-b}, \tag{1}$$

in welcher p den äußeren Druck, v das specifische Volumen, T die absolute Temperatur und a, b, R Constanten bedeuten. Van der Waals baute diese Theorie auf Grundlage der kinetischen Gastheorie auf, indem er gleichzeitig die von Laplace in dessen Theorie der Capillarität gegebenen Anschauungen von der Cohäsion der Flüssigkeiten auf die Dämpfe übertrug. Dementsprechend bedeutet $\frac{a}{v^2}$ den aus den Cohäsionskräften resultierenden Druck, welcher zu dem äußeren Drucke p additiv hinzutritt. Wenn auch die Gleichung 1) bei einer strengeren quantitativen Prüfung mitunter beträchtliche Abweichungen von der Erfahrung zeigt, so darf man dennoch nicht vergessen, dass diese Theorie in qualitativer Beziehung über das Verhalten der flüssigen und dampfförmigen Stoffe nach so vielen Richtungen hin ein klares Verständnis vermittelt, dass es nicht zweifelhaft sein kann, dass man bei allen ferneren Untersuchungen auf dem von van der Waals eingeschlagenen Wege fortschreiten müsse.

Der schwächste Punkt, welcher einer Verbesserung bedarf, ist wohl der Ausdruck $\frac{a}{v^2}$ für den Cohäsionsdruck. Dies erkannte schon Clausius, welcher nicht nur die Constante a durch eine Function der Temperatur ersetzte, sondern auch die Abhängigkeit von dem specifischen Volumen v in anderer Weise zum Ausdrucke brachte, so dass die Zustandsgleichung die Form[1]

$$p + \frac{RT}{\theta(v+\beta)^2} = \frac{RT}{v-b} \qquad 2)$$

erhielt, worin θ eine noch näher zu bestimmende Temperaturfunction und β eine positive Constante bedeuten. Diese Formel steht mit den thatsächlichen Verhältnissen in viel besserer Übereinstimmung. Von den vielen Anwendungen, welche diese Formel erfahren hat, will ich insbesondere ihre Verwendung bei der Berechnung der von Battelli bei den Dämpfen von Schwefelkohlenstoff und Äther erhaltenen Versuchsergebnisse erwähnen und hervorheben, dass die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Daten eine sehr gute ist. Nichtsdestoweniger darf man aber nicht übersehen, dass die Gleichung 1) das Ergebnis einer Theorie, hingegen die Formel 2) lediglich eine empirische Formel ist, welche über das Wesen der Cohäsion nicht den geringsten Aufschluss gibt.

Wenn man die Clausius'sche Formel mit der van der Waals'schen Gleichung näher vergleicht, so erkennt man auch die Art und Weise, wie die van der Waals'sche Theorie von der Erfahrung in quantitativer Beziehung abweicht. Ändert man nämlich den Zustand der Substanz längs einer Isotherme, so ändert sich der Cohäsionsdruck nur mit dem specifischen Volumen v; während nun der Cohäsionsdruck nach der Theorie verkehrt proportional dem Quadrate von v ist, ist er nach der Formel 2) verkehrt proportional der Größe $(v+\beta)^2$, d. h. wird die Substanz zusammengedrückt, so wächst der Cohäsionsdruck langsamer, als es die van der Waals'sche Theorie

[1] Clausius, Wied. Ann., 14, S. 692 bis 704 (1881). Die kinetische Theorie der Gase, S. 227.

verlangt. Ferner nimmt diese Theorie an, dass die Kraft, mit welcher zwei Molecüle sich gegenseitig anziehen, nur von deren Massen und deren Abstand, nicht aber von der Temperatur abhängt. Aus der Clausius'schen Formel folgt dagegen, dass man eine bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung erzielt, wenn man diese Kraft als mit der Temperatur veränderlich ansieht.

Von diesen beiden Umständen ist insbesondere der erstere der Grund, warum, wenn man aus der Gleichung 1) die kritischen Daten

$$v_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27\,b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27\,bR}$$

berechnet und dann aus diesen drei Gleichungen die Größen a und b eliminiert, die resultierende Gleichung

$$\frac{p_c v_c}{RT_c} = \frac{3}{8} = 0\cdot375$$

von der Erfahrung nicht erfüllt wird, indem die Versuchsdaten für den linksstehenden Ausdruck einen kleineren Wert ergeben welcher im Mittel gleich

$$\frac{1}{3\cdot7} = 0\cdot27027\,..$$

ist. Berechnet man die kritischen Daten nach der Clausius'schen Formel, so erhält man

$$\frac{p_c v_c}{RT_c} = \frac{3}{8} - \frac{\beta}{8(b+\beta)},$$

also einen Wert, welcher bei passender Wahl der Größen b und β mit der Forderung der Erfahrung in Einklang gebracht werden kann.

Aus dem zweiten der oben genannten Umstände erklärt sich noch eine andere Abweichung. Aus der van der Waals'schen Theorie folgt, dass, wenn eine Substanz eine Ausdehnung oder Zusammendrückung erfährt, wobei das specifische Volumen von dem Anfangswerte v_1 in den Endwert v_2 übergeht, die von den Cohäsionskräften geleistete Arbeit gleich

$$a\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$$

ist. Von diesem Ausdrucke machte Bakker (1888) zuerst eine Anwendung[1] zur Berechnung der latenten Verdampfungswärme, indem er die Größe a aus den kritischen Daten nach der van der Waals'schen Gleichung 1), nämlich

$$a = \frac{27}{64}\,\frac{R^2 T_c^2}{p_c}$$

berechnete, er erhielt aber Werte, welche für die gewöhnlichen Temperaturen von den Versuchswerten bedeutend und in dem Sinne abwichen, dass sie viel kleiner waren. Nernst will diese Abweichung durch eine theilweise Bildung von complexen Molecülen erklären, da die van der Waals'sche Theorie auf der Voraussetzung beruht, dass die Molecüle unverändert bleiben; der Grund ist aber der, dass die durch die letzte Gleichung berechnete Größe a eigentlich nur für die kritische Temperatur gilt. Nach van der Waals ist diese Größe a für alle Temperaturen constant; nimmt man aber an, dass der Coefficient des Cohäsionsdruckes mit wachsender Temperatur abnimmt, so ist die genannte Differenz sofort verständlich. Ich werde am Schlusse dieser Abhandlung die innere latente Verdampfungswärme des Schwefelkohlenstoffes berechnen und werde zeigen, dass die Rechnungswerte mit den Werten der Zeuner'schen Tabelle sehr gut übereinstimmen.

Es soll nun im folgenden die van der Waals'sche Theorie des Cohäsionsdruckes in der Weise corrigiert und ergänzt werden, dass bei der Rechnung ein Umstand berücksichtigt wird, den man bisher ganz übersehen hat. Der Cohäsionsdruck erhält dadurch einen Ausdruck, welcher thatsächlich die Eigenthümlichkeit zeigt, dass der Cohäsionsdruck sich nicht verkehrt proportional dem Quadrate des specifischen Volumens v, sondern langsamer ändert; wird v halb so groß, so ist der Cohäsionsdruck nicht viermal so groß, sondern etwas kleiner.

---

[1] Vergl. darüber: Zeitschr. physik. Chem., 18, 519 (1895) und Nernst, Theoret. Chemie, 3. Aufl., S. 236 (1900).

Bevor wir diese Rechnung ausführen, wollen wir zunächst zeigen, wie man die Zustandsgleichung auch auf einem anderen Wege als auf dem der kinetischen Gastheorie erhalten kann. Ich habe die Grundzüge dieser Betrachtung wohl schon in einer früheren Abhandlung[1] dargelegt, doch will ich hier die Ableitung noch einmal, und zwar vollständiger durchführen, weil ich Wert darauf lege, zu zeigen, dass die Theorie der Continuität des dampfförmigen und flüssigen Zustandes keineswegs ausschließlich eine Consequenz der kinetischen Gastheorie ist.

Die Energie eines Körpers hat die Eigenschaft, bei einer Zustandsänderung um ebensoviel anzuwachsen, als die dem Körper dabei von außen zugeführte Arbeit und Wärme beträgt. Ist die einzige Kraft, welche auf den Körper wirkt, ein auf dessen Oberfläche wirkender Druck p, welcher in allen Punkten der Oberfläche gleich stark und überall senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist, so hat das Princip der Energie den Ausdruck

$$dU = dQ - p\,dv,$$

wo U die Energie der Masseneinheit des Körpers, v das specifische Volumen und dQ die der Masseneinheit von außen zugeführte Wärme, gemessen nach mechanischem Maße, darstellen. Ist die Zustandsänderung umkehrbar, so erhalten wir für dU den Ausdruck

$$dU = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp - p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T dp - p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dT + C_p dT,$$

worin C_p die specifische Wärme des Körpers bei constantem Drucke, gemessen nach mechanischem Maße, bedeutet. Erfolgt im letzteren Falle die Zustandsänderung bei constanter Temperatur, so haben wir $T =$ const. und $dT = 0$ zu setzen und erhalten

$$dU = -\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\right] dp.$$

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CX, Abth. IIa (1901), S. 437.

Wir wollen nun solche Körper betrachten, welche die Eigenschaft haben, dass bei einer umkehrbaren isothermischen Ausdehnung die von außen zugeführte Wärme ebenso groß ist als die nach außen abgegebene Arbeit und dass umgekehrt bei einer umkehrbaren isothermischen Zusammendrückung die nach außen abgegebene Wärme ebenso groß ist als die von außen zugeführte Arbeit. Für derartige Zustandsänderungen ist

$$dQ = p\,dv \quad \text{oder} \quad dU = 0$$

oder

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 0. \qquad 3)$$

Bei den Körpern, welche diese Eigenschaft haben, gibt es keine innere Arbeit, also auch keine inneren Kräfte. Diese Eigenschaft ist aber das bestimmende Kennzeichen der vollkommenen Gase; somit ist die Gleichung 3) diejenige Differentialgleichung, welche die Zustandsgleichungen der vollkommenen Gase erfüllen müssen.

Die Lösung der Differentialgleichung 3) lautet

$$v = F\left(\frac{T}{p}\right). \qquad 4)$$

Die einfachste Form dieser Function ist

$$v = R\frac{T}{p},$$

worin R eine positive Constante bedeutet. Es ist dies das Boyle-Gay-Lussac'sche Gesetz, welches streng genommen von keinem in der Natur vorkommenden Gase erfüllt wird. Eine andere Form der Function ist

$$v + \alpha = R\frac{T}{p},$$

worin R wieder eine positive Constante darstellt und α eine Constante ist, welche positiv oder negativ sein kann. Eine dritte Form wäre

$$R\frac{T}{p} = v + \alpha + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{v^2} + \ldots,$$

worin R eine positive Constante ist und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ positive oder negative Constanten bedeuten.

Da alle Gase der Natur bei fortgesetzter Verdünnung demjenigen Zustande zustreben, welcher durch das Boyle-Gay-Lussac'sche Gesetz zum Ausdrucke gebracht wird, so sind in der Gleichung 4) nur solche Functionen zu nehmen, welche für ein unendlich großes v zum Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetze führen.

Wir wollen nun ein vollkommenes Gas betrachten, für welches die Zustandsgleichung

$$R\frac{T}{p} = v-b \quad \text{oder} \quad p = \frac{RT}{v-b} \tag{5}$$

gilt, in welcher R und b positive Constanten bedeuten, und denken uns von einem gewissen Augenblicke an zwischen den Massentheilchen des Gases gegenseitige Anziehungskräfte geschaffen. Für die Anziehungskräfte möge das folgende Gesetz gelten: Sind m und m' zwei Massentheilchen und ist r die Entfernung ihrer Schwerpunkte, so soll die Anziehungskraft in die Verbindungsgerade der Schwerpunkte fallen und ihre Größe soll gleich $mm'f(r, T)$ sein, wo $f(r, T)$ eine Function von r und T bedeutet, welche sowohl mit wachsendem r, als auch mit wachsendem T abnimmt. Die Abnahme mit wachsendem r soll eine ungemein rasche sein. Unter der Wirkung der inneren Anziehungskräfte nimmt die Substanz einen neuen Gleichgewichtszustand ein, bei welchem das specifische Volumen v unter demselben äußeren Drucke p ein kleineres ist. Während früher der Druck im Inneren gleich dem äußeren Drucke p war, ist er jetzt nach den Grundgleichungen der Hydrostatik größer. Dies ergibt sich folgendermaßen: Denken wir uns ein sehr kleines Massentheilchen μ der Substanz unendlich wenig verschoben, während alle übrigen Massentheilchen in Ruhe bleiben, und bezeichnen wir die Arbeit, welche die auf μ wirkenden Kräfte bei der Verschiebung leisten, mit μdA, so ist die dieser Ortsänderung entsprechende Druckänderung dp durch

$$dp = k\,dA \tag{6}$$

gegeben, wo k die Dichte bedeutet. Rückt das Massentheilchen μ aus der Oberfläche in das Innere, so leisten die Anziehungskräfte eine positive Arbeit, und deshalb muss der Druck im Inneren größer sein als in der Oberfläche.

So wie mehrere Kräfte, welche an einem und demselben Punkte angreifen, sich gegenseitig nicht beeinflussen und jede Kraft so wirkt, als käme sie allein zur Geltung, so müssen wir auch bei dem hier betrachteten mechanischen System festsetzen, dass diejenige Eigenschaft, welche für sich allein zu dem durch die Gleichung 5) bestimmten Drucke p führt, durch die inneren Anziehungskräfte nicht beeinflusst wird. Stellen wir uns vor, dass das von uns betrachtete, jetzt mit den inneren Anziehungskräften begabte Gas allseits von starren Wänden eingeschlossen sei, und stellen wir uns ferner vor, dass von einem gewissen Augenblicke an die inneren Anziehungskräfte wieder verschwinden, so muss der Druck auf die Gefäßwände dann denjenigen Wert annehmen, welcher durch die Gleichung 5) bestimmt ist.

Was die Anziehungskräfte anbelangt, so sollen sie dieselben Eigenschaften wie die Capillarkräfte der Flüssigkeiten haben, sie sollen nämlich mit wachsendem Abstande so rasch abnehmen, dass von den Anziehungskräften, welche auf ein Massentheilchen wirken, nur jene in Betracht kommen, welche von den in der allernächsten Umgebung liegenden Massentheilchen herrühren, und dass die Grenze dieser wirksamen Umgebung in einer äußerst geringen Entfernung liegt. Ein im Inneren liegendes Massentheilchen erfährt daher, weil alle Massentheilchen, deren Anziehung in Betracht kommt, um das erstere symmetrisch vertheilt sind, gar keine Kraftwirkung, und denken wir uns innerhalb der Substanz eine Fläche parallel zur Oberfläche so gezogen, dass der Abstand dieser Fläche für jedes Oberflächentheilchen gerade die Grenze der wirksamen Umgebung darstellt, so werden alle von dieser Fläche eingeschlossenen Massentheilchen keine Kraftwirkung erfahren.

Ziehen wir jetzt die Grundgleichung 6) der Hydrostatik heran und nehmen wir an, dass auf die Substanz keine äußeren Kräfte wirken, so sehen wir, dass alle die von der construierten

Fläche eingeschlossenen Massentheilchen unter demselben Drucke stehen. Bezeichnet p den Druck in der Oberfläche und $p+P$ den Druck im Inneren, so hat der Druck $p+P$ für alle die zuletzt genannten Massentheilchen denselben Wert. Da aber diese Massentheilchen sich so verhalten, als wären die zwischen ihnen wirkenden Anziehungskräfte ganz verschwunden, so muss nach dem früher Gesagten der Druck $p+P$ denjenigen Wert haben, welcher durch die Gleichung 5) bestimmt ist, nämlich den Wert

$$p+P = \frac{RT}{v-b}. \tag{7}$$

Unsere nächste Aufgabe ist nun die Bestimmung des Cohäsionsdruckes P. Betrachten wir den Gleichgewichtszustand der Substanz bei einer gewissen Temperatur, welche überall in der Substanz den gleichen Wert hat, so spielt die Temperatur bei der Berechnung von P die Rolle einer Constanten, weshalb wir die gegenseitigen Anziehungskräfte der Massenpunkte lediglich als eine Function des Abstandes ansehen können. Solche Anziehungskräfte haben eine Kräftefunction. Bezeichnen wir für ein Massentheilchen μ, welches die Coordinaten x, y, z hat, die Kräftefunction aller auf μ wirkenden Anziehungskräfte mit $\mu\Phi(x, y, z)$, so haben wir in der Gleichung 6) $dA = d\Phi$ zu setzen und erhalten

$$dp = k d\Phi. \tag{8}$$

Die Kräftefunction Φ habe in der Oberfläche den Wert Φ_1 und im Inneren den Wert Φ_2. Integrieren wir die Gleichung 8) von der Oberfläche bis ins Innere, indem wir dabei k als eine Constante ansehen, so erhalten wir

$$P = k(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{9}$$

Bei dieser Rechnung ist vorausgesetzt, dass die starren Gefäßwände keinerlei Reaction auf die Substanz ausüben.

Nun sind noch Φ_1 und Φ_2 zu bestimmen. Wir haben die Kraft, mit welcher zwei Massentheilchen m, m' sich gegenseitig anziehen, gleich $mm'f(r, T)$ gesetzt. Da T bei der Rechnung als eine Constante betrachtet wird, so können wir einfach

$mm'f(r)$ schreiben. Kommen die Theilchen m, m' aus unendlich großem gegenseitigen Abstande in den Abstand r, so ist die Arbeit der Anziehung $= mm' \int_r^\infty f(r)\,dr$ oder, wenn wir $m' = k\,dv$ setzen, gleich

$$mk\,dv \int_r^\infty f(r)\,dr.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck nach dv über das ganze Volumen der Substanz, so ist

$$mk \int dv \int_r^\infty f(r)\,dr$$

diejenige Arbeit, welche geleistet wird, wenn das Theilchen m bei unverändertem Verhalten der ganzen übrigen Substanz aus dem Unendlichen in die Lage gebracht wird, welche es thatsächlich einnimmt, also $= m\Phi$. Demnach ist

$$\Phi = k \int dv \int_r^\infty f(r)\,dr$$

oder, wenn wir

$$\int_r^\infty f(r)\,dr = F(r)$$

setzen,

$$\Phi = k \int F(r)\,dv. \qquad 10)$$

Drückt man dv durch Polarcoordinaten aus, deren Anfangspunkt derjenige Raumpunkt ist, auf welchen Φ sich bezieht, setzt man ferner $\int_r^\infty r^2 F(r)\,dr = \psi(r)$ und berücksichtigt man den ungemein kleinen Bereich der wirksamen Umgebung, so ergibt sich für einen inneren Punkt

$$\Phi_2 = 4\pi k \psi(0) \qquad 11)$$

und für einen Punkt der Oberfläche, wenn man annimmt, dass die Materie der Substanz den Raum stetig ausfüllt,

$$\Phi_1 = 2\pi k \psi(0). \qquad 12)$$

Denkt man sich sowohl um den inneren Punkt, als auch um den Punkt der Oberfläche die Wirkungssphären construiert, so sieht man, dass bei stetiger Vertheilung der Materie die Wirkungssphäre des Oberflächenpunktes gerade halb so groß ist wie die Wirkungssphäre des inneren Punktes, weshalb $\Phi_1 = \frac{1}{2}\Phi_2$ ist. Die Gleichung 9) erhält dadurch die Form

$$P = 2\pi\psi(0)k^2 = \frac{2\pi\psi(0)}{v^2}. \tag{13}$$

Dies ist der van der Waals'sche Ausdruck, nur mit dem Unterschiede, dass wir $\psi(0)$ nicht als eine Constante, sondern als eine Function der Temperatur ansehen.

Ganz anders verhält sich die Sache, wenn man annimmt, dass die Materie der Substanz den Raum in discreten Massenpunkten erfüllt. Diese discreten Massenpunkte können nichts anderes sein als die Endproducte einer unaufhörlich fortgesetzten Theilung der Substanz, also die Molecüle. Wir wollen uns die Molecüle, wie es gewöhnlich geschieht, kugelförmig vorstellen und wollen die Masse eines Molecüls mit μ bezeichnen.

Um den Unterschied dieses Falles gegen den früheren schärfer hervortreten zu lassen, wollen wir die Beziehung zwischen dem Drucke P und der Kräftefunction für diesen Fall nochmals ableiten. Wir haben zu beachten, dass, wenn wir in einem Punkte der Oberfläche die Normale nach einwärts ziehen, die Anziehungskräfte, welche auf einen Punkt dieser Normalen wirken, in Bezug auf die Normale symmetrisch sind, und dass daher die resultierende Kraft die Richtung der Normale hat. Wir wollen die Normale zur z-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Tangentialebene des Oberflächenpunktes zur xy-Ebene wählen. Ferner wollen wir in dieser Ebene um den Oberflächenpunkt als Mittelpunkt einen unendlich kleinen Kreis beschreiben und dann eine Cylinderfläche construieren, für welche der Kreis die Leitlinie und die Normale die Achse ist. Schließlich wollen wir die Cylinderfläche durch zwei Ebenen schneiden, welche zur xy-Ebene parallel sind und von ihr die Abstände z und $z+dz$ haben. Wir

erhalten auf diese Weise ein Raumelement von dem Inhalte ωdz, wo ω den Flächeninhalt des Kreises bedeutet.

In der Volumeinheit der Substanz mögen sich n Molecüle befinden; daher ist $k = n\mu$. Setzen wir wieder fest, dass die Dichte durchwegs constant ist, so ist die Zahl der Molecüle in dem Raumelement ωdz gleich $n\omega dz$. Die Kraftfunction der Anziehungskräfte, welche eines dieser Molecüle von der ganzen übrigen Substanz erfährt, ist $\mu\Phi$. Da die resultierende Kraft in die Normale fällt, so ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{d\Phi}{dz}.$$

Die beiden Grundflächen des Raumelementes erfahren den Druck $p\omega$, beziehungsweise $(p+dp)\omega$ und die Zunahme ωdp des Druckes ist gegeben durch

$$\omega dp = n\omega dz . \mu \frac{d\Phi}{dz},$$

woraus

$$dp = n\mu \frac{d\Phi}{dz} dz$$

folgt. Integrieren wir diese Gleichung längs der Normalen von $z = 0$ bis in das Innere, so erhalten wir links den Cohäsionsdruck P. Dieser ist also

$$P = n\mu \int_0 \frac{d\Phi}{dz} dz = n\mu(\Phi_2 - \Phi_1) = k(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad 14)$$

wo $\mu\Phi_2$ die Kraftfunction der ganzen Substanz für ein im Inneren gelegenes Molecül und $\mu\Phi_1$ die Kraftfunction der ganzen Substanz für ein an der Oberfläche gelegenes Molecül ist. Wir wollen diese Molecüle kurz als die Molecüle 2 und 1 bezeichnen. Es ist dann nach dem Früheren $\mu\Phi_2$ diejenige Arbeit, welche die Anziehungskräfte leisten, wenn das Molecül 2 bei unverändertem Verhalten der ganzen übrigen Substanz aus dem Unendlichen in die Lage gebracht wird, welche es im Inneren thatsächlich einnimmt, und $\mu\Phi_1$ diejenige Arbeit, welche die Anziehungskräfte leisten, wenn das Molecül 1 aus

dem Unendlichen in die Lage an der Oberfläche gebracht wird. Bestimmend für diese Arbeiten sind diejenigen Molecüle der Substanz, welche in der Wirkungssphäre liegen. Construieren wir nun um die Mittelpunkte der beiden Molecüle die Wirkungssphären, so sieht man sofort (Fig. 1), dass die Anzahl der Molecüle, welche sich in der Wirkungssphäre des Oberflächenmolecüls befinden, größer ist als die Hälfte der Anzahl derjenigen Molecüle, welche in der ganz im Inneren

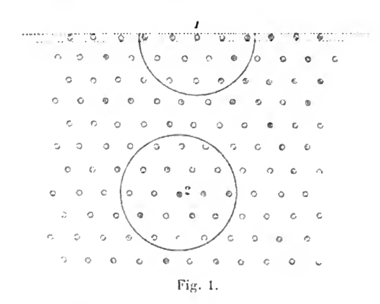


Fig. 1.

verlaufenden Wirkungssphäre liegen. Aus diesem Grunde muss Φ_1 größer sein als $\frac{1}{2}\Phi_2$.

Denken wir uns jetzt eine Fläche so gezogen, dass sie alle an der Oberfläche liegenden Molecüle auf der äußeren Seite berührt, hierauf eine zweite dazu parallele Fläche gezogen, welche dieselben Molecüle auf der inneren Seite berührt, und bezeichnen wir schließlich die Kraftfunction der Anziehungskräfte, welche die zwischen diesen Flächen liegenden Molecüle in dem Mittelpunkte des Molecüls 1 ausüben, mit φ, so ist ohneweiters klar dass

$$2\Phi_1 - \varphi = \Phi_2,$$

also

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\Phi_2 + \frac{1}{2}\varphi \qquad 15)$$

ist. Setzen wir dies in die Gleichung 14) ein, so wird

$$P = \frac{1}{2} k (\Phi_2 - \varphi). \qquad 16)$$

Da hier für die Function Φ_2 derselbe Wert wie in der Gleichung 11) gilt, so erhalten wir

$$P = 2\pi\psi(0)k^2 - \frac{1}{2} k\varphi = \frac{2\pi\psi(0)}{v^2} - \frac{\varphi}{2v}. \qquad 17)$$

Es entsteht nun die Aufgabe, die Function φ zu berechnen. Diese Berechnung ist aber keineswegs so einfach, und es ist mir auch bisher nicht mehr gelungen, als die Function φ in grober Annäherung zu bestimmen. Befindet sich die Substanz im Gleichgewichtszustande, so haben die Molecüle einen gewissen mittleren Abstand voneinander, welchen wir δ nennen wollen. Den Radius der Molecüle bezeichnen wir mit σ und ihre Dichte mit $\varkappa$. Weil die Anziehungskräfte, welche die Molecüle aufeinander ausüben, die Eigenschaft haben, mit wachsendem Abstande äußerst rasch abzunehmen, so kommt in der Wirkungssphäre eines Molecüls hauptsächlich nur die Wirkung derjenigen Molecüle in Betracht, welche ihm am nächsten liegen, weshalb wir die Proportion

$$\varphi : \Phi_2 = 2\pi\delta \times 2\sigma : 4\pi\delta^2$$

bilden, woraus

$$\varphi = \frac{\sigma}{\delta} \Phi_2 = \frac{\sigma}{\delta} \frac{4\pi\psi(0)}{v} \qquad 18)$$

folgt. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung 17) ein, so wird

$$P = \frac{2\pi\psi(0)}{v^2} \left(1 - \frac{\sigma}{\delta}\right). \qquad 19)$$

Wir betrachten jetzt innerhalb der Substanz einen Würfel von 1 *cm* Seite. Die Anzahl der darin liegenden Molecüle ist außerordentlich groß; wir haben sie früher mit n bezeichnet. Es ist demnach

$$\delta \sqrt[3]{n} = 1 \quad \text{oder} \quad n\delta^3 = 1.$$

Die Masse in dem Würfel ist einerseits gleich k, anderseits gleich $n\frac{4\pi\rho^3\varkappa}{3}$; also ist

$$n\frac{4\pi\rho^3\varkappa}{3} = k \quad \text{oder} \quad n\rho^3 = \frac{3k}{4\pi\varkappa}$$

und daher

$$\frac{\rho}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi\varkappa}}. \tag{20}$$

Um die Dichte $\varkappa$ auszudrücken, müssen wir von der folgenden Erwägung ausgehen. Lassen wir den Druck, unter welchem die Substanz steht, bei constanter Temperatur bis ins Unendliche wachsen, so nimmt nach der Gleichung 7), nämlich nach

$$v - b = \frac{RT}{p+P},$$

das specifische Volumen bis zu dem Grenzwerte b ab. Bezüglich der Molecüle haben wir die Annahme gemacht, dass sie durchwegs gleich große Kugeln seien, und wir haben nun zu untersuchen, wie diese Kugeln gelagert sein müssen, wenn eine weitere Zusammendrückung nicht mehr möglich ist. Eine der dichtesten Lagerungen von sehr viel gleich großen Kugeln[1] dürfte man erhalten, wenn man sie nach Art der aus Kanonenkugeln aufgebauten Pyramiden aufschichtet. Die Rechnung ergibt dann, dass das ganze Volumen, welches die Kugeln sammt den kleinen zwischen ihnen frei bleibenden Zwischenräumen einnehmen, sich zu dem von den Kugeln selbst erfüllten Raume wie $3\sqrt{2}:\pi$ verhalten. Denken wir uns also innerhalb der Substanz für den genannten Grenzfall die Volumeinheit construiert, so nehmen die darin liegenden Molecüle für sich den Raum $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ ein. In diesem Raume herrscht aber die Dichte $\varkappa$; folglich ist die Masse der Molecüle gleich $\frac{\pi\varkappa}{3\sqrt{2}}$. Da diese Masse auf jede Volumeinheit der Substanz entfällt,

[1] Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, II, S. 12.

so ist sie die specifische Dichte der Substanz für den Grenzfall und daher

$$\frac{\pi\varkappa}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{4\pi\varkappa} = \frac{b}{4\sqrt{2}}.$$

Wir erhalten somit

$$\frac{\sigma}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{bk}{4\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{b}{4\sqrt{2}v}} \tag{21}$$

und

$$P = \frac{2\pi\psi(0)}{v^2}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{4\sqrt{2}v}}\right) \tag{22}$$

$$\varphi = \frac{4\pi\psi(0)}{v}\sqrt[3]{\frac{b}{4\sqrt{2}v}} = \frac{4\pi\psi(0)\sqrt[3]{\frac{b}{4\sqrt{2}}}}{v^{4/3}}. \tag{23}$$

Aus der Formel 22) geht nun mit voller Klarheit hervor, dass, wenn v bei constant bleibender Temperatur auf den halben Wert gebracht wird, P einen Wert annimmt, welcher kleiner als das Vierfache des früheren Wertes ist, weil der Ausdruck in der Klammer ebenfalls kleiner wird. Setzen wir den Wert von P in die Gleichung 7) ein, so wird

$$p + \frac{2\pi\psi(0)}{v^2}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{4\sqrt{2}v}}\right) = \frac{RT}{v-b}. \tag{24}$$

Die Berechnung der Function φ bedarf einer wesentlichen Correction, denn es wurde angenommen, dass die in der Oberfläche liegenden Molecüle dieselben Abstände haben wie die Molecüle im Inneren. Dies trifft aber in Wirklichkeit nicht zu, weil ja der Druck von der Oberfläche gegen das Innere hin zunimmt. φ muss also einen Wert haben, welcher kleiner ist als der Wert in den Gleichungen 18) und 23). Die theoretische Ableitung des richtigen Wertes ist mir bisher nicht gelungen, doch hat der Vergleich der Gleichung 24) mit den Messungen, welche Battelli an Schwefelkohlenstoffdämpfen angestellt hat, ergeben, dass man

$$\varphi = \frac{4\pi\psi(0)}{v}\sqrt[3]{\frac{b^2}{4\sqrt{2}v^2}} \qquad 23a)$$

zu setzen hat. Dadurch wird

$$P = \frac{2\pi\psi(0)}{v^2}\left(1-\sqrt[3]{\frac{b^2}{4\sqrt{2}v^2}}\right) \qquad 25)$$

oder wenn wir $2\pi\psi(0) = K$ setzen,

$$P = \frac{K}{v^2}\left(1-\sqrt[3]{\frac{b^2}{4\sqrt{2}v^2}}\right) \qquad 25a)$$

und

$$p+\frac{K}{v^2}\left(1-\sqrt[3]{\frac{b^2}{4\sqrt{2}v^2}}\right) = \frac{RT}{v-b}. \qquad 26)$$

Bevor wir diese Gleichung mit den Versuchsergebnissen von Battelli vergleichen, wollen wir sie noch etwas näher untersuchen, und zwar vor allem die Bedingungen für den kritischen Punkt ableiten. Setzen wir $\frac{v^{1/3}}{b^{1/3}} = z$, so liefern die Bedingungen für den kritischen Punkt die Gleichung

$$z^5 - \frac{20}{9\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}z^3 - 3z^2 + \frac{44}{9\sqrt[3]{4\sqrt{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung hat drei reelle und zwei complex-imaginäre Wurzeln; die reellen sind

$$z_1 = +1\cdot5647,\quad z_2 = -0\cdot99875,\quad z_3 = +0\cdot89908$$

oder

$$z_1^3 = +3\cdot8309,\quad z_2^3 = -0\cdot9963,\quad z_3^3 = +0\cdot7268.$$

Da v naturgemäß positiv ist und nicht kleiner als b sein kann, so kommt von den drei reellen Wurzeln nur die erste in Betracht; also ist

$$v_c = 3\cdot8309\, b.$$

Ferner ergibt sich $\frac{p_c v_c}{RT_c} = 0\cdot3368.$

Die letztere Zahl ist kleiner als die Zahl, welche die van der Waals'sche Gleichung liefert, aber sie ist noch immer größer als die Zahl, welche sich aus den kritischen Daten der meisten Substanzen ableiten lässt. Der Grund hievon ist offenbar der, dass die Function φ noch nicht ganz richtig bestimmt ist. Übrigens ergibt sich für den Schwefelkohlenstoff aus den Versuchen von Battelli die Zahl 0·3280, welche von unserer Zahl nur wenig abweicht.

Zu betrachten ist noch die Arbeit, welche die inneren Anziehungskräfte leisten, wenn die Substanz bei constanter Temperatur eine Volumänderung erfährt, bei welcher das specifische Volumen von dem Werte v' auf den Wert v'' gebracht wird. Für die Kräftefunction der Substanz in einem Punkte des Inneren gilt

$$\Phi_2 = 4\pi\psi(0)k = \frac{4\pi\psi(0)}{v}.$$

Hat die Substanz die Masse M und das Volumen V, so ist ihre Kräftefunction auf sich selbst gleich

$$W = \frac{1}{2}\int \Phi_2 k dv = 2\pi\psi(0)k^2 V = 2\pi\psi(0)Mk$$
$$= KMk = \frac{KM}{v},$$

somit für $M = 1$ gleich $W_1 = Kk = \frac{K}{v}$.

Betrachten wir die Substanz bei derselben Temperatur, aber bei zwei verschiedenen Dichten k' und k'', denen die specifischen Volumina v' und v'' entsprechen, so ist die Arbeit, welche die inneren Anziehungskräfte bei dem Übergange aus dem einen Zustande in den anderen leisten, gleich

$$W_1'' - W_1' = K(k'' - k') = K\left(\frac{1}{v''} - \frac{1}{v'}\right). \qquad 27)$$

Wie man sieht, hat diese Arbeit genau denselben Ausdruck wie bei van der Waals, nur mit dem Unterschiede, dass der Coefficient K hier als eine Function der Temperatur zu betrachten ist. Wir werden später diesen Ausdruck beim

Schwefelkohlenstoffe näher prüfen und werden sehen, dass er durch die Erfahrung vollkommen bestätigt wird

Im folgenden werden wir nun die Formel 26) auf den Schwefelkohlenstoff anwenden und werden zeigen, dass diese Formel nicht nur die Versuchsergebnisse, welche Battelli bei den Schwefelkohlenstoffdämpfen erhalten hat, sondern auch den Zusammenhang von p, v, T bei dem tropfbar-flüssigen Schwefelkohlenstoffe in befriedigender Weise wiedergibt. Die Formel 26) ist meines Wissens die erste Formel, welche den Zusammenhang der Größen p, v, T sowohl für die Dämpfe, als auch für die tropfbare Flüssigkeit in befriedigender Weise wiedergibt und damit die Continuität des dampfförmigen und tropfbar-flüssigen Zustandes in klarer Weise darlegt.

Battelli[1] hat eine ungemein große Reihe von Versuchen an Schwefelkohlenstoffdämpfen zwischen den Temperaturen $-29\cdot34°$ und $+273\cdot0°$ angestellt und hierauf die Versuchsergebnisse durch die Clausius'sche Formel

$$p = \frac{RT}{v-\alpha} - \frac{mT^{-\mu} - nT^{\nu}}{(v+\beta)^2}$$

berechnet, in welcher

$$R = 819\cdot71, \quad \alpha = 0\cdot684, \quad \beta = 0\cdot327,$$
$$m = 12868324, \quad n = 95\cdot877, \quad \mu = 0\cdot32021, \quad \nu = 1\cdot19420.$$

Dabei ist v das Volumen von 1 g, ausgedrückt in Cubikcentimetern. p ist ausgedrückt in Millimetern Quecksilber. Die aus dieser Formel sich ergebenden Rechnungswerte stehen mit den Versuchswerten in sehr guter Übereinstimmung, doch findet diese Übereinstimmung nur bei den Dämpfen statt, aber nicht mehr bei der tropfbaren Flüssigkeit. Wenden wir nämlich die Formel auf den flüssigen Schwefelkohlenstoff bei 0° C. und dem Drucke einer Atmosphäre an und geben wir der Formel dabei die Gestalt

$$\frac{(p+P)(v-\alpha)}{RT} = 1,$$

[1] Battelli, Memorie della r. accad. delle scienze di Torino (2), XLII, p. 119—178 (1892).

wo

$$P = \frac{mT^{-\mu} - nT^{\nu}}{(v+\beta)^2}$$

ist, so erhalten wir für die linke Seite der Formel den Wert

$$0 \cdot 68213.$$

Für unsere Formel 26) war es vor allem nothwendig, die Constanten zu bestimmen. Wir wollen unter v das in Cubikmetern ausgedrückte Volumen verstehen, welches ein Kilogramm der Substanz einnimmt, und unter p den Druck, ausgedrückt in Millimetern Quecksilber. Die Größe b ergibt sich auf Grund des von mir aufgestellten Compressibilitätsgesetzes der Flüssigkeiten zu $b = 0 \cdot 000641$. Die Größe R ergibt sich folgendermaßen. In dem Maße, als die Verdünnung des Dampfes zunimmt, tritt die Größe b gegen v immer mehr zurück und wird auch das Glied P immer kleiner, so dass die Zustandsgleichung bei fortgesetzter Verdünnung des Dampfes sich dem Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetze $pv = RT$ nähert. Für die Constante R gilt dann die Beziehung

$$R = \frac{62 \cdot 166}{m},$$

wo m das Moleculargewicht bedeutet. Da $m = 75 \cdot 93$ ist, so ist $R = 0 \cdot 81875$. Was die Größe K anbelangt, so erhält man aus den Versuchsergebnissen für die Temperaturen über 0° C.

$$K = \frac{A - B(T-273)^2}{T^{0 \cdot 3}}$$

und für die Temperaturen unter 0° C.

$$K = \frac{A}{T^{0 \cdot 3}},$$

wo $A = 10 \cdot 7991$, $B = 0 \cdot 0000086466$ ist.

Die Gleichung 26) wollen wir jetzt auf die Form

$$\frac{(p+P)(v-b)}{RT} = 1 \text{ oder kurz } \Lambda = 1$$

bringen, wo P die in 25*a*) angegebene Bedeutung hat, und hierauf die Größe Λ aus den von Battelli beobachteten Werten von p, v, T berechnen. Im folgenden ist auch die berechnete Größe P, der Cohäsionsdruck, besonders hervorgehoben.

v beob.	p beob.	P ber.	Λ ber.
$t = -29 \cdot 34°$			
26·3102	7·6	0·0	1·0023
22·7267	8·8	0·0	1·0025
20·4823	9·7	0·0	0·9958
$t = -23 \cdot 41°$			
8·214	24·9	0·0	1·0009
7·06381	28·9	0·0	0·9989
6·83125	29·8	0·0	0·9961
$t = -14 \cdot 01°$			
4·83602	43·8	0·1	1·0011
3·83523	55·2	0·1	1·0000
3·25631	64·8	0·2	0·9980
$t = -8 \cdot 34°$			
3·64152	59·6	0·2	1·0048
3·02564	71·7	0·2	1·0037
2·49635	86·4	0·3	0·9986
$t = -3 \cdot 06°$			
2·63125	84·0	0·3	1·0036
2·14076	103·0	0·4	1·0014
1·959831	112·2	0·5	0·9992

v beob.	p beob.	P ber.	Λ ber.
$t = +3 \cdot 23°$			
2·74144	82·5	0·3	1·0029
2·20234	102·8	0·4	1·0047
1·804832	124·5	0·6	0·9980
1·521324	147·5	0·9	0·9978
$t = 8 \cdot 26°$			
2·001320	114·6	0·5	1·0000
1·500489	152·6	0·9	0·9997
1·273614	179·5	1·2	0·9989
1·251327	182·4	1·3	0·9977
$t = 12 \cdot 48°$			
1·837427	126·9	0·6	1·0019
1·486210	156·7	0·9	1·0017
1·096487	211·3	1·6	0·9982
1·066200	217·1	1·7	0·9974
$t = 16 \cdot 37°$			
1·703205	138·5	0·7	1·0003
1·225268	192·2	1·3	1·0002
0·932584	252·0	2·3	1·0003
0·912022	257·0	2·4	0·9978

v beob.	p beob.	P ber.	Λ ber.
$t = 22 \cdot 44°$			
1·431614	168·5	0·9	1·0021
1·086456	221·6	1·7	1·0024
0·787348	304·4	3·2	1·0004
0·747463	320·0	3·5	0·9987
0·733041	324·0	3·6	0·9919
$t = 57 \cdot 08°$			
1·031416	261·5	1·8	1·0042
0·514384	519·0	7·1	1·0001
0·421375	632·0	10·6	1·0004
0·294268	899·0	21·6	1·0002
0·246051	1071·0	30·9	1·0006
$t = 78 \cdot 82°$			
0·720261	396	3·6	0·9983
0·398318	714	11·6	1·0017
0·206214	1358	43·0	0·9998
0·152413	1828	78·5	1·0045
0·140876	1959	91·8	0·9984
0·137214	2000	96·8	0·9942
$t = 99 \cdot 24°$			
0·726346	416	3·4	0·9987
0·383214	786	12·3	1·0021
0·197375	1504	46·0	1·0006
0·136214	2153	96·2	1·0005
0·101289	2864	173·5	1·0031
0·092316	3121	208·5	1·0015
0·085683	3344	241·8	1·0006
$t = 130 \cdot 48°$			
0·486375	672	7·4	0·9990
0·240258	1350	30·2	1·0011
0·116268	2734	128·0	1·0017
0·084574	3697	240·8	1·0005
0·060241	5068	472·0	0·9995
0·047278	6318	762·5	0·9996
0·046162	6449	799·4	0·9988
$t = 159 \cdot 10°$			
0·421460	828	9·6	0·9964
0·206256	1681	39·8	1·0001
0·106268	3208	148·9	1·0023
0·058268	5655	490·6	1·0011
0·029876	10265	1836	1·0000
0·028932	10544	1956	0·9996
0·028704	10616	1987	0·9997
$t = 171 \cdot 52°$			
0·476262	760	7·4	1·0029
0·248348	1446	27·2	1·0027
0·121564	2893	112·6	0·9986
0·071124	4840	326·6	1·0006
0·041563	7942	946·0	0·9994
0·024874	12389	2602	0·9981
0·023892	12816	2817	0·9987
$t = 183 \cdot 48°$			
0·415284	890	9·6	0·9981
0·226486	1628	32·3	1·0033
0·105267	3428	148·2	1·0011
0·050423	6866	638·2	0·9995
0·021650	14410	3379	1·0000
0·017106	17311	5361	0·9988

v beob.	p beob.	P ber.	Λ ber.
$t = 193 \cdot 05°$			
0·354262	1068	13·1	1·0019
0·211665	1778	36·6	1·0035
0·103289	3561	152·5	0·9990
0·062888	5720	408·3	0·9997
0·021614	14791	3359	0·9976
0·015131	19541	6750	0·9984
0·013681	20992	8215	0·9981
$t = 209 \cdot 32°$			
0·406269	963	9·8	0·9992
0·201315	1933	39·8	1·0025
0·102253	3741	153·2	1·0020
0·056346	6600	499·6	1·0015
0·023563	14436	2791	1·0000
0·012013	24211	10414	0·9971
0·010094	27068	14593	0·9973
$t = 217 \cdot 35°$			
0·306214	1295	17·1	0·9987
0·123663	3159	104·2	1·0000
0·062345	6102	405·7	1·0002
0·040656	9110	945·4	1·0020
0·010641	26903	13073	0·9958
0·009702	28608	15632	0·9985
0·008601	30452	19722	0·9948
$t = 229 \cdot 46°$			
0·312856	1305	16·2	1·0027
0·224313	1819	31·5	1·0061
0·115816	3460	117·3	1·0015
0·056314	6901	490·5	1·0003
0·020408	17123	3629	0·9971
0·011964	25901	10293	0·9962
0·007040	35391	28633	0·9959

v beob.	p beob.	P ber.	Λ ber.
$t = 262 \cdot 8°$			
0·048358	8570	641	1·0019
0·025362	15473	2291	1·0011
0·011346	29789	11037	0·9963
0·005624	45338	42508	0·9978
0·004915	47605	54863	0·9983
0·004114	49765	76646	1·0008
0·003891	50230	85052	1·0022
$t = 271 \cdot 6°$			
0·029194	13748	1722	0·9906
0·010161	34306	13546	1·0217
0·004216	52197	72560	1·0002
0·003416	54188	107362	1·0054
0·003110	54372	127647	1·0079
$t = 272 \cdot 6°$			
0·042158	9963	833	1·0034
0·026314	15300	2111	1·0006
0·012474	28601	9091	0·9984
0·005786	46701	39878	0·9972
0·004318	52316	69312	1·0012
0·003145	54911	124914	1·0080
0·002938	55085	141537	1·0110
$t = 273 \cdot 0°$			
0·006316	44800	33734	0·9970
0·004046	52415	78253	0·9953
0·003316	54933	113255	1·0064
0·003104	55101	127912	1·0083
0·002952	55216	140245	1·0105
0·002803	55296	154179	1·0131
0·002718	55324	163062	1·0146

Nun wollen wir die Formel 26) auch auf den tropfbar-flüssigen Schwefelkohlenstoff anwenden. Die specifischen Volumina v wurden von 0° bis 50° nach der Formel von Pierre, für die höheren Temperaturen nach der Formel von Hirn berechnet.

t° C.	v beob.	p beob.	P ber. in *mm* Hg	P ber. in Atm.	λ ber.
0	0·00077388	127·91	1693240	2227·95	1·0067
10	78272	198·46	1649308	2170·15	1·0089
20	79206	298·03	1605741	2112·86	1·0113
30	80168	434·62	1563000	2056·62	1·0126
40	81180	617·53	1520380	2000·45	1·0137
50	82247	857·07	1477897	1944·59	1·0147
60	83382	1164·51	1435300	1888·57	1·0159
70	84432	1552·09	1396226	1837·17	1·0120
80	85600	2032·53	1357908	1784·08	1·0102
90	86820	2619·08	1315788	1731·32	1·0079
100	88112	3325·15	1275588	1678·42	1·0056
110	89460	4164·06	1235829	1626·11	1·0028
120	90946	5148·79	1194946	1572·32	1·0013
130	92506	6291·60	1154297	1518·83	0·9992
140	94185	7603·96	1113205	1464·77	0·9972
150	95995	9095·94	1071790	1410·26	0·9954

Wir wollen jetzt die Formel 27) prüfen. Diese Formel gibt die Arbeit wieder, welche die inneren Anziehungskräfte leisten, wenn die Substanz von der Dichte k' auf die Dichte k'', beziehungsweise von dem specifischen Volumen v' auf das specifische Volumen v'' gebracht wird. Wenden wir dies auf die Condensation der gesättigten Dämpfe an, indem wir unter k', v' die Dichte, beziehungsweise das specifische Volumen des gesättigten Dampfes und unter k'', v'' die Dichte, beziehungsweise das specifische Volumen der bei der Condensation entstehenden tropfbaren Flüssigkeit verstehen, so ist $W_1''-W_1'$ der Arbeitswert der inneren latenten Verdampfungswärme. Der oben für K gegebene Wert bezieht sich auf die Wiedergabe

des Cohäsionsdruckes in Millimeter Quecksilber; wollen wir die innere latente Verdampfungswärme in Calorien erhalten, so haben wir die Größe K noch mit

$$\frac{10333}{760 \times 425}$$

zu multiplicieren. Auf diese Weise ergeben sich die in der folgenden Tabelle unter dem Columnentitel »inn. lat. Verdampf.-Wärme ber.« stehenden Werte. Die Volumina v'' wurden der vorhergehenden Tabelle und die Volumina v' den Zeuner'schen Tabellen[1] entnommen. Die reciproken Werte davon sind k'' und k'. Die unter dem Columnentitel »inn. lat. Verdampf.-Wärme nach Zeuner« stehenden Werte wurden von Zeuner aus den Regnault'schen Versuchswerten abgeleitet.

$t°$ C.	k''	k'	Inn. lat. Verdampf.-Wärme ber.	Inn. lat. Verdampf.-Wärme nach Zeuner
0	1292·2	0·568	82·93	82·79
10	1277·6	0·853	81·08	81·61
20	1262·5	1·244	79·26	80·34
30	1247·4	1·766	77·46	79·00
40	1231·8	2·450	75·66	77·57
50	1215·9	3·328	73·88	76·07
60	1199·3	4·434	72·07	74·48
70	1184·4	5·813	70·39	72·82
80	1168·2	7·498	68·64	71·06
90	1151·8	9·536	66·89	69·24
100	1134·9	11·98	65·13	67·33
110	1117·6	14·86	63·34	65·34
120	1099·6	18·25	61·52	63·27
130	1081·0	22·16	59·67	61·13
140	1061·7	26·60	57·77	58·91
150	1041·7	31·79	55·83	56·61

[1] Zeuner, Thermodynamik, II. Anhang.

Die Übereinstimmung zwischen den hier berechneten Werten der inneren latenten Verdampfungswärme und den Zeuner'schen Werten ist mit Rücksicht darauf, dass der Coefficient K aus den Abweichungen der Dämpfe von dem Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetze berechnet ist, als eine recht befriedigende zu bezeichnen und kann als eine schöne Bestätigung der van der Waals'schen Theorie angesehen werden.

Diese Übereinstimmung nöthigt uns aber auch noch zu einem anderen wichtigen Schlusse über den Verdampfungsprocess. Clausius hat auf Grund der Anschauung, dass die Wärme in Bewegungen der kleinsten Theilchen der Körper bestehe, den Vorgang der Verdampfung folgendermaßen erklärt:[1] »Betrachten wir die Oberfläche einer Flüssigkeit, so nehme ich an, dass in der Mannigfaltigkeit der Bewegungen hin und wieder der Fall eintritt, dass ein Molecül durch ein günstiges Zusammentreffen der fortschreitenden, schwingenden und drehenden Bewegung mit solcher Heftigkeit von seinen Nachbarmolecülen fortgeschleudert wird, dass es, bevor es durch die zurückziehende Kraft derselben diese Geschwindigkeit ganz verloren hat, schon aus ihrer Wirkungssphäre heraus ist und dann in dem über der Flüssigkeit befindlichen Raume weiterfliegt.« — »Diese Molecüle verhalten sich nun in dem Raume ganz wie ein Gas und stoßen daher in ihrer Bewegung gegen die Wände. Eine dieser Wände wird aber von der Flüssigkeit selbst gebildet, und diese wird, wenn ein Molecül gegen sie stößt, dasselbe im allgemeinen nicht wieder zurücktreiben, sondern durch die Anziehung, welche die übrigen Molecüle bei der Annäherung sogleich wieder ausüben, festhalten und in sich aufnehmen. Der Gleichgewichtszustand wird also eintreten, wenn so viele Molecüle in dem oberen Raume verbreitet sind, dass durchschnittlich während einer Zeiteinheit ebensoviele Molecüle gegen die Flüssigkeitsoberfläche stoßen und von dieser festgehalten werden, als andere Molecüle von ihr ausgesandt werden«.

Nach der Clausius'schen Anschauung werden also, wenn beim Sieden einer Flüssigkeit die Masseneinheit verdampft,

[1] Clausius, Pogg. Ann., C, S. 361 und »Die kinetische Theorie der Gase«, S. 12.

die Molecüle, welche zusammen diese Masseneinheit bilden, aus den verschiedensten Punkten der Flüssigkeit kommen und die Oberfläche in verschiedenen Punkten durchsetzen. Auch in dem Dampfraume werden sie im allgemeinen voneinander durch andere Molecüle getrennt sein. Nach dem Früheren können wir die Arbeit der inneren Anziehungskräfte berechnen, welche überwunden werden muss, wenn ein Molecül aus dem Inneren der Flüssigkeit in das Innere des Dampfraumes übertritt. Da wir die Masse eines Molecüls mit μ bezeichnet haben, so ist diese Arbeit gleich

$$4\pi\psi(0)\mu(k''-k') = 2K\mu(k''-k').$$

Treten in der genannten Weise n Molecüle über, so ist die Arbeit gleich

$$2Kn\mu(k''-k').$$

Und ist $n\mu = 1$, so ist die Arbeit gleich

$$2K(k''-k').$$

Diese Arbeit ist nun genau doppelt so groß als der oben berechnete Arbeitswert der inneren latenten Verdampfungswärme.

Wollte man versuchen, die Clausius'sche Anschauung dahin abzuändern, dass man die Molecüle nur von der Oberfläche ausgehen lässt, so müsste man beachten, dass, wenn ein Molecül aus der Oberfläche der Flüssigkeit in den Dampfraum übertritt, in der Oberfläche eine Lücke entsteht, die dadurch ausgefüllt wird, dass ein Molecül aus dem Inneren an die Stelle tritt. Der Gesammteffect ist also wieder derselbe, als wenn das Molecül aus dem Inneren der Flüssigkeit in den Dampfraum übergegangen wäre.

Bei der obigen Berechnung der latenten Verdampfungswärme nach der Gleichung 27) wurde die wesentliche Voraussetzung gemacht, dass, wenn die Masseneinheit verdampft, die Theilchen, welche zusammen diese Masseneinheit bilden, nach wie vor beisammen liegen und weder im Anfangszustande, noch im Endzustande durch andere Molecüle voneinander getrennt sind. Da diese Anschauung

zu den Zeuner'schen Werten führt, so ist nur sie annehmbar, die Clausius'sche Anschauung hingegen zu verlassen.

Zum Schlusse sollen noch einige Worte über die Compressibilität der tropfbaren Flüssigkeit hinzugefügt werden. Betrachten wir den flüssigen Schwefelkohlenstoff bei 0° C. und 127·91 *mm* Hg Druck, so gibt die Rechnung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -2\cdot 9434 \times 10^9 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -9\cdot 7156 \times 10^9,$$

also

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T} = 3\cdot 301.$$

Diese Zahl sagt aus, dass, wenn wir den äußeren Druck der Flüssigkeit um 3·301 Atmosphären erhöhen, der Cohäsionsdruck, welcher gleich 2227·95 Atmosphären war, nur um eine einzige Atmosphäre vergrößert wird.

Berechnen wir für denselben Flüssigkeitszustand den Compressibilitätscoefficienten, indem wir p in Atmosphären ausdrücken, so erhalten wir für $t = 0°$ C.

$$-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 101\cdot 08 \times 10^{-6}.$$

Colladon und Sturm fanden experimentell für $t = 0°$ C.

$$78\cdot 0 \times 10^{-6}.$$

Nach dem von mir aufgestellten Compressibilitätsgesetz[1] ist für die Volumsänderungen der tropfbaren Flüssigkeiten der Cohäsionsdruck als constant anzusehen. Danach ergibt sich der Compressibilitätscoefficient des flüssigen Schwefelkohlenstoffes bei 0° C. gleich

$$78\cdot 1 \times 10^{-6},$$

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIX, Abth. IIa, S. 837 (1900).

welcher Wert mit dem experimentellen vollkommen übereinstimmt. Die in der Gleichung 23*a*) ausgedrückte Function φ wäre demnach so abzuändern, dass der Cohäsionsdruck P bei Volumsänderungen der tropfbaren Flüssigkeiten sich so wenig ändert, dass man ihn als constant ansehen kann.

X. SITZUNG VOM 24. APRIL 1902.

Das Comité zur Feier des vierzigjährigen Docenten-Jubiläums Hofrath Prof. Gustav Tschermak's in Wien übersendet ein Exemplar der Erinnerungs-Medaille sammt Bericht.

Das w. M. Prof. F. Becke hat behufs Instruction der Bauleitung am 8. bis 11. April die nördliche Mündung des Tauerntunnels bei Böckstein besucht und berichtet über die gemachten geologischen Beobachtungen.

Prof. F. Berwerth erstattet einen Bericht über die Einleitung von geologischen Beobachtungen und die ersten Aufschlüsse im Südflügel des Tauern-Tunnels.

Das w. M. Hofrath L. Pfaundler in Graz übersendet zwei im mathem.-physikal. Cabinete der Universität Graz ausgeführte Arbeiten:

I. »Apparate zur Bestimmung der Temperaturveränderungen beim Dehnen oder Tordieren von Drähten«, von Prof. A. Wassmuth in Graz.
II. »Über die Anwendung des Principes des kleinsten Zwanges auf die Schwingungen einer Saite«, von stud. phil. H. Brell in Graz.

Prof. Dr. Gustav Jäger überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Der innere Druck, die innere Reibung, die Größe der Molekeln und deren mittlere Weglänge bei Flüssigkeiten«.

Dr. Felix M. Exner überreicht eine Arbeit mit dem Titel: »Versuch einer Berechnung der Luftdruckänderungen von einem Tage zum nächsten«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Haynald-Observatorium: Publicationen, Heft VIII: Protuberanzen, beobachtet in den Jahren 1888, 1889, 1890 von J. Fényi, S. J. Mit 2 Lithographien und 10 großen Tafeln in Heliogravure. Kalocsa, 1902. 4°.

— — Gewitter-Registrator. Construiert von P. J. Schreiber S. J.; beschrieben von J. Fényi, S. J. 8°.

Association géodésique internationale: Comptes-rendus des séances de la treizième conférence générale. Rédigé par H. G. Van de Sande Bakhuyzen; avec 5 cartes et planches. 1901. 4°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

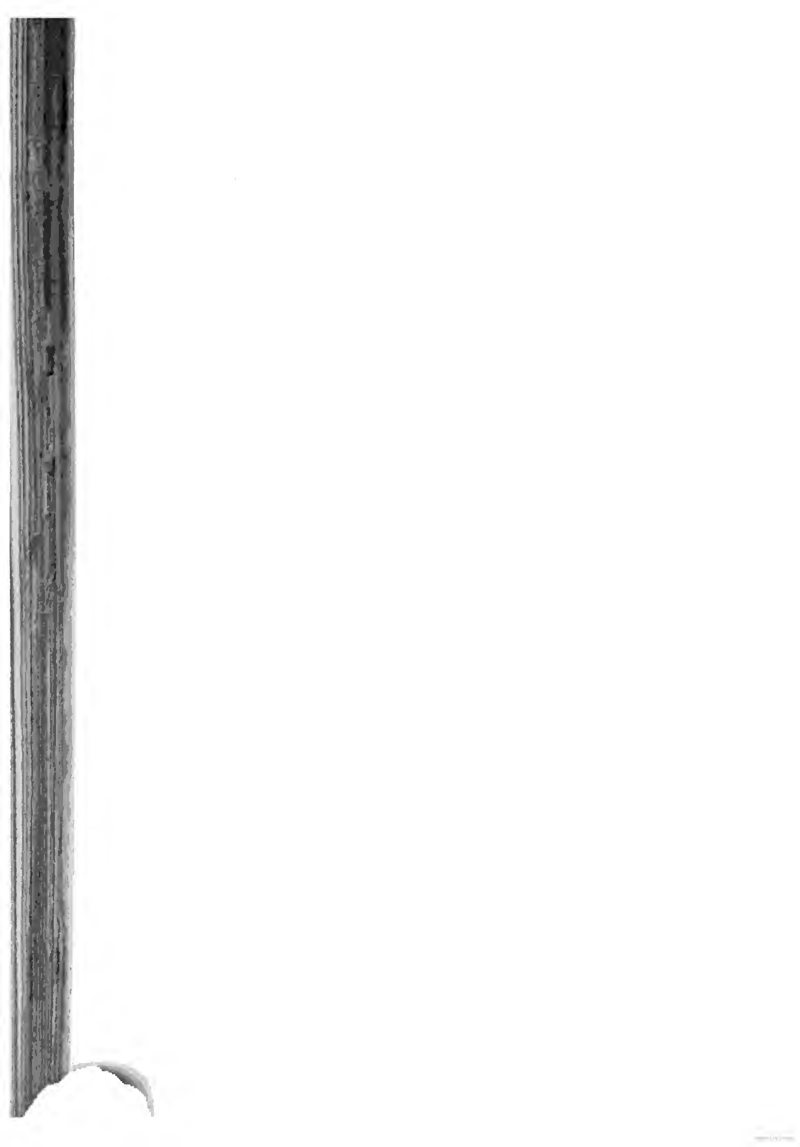
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XI. SITZUNG VOM 9. MAI 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 110, Abth. IIa, Heft X (December 1901). — Monatshefte für Chemie, Bd. XXIII, Heft III (März 1902).

Der Vorsitzende, Präsident Prof. E. Sueß, macht Mittheilung von dem am 7. Mai l. J. in Wien erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes der philosophisch-historischen Classe, Herrn Hofrathes Prof. Dr. Adolf Beer.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen ihres Beileides von den Sitzen.

Das Präsidium gibt Kenntnis von einem Schreiben des c. M. Prof. Josef Seegen in Wien, durch welches ein Preis gestiftet wird, die Frage betreffend, ob der Stickstoff der im Thierkörper umgesetzten Albuminate zum Theil in Gasform ausgeschieden wird.

Dieses Schreiben wird in der nächsten Nummer des »Anzeigers« veröffentlicht werden.

Der akademische Senat der königl. Fridericianischen Universität in Christiania übersendet eine Einladung zu der am 5. bis 7. September l. J. abzuhaltenden Feier des hundertjährigen Geburtstages von Nicolaus Heinrich Abel.

Das w. M. Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Alfred Kirpal: »Über Cinchomeronsäureester und Apophyllensäure« vor.

Das w. M. Hofrath L. Pfaundler übersendet eine Arbeit von Prof. A. Wassmuth in Graz, betitelt: »Über eine Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers«.

Dr. Carl Kellner in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über das Verhalten von Brom gegen elektrische Ströme von hoher Spannung«.

Prof. Eduard Doležal in Leoben übersendet eine Arbeit mit dem Titel: »Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung der Reflexe«.

Herr Robert Willnauer in Wien übersendet zwei versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität, beide mit der Aufschrift: »Der Nerv«.

Das w. M. Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. W. Burstyn: »Über den Metaldehyd«.

Hofrath Lieben überreicht ferner die folgenden zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium:

I. »Über die isomeren Pyrogalloläther«, von J. Herzig und J. Pollak.

II. »Notiz zur Kenntnis der Phtaleïne«, von J. Herzig und J. Pollak.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt eine in seinem Institute von Dr. R. Fischer ausgeführte Arbeit vor: »Über die Elektricitätserregung bei dem Hindurchgange von Luftblasen durch Wasser«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Gouvernement des Staates Pará: Quarto centenario do descobrimento do Brazil o Pará em 1900. Pará, 1900. 4°.

Molisch Hans: Studien über den Milchsaft und Schleimsaft der Pflanzen. Mit 33 Holzschnitten im Texte. Jena, 1901. 8°.

XII. SITZUNG VOM 15. MAI 1902.

Professor Dr. Ed. Lippmann übersendet folgende drei im k. k. III. chemischen Universitätslaboratorium von ihm in Gemeinschaft mit Assistenten Isidor Pollak ausgeführten Abhandlungen:

I. »Über die Einwirkung von Benzylchlorid auf Anthracen.«

II. »Über die Einwirkung von Chlorschwefel auf Benzol.«

III. »Zur Erkennung aromatischer Kohlenwasserstoffe.«

K. k. Sectionschef i. R. Dr. Josef Ritter Lorenz v. Liburnau überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Ergänzung zur Beschreibung der fossilen *Halimeda Fuggeri*«.

Das c. M. Director Theodor Fuchs legt eine Mittheilung vor unter dem Titel: »Über ein neuartiges Pteropodenvorkommen aus Mähren, nebst Bemerkungen über einige muthmaßliche Äquivalente der sogenannten ‚Niemtschitzer Schichten'«.

Ferner legt derselbe eine zweite Mittheilung vor, betitelt: »Über einige Hieroglyphen und Fucoiden aus den paläozoischen Schichten von Hadjin in Cilicien«.

Das w. M. Hofrath F. Steindachner berichtet über eine neue *Ptyodactylus*-Art, welche während der südarabischen Expedition (von Prof. Simony) in mehreren Exemplaren gesammelt und von ihm früher für identisch mit dem indischen *P. homolepis* Blanf. gehalten worden war (siehe Anzeiger der kais. Akad., Jahrg. XXXVI, 1899, S 162).

Das w. M. Hofrath Ad. Lieben überreicht die folgenden drei in seinem Laboratorium ausgeführten Arbeiten:

I. »Über die Producte der gemäßigten Verbrennung von Isopentan, *n*-Hexan und Isobutylalkohol«, von Richard v. Stepski.

II. »Über eine Synthese alkylierter Glutarsäuren aus β-Glycolen (I. Mittheilung: Synthese der α-Methylglutarsäure)«, von Adolf Franke und Moriz Kohn.

III. »Über das Oxim des Diacetonalkohols und über ein Oxyhexylamin«, von Moriz Kohn und Gustav Lindauer.

Selbständige Werke oder neue der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Dziobek O., Dr.: Lehrbuch der analytischen Geometrie. II. Theil: Analytische Geometrie des Raumes. Mit 36 Figuren im Texte. Braunschweig, 1902. 8°. (Verlag von A. Graff's Buchhandlung.)

XIII. SITZUNG VOM 22. MAI 1902.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften Eduard Mazelle, Leiter des k. k. astronomisch-meteorologischen Observatoriums zu Triest, übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Jahre 1901, nebst einem Anhange über die Aufstellung des Vicentini'schen Mikroseismographen«.

Prof. Rudolf Andreasch an der k. k. technischen Hochschule in Graz übersendet eine Arbeit: »Zur Kenntnis des Laktylharnstoffes«.

Das w. M. Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im Privatlaboratorium des Verfassers ausgeführte Arbeit, betitelt: »Über die Herstellung künstlicher Diamanten aus Silicatschmelzen«, von stud. phil. R. v. Hasslinger.

Das c. M. Prof. L. Gegenbauer übersendet eine Arbeit, betitelt: »Über eine Relation des Herrn Hobson«.

Dr. W. R. v. Hillmayr übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Bahnbestimmung des Kometen 1854 III«.

Das w. M. Hofrath E. v. Mojsisovics legt Namens der Erdbeben-Commission zur Aufnahme in die »Mittheilungen der Erdbeben-Commission« den allgemeinen Bericht und die Chronik der im Jahre 1901 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben vor.

Hofrath v. Mojsisovics bespricht ferner die im Bereiche der arktisch pacifischen Triasprovinz bekannt gewordenen Vorkommnisse der *Pseudomonotis ochotica* und der *Pseudomonotis subcircularis*, welche er auf Grund einiger paläontologischer Daten über mitvorkommende Cephalopodenreste bereits in seiner in den akad. Denkschriften, Bd. LXIII, erschienenen Monographie der obertriadischen Cephalopodenfauna des Himalaya in die bajuvarische Triasserie eingereiht hatte.

Dr. Karl Graf Attems in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Myriopoden von Kreta nebst Beiträgen zur allgemeinen Kenntnis einiger Gattungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Cooke, Theodore: The Flora of the Presidency of Bombay; Part II. London, 8°.

Dutch Eclipse-Committee: Preliminary Report of the Dutch expedition to Karang Sago (Sumatra) by W. H. Julius, J. H. Wilterdink and A. A. Nijland. Amsterdam, 8°.

— Total Eclipse of the Sun, May 18, 1901. Dutch Observations, II. Magnetic Observations by Dr. W. van Bemmelen.

University of Montana: Bulletin No 3 (Biological Series No 1). 1901, 8°.

Über eine Relation des Herrn Hobson

von

Leopold Gegenbauer in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Mai 1902.)

Herr Hobson hat in seiner im 25. Bande der »Proceedings of the London Mathematical Society« enthaltenen Abhandlung: »On Bessel's Functions and relations connecting them with Hyper-Spherical and Spherical Harmonics« die interessante Relation

$$\frac{P_n\left(p, \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)}{(\rho^2+z^2)^{\frac{n+p-2}{2}}} =$$

$$= \frac{2^{\frac{p-3}{2}}\Pi\left(\frac{p-3}{2}\right)}{\Pi(p-3)\Pi(n)} \int_0^\infty e^{-\lambda z}\lambda^{n+p-3}J^0(p-1, \lambda\rho)\,d\lambda$$

aufgestellt, in welcher p eine ganze positive, nicht unterhalb 2 liegende Zahl, $P_n(p, x)$ die von mir wiederholt behandelte Function $C_n^{\frac{p}{2}-1}(x)$ und

$$J^0(p, x) = \frac{J^{\frac{p}{2}-1}(x)}{x^{\frac{p}{2}-1}}$$

ist. Aus derselben hat er durch Specialisierung für die n^{te} Kugelfunction und deren m^{te} Zugeordnete bemerkenswerte Integralausdrücke abgeleitet, deren Wichtigkeit für die Potentialtheorie er mit Recht besonders betonte.

I. Die Hobson'schen Ausdrücke lassen sich für ein beliebiges reelles positives, nicht unterhalb 2 liegendes p aus einer Formel ableiten, welche ich der kais. Akademie der Wissenschaften schon vor 27 Jahren in meiner in der zweiten Abtheilung des 72. Bandes der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe enthaltenen Arbeit: »Über einige bestimmte Integrale« mitgetheilt habe. Dieselbe lautet:

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^\rho J^\mu(a_1 x)\,dx =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+\mu)a_1^\mu}{2^\mu \Pi(\mu) a^{\rho+\mu+1}} F\left(\frac{\rho+\mu+1}{2}, \frac{\rho+\mu}{2}+1, \mu+1, -\frac{a_1^2}{a^2}\right) \qquad (1)$$

$$(\mu > -1,\ \rho+\mu+1 > 0,\ R(a) > 0,\ |a| > |a_1|).$$

Transformiert man die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende hypergeometrische Reihe mit Hilfe der Formel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),$$

so verwandelt sich diese Relation in die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^\rho J^\mu(a_1 x)\,dx =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+\mu)a_1^\mu}{2^\mu \Pi(\mu)(a^2+a_1^2)^{\frac{\rho+\mu+1}{2}}} F\left(\frac{\rho+\mu+1}{2}, \frac{\mu-\rho}{2}, \mu+1, \frac{a_1^2}{a^2+a_1^2}\right),$$

aus welcher man unter Benützung der Gleichung

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, x\right) = F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right)$$

die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^\rho J^\mu(a_1 x)\,dx =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+\mu)a_1^\mu}{2^\mu \Pi(\mu)(a^2+a_1^2)^{\frac{\rho+\mu+1}{2}}} F\left(\rho+\mu+1, \mu-\rho, \mu+1, \frac{\sqrt{a^2+a_1^2}-a}{2\sqrt{a^2+a_1^2}}\right) \qquad (2)$$

ableitet, die, falls für ρ: $\rho+\mu$ geschrieben wird, übergeht in

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{\rho+\mu} J^\mu(a_1 x)\,dx =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+2\mu)a_1^\mu}{2^\mu \Pi(\mu)(a^2+a_1^2)^{\mu+\frac{\rho+1}{2}}} F\left(\rho+2\mu+1, -\rho, \mu+1, \frac{\sqrt{a^2+a_1^2}-a}{2\sqrt{a^2+a_1^2}}\right). \quad (3)$$

Wegen der Relation

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

kann (2) auch in folgender Form dargestellt werden:

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^\rho J^\mu(a_1 x)\,dx =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+\mu)}{\Pi(\mu)} \left(\frac{\sqrt{a^2+a_1^2}-a}{a_1}\right)^\mu \frac{1}{(a^2+a_1^2)^{\frac{\rho+1}{2}}} F\left(-\rho, \rho+1, \mu+1, \frac{\sqrt{a^2+a_1^2}-a}{2\sqrt{a^2+a_1^2}}\right). \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) zeigen, dass das Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^\rho J^\mu(a_1 x)\,dx \quad (\mu > -1, \rho+\mu+1 > 0, R(a) > 0, |a| > |a_1|)$$

sich stets durch ein Jacobi'sches Polynom ausdrücken lässt, wenn ρ eine beliebige, die Bedingung $\rho+\mu+1$ erfüllende ganze Zahl (einschließlich der Null) ist, oder sich von μ um eine nicht negative ganze Zahl unterscheidet.

Berücksichtigt man die von mir in meiner Abhandlung: »Einige Sätze über die Functionen $C_n^\nu(x)$« (Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kais. Akademie der Wissenschaften, 57. Band) aufgestellte Gleichung

$$C_\rho^\nu(x) = \frac{\Pi(\rho+2\nu-1)}{\Pi(\rho)\Pi(2\nu-1)} F\left(\rho+2\nu, -\rho, \nu+\frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right),$$

so kann man die Formel (3) auch in folgender Weise schreiben:

$$C_\rho^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+a_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{2^\mu \Pi(\mu)}{\Pi(\rho)\Pi(2\mu)} \frac{(a^2+a_1^2)^{\mu+\frac{\rho+1}{2}}}{a_1^\mu} \int_0^\infty e^{-ax} x^{\rho+\mu} J^\mu(a_1 x)\,dx \qquad (5)$$

und speciell für

$$a = \cos\varphi, \quad a_1 = \sin\varphi$$

$$C_\rho^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{2^\mu \Pi(\mu)}{\Pi(\rho)\Pi(2\mu)\sin^\mu\varphi} \int_0^\infty e^{-x\cos\varphi} x^{\rho+\mu} J^\mu(x\sin\varphi)\,dx. \qquad (6)$$

Diese zwei Formeln gehen für $\mu = \frac{p-3}{2}$, beziehungsweise $\mu = 0$ in Formeln des Herrn Hobson über.

Schreibt man in (5) und (6) für μ und ρ: $\mu+m$, beziehungsweise $\rho-m$, wo m eine ganze positive Zahl nicht größer als ρ ist, und beachtet, dass, wie ich wiederholt gezeigt habe,

$$C_{\rho-m}^{\nu+m} = \frac{\Pi(\nu-1)}{2^\nu \Pi(\nu+m-1)} [C_\rho^\nu(x)]^{(m)}$$

ist, so entstehen die Relationen

$$\left[C_\rho^{\mu+\frac{1}{2}}(x)\right]^{(m)}_{x=\frac{a}{\sqrt{a^2+a_1^2}}} =$$

$$= \frac{2^{2\mu+\frac{1}{2}}\Pi(\mu)}{2^m \Pi(2\mu)\Pi(\rho-m)} \frac{(a^2+a_1^2)^{\frac{\rho+m+1}{2}+\mu}}{a_1^{m+\mu}} \int_0^\infty e^{-ax} x^{\rho+\mu} J^{\mu+m}(a_1 x)\,dx,$$

$$\left[C_\rho^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\right]^{(m)} =$$

$$= \frac{\Pi(\mu)}{2^{m-2\mu-\frac{1}{2}}\Pi(2\mu)\Pi(\rho-\mu)\sin^{\mu+m}\varphi} \int_0^\infty e^{-x\cos\varphi} x^{\rho+\mu} J^{m+\mu}(x\sin\varphi)\,dx,$$

aus denen sich für $\mu = 0$ die Hobson'schen Ausdrücke für die Zugeordneten der Kugelfunctionen ergeben.

Es mag noch bemerkt werden, dass der specielle Fall $\rho = -1$ der Formel (4), d. i. die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} J^\mu(a_1 x)\,dx}{x} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\sqrt{a^2+a_1^2}-a}{a_1}\right)^\mu$$

für ein ganzzahliges positives μ und $a_1 = 1$ vor kurzem von Herrn W. Kapteyn in seiner in den »Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles« enthaltenen Abhandlung: »Sur quelques intégrales définies contenant des fonctions de Bessel« hergeleitet wurde.

II. Ich will bei dieser Gelegenheit noch einige bestimmte Integrale herleiten, in denen Producte von zwei Bessel'schen Functionen erster Art, beziehungsweise das Quadrat einer solchen Function auftritt, und ein Theorem über die positiven Wurzeln dieser Functionen aufstellen, von dem ich zwei specielle Fälle in meiner in den »Mémoires de la Société royale des sciences de Liège« (3ᵉ série, t. II) veröffentlichten Mittheilung: »Quelques propriétés nouvelles des racines des fonctions de Bessel de première espèce« angegeben habe.

Ersetzt man in der bekannten Gleichung

$$J^m(x)\,J^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{m+n+2k}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+n+2k}}{\Pi(m+k)\,\Pi(n+k)}, \quad (m,n > -1)$$

die einzelnen Coefficienten mit Hilfe der Relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\beta\varphi \cos\gamma\varphi\,d\varphi = \frac{2}{\pi^{\beta+1}}\,\frac{\Pi(\beta)}{\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$$

$$(\beta > -1,\ \beta \pm \gamma > -2)$$

durch bestimmte Integrale, so erhält man durch Umkehrung der Ordnung der Summation und Integration, die unter den gemachten Voraussetzungen zulässig ist, die Gleichung

$$J^m(x)\,J^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m+n}(2x\cos\varphi)\cos(m-n)\varphi\,d\varphi.^{1} \qquad (7)$$

---

[1] Diese für ganzzahlige, nicht negative m und n von L. Schläfli in seiner Arbeit: »Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen

Verbindet man diese Formel mit (1), so ergibt sich die Relation

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^\rho J^m(\alpha x) J^n(\alpha x)\, dx = \frac{\Pi(m+n+\rho)\alpha^{m+n}}{2^{m+n}\Pi(m)\Pi(n) a^{m+n+\rho+1}} \cdot$$

$$.F\left(\frac{\rho+m+n+1}{2}, \frac{\rho+m+n}{2}+1, \frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n}{2}+1; m+n+1, m+1, n+1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right) \quad (8)$$

$$\left(\begin{array}{l} m+n+1 > 0, \rho+m+n+1 > 0, R(a) > 0, |a| > |2\alpha| \\ m > -1, n > -1. \end{array}\right)$$

und speciell für $\rho = m+n, m+n+1$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{m+n} J^m(\alpha x) J^n(\alpha x)\, dx = \frac{\Pi(2m+2n)\alpha^{m+n}}{2^{m+n}\Pi(m)\Pi(n) a^{2m+2n+1}} \cdot$$

$$.F\left(m+n+\frac{1}{2}, \frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n}{2}+1; m+1, n+1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{m+n+1} J^m(\alpha x) J^n(\alpha x)\, dx = \frac{\Pi(2m+2n+1)\alpha^{m+n}}{2^{m+n}\Pi(m)\Pi(n) \alpha^{2m+2n+2}} \cdot$$

$$.F\left(m+n+\frac{3}{2}, \frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n}{2}+1; m+1, n+1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right),$$

über die Bessel'schen Functionen« (Mathematische Annalen, 3. Band) abgeleitete Relation habe ich in meiner im 88. Bande dieser Sitzungsberichte enthaltenen Mittheilung »Über die Bessel'schen Functionen« zum Beweise der Gleichung

$$\int_0^\infty J^m(x) J^n(x) x^{\alpha-m-n-1} dx = \frac{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi(m+n-\alpha)}{2^{m+n-\alpha+1}\Pi\left(m+n-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$(0 < \alpha < m+n+1)$$

für ganzzahlige, nicht negative m und n benützt. Nach den obigen Auseinandersetzungen kann die eben genannte Beschränkung fallen gelassen werden, und es gilt die Formel für alle die Bedingung $m+n+1 > 0$ erfüllenden Wertepaare $m, n > -1$. Specielle Fälle dieser allgemeinen Relation wurden von Hobson a. a. O. und in der Abhandlung »Note on some Properties of Bessels Functions« (Proceedings of the London Mathematical Society, 28. V.), und W. Kapteyn a. a. O. und in dem Aufsatze »Een bepaalde integraal woorin Besselsche Functiën voorkomen« (Verslag der koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, X. B.) bewiesen.

welch letztere Formel aus der unmittelbar vorhergehenden sich auch durch Differentiation nach a nach einigem Rechnen herleiten lässt.

Auf gewöhnliche hypergeometrische Reihen führen die Fälle $m=n$ und $m=n+1$ der letzten zwei Formeln und die speciellen Fälle $\rho=0$, $m=n$, $n+1$ von (8); für dieselben hat man

$$\int_0^\infty e^{-ax}(x^n J^n(\alpha x))^2 dx =$$
$$= \frac{\Pi(4n)\alpha^{2n}}{(2^n \Pi(n))^2 a(a^2+4\alpha^2)^{2n}} F\left(-n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right), \quad (10)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}(x^n J^n(\alpha x))^2 x dx =$$
$$= \frac{\Pi(4n+1)\alpha^{2n}}{(2^n \Pi(n))^2 (a^2+4\alpha^2)^{2n+1}} F\left(-n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right), \quad (11)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J^n(\alpha x) J^{n+1}(\alpha x) x^{2n+1} dx = \frac{\Pi(4n+2)\alpha^{2n+1}}{2^{2n+1}\Pi(n)\Pi(n+1)\alpha(a^2+4\alpha^2)^{2n+1}} \cdot$$
$$\cdot F\left(-n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+2, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right), \quad (12)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J^n(\alpha x) J^{n+1}(\alpha x) x^{2n+2} dx = \frac{\Pi(4n+3)\alpha^{2n+1}}{2^{2n+1}\Pi(n)\Pi(n+1)(a^2+4\alpha^2)^{2n+2}} \cdot$$
$$\cdot F\left(-n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+2, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right), \quad (13)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}(J^n(\alpha x))^2 dx =$$
$$= \frac{\Pi(2n)\alpha^{2n}}{(2^n \Pi(n))^2 a^{2n+1}} F\left(n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, 2n+1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right), \quad (14)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x (J^n(\alpha x))^2 dx =$$
$$= \frac{\Pi(2n+1)\alpha^{2n}}{(2^n \Pi(n))^2 a^{2n+2}} F\left(n+\frac{3}{2}, n+\frac{1}{2}, 2n+1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right). \quad (15)$$

Man hat daher den Satz:

Die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}(x^n J^n(\alpha x))\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}(x^n J^n(\alpha x))\,x\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J^n(\alpha x) J^{n+1}(\alpha x)\, x^{2n+1}\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J^n(\alpha x) J^{n+1}(\alpha x)\, x^{2n+2}\,dx$$

$$(n > -1,\ R(a) > 0,\ |a| > |2\alpha|)$$

lassen sich, wenn n ein ungerades (positives) Vielfache von $\frac{1}{2}$ ist $\left(\text{das letzte auch noch für } n = -\frac{1}{2}\right)$, durch Jacobi'sche Polynome ausdrücken.

Setzt man in (10) oder (14) $n = 0$, $a = 2\beta$, $\alpha = i\gamma$ und drückt die hypergeometrische Reihe $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{4\alpha^2}{a^2}\right)$ durch ein bestimmtes Integral aus, so erhält man die Relation

$$2\int_0^\infty e^{-2\beta x}(J^0(i\gamma x))^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2\sin^2\varphi}},$$

durch welche der von Beltrami gefundene elegante Ausdruck für die Potentialfunction einer homogenen Kreisperipherie von der Masse 1 erwiesen wird, in dem β und γ die halbe Summe und die halbe Differenz des größten und kleinsten Abstandes des potenzierten Punktes vom Umfange vorstellen. (»Sulle funzioni cilindriche« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. 16. V.)[1]

---

[1] Siehe die oben erwähnte Arbeit im 88. Bande dieser Sitzungsberichte, sowie meine im 8. Bande der Monatshefte für Mathematik und Physik veröffentlichte Mittheilung: »Eine Integralrelation«.

Als bekannte specielle Fälle der aufgestellten Gleichungen mögen erwähnt werden:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^2\alpha x\,dx = \frac{2\alpha^2}{a(a^2+4\alpha^2)} \qquad \left(10, n=\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin 2\alpha x}{x}\,dx = \operatorname{arctang}\frac{2\alpha}{a} \qquad \left(12, n=-\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin 2\alpha x\,dx = \frac{2\alpha}{a^2+4\alpha^2} \qquad \left(13, n=-\frac{1}{2}\right).$$

Aus der Verbindung von (7) und der von mir im 72. Bande dieser Sitzungsberichte (in der angeführten Abhandlung) aufgestellten Formel

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x^{\nu+1}J^\nu(a_1x) = \frac{a_1^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}}e^{-\frac{a_1^2}{4a^2}}$$

folgt das neue Integral für nicht negative, ganzzahlige ρ:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x^{2n+2\rho+1}J^n(\alpha x)J^{n+2\rho}(\alpha x)\,dx =$$

$$= i^\rho\frac{\alpha^{2n+2\rho}}{a^{4n+4\rho+1}}e^{-\frac{\alpha^2}{a^2}}J^\rho\left(\frac{\alpha^2 i}{a^2}\right).$$

III. Setzt man in (7) für x die kleinste positive Wurzel z von $J^n(x)$, so erhält man die Beziehung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m+n}(2x\cos\varphi)\cos(m-n)\varphi\,d\varphi = 0.$$

Ist nun $m \geqq n$ und $m-n \leqq 1$, so ist $\cos(m-n)\varphi$ im ganzen Integrationsintervalle positiv, und daher muss in demselben $J^{m+n}(2z_n\cos\varphi)$ mindestens einmal das Zeichen wechseln, so dass also $J^{m+n}(x)$ mindestens eine von Null verschiedene positive Wurzel besitzen muss, die kleiner als $2z_n$ ist.

Man hat daher das Theorem:

Bedeutet ε eine nicht negative, die Einheit nicht übersteigende, n eine $-\frac{1+\varepsilon}{2}$ übertreffende Zahl, so ist die kleinste positive Wurzel der Function $J^{2n+\varepsilon}(x)$ kleiner als das Doppelte der kleinsten positiven Wurzel der Function $J^{n}(x)$.

Einige Fälle der Energieumwandlung bei der Ladung von Condensatoren

von

Dr. E. R. v. Schweidler.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Die Energieumwandlungen, welche bei der Ladung eines Condensators auftreten, sollen im folgenden für drei Fälle behandelt werden, wobei die Bedingung gemeinsam sein soll, dass die Ladung durch Verbindung der Condensatorbelegungen mit den Polen einer Batterie constanter elektromotorischer Kraft bewirkt werde, während die Beschaffenheit des Dielektricums und einschränkende Nebenannahmen in den drei Fällen verschieden sind.

I. Ideales Dielektricum (absolut nichtleitend und rückstandsfrei).

Die elektromotorische Kraft der Batterie sei E, die Capacität des Condensators gleich C, t bezeichne die Zeit vom Momente des Ladungsbeginnes an gerechnet, i die Stärke des Ladungsstromes, w und S den Widerstand, beziehungsweise die Selbstinduction des leitenden Kreises, der die Belegungen über die Batterie miteinander verbindet.

Der Strom i ist als Function der Zeit bestimmt durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{w}{S} \frac{di}{dt} + \frac{i}{C.S} = 0$$

und die Anfangsbedingungen.

Nach hinreichend langer Zeit sind die Ladungen der Belegungen

$$\varphi = \pm CE = \pm \int_0^\infty i\,dt;$$

die potentielle Energie des geladenen Condensators ist

$$T = \frac{1}{2}\varphi E.$$

Anderseits wurde von der Batterie während der Ladung eine Arbeit geleistet, die gegeben ist durch

$$B = E \int_0^\infty i\,dt = E\varphi = 2T.$$

Die in der Zuleitung entwickelte Joule'sche Wärme muss daher ebenfalls den Wert T haben:

$$W = \int_0^\infty w i^2 dt = \frac{1}{2}\varphi E = T.$$

Für den speciellen Fall, dass die Selbstinduction zu vernachlässigen ist, lässt sich dies auch besonders leicht verificieren, da in diesem Falle

$$i = \frac{E}{w} \cdot e^{-\frac{t}{wC}}$$

$$W = w \int_0^\infty i^2 dt = \frac{E^2}{w} \cdot \frac{wC}{2} = \frac{1}{2}\varphi E = T.$$

Doch gilt nicht nur in diesem Specialfalle, sondern allgemein (bei beliebiger Form des Ladungsverlaufes) der Satz:

Wird ein Condensator mit idealem Dielektricum durch eine Batterie constanter elektromotorischer Kraft geladen, so ist die im Schließungskreise entwickelte Stromwärme gleich der potentiellen Energie des geladenen Condensators, die Arbeit der Batterie daher das Doppelte dieses Betrages.[1]

---

[1] Diesen so einfach ableitbaren und jedenfalls lange bekannten Satz konnte ich in keinem Lehrbuche finden.

Maxwell und Mascart beweisen, dass bei Verschiebung auf constantem Potential gehaltener Conductoren einer Zunahme der potentiellen

II. Schlechtleitendes, aber rückstandsfreies Dielektricum.

Das den Condensator erfüllende Dielektricum soll neben einer bestimmten Dielektricitätsconstante auch einen bestimmten Wert des Leitvermögens haben, so dass Verschiebungs- und Leitungsströme sich superponieren können. Der Widerstand des Dielektricums zwischen den Condensatorplatten sei ω, daher der stationäre Leitungsstrom $a = \frac{E}{\omega + w}$ und die Potentialdifferenz der Platten im stationären Zustande $V = a\omega = E\frac{\omega}{\omega + w}$.

Zur Vereinfachung der Rechnung sei noch die einschränkende Nebenbedingung eingeführt, dass die Selbstinduction des leitenden Kreises zu vernachlässigen sei.

Bezeichnet man das zu einer Zeit t nach Beginn der Ladung auf der einen Belegung herrschende Potential mit V_t (die andere Belegung sei zur Erde abgeleitet, habe daher constant das Potential 0), die Stromstärke im äußeren Theile der Leitung mit $a+i$, den Leitungsstrom im Inneren des Dielektricums mit $a+\varepsilon$, so gelten folgende Beziehungen:

1. $(a+i)w = E - V_t$

2. $(a+\varepsilon)\,\omega = V_t$

3. $$V_t = \frac{1}{C}\int_0^t (i-\varepsilon)\,dt.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2V_t}{dt^2} = -\frac{1}{rC}\cdot\frac{dV_t}{dt}, \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{w} + \frac{1}{\omega}$$

und mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen endlich

Energie eine gleich große gewonnene Arbeit entspricht, die von der Quelle constanten Potentiales geliefert wird; G. Adler beweist das Gleiche für die Polarisierungsarbeit im Dielektricum (diese Sitzungsber., *95*, IIa, S. 50, 1887). In keiner dieser Ableitungen wird aber die Joule'sche Wärme in den Zuleitungen eingeführt.

$$V_t = a\omega\left[1 - e^{-\frac{t}{Cr}}\right]$$

$$i = \frac{a\omega}{w} e^{-\frac{t}{Cr}}$$

$$\varepsilon = -a e^{-\frac{t}{Cr}},$$

womit der zeitliche Verlauf des Ladungsvorganges gegeben ist.

Hieraus lassen sich weiterhin bestimmen die Größen:

B (Arbeit der Batterie), *T* (potentielle Energie), W_1 (im Dielektricum entwickelte Stromwärme) und W_2 (im äußeren Kreise entwickelte Stromwärme) für eine Zeit τ, die hinreichend groß ist, so dass man den Ladungsprocess als vollendet ansehen kann. Es ergibt sich

$$B = \int_0^{\tau} E(a+i)dt = Ea\tau + EaC\frac{\omega r}{w}$$

$$= (\omega + w)a^2\tau + a^2\omega^2 C$$

$$T = \frac{1}{2}a^2\omega^2 C$$

$$W_1 = \omega\int_0^{\tau}(a+\varepsilon)^2 dt$$

$$= a^2\omega^2\tau - a^2\omega^2 C\left(-\frac{2r}{\omega} + \frac{r}{2\omega}\right)$$

$$W_2 = w\int_0^{\tau}(a+i)^2 dt$$

$$= a^2 w\tau + a^2\omega^2 C\left(\frac{2r}{\omega} + \frac{r}{2w}\right).$$

Entsprechend dem Energieprincip ist thatsächlich

$$B = T + W_1 + W_2.$$

Wenn ω groß gegen w ist, so wird nahezu

$$a\omega = E, \quad r = w,$$

und man erhält:

$$B = Ea\tau + CE^2$$

$$T = \frac{1}{2} CE^2$$

$$W_1 = Ea\tau$$

$$W_2 = \frac{1}{2} CE^2,$$

d. h. es wird wieder eine der potentiellen Energie des Condensators gleiche Wärmemenge in der äußeren Leitung entwickelt, daneben eine — praktisch meistens zu vernachlässigende — Wärmemenge im Dielektricum infolge des stationären Stromes.

III. Dielektricum mit Rückstandsbildung.

Es sei wieder vorausgesetzt, dass die Selbstinduction zu vernachlässigen, ferner dass der Widerstand ω des Dielektricums im stationären Zustande sehr groß gegen w, den der äußeren Leitung, ist. Die Ladung des Condensators erfolgt dann aperiodisch gedämpft und kann praktisch als vollendet betrachtet werden nach einer kleinen Zeit δ, während welcher noch keine merkliche Rückstandsbildung stattgefunden hat. Auf diese Periode von $t = 0$ bis $t = \delta$ lassen sich die Resultate des vorigen Falles direct übertragen.

Von der Zeit $t = \delta$ an bleibt das Potential der Belegungen nahezu constant (auf den Werten 0, beziehungsweise E), und es fließt durch die äußere Leitung ein Strom (rückstandsbildender Strom) $i = a + f(t)$, wo a der stationäre Endwert des Leitungsstromes im Dielektricum, $f(t)$ eine Function der Zeit ist, die mehr oder minder rasch gegen 0 convergiert. Bezeichnet τ wie früher eine hinreichend große Zeit, so ist $\int_0^\tau f(t)dt$ — genau genommen $\int_0^\infty f(t)dt$ — $= R$, der Rückstandsladung.

Für den ganzen Ladungsprocess ergibt sich in der bereits verwendeten Bezeichnungsweise:

$$B = Ea\tau + E\varphi + ER$$

$$T = \frac{1}{2} E\varphi + \frac{1}{2} ER$$

$$W_2 = \frac{1}{2} E\varphi.$$

W_1 kann nicht direct bestimmt werden, da nicht bekannt ist, welcher Theil des totalen Stromes i im Dielektricum als Leitungsstrom, respective als Verschiebungsstrom fließt.

Aus dem Energieprincip folgt aber: $W_1 = B - T - W_2$, somit $W_1 = Ea\tau + \frac{1}{2} ER$.

Das heißt, bei der Ladung eines rückstandsbildenden Condensators wird (unter den erwähnten einschränkenden Bedingungen) wieder eine der potentiellen Energie der disponiblen Ladung gleiche Wärmemenge in der Zuleitung entwickelt, ferner außer der dem stationären Strome entsprechenden Menge $Ea\tau$ eine der potentiellen Energie der Rückstandsladung gleiche Wärmemenge im Dielektricum.

Für die Entladung eines Condensators gilt dasselbe: die Energie der disponiblen Ladung tritt im äußeren Schließungskreise, die der Rückstandsladung im Dielektricum als Wärme hervor.

Einige Versuche über Leitung und Rückstandsbildung in Dielektricis

von

Dr. E. R. v. Schweidler.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Werden die Belegungen eines Condensators einerseits mit der Erde, anderseits mit einem Punkte constanten Potentiales E verbunden, so erfolgt zunächst eine Ladung des Condensators, die je nach dem Verhältnisse von Capacität, Selbstinduction und Widerstand des Schließungskreises durch einen gedämpft oscillierenden oder aperiodisch gedämpften Ladungsstrom J_1 vor sich geht. In den praktisch realisierbaren Fällen wird fast immer dieser Ladungsprocess nach einer sehr kurzen Zeit τ (von der Größenordnung eines Bruchtheiles einer Secunde) als vollendet betrachtet werden können, und das Integral $\int_0^\tau J_1 dt = \varphi$ ergibt die »disponible Ladung« des Condensators.

Wenn nun das Dielektricum kein vollkommenes ist, so wird durch eine gegen τ beträchtliche Zeitdauer ein »Nachladungsstrom« i_1 wahrnehmbar sein, der eine Function der Zeit ist und sich asymptotisch einem Grenzwerte a nähert, welcher Wert a als der Leitungsstrom im stationären Zustande bezeichnet wird und zusammen mit der elektromotorischen Kraft E den Widerstand $W = \frac{E}{a}$ des Dielektricums im stationären Zustande definiert.

Wird nun nach hinreichend langer Zeit die vorher nicht abgeleitete Belegung zur Erde abgeleitet, so erfolgt zunächst eine Entladung des Condensators und häufig ein »Nachentladungsstrom« i_2, der wieder eine Function der Zeit ist und sich asymptotisch dem Grenzwerte 0 nähert. In diesem Falle war der Nachladungsprocess ein theilweise umkehrbarer; die zeitliche Änderung von i_1 beruht nicht allein auf einer Veränderung (Zunahme) des Widerstandes des Dielektricums infolge des Stromdurchganges, sondern wenigstens zum Theile auf einer mit Energieaufspeicherung verbundenen Zustandsänderung des schlechten Leiters, die entweder als »Polarisation«, genauer »elektrolytische Polarisation«, oder als »Rückstandsbildung« bezeichnet wird.

Solange man nicht eine bestimmte Theorie des Rückstandes aufstellt, lässt sich eine principielle Unterscheidung zwischen Polarisation und Rückstandsbildung nicht durchführen. Hat doch Maxwell selbst bei der Aufstellung seiner Theorie der »geschichteten« Dielektrica ausdrücklich bemerkt, dass zwar solche Dielektrica Rückstand zeigen müssen, aber dass nicht umgekehrt jede Rückstandsbildung auf diese Weise zustande kommen müsse, sondern auch ein mehr der elektrolytischen Polarisation analoger Vorgang sein könne. Gleichwohl lässt sich praktisch eine Unterscheidung durchführen von rein descriptiven Gesichtspunkten aus, da die bisher bekannten Erscheinungen auf nur zwei Typen zurückführbar sind, zwischen denen Übergangsformen nicht zu bestehen scheinen. Der eine Typus, der der elektrolytischen Polarisation, welcher sich nicht nur bei Elektrolyten im gewöhnlichen Sinne des Wortes, sondern auch bei schlechtleitenden Dielektricis (z. B. Glas und Quarz bei höherer Temperatur) vorfindet, ist folgendermaßen charakterisiert: Die Abschwächung des Nachladungsstromes i_1 lässt sich interpretieren durch das Entstehen einer elektromotorischen Gegenkraft, die zunächst mit $\int_0^t i_1 dt$ proportional, dann langsamer ansteigt und sich einem bestimmten Grenzwerte ε nähert, der nur von der Natur des Elektrolyten und der Elektroden abhängt und in der Regel die Größenordnung von einigen Volt nicht übersteigt. Der

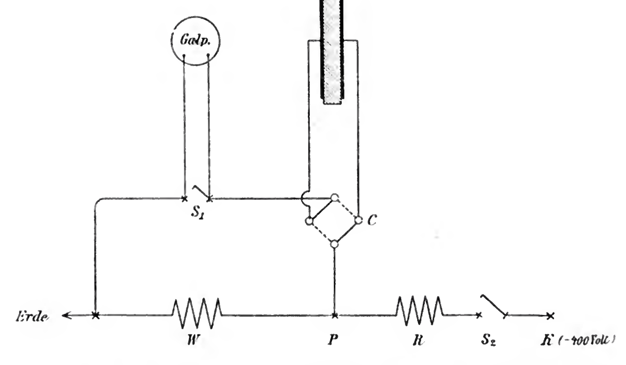
Entladungsstrom i_2 nimmt zunächst langsam, dann rascher gegen 0 ab. Beim zweiten Typus, der Rückstandsbildung, würde die Interpretation der Erscheinungen durch eine entstehende elektromotorische Gegenkraft zum Resultate führen, dass der Endwert ε derselben der elektromotorischen Kraft E der ladenden Stromquelle proportional ist und mit dieser über jede Grenze, jedenfalls aber auf tausende von Volt gesteigert werden könnte. Ferner ist der Verlauf des Entladungsstromes i_2 ein anderer als vorhin, die zeitliche Änderung $\frac{di_2}{dt}$ ist anfangs am größten und sinkt continuierlich gegen 0 ab. Dabei ist $\int_0^\infty i_2 dt = R$, die Rückstandsladung, proportional der Größe E, somit bei einem bestimmten Condensator ein bestimmter Bruchtheil der disponiblen Ladung. Wenn die Erscheinung der Rückstandsbildung nicht durch Hinzutreten von Widerstandsänderung durch den Strom compliciert wird, so ist $i_1 = a + f(t)$, $i_2 = f(t)$, wo $f(t)$ dieselbe Function in beiden Gleichungen ist, wenn die Zeiten vom Momente des Beginnes der Ladung, beziehungsweise der Entladung an gerechnet werden.

Im folgenden sollen einige Versuche mitgetheilt werden, die theils bekannte Gesetzmäßigkeiten bestätigen, theils noch nicht beschriebene Formen des zeitlichen Verlaufes ergeben.

Die Methode, mit der die Leitfähigkeit und die Rückstandsbildung beobachtet wurde, ist eine galvanometrische und wird durch das Schaltungsschema in nachstehender Textfigur erläutert.

Die eine Belegung des Condensators AB ist über ein D'Arsonval'sches Spiegelgalvanometer zur Erde abgeleitet. Um nach Belieben starke Ladungs- und Entladungsströme vom Galvanometer abzuhalten, ist ein Schlüssel S_1 eingefügt, der die Galvanometerleitung kurz schließen kann. Der Widerstand des Galvanometers beträgt 10.000 Ω, sein Reductionsfactor: $2 \cdot 28 . 10^{-10} \frac{A}{mm}$, der ballistische Reductionsfactor (zur Bestimmung der Werte der Capacitäten der untersuchten Condensatoren verwendet): $1 \cdot 0 . 10^{-9} \frac{Cb}{mm}$. Die zweite Belegung

ist mit einem Punkte P verbunden, der einem Starkstromkreise: +400 Volt-Kabel-Erde angehört und dessen Potential durch Änderung eines Regulierwiderstandes R zwischen den Grenzen 0 und 400 Volt variiert werden kann. Durch Öffnen des Schlüssels S_2 wird die Ladung unterbrochen, und die Belegungen sind dann durch das Galvanometer (eventuell den Schlüssel S_1) und den Widerstand w miteinander verbunden. Ein Commutator C gestattet die Vertauschung der Belegungen.



In einzelnen Fällen, wo bloß der Entladungsstrom i_2 messend verfolgt wurde, war die eine Belegung zunächst isoliert und mittels einer Elektrisiermaschine auf höheres Potential geladen und wurde dann in gleicher Weise wie vorhin mit der anderen verbunden.

Die nicht vollkommene Constanz des Potentiales E bewirkte, dass die beobachteten Werte von i_1 bisweilen etwas unsicher sind; ein Hochspannungsaccumulator, bei dem dieser Übelstand wegfällt, stand mir leider nicht zur Verfügung. Im übrigen ist die galvanometrische Messung durch Einfachheit und Raschheit der Ausführung ausgezeichnet, freilich nur auf nicht allzu

schlecht leitende und ziemlich stark rückstandsbildende Substanzen anwendbar.

Nach dem typischen Verhalten der untersuchten Medien sind die Beobachtungsresultate in drei Gruppen getheilt:

I. Bei verschiedenen Glassorten wurde Folgendes gefunden:

Der stationäre Endwert a des Ladungsstromes i_1 ist bei gegebener Temperatur proportional der elektromotorischen Kraft E, somit der Widerstand (und das specifische Leitvermögen) des Glases unabhängig von der Stromstärke (Tabelle I).

Mit der Temperatur steigt das Leitvermögen rasch an (Tabelle I und VII).

Der Entladungsstrom i_2 ist gleich $i_1 - a$ für entsprechende Zeiten (Tabelle II, III, IV).

Bei verschiedenem E sind die auf gleiche Zeiten vom Beginne der Entladung bezogenen Werte von i_2 proportional dem Werte E, somit die bekannte Beziehung $R = \int_0^\infty i_1 dt = \alpha E$; die Proportionalität von Rückstandsladung und disponibler Ladung bestätigt (Tabelle VIII). Mit steigender Temperatur nimmt i_2 und daher R zu, aber nicht in dem Maße wie das specifische Leitvermögen. Wird daher der Rückstand elektrometrisch durch den Potentialanstieg auf der momentan entladenen und dann isolierten Belegung gemessen, so kann durch diesen Umstand der Rückstand bei höherer Temperatur scheinbar kleiner werden (Tabelle V und VI).

Bezüglich des zeitlichen Verlaufes der Function $i_2 = i_1 - a = f(t)$ haben ältere Versuche von R. Kohlrausch,[1] Giese,[2] Hopkinson[3] u. A. gezeigt, dass sich dieselbe mit großer Annäherung durch die Formel $f(t) = b.t^{-m}$, wo $m < 1$, darstellen lässt. Wie Giese, der diese Formel zuerst aufstellte, selbst bemerkt, kann sie nur als empirische Formel zur Darstellung der Function in einem bestimmten Intervalle angesehen werden; für kleine Werte von t kann sie nicht giltig sein, da aus ihr folgen würde: $t = 0$; $f(t) = \infty$; $\int_0^t f(t) dt = R_t = \infty$.

[1] W. Kohlrausch, Pogg. Ann., 91 (1854).

[2] W. Giese, Wied. Ann., 9 (1880).

[3] Hopkinson, Proc. Roy. Soc., *28* (1878).

Durch passende Modification, z. B. $f(t) = A(1+kt)^{-m} . e^{-\alpha t}$, könnte zwar die Formel den Endlichkeitsbedingungen genügend gemacht werden, während sie sich zugleich für größere Werte von t der ursprünglichen nahe anschließt (wenn k groß, α klein gegen 1 ist); doch ist eine explicite Bestimmung der Constanten nicht möglich, sondern erfordert ein langwieriges Annäherungsverfahren. Für rein empirische Darstellung wird daher die einfache Formel Giese's vorzuziehen sein.

Bei meinen Versuchen genügte in einem Falle eine derartige Formel mit ziemlicher Annäherung (Tabelle VIII), in einem zweiten dagegen wurde der Verlauf durch $i_2 = f(t) = \frac{A}{1+kt}$ besser dargestellt. Dabei zeigte sich zugleich, dass der zeitliche Verlauf der Rückstandsbildung durch die Temperatur nicht verändert wurde (Tabelle V und VI). Specielle Messungsreihen, die zur Erläuterung des Obigen herausgegriffen sind, folgen.

Glaskugel, aus Biegeröhre von gewöhnlichem Thüringerglas geblasen, circa 4 *cm* Durchmesser. Belegungen: H_2SO_4.

Capacität $C = 1\cdot5 . 10^{-9}$ Far. $= 1360$ *cm.*

Tabelle I.

E (Volt)	a (10^{-10} A.)	ϑ (° C.)
50	17·1	
100	35·3	16·4°
200	74·0	
100	41·0	
200	79·8	16·8°
400	159·6	
100	29·6	15·5°
200	59·7	
100	171	30·8°

Der Widerstand W bei 16·8° ergibt sich als rund $= 25 . 10^9\ \Omega$.

Das Leitvermögen kann nicht genau angegeben werden, da die Dimensionen unbekannt sind. Aus $C = 1360\ cm$ ergibt sich $\frac{F}{4\pi d} = \frac{C}{K} = 200$ bis $340\ cm$ (Diel. const. zwischen 4 und 7), somit specifischer Widerstand $\sigma = W \frac{F}{d}$.

$$\sigma = 6 \cdot 3 \text{ bis } 10 \cdot 5 . 10^{13}\ \Omega\ cm.$$

Tabelle II ($E = 100$ Volt, $\vartheta = 15 \cdot 7°$).

t (Min.)	i_1 (Scalenth.)	i_2	$i_1 - i_2$
0	—	—	—
0·25	23	10	13·0
0·5	19	6·5	12·5
0·75	17·5	4·8	12·7
1	17·0	3·5	13·5
2	15·0	2·0	13·0
5	13·5	—	—
10	13·0	0	13·0

Tabelle III ($E = 200$ Volt, $\vartheta = 16 \cdot 0°$).

t	i_1	i_2	$i_1 - i_2$
0	—	—	—
0·25	(45)	23	(22)
0·5	38	14	24
0·75	35	—	—
1	34	8·5	25·5
2	30	—	—
5	26·5	—	—
10	26·2	0	26·2

Tabelle IV ($E = 300$ Volt, $\vartheta = 16 \cdot 6°$).

t	i_1	i_2	$i_1 - i_2$
0	—	—	—
0·25	83	40	43
0·5	63	22	41
0·75	58	16·5	41·5
1	54	13·0	41
2	49	7·0	42
5	44	—	

Tabelle V ($\vartheta = 16 \cdot 6°$, $E = 300$ Volt).

t	i_2 berechnet	i_2 beobachtet
0	71·3	—
0·25	33·6	(40)
0·5	22·0	22·0
0·75	16·4	16·5
1	13·0	13·0
2	7·2	7·0

$$i_2 \text{ (ber.)} = \frac{A}{1+kt}; \quad A = 71 \cdot 3 \quad k = 4 \cdot 48$$

Tabelle VI ($E = 300$ Volt, $\vartheta = 30 \cdot 2°$).

t	i_2 berechnet	i_2 beobachtet
0	115	—
0·25	54	(60)
0·5	35·5	37
0·75	26·4	26·5
1	21·0	21·0
1·5	14·9	15·0
2	11·5	12·0
3	8·6	8·3
5	5·1	5·0
8	3·1	2·9

$$i_2 \text{ ber.} = \frac{A}{1+kt}; \quad A = 115 \quad k = 4 \cdot 48$$

Glaskolben, aus Gerätheglas (Kochkolben), kugelförmig, 10 *cm* Durchmesser; Belegungen: H_2SO_4.

$$\text{Cap.} = 4 \cdot 2 . 10^{-9} \text{ Far.} = 3780 \, cm.$$

Tabelle VII.

$$\vartheta = 15 \cdot 1°, \; E = 400, \; a < 4 \cdot 6 . 10^{-10} \text{ A.}$$

$$W = \frac{E}{a} > 86 . 10^{10} \, \Omega$$

$$\sigma > \begin{cases} 6 \cdot 5 \\ 10 \cdot 3 \end{cases} . 10^{15} \, \Omega \, cm$$

$$\vartheta = 56°, \; E = 50, \; a = 58 . 10^{-10} \text{ A.}$$

$$W = \frac{E}{a} = 0 \cdot 8 . 10^{10} \, \Omega.$$

Tabelle VIII (i_2 nach $E = 1920$ Volt, i_2' nach $E = 400$ Volt).

t	i_2	i_2'	$\frac{i_2}{i_2'}$
0·25	85	18	4·7
0·5	52	11·5	4·5
0·75	39	8	4·9
1	31·5	6·7	4·7
1·5	24·0	5·0	4·8
2	20·0	4·0	5·0
2·5	16·8	—	—
5	9·8	2·0	4·9
8	6·0	—	—

$$t > 0 \cdot 5; \; i = A . t^{-m}$$
$$A = 31 \cdot 5$$
$$m = 0 \cdot 62$$

Analoge Resultate von geringerer Genauigkeit ergaben sich bei anderen Glassorten (Reagenzgläschen, Glasplatte), ferner bei Kautschuk, Glimmer und Guttapercha.

II. Ein wesentlich anderes Verhalten zeigen schlecht leitende Flüssigkeiten. Die darauf bezüglichen Beobachtungsresultate sind an anderer Stelle[1] veröffentlicht. Der Ladungsstrom i_1 nimmt mit der Zeit bis zu einem Grenzwerte a ab, der Entladungsstrom i_2 dagegen ist sehr klein; somit ist die Rückstandsbildung gering, und die Abnahme der Stromstärke beruht auf einer Veränderung (Zunahme) des Widerstandes durch den Stromdurchgang. Die Endwerte a der Stromstärke sind nicht den Werten E der elektromotorischen Kraft proportional, sondern wachsen langsamer als diese, somit wird der Widerstand mit zunehmender Stromstärke größer.

Nach Beobachtungen von Warburg[2] und von Reich[3] beruhen diese Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze auf Beimengungen besser leitender Elektrolyte und können durch »elektrische Reinigung« der betreffenden Substanzen eliminiert werden.

Obwohl auch bei meinen Versuchen (an Toluol, Benzol und Petroleum) Wassergehalt dieser Flüssigkeiten den Hauptantheil an den beobachteten Erscheinungen hatte, glaube ich doch, dass die Möglichkeit vorhanden ist, derartige Anomalien des Leitvermögens auch bei reinen Substanzen zu finden, und dass Herrn Warburg's Ausführungen sich auf die Ionen einer schwach dissociierten schlecht leitenden Flüssigkeit ebenso wie auf die eines verunreinigenden Elektrolyten anwenden lassen.

Mit meinen Beobachtungen übereinstimmende Resultate erhielt auch H. Gädeke.[4]

Bei Commutation der Stromrichtung zeigte sich bei den oben genannten Flüssigkeiten eine starke Zunahme der Stromintensität, die auf unipolaren Charakter der Leitfähigkeit schließen lässt (im Gegensatze zu dem im nächsten Abschnitte erwähnten Verhalten von Papier).

[1] v. Schweidler, diese Sitzungsber., Bd. 109, IIa, S. 964 (1900); Ann. d. Phys., *4*, 1901 und *5*, 1902.

[2] E. Warburg, Wied. Ann., *54*, S. 396 (1895) und Ann. d. Phys., *4*, S. 648 (1901).

[3] M. Reich, Inaug. Dissert., Berlin, 1900.

[4] H. Gädeke, Dissert., Heidelberg, 1901.

III. Besondere Eigenthümlichkeiten des Stromverlaufes zeigte Papier, von dem verschiedene Sorten (gewöhnliches weißes Schreibpapier, weißes Filtrierpapier, Seidenpapier, chlorfreies Papier) untersucht wurden.

Die Leitfähigkeit ist wesentlich vom Feuchtigkeitsgehalte abhängig, wie die Unterschiede zwischen künstlich getrockneten und in Zimmerluft aufbewahrten Proben zeigten, ferner vom Drucke, mit dem die metallischen Belegungen angepresst werden. Immerhin sind bei diesem schlecht definierten und unter wechselnden Bedingungen stehenden Materiale die erhaltenen Resultate qualitativ gleiche.

Die Stromstärke i_1 sinkt (wie bei den schlecht leitenden Flüssigkeiten) mit der Zeit bis zu einem Grenzwerte a, während der Strom i_2 (Entladungsstrom bei Kurzschluss des Condensators) sehr gering ist, so dass Rückstandsbildung und Polarisation wieder von untergeordneter Bedeutung sind.

Die Endwerte a der Stromstärke sind ebenfalls nicht der elektromotorischen Kraft E proportional, wachsen aber — im Gegensatze zum Verhalten der schlecht leitenden Flüssigkeiten — rascher als diese, so dass der Widerstand $W = \frac{E}{a}$ mit steigender Stromstärke abnimmt (vergl. Tabelle IX, X, XI, XIV, XV).

Bei Commutation der Stromrichtung unter sonst ungeänderten Verhältnissen zeigt sich folgende eigenthümliche Erscheinung: Nach länger (über $^1/_2$ Stunde bis zu einigen Stunden) dauernder Einwirkung des Stromes in der Richtung I hat der commutierte Strom (in der Richtung II) zunächst, d. h. unmittelbar nach der Commutation dieselbe Stärke wie der Strom I, nimmt allmählich im Verlaufe von einigen Minuten (2 Minuten bis 30 Minuten in verschiedenen Fällen) bis zu einem Maximum zu, um dann wieder abzunehmen bis zu dem der angewandten elektromotorischen Kraft entsprechenden Grenzwerte. Bei kürzerer Dauer (unter $^1/_2$ Stunde) der Einwirkung des Stromes I dagegen setzt der commutierte Strom II sofort mit einem erheblich vergrößerten Anfangswerte ein und nimmt von Anfang an ab, analog wie es bei den Flüssigkeiten der Fall war. Vergl. Tabelle XII, XIII, XVI.

Nachfolgend sind einige Messungsreihen wiedergegeben (elektromotorische Kraft in Volt, Stromstärke in Scalentheilen (1 pars $= 2 \cdot 28 . 10^{-10}$ Amp.), Zeit in Minuten.

IX. (Weißes Schreibpapier, Dicke circa 70 μ.)

E	*a*
30	70
40	118
50	160

X.

E	*a*
5	14
10	33
30	135
40	188
50	290
60	400
100	1020
150	2150

XI. (Seidenpapier, bei 18° C., 60% relative Feuchtigkeit.)

E	*a*
2	5
4	15
6	27
10	44
15	72
20	106

XII. (Schreibpapier wie IX und X), $E = 40$ Volt.

t	*i*	*t*	*i*
0	—	32·75	103
0·25	110	33	112
1	105	34	139
2	101	35	150
3	98	36	154
5	91	37	152
15	77	38	146
30	71	40	136
32	Commut.	42	127
32	»	45	120
32·25	79	70	80
32·5	94	130	69

XIII. (Schreibpapier wie IX und X.), $E = 30$ Volt.

t	i	t	i
0	—	50	70
34	70	51	69
35	Commut.	52	Commut.
35·5	72	52	»
36	81	52·5	135
36·5	86	53	130
37	91	54	110
38	92	55	100
39	92	95	72
40	90		

XIV. (Chlorfreies Papier.)

E	a
10	6
50	32
100	108

XV. (Weißes Filtrierpapier.)

E	a
50	18
100	41
200	94
300	156

XVI. (Weißes Filtrierpapier), $E = 200$ für $t = 0$; Commutation nach sechsstündigem Durchgange des Stromes in der Richtung I.

t	i	t	i
0	74	15	132
	Commut.	20	136
0·25	84	22	138
0·5	84	30	137
1	89	44	135
10	124		

Die Resultate der Messungen können folgendermaßen kurz zusammengefasst werden:

1. Bei verschiedenen Glassorten ist der Widerstand im stationären Zustande dem Ohm'schen Gesetze entsprechend unabhängig von der elektromotorischen Kraft. Einige bekannte Gesetze der Rückstandsbildung zeigen sich bestätigt; bei höherer Temperatur nimmt die Rückstandsladung zu, aber nicht in gleichem Maße wie die Leitfähigkeit; der zeitliche Verlauf der Rückstandsbildung wird dabei nicht verändert.

2. Bei diversen schlecht leitenden Flüssigkeiten und bei verschiedenen Papiersorten sind Rückstandsbildung und Polarisation von untergeordneter Bedeutung gegenüber den durch den Stromdurchgang hervorgerufenen Widerstandsänderungen. Die stationären Endwerte der Stromstärke sind nicht der elektromotorischen Kraft proportional, die Abweichung erfolgt für die Flüssigkeiten einerseits und für Papier anderseits in entgegengesetztem Sinne.

Bei Papier zeigt sich nach Commutation der Stromrichtung eine eigenthümliche Form des zeitlichen Verlaufes der Stromstärke.

Elektrostatik einer Kugel, welche von einer concentrischen, aus einem isotropen Dielektricum bestehenden Kugelschale umgeben ist

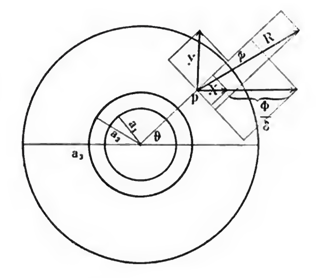
von

Dr. **Anton Lampa.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Es sei (siehe die nebenstehende Figur) der Radius der leitenden Kugel a_1, ferner a_2 der Radius der inneren, a_3 jener der äußeren Begrenzungsfläche des Dielektricums, so dass



$a_1 < a_2 < a_3$. Die Dielektricitätsconstante des Dielektricums sei D, das Potential der influenzierenden Massen, die sämmtlich außerhalb der dielektrischen Schicht liegen sollen, werde mit V bezeichnet. Nachdem das Dielektricum isotrop ist, lässt sich

seine Polarisation durch zwei Oberflächenbelegungen auf seiner inneren und seiner äußeren Oberfläche ersetzen. Die Dichte derselben in irgend einem Punkte werde mit σ_2, bezüglich mit σ_3 bezeichnet, während σ_1 die Dichte der Ladung in einem Punkte der Oberfläche der leitenden Kugel bedeuten soll. Wir wollen voraussetzen, dass die leitende Kugel isoliert sei und das Dielektricum keine ursprüngliche Ladung besitzen soll. Es heiße das Potential im Inneren der Kugel V_i, in dem leeren (oder lufterfüllten, wobei wir die Dielektricitätsconstante der Luft $= 1$ annehmen) Zwischenraume zwischen der Kugel und dem Dielektricum V_L, im Dielektricum V_D, außerhalb desselben V_e. Kennzeichnen wir die von den elektrischen Schichten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ herrührenden Potentiale durch die oberen Indices $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die unteren i und e, je nachdem sie sich auf den Innen- oder Außenraum dieser Schichten beziehen, so haben wir zunächst die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} V_i &= V_i^{\sigma_1} + V_i^{\sigma_2} + V_i^{\sigma_3} + V \\ V_L &= V_e^{\sigma_1} + V_i^{\sigma_2} + V_i^{\sigma_3} + V \\ V_D &= V_e^{\sigma_1} + V_e^{\sigma_2} + V_i^{\sigma_3} + V \\ V_e &= V_e^{\sigma_1} + V_e^{\sigma_2} + V_e^{\sigma_3} + V \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Die Lösung der Aufgabe ergibt sich aus folgenden Gleichungen. Erstens muss das Potential im Inneren der Kugel constant sein:

$$V_i = \text{const.} \qquad 2)$$

Bezeichnen wir ferner einen vom Mittelpunkte der Kugel gezogenen Radiusvector mit r, so müssen folgende Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

An der inneren Begrenzungsfläche des Dielektricums

$$-\left.\frac{\partial V_L}{\partial r}\right|_{r=a_2} + D \left.\frac{\partial V_D}{\partial r}\right|_{r=a_2} = 0, \qquad 3)$$

an der äußeren

$$\left.\frac{\partial V_e}{\partial r}\right|_{r=a_3} - D \left.\frac{\partial V_D}{\partial r}\right|_{r=a_3} = 0. \qquad 4)$$

Es werde ein rechtsdrehendes Coordinatensystem zugrunde gelegt und von diesem zu einem Polarcoordinatensysteme übergegangen, derart, dass

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Der Winkel ω zwischen irgend zwei vom Pole ausziehenden Strahlen mit den Coordinaten ϑ, φ und ϑ', φ' ist dann bestimmt durch

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi').$$

Wir berechnen nun zunächst das Potential V_i für irgend einen Punkt im Inneren der Kugel, welcher die Coordinaten r, ϑ, φ hat. Es ist also $r < a_1$. Das Potential der influenzierenden Massen, die nach unserer Voraussetzung außerhalb des Dielektricums liegen, gestattet sohin die Entwickelung nach Kugelfunctionen:

$$V = X_0(\vartheta, \varphi) + rX_1(\vartheta, \varphi) + r^2X_2(\vartheta, \varphi) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\vartheta, \varphi).$$

Die Dichte σ_1 auf der Kugel ist natürlich eine Function des Ortes, die mit $f_1(\vartheta', \varphi')$ bezeichnet werde (die gestrichelten Buchstaben werden hier verwendet, um die Oberflächenpunkte der Kugel von dem Punkte im Inneren, welchem wir die Coordinaten ϑ, φ zugetheilt haben, zu unterscheiden). Bezeichnen wir das Oberflächenelement der Kugel mit do_1, so haben wir

$$V_i^{\sigma_1} = \int \frac{f_1(\vartheta', \varphi')\,do_1}{\sqrt{a_1^2 - 2a_1 r\cos\omega + r^2}},$$

das Integral über die ganze Kugelfläche erstreckt.

Wir entwickeln in bekannter Weise, wobei zu berücksichtigen ist, dass $r < a_1$, und erhalten

$$V_i^{\sigma_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{r^n}{a_1^{n+1}} \int f_1(\vartheta', \varphi')\,P_n(\cos\omega)\,do_1\right].$$

Es sei das Oberflächenelement der Einheitskugel do; dann ist

$$\int f_1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do_1 = a_1^2 \int f_1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do.$$

Die Function $f_1(\vartheta', \varphi')$ entwickeln wir nun auch nach Kugelfunctionen:

$$f_1(\vartheta', \varphi') = Y_0^1(\vartheta', \varphi') + Y_1^1(\vartheta', \varphi') + Y_2^1(\vartheta', \varphi') + \ldots =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^1(\vartheta', \varphi')$$

und erhalten hiemit

$$\int f_1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do = \sum_{m=0}^{\infty} \int Y_m^1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do.$$

Nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Kugelfunctionen haben alle Integrale, für welche $m \lessgtr n$, den Wert 0, jenes dagegen, in welchem $m = n$, den Wert $\frac{4\pi}{2n+1} Y_n^1(\vartheta, \varphi)$.

Es ist daher

$$\int f_1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do_1 = a_1^2 \cdot \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^1(\vartheta, \varphi)$$

und

$$V_i^{s_1} = 4\pi a_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)\, a_1^{n+1}} Y_n^1(\vartheta, \varphi).$$

In analoger Weise erhält man, wenn

$$f_2(\vartheta', \varphi') = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^2(\vartheta', \varphi')$$

und

$$f_3(\vartheta', \varphi') = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^3(\vartheta', \varphi')$$

gesetzt wird,

$$V_i^{\sigma_2} = 4\pi a_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)a_2^{n+1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi)$$

und

$$V_i^{\sigma_3} = 4\pi a_3^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)a_3^{n+1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi).$$

Es wird daher

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left\{ X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{1}{a_1^{n-1}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{a_2^{n-1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{a_3^{n-1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\}. \qquad 5)$$

V_i soll gemäß Gleichung 2) constant sein für das ganze Innere der Kugel, d. h. für beliebige Werte von r. Folglich müssen die Factoren der einzelnen Potenzen von r jeder für sich verschwinden und wir erhalten auf diese Weise für alle $n > 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a_1^{n-1}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{a_2^{n-1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{a_3^{n-1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) =$$
$$= -\frac{2n+1}{4\pi} X_n(\vartheta, \varphi). \qquad 6)$$

Um die analoge Beziehung für die Y_0 zu erhalten, müssen wir auf die stets giltigen Gleichungen

$$\int f_1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do_1 = \frac{4\pi a_1^2}{2n+1} Y_n^1(\vartheta, \varphi),$$
$$\int f_2(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do_2 = \frac{4\pi a_2^2}{2n+1} Y_n^2(\vartheta, \varphi),$$
$$\int f_3(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, do_3 = \frac{4\pi a_3^2}{2n+1} Y_n^3(\vartheta, \varphi)$$

zurückgehen. Dieselben geben, da $P_0(\cos\omega) = 1$ ist, für $n = 0$:

$$4\pi a_1^2 Y_0^1(\vartheta, \varphi) = \int f_1(\vartheta', \varphi')\, do_1 = \int \sigma_1\, do_1,$$
$$4\pi a_2^2 Y_0^2(\vartheta, \varphi) = \int f_2(\vartheta', \varphi')\, do_2 = \int \sigma_2\, do_2,$$
$$4\pi a_3^2 Y_0^3(\vartheta, \varphi) = \int f_3(\vartheta', \varphi')\, do_3 = \int \sigma_3\, do_3.$$

Addieren wir diese drei Gleichungen, so erhalten wir rechter Hand den Ausdruck

$$\int \sigma_1 do_1 + \int \sigma_2 do_2 + \int \sigma_3 do_3,$$

die Summe aller auf der Kugel und dem Dielektricum sitzenden Ladungen. Nachdem die Gesammtladung durch die Influenz nicht verändert wird, und das Dielektricum, wie wir vorausgesetzt haben, keine Ladung gehabt hat, ist diese Summe gleich der ursprünglichen auf der Kugel sitzenden Ladung, welche mit M bezeichnet werde. Wir haben somit

$$a_1^2 Y_0^1(\vartheta, \varphi) + a_2^2 Y_0^2(\vartheta, \varphi) + a_3^2 Y_0^3(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{4\pi}. \qquad 7)$$

Berechnung des Potentiales V_L für einen Punkt zwischen der leitenden Kugel und dem Dielektricum. Seine Coordinaten seien r, ϑ, φ, wobei jetzt $a_1 < r < a_2$.

Es ist

$$V_e^{\sigma_1} = \int \frac{f_1(\vartheta', \varphi') do_1}{\sqrt{a_1^2 - 2a_1 r \cos\omega + r^2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n}{r^{n+1}} \int f_1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega) do_1.$$

Es war

$$\int f_1(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega) do_1 = \frac{4\pi a_1^2}{2n+1} Y_n^1(\vartheta, \varphi),$$

also

$$V_e^{\sigma_1} = 4\pi a_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n}{(2n+1) r^{n+1}} Y_n^1(\vartheta, \varphi).$$

Ferner ist, analog zu früher:

$$V_i^{\sigma_2} = 4\pi a_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1) a_2^{n+1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi),$$

$$V_i^{\sigma_3} = 4\pi a_3^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1) a_3^{n+1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi).$$

Es wird daher $V_L = V + V_e^{3_1} + V_i^{3_2} + V_i^{3_3}$ dargestellt sein durch den Ausdruck

$$V_L = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r^n X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{a_1^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) + \frac{r^n}{a_2^{n-1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + \frac{r^n}{a_3^{n-1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\}. \tag{8}$$

In ganz ähnlicher Weise sind V_D und V_e zu berechnen.
Für einen Punkt im Inneren des Dielektricums r, ϑ, φ ist $a_2 < r < a_3$, und wir erhalten

$$V_D = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r^n X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{a_1^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) + \frac{a_2^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + \frac{r^n}{a_3^{n-1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\}. \tag{9}$$

Für einen Punkt außerhalb des Dielektricums ist $r > a_3$. Wir benöthigen jedoch den Wert des Potentiales nur in unmittelbarer Nähe der äußeren Oberfläche des Dielektricums, können also den Punkt, für welchen wir es berechnen, so nahe an der äußeren Oberfläche wählen, dass er näher liegt als die nächste der inducierenden Massen. Für das Potential der letzteren bleibt dann die angegebene Entwickelung $V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\vartheta, \varphi)$ giltig, und wir erhalten

$$V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ r^n X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{a_1^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) + \frac{a_2^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + \frac{a_3^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\}. \tag{10}$$

Aus diesen Werten folgt:

$$\frac{\partial V_L}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n r^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(n+1) \frac{a_1^{n+2}}{r^{n+2}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) + n \frac{r^{n-1}}{a_2^{n-1}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + n \frac{r^{n-1}}{a_3^{n-1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\},$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n r^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(n+1) \frac{a_1^{n+2}}{r^{n+2}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) - (n+1) \frac{a_2^{n+2}}{r^{n+2}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + n \frac{r^{n-1}}{a_3^{n-1}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\},$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n r^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(n+1) \frac{a_1^{n+2}}{r^{n+2}} Y_n^1(\vartheta, \varphi) - (n+1) \frac{a_2^{n+2}}{r^{n+2}} Y_n^2(\vartheta, \varphi) - (n+1) \frac{a_3^{n+2}}{r^{n+2}} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\}$$

und weiter

$$\left. \frac{\partial V_L}{\partial r} \right|_{r=a_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n a_2^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(n+1) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{n+2} Y_n^1(\vartheta, \varphi) + n Y_n^2(\vartheta, \varphi) + n \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^{n-1} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\},$$

$$\left. \frac{\partial V_D}{\partial r} \right|_{r=a_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n a_2^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(n+1) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{n+2} Y_n^1(\vartheta, \varphi) - (n+1) Y_n^2(\vartheta, \varphi) + n \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^{n-1} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\},$$

$$\left. \frac{\partial V_D}{\partial r} \right|_{r=a_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n a_3^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(n+1) \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^{n+2} Y_n^1(\vartheta, \varphi) - (n+1) \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^{n+2} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + n Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\},$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial r}\bigg|_{r=a_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n a_3^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(n+1)\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^{n+2} Y_n^1(\vartheta, \varphi) - (n+1)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n+2} Y_n^2(\vartheta, \varphi) - (n+1)\, Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\}.$$

Tragen wir diese Werte in die Gleichungen 3) und 4) ein, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (D-1)\, n a_2^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(D-1)(n+1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n+2} Y_n^1(\vartheta, \varphi) - ((n+1)D+n)\, Y_n^2(\vartheta, \varphi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (D-1)\, n \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\} = 0$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (D-1)\, n a_3^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} \left[-(D-1)(n+1)\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^{n+2} Y_n^1(\vartheta, \varphi) - (D-1)(n+1)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n+2} Y_n^2(\vartheta, \varphi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + ((n+1)+nD)\, Y_n^3(\vartheta, \varphi) \right] \right\} = 0.$$

Diese Gleichungen sind sicherlich erfüllt, wenn jeder Complex von Gliedern mit gleichem Stellenindex für sich verschwindet. Die Berechtigung dieser Zusammenfassung erhellt aus dem Principe der Superposition der Potentiale, lässt sich jedoch auch nachträglich erweisen. Wir erhalten aus diesen Gleichungen unter Hinzuziehung der Gleichungen 6) und 7) folgende zwei Systeme zur Bestimmung der $Y(\vartheta, \varphi)$:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 Y_0^1(\vartheta,\varphi)+a_2^2 Y_0^2(\vartheta,\varphi)+a_3^2 Y_0^3(\vartheta,\varphi) &= \frac{M}{4\pi} \\ \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 Y_0^1(\vartheta,\varphi)+\frac{D}{D-1}\,Y_0^2(\vartheta,\varphi) &= 0 \\ \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 Y_0^1(\vartheta,\varphi)+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 Y_0^2(\vartheta,\varphi)-\frac{1}{D-1}\,Y_0^3(\vartheta,\varphi) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

und für alle $n > 0$:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{a_1^{n-1}}\,Y_n^1(\vartheta,\varphi)-\frac{1}{a_2^{n-1}}\,Y_n^2(\vartheta,\varphi)-\frac{1}{a_3^{n-1}}\,Y_n^3(\vartheta,\varphi) &= \frac{2n+1}{4\pi}\,X_n(\vartheta,\varphi) \\ \frac{n+1}{n}\cdot\frac{a_1^{n+2}}{a_2^{2n+1}}\,Y_n^1(\vartheta,\varphi)+\frac{(n+1)D+n}{n(D-1)}\cdot\frac{1}{a_2^{n-1}}\,Y_n^2(\vartheta,\varphi)-\frac{1}{a_3^{n-1}}\,Y_n^3(\vartheta,\varphi) &= \frac{2n+1}{4\pi}\,X_n(\vartheta,\varphi) \\ \frac{n+1}{n}\cdot\frac{a_1^{n+2}}{a_3^{2n+1}}\,Y_n^1(\vartheta,\varphi)+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{a_2^{n+2}}{a_3^{2n+1}}\,Y_n^2(\vartheta,\varphi)-\frac{(n+1)+nD}{n(D-1)}\cdot\frac{1}{a_3^{n-1}}\,Y_n^3(\vartheta,\varphi) &= \frac{2n+1}{4\pi}\,X_n(\vartheta,\varphi). \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Das Gleichungssystem 11) liefert:

$$\left.\begin{aligned} Y_0^1(\vartheta,\varphi) &= \frac{M}{4\pi a_1^2} \\ Y_0^2(\vartheta,\varphi) &= -\frac{D-1}{D}\,\frac{M}{4\pi a_2^2} \\ Y_0^3(\vartheta,\varphi) &= \frac{D-1}{D}\,\frac{M}{4\pi a_3^2}; \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

das Gleichungssystem 12) wollen wir nicht lösen, da es zu recht complicierten Formen führt, die Lösungen 13) hingegen zu einer Bemerkung benützen. Wie aus dem Systeme 12) ersichtlich ist, erscheint für $n > 0$ jedes $Y_n(\vartheta, \varphi)$ durch $X_n(\vartheta, \varphi)$, welches mit einem Factor multipliciert ist, bestimmt. Sind daher keine inducierenden Massen vorhanden, also alle $X_n(\vartheta, \varphi) = 0$, so verschwinden auch alle $Y_n(\vartheta, \varphi)$ und es bleiben nur die $Y_0(\vartheta, \varphi)$, welche die in 13) angegebenen Werte haben. Hiemit haben wir aber die Lösung für den einfachen Fall, dass unsere Kugel eine Ladung M erhalten hat. Die Dichte auf ihrer Oberfläche ist constant, und zwar $= \frac{M}{4\pi a^2}$.
Die Potentiale haben die folgenden Werte, die wir erhalten, wenn wir die Werte $Y_0^1(\vartheta, \varphi)$, $Y_0^2(\vartheta, \varphi)$, $Y_0^3(\vartheta, \varphi)$ in die Ausdrücke 5), 8), 9) und 10) einsetzen:

$$V_i = M\left(\frac{1}{a_1} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_2} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_3}\right),$$

$$V_L = M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_2} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_3}\right),$$

$$V_D = M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{r} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_3}\right) = M\left(\frac{1}{Dr} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_3}\right),$$

$$V_e = M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{r} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{r}\right) = \frac{M}{r}.$$

Außerhalb des Dielektricums ist also die Wirkung der Kugel die gleiche, als wenn das Dielektricum gar nicht vorhanden wäre. Für $r = a_1$ wird natürlich $V_L = V_i$. Der Factor von M in V_i ist aber der reciproke Wert der Capacität C unserer Kugel. Man erhält

$$C = \frac{1}{1 - \frac{D-1}{D} \cdot \frac{a_1}{a_2}\left(1 - \frac{a_2}{a_3}\right)} \cdot a_1. \qquad 14)$$

Der Factor von a_1, der größer ist als 1, gibt an, um wie viel die Capacität der Kugel durch die umhüllende dielektrische Schicht vergrößert wird.

Wir wollen nun den einfacheren Fall behandeln, dass die dielektrische Schicht der leitenden Kugel unmittelbar anliegt; zu diesem Zwecke brauchen wir bloß die Differenz der Radien $a_2 - a_1$ als unendlich klein ansehen. Wir setzen der bequemeren Schreibweise wegen $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = A$ und erhalten dann aus 13) für diesen Fall

$$\left.\begin{aligned} Y_0^1(\vartheta, \varphi) &= \frac{M}{4\pi a^2} \\ Y_0^2(\vartheta, \varphi) &= -\frac{D-1}{D}\,\frac{M}{4\pi a^2} \\ Y_0^3(\vartheta, \varphi) &= \frac{D-1}{D}\,\frac{M}{4\pi A^2}, \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

während die Capacität jetzt

$$C = a\frac{D}{1+(D-1)\dfrac{a}{A}}$$

wird. Zur Bestimmung der $Y_n(\vartheta, \varphi)$ haben wir die Gleichungen 12) bei Einführung der gewählten Werte $a_1 = a$, $a_2 = a$, $a_3 = A$ zu verwenden. Also:

$$-\frac{1}{a^{n-1}}Y_n^1(\vartheta,\varphi) - \frac{1}{a^{n-1}}Y_n^2(\vartheta,\varphi) - \frac{1}{A^{n-1}}Y_n^3(\vartheta,\varphi) = \\ = \frac{2n+1}{4\pi}X_n(\vartheta,\varphi),$$

$$\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{a^{n-1}}Y_n^1(\vartheta,\varphi) + \frac{(n+1)D+n}{n(D-1)}\,\frac{1}{a^{n-1}}Y_n^2(\vartheta,\varphi) - \\ - \frac{1}{A^{n-1}}Y_n^3(\vartheta,\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi}X_n(\vartheta,\varphi),$$

$$\frac{n+1}{n}\,\frac{a^{n+2}}{A^{2n+1}}Y_n^1(\vartheta,\varphi) + \frac{n+1}{n}\,\frac{a^{n+2}}{A^{2n+1}}Y_n^2(\vartheta,\varphi) - \\ - \frac{(n+1)+nD}{n(D-1)}\,\frac{1}{A^{n-1}}Y_n^3(\vartheta,\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi}X_n(\vartheta,\varphi).$$

Man erhält hieraus

$$\left.\begin{aligned}
Y_n^1(\vartheta, \varphi) &= -\frac{D}{4\pi}\,\frac{(2n+1)^2}{\left\{[(n+1)+nD]+(n+1)(D-1)\left(\dfrac{a}{A}\right)^{2n+1}\right\}}\,a^{n-1}X_n(\vartheta, \varphi)\\
Y_n^2(\vartheta, \varphi) &= \frac{D-1}{4\pi}\,\frac{(2n+1)^2}{\left\{[(n+1)+nD]+(n+1)(D-1)\left(\dfrac{a}{A}\right)^{2n+1}\right\}}\,a^{n-1}X_n(\vartheta, \varphi)\\
Y_n^3(\vartheta, \varphi) &= -\frac{D-1}{4\pi}\,\frac{(2n+1)\left[n+(n+1)\left(\dfrac{a}{A}\right)^{2n+1}\right]}{\left\{[(n+1)+nD]+(n+1)(D-1)\left(\dfrac{a}{A}\right)^{2n+1}\right\}}\,A^{n-1}X_n(\vartheta, \varphi).
\end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Wir setzen der kürzeren Schreibweise halber

$$\left\{[(n+1)+nD]+(n+1)(D-1)\left(\frac{a}{A}\right)^{2n+1}\right\} = N_n$$

und tragen die Werte 15) und 16) in 5), 8), 9), 10) ein; wir erhalten:

$$
\left.\begin{aligned}
V_i &= X_0(\vartheta, \varphi) + M\left(\frac{1}{a} - \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{a} + \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{A}\right)\\
V_L &= X_0(\vartheta, \varphi) + M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{a} + \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{A}\right) +\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi)\left\{ r^n - \frac{D(2n+1)}{N_n}\,\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} + \frac{(D-1)(2n+1)}{N_n}\,r^n - \frac{(D-1)\left[n+(n+1)\left(\frac{a}{A}\right)^{2n+1}\right]}{N_n}\,r^n \right\}\\
V_D &= X_0(\vartheta, \varphi) + M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{r} + \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{A}\right) +\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi)\left\{ r^n - \frac{D(2n+1)}{N_n}\,\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} + \frac{(D-1)(2n+1)}{N_n}\,\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} - \frac{(D-1)\left[n+(n+1)\left(\frac{a}{A}\right)^{2n+1}\right]}{N_n}\,r^n \right\}\\
V_e &= X_0(\vartheta, \varphi) + M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{r} + \frac{D-1}{D}\,\frac{1}{r}\right) +\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi)\left\{ r^n - \frac{D(2n+1)}{N_n}\,\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} + \frac{(D-1)(2n+1)}{N_n}\,\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} - \frac{(D-1)\left[n+(n+1)\left(\frac{a}{A}\right)^{2n+1}\right]}{N_n}\,\frac{A^{2n+1}}{r^{n+1}} \right\}
\end{aligned}\right\} \quad 17)
$$

als Lösung der vorgelegten Aufgabe. Man überzeugt sich leicht, dass diese Ausdrücke sowohl den Bedingungsgleichungen 2), 3) und 4), als auch der weiteren Bedingung genügen, dass das Potential eine stetige Function ist. Man sieht in der That, dass die obigen Ausdrücke die Gleichungen erfüllen:

$$V_L|_{r=a} = V_i;$$
$$V_D|_{r=a} = V_L|_{r=a};$$
$$V_e|_{r=A} = V_D|_{r=A}.$$

Es mögen nun noch einige specielle Fälle in den Hauptzügen behandelt werden, für welche sich die Lösung besonders einfach gestaltet. Erstens der Fall, dass das Feld, dessen Einwirkung die von dem Dielektricum umgebene Kugel ausgesetzt wird, ein homogenes ist. Wir wählen den Mittelpunkt der Kugel zum Pol, die Richtung der Kraftlinien des Feldes zur Polaren (X-Axe) und bezeichnen den Wert des Feldpotentiales in der zu der Richtung der Kraftlinien des Feldes senkrechten Medianebene unserer Kugel mit Φ. Es heiße das constante Potentialgefälle des Feldes $\frac{\Phi}{\delta}$. Das Feldpotential in einem Punkte, welcher die Coordinaten r, ϑ, φ hat, ist dann

$$\Phi - \frac{\Phi}{\delta} r \cos\vartheta.$$

Dieser Ausdruck ist von φ unabhängig, d. h. das Feld ist um die X-Axe symmetrisch, die X_n sind also nur Functionen von ϑ. Wir haben also:

$$V = X_0(\vartheta) + rX_1(\vartheta) + r^2 X_2(\vartheta) + \ldots = \Phi - \frac{\Phi}{\delta} r \cos\vartheta.$$

Dieser Ausdruck muss für beliebige Werte von r gelten, d. h. es ist

$$X_0(\vartheta) = \Phi, \quad X_1(\vartheta) = -\frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta, \quad X_2(\vartheta) = X_3(\vartheta) = \ldots = 0.$$

Mit diesen Werten erhalten wir aus 16):

$$Y_1^1(\vartheta, \varphi) = \frac{D}{4\pi} \frac{9}{\left[(D+2)+2(D-1)\left(\frac{a}{A}\right)^3\right]} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

$$Y_1^2(\vartheta, \varphi) = -\frac{D-1}{4\pi} \frac{9}{\left[(D+2)+2(D-1)\left(\frac{a}{A}\right)^3\right]} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

$$Y_1^3(\vartheta, \varphi) = \frac{D-1}{4\pi} \frac{3\left[1+2\left(\frac{a}{A}\right)^3\right]}{\left[(D+2)+2(D-1)\left(\frac{a}{A}\right)^3\right]} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

und aus 17), wenn wir $\left[(D+2)+2(D-1)\left(\frac{a}{A}\right)^3\right] = N$ setzen:

$$V_i = \Phi + M\left(\frac{1}{a} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{a} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{A}\right)$$

$$V_L = \Phi + M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{a} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{A}\right) - \left\{r - \frac{3D}{N}\frac{a^3}{r^2} + \frac{3(D-1)}{N} r - \frac{(D-1)\left[1+2\left(\frac{a}{A}\right)^3\right]}{N} r\right\} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

$$V_D = \Phi + M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{r} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{A}\right) - \left\{ r - \frac{3D}{N}\frac{a^3}{r^2} + \frac{3(D-1)}{N}\frac{a^3}{r^2} - \frac{(D-1)\left[1+2\left(\frac{a}{A}\right)^3\right]}{N} r \right\} \frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta,$$

$$V_e = \Phi + M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{r} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{r}\right) - \left\{ r - \frac{3D}{N}\frac{a^3}{r^2} + \frac{3(D-1)}{N}\frac{a^3}{r^2} - \frac{(D-1)\left[1+2\left(\frac{a}{A}\right)^3\right]}{N}\frac{A^3}{r^2} \right\} \frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta.$$

Wir untersuchen nun noch den Fall näher, dass die Kugel ursprünglich keine Ladung hatte, also dass $M = 0$. Die Potentiale werden dann, in der einfachsten Form dargestellt:

$$V_i = \Phi$$

$$V_L = \Phi - \frac{3D}{N}\frac{r^3-a^3}{r^2}\frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta$$

$$V_D = \Phi - \frac{3}{N}\frac{r^3-a^3}{r^2}\frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta$$

$$V_e = \Phi - \left\{ r - \frac{(D-1)A^3+(2D+1)a^3}{Nr^2} \right\} \frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta.$$

Dieses sind nun die Gesammtpotentiale, d. h. die Potentiale der Kugel + jenem des Feldes. Wollen wir die Potentiale V_i', V_L', V_D', V_e' der Kugel allein erhalten, so müssen wir von den Gesammtpotentialen das Feldpotential

$$\Phi - \frac{\Phi}{\delta} r \cos \vartheta$$

subtrahieren und erhalten:

$$V_i' = \frac{\Phi}{\delta} r \cos \vartheta,$$

$$V_L' = \left(1 - \frac{3D}{N}\right) r \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta + \frac{3D}{N} \frac{a^3}{r^2} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

$$V_b' = \left(1 - \frac{3}{N}\right) r \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta + \frac{3}{N} \frac{a^3}{r^2} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

$$V_e' = -\frac{(D-1)A^3 + (2D+1)a^3}{Nr^2} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta.$$

Die Dichten der Flächenbelegungen sind gegeben durch

$$\sigma_1 = Y_1^1(\vartheta) = \frac{9D}{4\pi N} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

$$\sigma_2 = Y_1^2(\vartheta) = -\frac{9(D-1)}{4\pi N} \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta,$$

$$\sigma_3 = Y_1^3(\vartheta) = \frac{3(D-1)}{4\pi N} \left[1 + 2\left(\frac{a}{A}\right)^3\right] \frac{\Phi}{\delta} \cos \vartheta.$$

Die Vertheilung der Ladungen ist also eine symmetrische; auf den größten Kreisen, welche durch den Schnitt der Medianebene auf den Kugelflächen entstehen, ist die Dichte $= 0$. Die Gleichungen der Kraftlinien sind mit Hilfe der aufgestellten Formeln leicht abzuleiten. Wir begnügen uns mit der Bestimmung der Richtung der Kraftlinien unmittelbar an der Oberfläche der leitenden Kugel. Wir führen ein rechtwinkeliges Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel, dessen X-Axe parallel zu den Kraftlinien des Feldes; dessen Y-Axe zu denselben senkrecht ist. Das Potential in einem Punkte P im Dielektricum (siehe die Textfigur), welcher die Coordinaten x, y hat, lässt sich dann schreiben:

$$V_b = \left(1 - \frac{3}{N}\right)\frac{\Phi}{\delta}x + \frac{3}{N}\frac{\Phi}{\delta}\frac{3a^3}{r^3}\cdot x,$$

wobei

$$\cos\vartheta = \frac{x}{r}.$$

Dieses Potential gibt eine Kraft || X-Axe:

$$X = -\frac{\partial V_b}{\partial x} = -\left(1 - \frac{3}{N}\right)\frac{\Phi}{\delta} + \frac{3}{N}\frac{\Phi}{\delta}\frac{a^3}{r^3}(3\cos^2\vartheta - 1),$$

und eine Kraft || Y-Axe:

$$Y = -\frac{\partial V_b}{\partial y} = \frac{3}{N}\frac{\Phi}{\delta}\frac{3a^3}{r^3}\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Wir haben somit eine Kraft in der Richtung des Radiusvector:

$$F_r = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta = \left(\frac{6}{N}\frac{a^3}{r^3} + \frac{3}{N} - 1\right)\frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta$$

und eine senkrecht dazu:

$$F_t = -X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta = \left(\frac{3}{N}\frac{a^3}{r^3} - \frac{3}{N} + 1\right)\frac{\Phi}{\delta}\sin\vartheta;$$

die Kraft des inducierenden Feldes gibt || X-Axe die Componente $\frac{\Phi}{\delta}$, || Y-Axe die Componente 0, also || zum Radiusvector die Kraft $K_r = \frac{\Phi}{\delta}\cos\vartheta$, senkrecht dazu die Kraft $K_t = \frac{\Phi}{\delta}\sin\vartheta$. Im Punkte M wirken daher im ganzen || zum Radiusvector $K_r + F_r$, senkrecht dazu $K_t - F_t$. Die Richtung der Resultierenden R ist somit, wenn wir den Winkel zwischen derselben und dem Radiusvector mit φ bezeichnen:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{K_t - F_t}{K_r + F_r} = \frac{r^3 - a^3}{r^3 + 2a^3}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Unmittelbar an der Kugeloberfläche ist $r = a$ zu setzen; es ist also überall $\operatorname{tg}\varphi = 0$, ausgenommen an jenen Stellen,

für welche $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ ist. Für diese erhält der obige Ausdruck die Form $0.\infty$; die Bestimmung desselben[1] für diese Stellen liefert $tg^2 \varphi = 1$; d. h. die Kraftlinien stoßen überall senkrecht auf die Kugeloberfläche, ausgenommen an der neutralen Zone, wo sie unter 45° auftreffen.

Der zweite einfache Fall, der hier kurz berührt werden soll, ist, dass eine einzige inducierende Masse $+e$ in einer Entfernung $\rho > A$ vorhanden ist. Das Potential derselben in einem Punkte r, ϑ, φ ist dann, falls wir die Polaraxe durch die inducierende Masse hindurchlegen:

$$V = \frac{e}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos\vartheta + r^2}} = e \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{P_n(\cos\vartheta)}{\rho^{n+1}}.$$

Es wird demnach

$$X_0(\vartheta, \varphi) = \frac{e}{\rho}, \qquad X_n(\vartheta, \varphi) = \frac{P_n(\cos\vartheta)}{\rho^{n+1}}$$

Die Dichte an der Oberfläche der leitenden Kugel

$$\sigma_1 = Y_0^1(\vartheta, \varphi) + Y_1^1(\vartheta, \varphi) + Y_2^1(\vartheta, \varphi) + \ldots$$

wird hiemit gemäß 15) und 16)

$$\frac{M}{4\pi a^2} - \frac{D}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{\left\{[(n+1)+nD]+(n+1)(D-1)\left(\frac{a}{A}\right)^{2n+1}\right\}} \frac{a^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\vartheta)$$

oder auch

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\Bigg[M + \frac{Dea}{\rho\left[1+(D-1)\frac{a}{A}\right]} -$$

$$- De \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{\left\{[(n+1)+nD]+(n+1)(D-1)\left(\frac{a}{A}\right)^{2n+1}\right\}} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1} P_n(\cos\vartheta)\Bigg].$$

[1] Vergl. diesbezüglich Mascart und Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, I, §. 160 (deutsche Ausgabe S. 139).

Setzt man $D = 1$, so reduciert sich dieser Ausdruck auf den bekannten:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}\left[M + \frac{ea}{\rho} - e\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1} P_n(\cos\vartheta)\right],$$

der sich in der geschlossenen Form

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}\left[M + \frac{ea}{\rho} - \frac{ea(\rho^2 - a^2)}{(\rho^2 - 2a\rho\cos\vartheta + a^2)^{3/2}}\right]$$

darstellen lässt.

Als letzten einfachen Fall behandeln wir den folgenden. Unser System sei von einer leitenden, concentrischen Kugelschale vom inneren Radius R umgeben. Die Kugelschale sei zur Erde abgeleitet. Die Ladung M der Kugel induciert dann eine Ladung $-M$ auf der Kugelschale, deren Potential $= -\frac{M}{R}$ ist. Wir haben dann

$$V = -\frac{M}{R} = X_0(\vartheta, \varphi) + rX_1(\vartheta, \varphi) + r^2 X_2(\vartheta, \varphi) + \ldots,$$

das heißt:

$$X_0(\vartheta, \varphi) = -\frac{M}{R}, \qquad X_1(\vartheta, \varphi) = X_2(\vartheta, \varphi) = \ldots = 0.$$

Es werden somit alle $Y_n(\vartheta, \varphi)$, deren $n > 0$, gleich Null, und es resultiert gemäß 5), 8), 9), 10) und 13):

$$V_i = M\left(\frac{1}{a_1} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_2} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_3} - \frac{1}{R}\right)$$

etc. Für $D = 1$ reduciert sich dieser Ausdruck auf

$$V_i = M\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R}\right),$$

$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R}\right)$ ist somit die reciproke Capacität des aus der Kugel und der Kugelschale gebildeten Condensators.

Von der Durchführung weiterer, allgemeiner und specieller Aufgaben, die sich insgesammt nach dem Vorbilde der hier mitgetheilten Rechnungen erledigen lassen, mag abgesehen werden.

Zu der vorstehenden Untersuchung bin ich durch ein elektromagnetisches Problem — elektrische Schwingungen einer von einer concentrischen dielektrischen Schicht bedeckten Kugel — veranlasst worden, über welches ich in nächster Zeit berichten zu können hoffe.

Zur Meteorologie des Äquators.

Nach den Beobachtungen am Museum Goeldi in Pará

von

J. Hann,
w. M. k. Akad.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Es gibt nur wenige meteorologische Stationen in der Nähe des Äquators, von denen etwas längere, wissenschaftlich verwertbare Beobachtungen der wichtigsten meteorologischen Elemente vorliegen. Bekanntlich bildet ferner gerade das äquatoriale Südamerika die größte Lücke in unseren Kenntnissen über die Meteorologie der Äquatorialregion. Ich war daher sehr erfreut, als ich im October vorigen Jahres ein mehrere Jahrgänge umfassendes meteorologisches Beobachtungsjournal von Pará erhielt, dem etwa einen Monat später auch noch die Barogramme von einigen Jahrgängen und Thermogramme von 6 Monaten (1901) nachfolgten.

Man verdankt dieses alle meteorologischen Elemente umfassende Beobachtungsjournal, das sich über die Periode August 1895 bis August 1901 erstreckt, dem hochverdienten Director des Staatsmuseums für Naturgeschichte und Ethnographie, Herrn Dr. Emil Goeldi, der auch den Meteorologen durch die von ihm veranlassten meteorologischen Aufzeichnungen in der Schweizer Colonie Alpina im Orgelgebirge[1] (bei Rio de Janeiro) und durch eine Abhandlung über das Klima von Rio de Janeiro bekannt ist. Wer aus eigener Erfahrung die

[1] Die Ergebnisse derselben findet man in der Met. Zeitschrift, 1888, S. 408; 1892, S. 475; 1895, S. 393 und 1896, S. 397.

außerordentlichen Schwierigkeiten kennt, aus dem tropischen Südamerika brauchbare, längere Zeit fortgeführte meteorologische Aufzeichnungen zu erhalten, wird Herrn Director Dr. Goeldi ganz besonderen Dank dafür wissen, dass auf seine private und persönliche Initiative hin an dem Staatsmuseum in Pará eine meteorologische Station ins Leben gerufen und mit seltener Ausdauer jetzt schon über 6 Jahre fortgeführt worden ist.

Ich habe natürlich nicht gezögert, dieses wertvolle mir anvertraute Beobachtungsmaterial möglichst allseitig zu bearbeiten, sobald ich dazu Muße finden konnte. Obgleich die Beobachtungen noch fortgesetzt werden, wollte ich doch nicht säumen, das jetzt schon vorhandene Material zu bearbeiten und die Ergebnisse an einem Orte zu veröffentlichen, welcher meiner Wertschätzung des mir überlieferten wissenschaftlichen Materiales entspricht.

Man besaß bisher von Pará keine meteorologische Beobachtungsreihe, die wissenschaftlichen Anforderungen entsprochen hätte, mit Ausnahme der nicht ganz vollständigen meteorologischen Aufzeichnungen von December 1883 bis November 1884 (319 Tage), die durch E. Engelenburg bei Gelegenheit der magnetischen Aufnahme von Nordost-Brasilien von Herrn Dr. van Ryckevorsel ausgeführt worden sind. Alle anderen bisher vorliegenden Beobachtungsergebnisse waren von mehr oder minder zweifelhaftem Werte, wie im nachfolgenden specieller dargelegt werden wird.

Näheres über die meteorologische Station am Museu Paraense, welch letzteres durch ein Decret des Gouverneurs des Staates Pará vom 31. December 1900 dem Organisator und verdienstvollen Leiter desselben zu Ehren die officielle Bezeichnung »Museu Goeldi« erhalten hat, findet man am Schlusse dieser Abhandlung, wo auch die Beobachtungsergebnisse der einzelnen Monate sich zusammengestellt finden.

Vor dem Eingehen in eine allgemeine vergleichende Discussion der Beobachtungsergebnisse mag zunächst die Tabelle Platz finden, in welcher ich in übersichtlicher Weise die Mittelwerte und Extreme der meteorologischen Elemente von Pará zusammengestellt habe.

Resultate der meteorologischen Beobachtungen am Museum Goeldi zu Pará. 1895 bis 1901 (6 Jahre).

1° 27′ S Br., 48° 29′ W. v. Gr. 10 *m* Seehöhe.

	Luftdruck in Millimetern								Temperatur			
	7^h	2^h	9^h	Mittel	Mittlere Monats-u. Jahres-Extreme		Mittlere Schwankung	Tägliche Schwankung 10^h a.—4^h p.	7^h	2^h	9^h	Mittel (7, 2, 9, 9)
Jänner	759·07	57·82	59·00	58·6	761·0	756·4	4·6	2·3	23·8	28·6	24·5	25·4
Februar	59·53	58·37	59·69	59·2	61·4	56·7	4·7	2·5	23·5	28·0	24·2	25·0
März	59·07	57·71	59·16	58·6	61·0	56·0	5·0	2·6	23·8	28·4	24·5	25·3
April	59·55	58·00	59·87	59·1	61·5	56·5	5·0	2·6	24·0	28·8	24·4	25·4
Mai	60·01	58·64	60·27	59·6	62·1	56·6	5·5	2·5	24·0	29·9	24·6	25·8
Juni	60·89	59·49	61·18	60·5	62·9	58·0	4·9	2·6	23·7	30·4	24·6	25·8
Juli	60·83	59·54	61·01	60·5	62·7	58·4	4·3	2·6	23·3	30·5	24·5	25·7
August	60·62	59·41	60·76	60·3	62·5	58·0	4·5	2·7	23·2	30·8	24·6	25·8
September	60·38	59·01	60·47	59·9	62·1	57·5	4·6	2·8	23·3	30·8	24·7	25·8
October	59·53	58·16	59·43	59·0	61·3	56·4	4·9	2·9	23·8	30·6	25·2	26·2
November	58·76	57·42	58·65	58·3	60·5	56·1	4·4	2·8	24·1	30·6	25·4	26·4
December	59·09	57·72	58·85	58·6	60·8	56·3	4·5	2·7	24·1	29·9	25·1	26·0
Jahr	59·78	58·44	59·86	59·36	763·8	755·5	8·3	2·6	23·7	29·8	24·7	25·7

	Temperatur								Relative Feuchtigkeit			
	Mittlere tägliche Extreme		Tägliche Schwankung	Mittlere Monats- u. Jahres-Extreme		Schwankung	Absolute Extreme		7h	2h	9h	Mittel
Jänner	30·3	22·2	8·1	32·0	21·0	11·0	32·4	20·3	98	84	97	94
Februar .. .	29·7	22·1	7·6	31·7	20·9	10·8	32·6	20·3	99	85	97	94
März	29·9	22·5	7·4	31·7	21·3	10·4	32·3	20·3	96	83	96	92
April	30·2	22·4	7·8	31·7	21·4	10·3	32·1	20·7	96	80	95	90
Mai........	30·8	22·5	8·3	32·7	21·3	11·4	33·0	20·2	95	73	95	88
Juni	31·1	22·0	9·1	32·5	21·0	11·5	33·0	20·5	94	66	93	84
Juli	31·1	21·8	9·3	32·2	20·6	11·6	32·8	20·3	96	66	95	86
August	31·1	21·8	9·3	32·0	20·6	11·4	32·5	20·0	97	67	93	86
September ..	31·2	21·5	9·7	32·4	20·0	12·4	32·6	18·1	95	67	92	85
October	31·4	21·5	9·9	32·5	20·1	12·4	33·8	19·8	94	71	91	85
November ..	31·5	21·7	9·8	32·8	20·9	11·9	33·4	19·4	94	70	90	85
December ..	31·1	22·0	9·1	32·7	20·5	12·2	33·5	19·5	96	75	95	89
Jahr	30·8	22·0	8·8	33·2	19·7	13·5	33·8	18·1	96	74	94	88

	Dampfdruck in Millimetern Mittel	Bewölkung 1896 bis August 1901				Regenmenge		Niederschlagstage			Gewittertage	Tage mit starken Winden (6—10)
		7h	2h	9h	Tagesmittel 6 Jahre	Mittel	Mittleres Max. pro Tag	überhaupt	≧ 1 *mm*	≧ 20 *mm*		
Jänner	22·9	5·7	7·6	5·7	6·4	330	46	27·5	22·7	5·0	16·3	2·2
Februar	22·4	6·5	7·8	6·7	7·0	366	52	26·3	23·8	6·8	13·8	1·8
März	22·3	7·0	7·5	7·0	7·2	392	62	28·3	24·8	6·0	17·8	2·0
April	22·1	6·4	7·3	7·1	6·9	360	68	26·5	23·0	6·0	17·7	1·0
Mai	22·2	5·1	6·1	6·8	6·0	271	55	22·5	20·0	4·3	15·9	0·7
Juni	21·2	3·1	5·0	6·5	4·9	158	36	20·8	17·5	1·7	13·3	1·0
Juli	21·6	2·6	4·9	6·3	4·6	163	38	18·8	15·7	2·2	14·6	1·0
August	21·6	1·6	4·7	5·1	3·7	126	33	16·7	12·6	2·2	15·3	1·0
September	21·4	1·7	5·5	4·0	3·5	106	24	17·5	12·8	1·4	14·5	2·2
October	21·6	2·3	6·3	3·0	3·7	86	22	14·7	11·2	0·8	9·9	1·2
November	21·8	2·8	6·2	2·4	3·7	58	18	12·3	8·0	0·8	6·7	1·2
December	22·1	4·5	7·3	4·4	5·1	181	39	21·0	18·3	2·6	14·7	1·2
Jahr	21·9	4·1	6·4	5·4	5·2	2597	82	252·9	210·4	39·8	170·5	16·5

	Mittlere Windstärke			Windrichtungen. Häufigkeit in Procenten								
	7^h	2^h	9^h	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
Jänner	0·9	3·0	0·8	4	22	16	14	3	2	5	6	28
Februar . . .	0·8	3·1	0·6	6	16	21	9	2	2	5	6	33
März	0·9	3·3	0·7	6	18	15	9	2	3	7	10	30
April	0·8	2·9	0·5	3	18	12	9	5	3	7	9	34
Mai	0·9	2·8	0·7	3	20	22	13	5	2	4	3	28
Juni	1·3	2·8	0·9	1	20	30	18	4	2	1	2	22
Juli	1·2	3·0	1·1	0	20	26	26	3	2	1	2	20
August	1·3	3·1	1·2	2	18	23	21	4	2	4	7	19
September . .	1·3	3·2	1·1	2	20	25	21	2	1	3	8	18
October	1·4	3·1	1·6	2	26	22	21	2	2	4	7	14*
November . .	1·4	3·5	1·5	1	25	18	18	3	3	10	10	12*
December .	1·1	3·2	1·2	3	26	17	11	4	2	7	8	22
Jahr	1·1	3·1	1·0	3	21	20	16	3	2	5	7	23

Nicht umsonst wird die außerordentliche Gleichmäßigkeit des Klimas von Pará von allen Reisenden besonders hervorgehoben. Der Temperaturverlauf ist ein überaus gleichmäßiger und regelmäßiger. Nicht bloß die Schwankung der mittleren Monatstemperaturen im Laufe des Jahres ist sehr gering (1·4°), auch von Jahr zu Jahr bleiben die einzelnen Monatsmittel fast ganz gleich, wie die Tabelle am Schlusse dieser Abhandlung zeigt. Die mittlerere Veränderlichkeit der Monatsmittel der Temperatur beträgt in dem nassen Halbjahre December bis Mai 0·31°, in dem trockenen Halbjahre Juni bis November bloß 0·21° (Mittel von je 36 Monaten). Selbst die Mittel für die einzelnen Tageszeiten (Beobachtungstermine), sowie die einzelnen Monatsextreme sind Jahr für Jahr fast dieselben, wie ein Beispiel in der Anmerkung zeigt.[1] Eine eigentliche Trockenzeit fehlt, es regnet das ganze Jahr, allerdings viel stärker in der Regenzeit von Jänner bis Mai. Auch die Windverhältnisse unterliegen im Laufe des Jahres nur geringen Schwankungen.

[1] Z. B. Einzelne Monatsmittel für den August:

	Jahr								Mittlere Abweichung
	1895	1896	1897	1898	1899	1900	1901	Mittel	
7^h...	23·3	23·4	23·4	22·4	23·2	23·5	23·6	23·2	0·29
2^h...	30·7	30·9	31·1	30·3	30·9	30·5	31·1	30·8	0·24
9^h...	24·5	24·1	24·5	24·7	24·9	24·7	25·0	24·6	0·21

Absolute Monatsextreme im August:

	Jahr								Mittlere Abweichung
	1895	1896	1897	1898	1899	1900	1901	Mittel	
Max..	32·5	32·1	32·4	31·8	31·9	31·3	32·3	32·0	0·33
Min..	20·5	21·2	20·8	20·0	20·3	20·6	20·9	20·6	0·30

Ganz dasselbe zeigen auch alle anderen Monate.

Die größten Änderungen der meteorologischen Elemente treten im Laufe des Tages ein. »Es gibt weder Frühling, noch Sommer, noch Herbst«, sagt Bates von Pará, »sondern jeder Tag ist eine Vereinigung von allen dreien. Wie großartig in seinem vollkommenen Gleichgewichte und in seiner Einfachheit ist der Gang der Natur unter dem Äquator!«

Der Charakter des Verlaufes der meteorologischen Erscheinungen zu Pará wird aber erst ins rechte Licht gerückt, wenn man denselben vergleicht mit jenem an einer gleichfalls nahe dem Äquator gelegenen Station in anderer Lage. Als derartige Vergleichsstation habe ich die von dem Verein für Erdkunde und von der Karl Ritter-Stiftung in Leipzig gegründete meteorologische Station an der Westküste Afrikas gewählt, wo der Botaniker Herr Hermann Soyaux mit höchst anerkennenswerter Umsicht, Sorgfalt und Ausdauer die meteorologischen Aufzeichnungen besorgte[1] (1880 bis 1885, 1881 nur Regenmessungen). Diese Station, am Ästuarium des Gabun, liegt Pará fast gerade gegenüber am anderen (östlichen) Ufer des Atlantischen Oceans, und eignet sich daher ganz besonders zu Vergleichen mit Pará. Überdies sind die Ergebnisse dieser wertvollen Beobachtungsreihe, von A. v. Danckelman bearbeitet, nicht entsprechend zur allgemeinen Kenntnis gelangt. Ich habe deshalb die in den »Mittheilungen des Vereines für Erdkunde« in Leipzig (1880, 1883 und 1884) von A. v. Danckelman veröffentlichten Beobachtungsergebnisse der einzelnen Jahrgänge einer neuerlichen Berechnung unterzogen und die mittleren Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammengestellt, welche die Basis für die Vergleichungen mit dem Gange der meteorologischen Elemente zu Pará liefern soll. Die Extreme und weiteren Daten z. B. über den täglichen Gang der meteorologischen Elemente am Gabun findet man in die später folgenden speciellen Erörterungen über die einzelnen meteorologischen Elemente eingefügt.[2]

---

[1] Soyaux war auch Mitglied der Güßfeld'schen Expedition an die Loangoküste und dadurch mit meteorologischen Aufzeichnungen vertraut geworden.

[2] Über die Lage der temporären Station am Gabun wird berichtet: Die Kaffeeplantage des Hauses Woermann & Comp., Hamburg, Ssibange Farm

Am Gabun ist der jährliche Gang der meteorologischen Elemente ein anderer als in gleicher Breite an der Mündung des Amazonenstromes. Der jährliche Temperaturgang ist fast der umgekehrte, die Amplitude größer, 2·7°, zwei Regenzeiten und Trockenzeiten, ganz der tropischen Regel entsprechend, sind gut ausgeprägt vorhanden, die Regenmenge selbst ist aber die gleiche. Die mittlere Bewölkung ist sehr groß, fast 80%, mit entgegengesetztem jährlichen Gange gegen Pará.

Nach dieser kurzen allgemeinen Darstellung will ich zur eigentlichen Aufgabe, der vergleichenden Untersuchung des Ganges der einzelnen meteorologischen Elemente übergehen.

---

lag circa 8 *km* ENE vom Gabun unter circa 0° 25′ N, 9° 35′ E. Der Charakter der Umgebung war von Bächen, Flüssen und Mangrovesümpfen durchsetzter Urwald. Offene Savannen gab es nicht in der Nähe. Die Thermometerhütte war aus Holz- und Schilfstäben construiert, wie seinerzeit jene der Loango-Expedition in Chinchoxo. Nach E hin war der Urwald nur 1000 Schritte, sonst nach allen anderen Richtungen 5000 bis 8000 Schritte entfernt. Der Boden war grasbedeckt. Der Regenmesser befand sich $1^3/_4$ *m* über dem Boden. Im Jahre 1881 wurde die Farm verlegt. Die Lage der neuen Station war nicht wesentlich verschieden von jener der alten. Die Aufstellung und Exponierung der Instrumente, sowie diese selbst waren die gleichen geblieben, so dass, wie Herr v. Danckelman bemerkt, eine wesentliche Änderung der Continuität nicht zu besorgen ist. Das Thermometerhäuschen aus Gitterwerk mit einem sehr hohen, steilen, nach N und S weit vorspringendem Dache, stand auf einem das Terrain überragenden Hügel, circa 100 Schritte vom Wohnhause. In SW von dem Häuschen begann der Wald in 100 Schritten Entfernung. Die Lage dieser Station war demnach etwas freier. Die Beobachtungen begannen hier mit Jänner 1882 und wurden, mit Unterbrechung von August 1883 bis März 1884, bis zum Februar 1885 fortgesetzt. Die Beobachtungen des Jahres 1880 beziehen sich auf die alte Lage. Das Temperaturmittel 1880 war 24·4, Dampfdruck 20·2. Relative Feuchtigkeit 88%. Die entsprechenden Mittel für 1882 (neue Station) waren: 24·5. 20·0 und 87%. Ein Einfluss der Änderung der Localität ist also nicht zu erkennen.

Resultate der meteorologischen Beobachtungen von Soyaux am Gabun zwischen 1880 und 1885.

0° 25′ N Br., 9° 35′ E v. Gr. Seehöhe 20 *m*.

	Luftdruck		Temperatur							
	Mittel	Mittlere Schwankung	7^h	2^h	9^h	Mittel (7, 2, 9, 9)	Mittlere tägliche Extreme		Tägliche Amplitude	Mittlere Monats-Schwankung
Jänner	758·4	5·6	23·5	29·0	24·3	25·3	30·2	22·6	7·6	10·4
Februar	58·0	6·2	23·4	28·7	24·2	25·1	30·5	22·7	7·8	10·8
März	57·8	5·7	23·6	28·8	24·2	25·2	30·1	22·8	7·3	11·6
April	57·8	6·3	24·1	28·9	24·1	25·3	30·3	23·0	7·3	10·8
Mai	58·6	5·3	23·8	28·5	24·1	25·2	29·8	22·8	7·0	10·9
Juni	61·7	4·3	22·5	26·5	22·4	23·5	27·8	20·8	7·0	10·6
Juli	62·2	4·6	20·6	25·9	21·6	22·4	27·1	19·9	7·2	11·7
August	61·4	5·4	21·6	26·2	22·2	23·0	27·6	20·8	6·8	11·5
September .	60·6	4·8	22·8	27·5	23·3	24·2	29·1	22·1	7·0	10·7
October	59·2	5·2	23·1	27·5	23·8	24·5	29·0	22·5	6·5	10·5
November ..	58·5	4·7	23·2	27·4	23·5	24·4	29·1	22·5	6·6	10·0
December ..	58·3	5·1	23·3	28·3	23·7	24·8	29·7	22·9	6·8	11·3
Jahr	759·4	10·7	23·0	27·8	23·5	24·4	29·2	22·1	7·1	16·4

	Dampf-druck	Relative Feuchtigkeit			Mittlere Bewölkung	Tage mit Nebel	Niederschlagstage		Gewitter-tage	Ganz trübe Tage
		7h	2h	Mittel (7, 2, 9)			über-haupt	≧ 1 *mm*		
Jänner	21·4	96	74	89	7·1	22·7	17·3	10·5	10·8	8·3
Februar ..	21·0	96	71	88	7·2	16·9	17·7	11·3	11·5	4·3
März	21·3	96	74	89	7·7	16·7	20·7	16·8	13·2	3·0
April	21·8	95	76	89	7·8	14·7	22·0	14·3	10·5	3·3
Mai	20·9	94	73	87	7·8	10·7	15·8	9·8	6·2	5·0
Juni	18·3	91	72	85	7·9	1·0	2·5	0·8	0·2	9·3
Juli	16·6	90	67	82	8.1	8·0	6·0	0·0	0·2	8·0
August	17·7	90	71	84	8·2	7·0	9·5	3·3	0·0	11·0
September ..	19·0	91	69	83	8·5	6·5	21·7	6·3	1·3	8·3
October	20·2	95	75	87	8·6	15·5	26·3	19·7	8·0	11·0
November ..	20·6	96	76	89	8·5	25·5	25·3	20·0	18·3	7·7
December ..	20·2	96	77	89	7·6	21·0	18·3	15·7	16·7	6·7
Jahr	19·9	94	73	87	7·9	166·2	203·1	128·5	96·9	85·9

Untersuchung der einzelnen meteorologischen Elemente.

I. Luftdruck.

Die Ergebnisse der mir bekanntgewordenen Reihen von Luftdruckbeobachtungen zu Pará mögen hier zunächst in Form von Jahresmitteln, reduciert auf das Meeresniveau, zusammengestellt werden; zunächst ohne Schwere-Correction.

1. Drei Jahre, 1848 bis 1850, bei Buchan, Challenger Report Physics and Chemistry, Vol. II, p. 104 bis 105. Ohne Angabe der Quelle.[1] Jahresmittel im Meeresniveau 29'935 = 760·35. Die Monatsmittel in Form von Abweichungen von diesem Jahresmittel folgen später.

2. Ein Jahr, December 1882 bis November 1883, von Engelenburg. Im Appendix zu Dr. van Ryckevorsel: Magn. Survey of the Eastern Part of Brazil. Amsterdam 1890. Siehe auch: Met. Z. 1891, S. 102. Aneroidablesungen. Das Aneroid, das eine ziemlich große, aber verbürgte Temperatur-Correction hatte, war in Utrecht verglichen worden und zeigte nach der Rückkunft keine Änderung. Die Seehöhe wollen wir zu 10 *m* annehmen (Seehöhe von Pará). Die Correction des Hauptbarometers zu Utrecht (Becker) beträgt —0·4 *mm*, die Höhenreduction auf das Meeresniveau +0·86, die Schwere-Correction auf den Stand eines Quecksilberbarometers +1·96, die Gesammt-Correction also +2·42. Dazu kommt aber wahrscheinlich noch die Schwere-Correction für das Quecksilberbarometer zu Utrecht mit +0·48. Wurde dieselbe bei der Vergleichung nicht berücksichtigt, wie dies fast immer der Fall ist, und das Aneroid bloß auf den Quecksilberstand zu Utrecht reduciert, so stand das Aneroid schon unter 45° (im Meeresniveau) um 0·48 *mm* zu niedrig gegen ein Quecksilberbarometer, und am Äquator daher um 2·44 *mm*. Die wahrscheinlichste Reductionsgröße ist daher +2·90 *mm*. Das corrigierte

[1] A. R. Wallace, A Narrative of Travels on the Amazon and Rio Negro. 1889. Climate p. 289, Plate XII, hat offenbar diese Luftdruckmittel zu seiner graphischen Darstellung benützt.

Jahresmittel (aus 8^h, 10^h a., 2^h, 4^h p. Corr. $+0\cdot07$) beträgt 756·85. Somit ist der auf das Meeresniveau und auf das Quecksilberbarometer reducierte mittlere Luftdruck 759·75.

3. Draenert (Met. Zeitschrift, 1901, S. 513) führt achtjährige Luftdruckmittel für Belem (Pará) an, auf das Meeresniveau reduciert. Das Jahresmittel wäre 759·95. Die Beobachtungstermine sind nicht angegeben.

4. Herrn Dr. E. Goeldi verdanke ich die Mittheilung der Monatsmittel des Luftdruckes im Jahre 1894 (Met. Zeitschrift, 1896, S. 112). Das Jahresmittel ist 759·54. Seehöhe nicht angegeben. Nimmt man 10 *m*, so erhält man 760·4 im Meeresniveau.

5. Dr. Goeldi's Beobachtungsreihe 1895 bis 1901 selbst gibt als Jahresmittel 759·36. Barometer Fueß 1233, Correction in loco unbekannt. Seehöhe des Museums nach directer Messung 10 *m* (über dem Stromniveau bei Pará), Seehöhe des Barometers 12·7 *m*. Dies gibt im Meeresniveau 760·45.

Wir haben somit im Meeresniveau bei Pará:

1848—1850	1882—1883	1895	1895—1901	1861—1868?
760·35	759·75	760·40	760·45	759·95

Nimmt man als wahrscheinlichsten Wert 760·27 *mm*,[1] so erhält man als wahren Luftdruck im Meereniveau bei Pará:

$$760\cdot27-1\cdot96=758\cdot3.$$

Für Guayaquil habe ich seinerzeit als wahrscheinlichsten Wert des Luftdruckes im Meeresniveau 758·0 gefunden,[2] so dass unter dem Äquator der Luftdruck an der West- und Ostküste Südamerikas als ziemlich gleich angenommen werden kann.

Die Daten über den jährlichen Gang des Luftdruckes habe ich in der folgenden kleinen Tabelle in Form von Abweichungen vom Jahresmittel zusammengestellt.

---

[1] Erstes und letztes Mittel gibt 760·15, das zweite und dritte 760·07, beide combiniert mit dem Mittel 1891 bis 1901 erhält man 760·27.

[2] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde. Berlin (1893). Bd. XXVIII, Klima von Quito, S. 113 bis 114.

Jährlicher Gang des Luftdruckes zu Pará.

	1848 bis 1850 3 Jahre	1882 bis 1883 1 Jahr	1861 bis 1868 8 Jahre	1894 1 Jahr	1895 bis 1901 6 Jahre	Mittel [1] (15 Jahre)
Jänner	—1·5	—0·4	—0·2	—1·2	—0·7	—0·7
Februar	—0·3	—1·0	—0·6	—1·4	—0·2	—0·4
März	0·0	—0·1	—0·5	0·7	—0·7	—0·4
April	0·1	—0·7	—0·1	—0·7	—0·3	—0·1
Mai	0·2	0·7	1·0	—0·2	0·3	0·6
Juni	0·6	1·0	0·8	1·2	1·1	0·9
Juli.........	0·9	1·4	0·6	1·6	1·2	0·9
August	1·1	1·9	1·2	1·6	0·9	1·1
September ...	0·9	1·2	0·1	0·8	0·4	0·4
October	—0·1	—0·7	—0·7	—0·3	—0·4	—0·5
November ...	—0·8	—1·9	—0·7	—0·4	—1·0	—0·8
December	—1·2	—1·6	—0·9	—1·0	—0·8	—0·9

Als Monatsmittel des Luftdruckes im Meeresniveau bei Pará können demnach angenommen werden:

Wahre Luftdruckmittel für Pará. 1° 27′ S Br. 700 *mm*+

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
57·6	57·9	57·9	58·2	58·9	59·2	59·2	59·4	58·7	57·8	57·5	57·4*

[1] Ohne 1882 bis 1883 und 1894, Mittel 1861 bis 1868 und 1895 bis 1901 je mit doppeltem Gewichte genommen gegen das dreijährige Mittel 1848 bis 1850.

Es ist von Interesse, damit den Luftdruck unter sehr nahe gleicher Breite am Ostufer des Atlantischen Oceans an der Mündung des Gabun zu vergleichen.

Hier beobachteten die Herren H. Soyaux und Capitän R. Mahnke zu Sibange Farm von Jänner 1882 bis Mai 1883 und von April 1894 bis März 1885. Die benützten Barometer waren an der Seewarte in Hamburg verglichen worden. Es ist demnach wahrscheinlich eine Correction von —0·46 an die Mittel anzubringen. Die Mittel $(7^h+2^h+9^h):3$ kommen wahren Mitteln hinreichend nahe. Die Seehöhe wurde mittels Nivellement gegen den Wasserspiegel des Flusses ermittelt, und es darf die Seehöhe mit hinreichender Genauigkeit hiernach zu 20 *m* angenommen werden. Mit diesen Daten erhalten wir folgende Correctionen auf das Meeresniveau und auf den wahren Luftdruck:

Reduction auf das Meeresniveau .... +1·73;
derselben steht gegenüber Barometer-Correction ... —0·46;
Schwere-Correction .... —1·97;
somit vereinigte Correction .... —0·70.

Dies gibt als wahren Luftdruck im Meeresniveau:

Wahrer Luftdruck an der Mündung des Gabun, 0° 23′ N.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
57·7	57·3	57·1*	57·1*	58·1	60·1	61·5	60·6	59·9	58·5	57·9	57·6

Das Jahresmittel ist 758·6, etwa um 0·3 höher als an der Mündung des Amazonenstromes. Der jährliche Gang ist ziemlich übereinstimmend, nur steigt bei Pará das Barometer schon im März und April, während es hier um diese Zeit erst den niedrigsten Stand des Jahres erreicht. Das Maximum im Juli und August ist aber am Gabun um circa 2 *mm* höher

als bei Pará; die Jahresschwankung beträgt am Gabun 4·4 *mm*, bei Pará bloß 2·0 *mm*.

Die meteorologischen Beobachtungen von einigen Jahren auf der Insel S. Thomé, 0° 20′ N Br., 6° 43′ E v. Gr., ergaben als Luftdruckmittel in 5 *m* Seehöhe 760·0 *mm*; somit reduciert und mit Schwere-Correction versehen 758·5 *mm* wahrer Luftdruck im Meeresniveau (wenn die Barometer-Correction Null ist); das stimmt vollständig mit dem Luftdruck am Gabun. Den niedrigsten Luftdruck hatte der Februar, 756·9, den höchsten der August, 760·1. Jahresschwankung 3·2 *mm* kleiner als am Gabun.[1]

Der jährliche Gang des Luftdruckes ist an beiden Orten jener der südlichen Hemisphäre mit einem Maximum im Juli und August, am entschiedensten aber auf der Ostseite des Atlantischen Oceans, trotz geringer nördlicher Breite.

Der tägliche Gang des Barometers. Herr Dr. E. Goeldi hat mir die Aufzeichnungen eines Richard'schen Barographen von nicht ganz drei Jahrgängen (1899, 1900, 1901) eingesendet. Ich habe davon zwei volle Jahre reducieren lassen, aber nur in zweistündigen Intervallen und absichtlich ohne Anlehnung an die directen Ablesungen am Quecksilberbarometer. Zur Prüfung, ob nicht vielleicht der Wert eines Scalentheiles auf den Autographenpapieren einer Correction bedarf, wurden die reducierten Werte für die Beobachtungstermine 7^h, 2^h und 9^h mit den directen Ablesungen verglichen, wobei sich zeigte, dass wenigstens in dem Jahre (1900), auf welches sich dieser Vergleich bezieht, bei den Ablesungen um 7^h morgens wahrscheinlich die Zeit nicht genau eingehalten worden ist.

Als Mittelwerte für das Jahr ergaben sich:

Amplituden nach den Registrierungen und nach den directen Ablesungen am Quecksilberbarometer.

	Differenz 7^h a.—2^h p.			Differenz 9^h p.—2^h p.		
	Autograph	Ablesung	Verhältnis	Autograph	Ablesung	Verhältnis
Mittel.	1·75	1·34	0·77	1·41	1·42	0·99

[1] Siehe Met. Zeitschrift, Bd. XIV (1879), S. 57, und Bd. XIII, S. 79.

Die Verhältniszahlen der einzelnen Monate zeigen erhebliche Unterschiede. Es wird sich noch zeigen, dass die beobachtete Differenz zwischen 7^h und 2^h jedenfalls zu klein ist und dass man sich an die Differenz 9^h bis 2^h zu halten, also keine Scalen-Correction anzubringen hat.

Täglicher Gang des Luftdruckes zu Pará. Mittel von 2 Jahren.

	Mitternacht	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
Jänner	.40	— ·15	— ·36	·16	·97	1·02
Februar	·48	— ·16	— ·33	·12	·76	1·20
März	·47	— ·20	— ·31	·12	·98	1·21
April	·54	— ·18	— ·32	·08	·88	1·17
Mai	·64	— ·06	— ·29	·07	·76	1·01
Juni	·64	·12	— ·10	·25	·97	1·02
Juli	·68	·20	— ·09	·17	·81	1·06
August	·56	·01	— ·21	·15	·94	1·22
September	·49	— ·09	— ·26	·13	1·02	1·33
October	·34	— ·35	— ·33	·36	1·20	1·45
November	·24	— ·31	— ·31	·38	1·29	1·40
December	·35	— ·19	— ·26	·42	1·20	1·21
	Mittag	**2^h**	**4^h**	**6^h**	**8^h**	**10^h**
Jänner	·40	— ·80	—1·27	— ·91	— ·07	·56
Februar	·47	— ·84	—1·33	— ·94	— ·10	·65
März	·39	—1·09	—1·41	— ·90	— ·05	·74
April	·34	—1·00	—1·38	— ·85	·00	·77
Mai	·32	—1·06	—1·50	— ·84	·12	·82
Juni	·39	—1·03	—1·60	—1·14	— ·14	·65
Juli	·45	— ·79	—1·51	—1·23	— ·26	·52
August	·71	— ·76	—1·50	—1·24	— ·36	·51
September	·68	— ·72	—1·45	—1·25	— ·33	·50
October	·50	— ·84	—1·41	—1·15	— ·29	·56
November	·50	— ·74	—1·41	—1·17	— ·28	·43
December	·50	— ·80	—1·47	—1·22	— ·22	·48

Die Jahresmittel sind:

Mitternacht	2h	4h	6h	8h	10h	Mittag	2h	4h	6h	8h	10h
Pará, 2 Jahre											
·48	—·11	—·26	·20	·98	1·19	·47	—·87	—1·44	—1·07	—·17	·60
Am Gabun, 48 Tage über das Jahr vertheilt											
·53	—·12	—·35	·36	1·32	1·27	·26	—1·08	—1·74	—1·14	·03	·99

In der Ssibange Farm am Gabun hat Soyaux in den Jahren 1880 und 1882 in jedem Monate zweimal zu Anfang und in der Mitte desselben stündliche Ablesungen am Barometer (und am Psychrometer) angestellt, aus welchen sich obige Ergebnisse ableiten lassen. Man sieht wohl, dass der Gang zu Pará und am Gabun derselbe ist, dass aber die tägliche Amplitude an der afrikanischen Küste viel größer ist, als an der von Südamerika. Von der Küste von Niederguinea ist es bekannt, dass die ganztägige Schwankung des Barometers sehr groß ist.

Die nachstehenden Gleichungen für den mittleren Gang des Barometers liefern den klarsten und präcisesten Ausdruck für diese Erscheinung:

Täglicher Gang des Barometers im Jahresmittel.

Pará......... $0·661 \sin(2·3° + x) + 0·888 \sin(149·7° + 2x)$

Am Gabun[1] .. $0·881 \sin(6·9° + x) + 0·953 \sin(152·1° + 2x)$.

Die Phasenzeiten der ganztägigen und der halbtägigen Barometerschwankung sind die gleichen, aber die Amplituden beider sind an der afrikanischen Küste merklich größer, besonders jene der ganztägigen Schwankung. Der Phasen-

[1] Aus den stündlichen Daten berechnet.

winkel der halbtägigen Schwankung zu Pará scheint etwas zu klein zu sein, was auf einen kleinen Uhrfehler zurückzuführen sein dürfte. Es bedingen ja schon 2 Minuten Zeitdifferenz eine Änderung des constanten Phasenwinkels im zweiten Gliede von 1°.

Die folgende Tabelle (S. 634) enthält die harmonischen Constituenten des täglichen Ganges des Barometers zu Pará für die einzelnen Monate, und zwar sowohl die direct erhaltenen, wie die nach 2 Gliedern einer harmonischen Reihe berechneten Werte. Die dabei benützten Gleichungen sind:

$$p_1 = 0\cdot025+0\cdot150 \sin(332\cdot6°+x)+0\cdot017 \sin(57\cdot3°+2x)$$
$$q_1 = 0\cdot647+0\cdot095 \sin(192\cdot1°+x)+0\cdot048 \sin(176\cdot4°+2x)$$
$$p_2 = 0\cdot445+0\cdot073 \sin(252\cdot9°+x)+0\cdot051 \sin(29\cdot1°+2x)$$
$$q_2 = -0\cdot764+0\cdot045 \sin(249\cdot2°+x)+0\cdot075 \sin(76\cdot1°+2x).$$

Aus den mittels dieser Gleichungen berechneten p und q wurden dann die Constanten A_1, a_1 und A_2, a_2 berechnet, welche in der Tabelle enthalten sind.

Über die Winkelconstante A_1 ist weiter nichts zu bemerken, die Constante A_2 ist wohl etwas zu klein (Zeitfehler), zeigt jedoch den bekannten jährlichen Gang, der zum Theile von der Zeitgleichung herrührt.

Die Amplitude der ganztägigen Schwankung ist in den Regenmonaten am kleinsten. Von Jänner bis April fallen 56% der jährlichen Regenmenge, Amplitude a_1 im Mittel 0·560 *mm*, von September bis December dagegen fallen kaum 17%, Amplitude a_1 im Mittel 0·753 *mm*. Die Amplitude der ganztägigen Schwankung ist demnach entschieden von der Witterung abhängig. Nicht so jene der doppelten täglichen Schwankung. Die Amplitude derselben erreicht ihre Maxima zur Zeit der Äquinoctien, ihre Minima zur Zeit der Solstitien. Dass in Pará das Minimum im Jänner ein wenig tiefer ist als im Juli, während sonst selbst in den gemäßigten Zonen das umgekehrte der Fall ist, muss wohl als eine Störung angesehen werden, durch nicht ausgeglichene Fehler in den Registrierungen entstanden.

Die harmonischen Constituenten des täglichen Barometerganges zu Pará.

I. Unmittelbar nach den Beobachtungen berechnet.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Jänner	·017	·552	·372	— ·730	1° 46'	153° 0'	·552	·819
Februar	·032	·548	·450	— ·747	3 20	148 56	·548	·872
März	·040	·590	·395	— ·850	3 53	155 5	·591	·937
April	·108	·537	·407	— ·823	11 22	153 41	·549	·918
Mai	·218	·518	·423	— ·811	22 49	152 27	·562	·914
Juni	·187	·735	·457	— ·738	14 16	148 14	·759	·867
Juli	·126	·720	·535	— ·624	9 56	139 23	·731	·822
August	— ·017	·585	·570	— ·690	358 20	140 26	·585	·895
September ..	— ·073	·720	·552	— ·727	354 12	142 47	·723	·913
October	— ·118	·738	·409	— ·844	350 55	154 9	·747	·938
November ..	— ·161	·760	·380	— ·810	348 2	154 52	·777	·895
December ..	— ·060	·765	·395	— ·778	355 31	153 5	·767	·873
Jahr	·027	·660	·445	— ·762	2 20	149 43	·661	·882

II. Nach Sinusreihen berechnete Werte.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Jänner	— ·030	·630	·400	— ·733	357° 17'	151° 23'	·631	·835
Februar ..	·047	·543	·425	— ·756	4 57	150 39	·545	·867
März	·114	·513	·418	— ·820	12 32	153 0	·525	·920
April	·144	·551	·398	— ·853	14 39	154 0	·569	·941
Mai	·160	·616	·410	— ·809	14 34	153 7	·636	·907
Juni	·143	·661	·469	— ·715	12 13	146 44	·676	·855
Juli	·108	·670	·540	— ·649	9 10	140 14	·679	·843
August ...	·033	·671	·568	— ·668	2 49	139 38	·672	·877
September ..	— ·045	·695	·525	— ·750	355 39	145 0	·697	·916
October	— ·122	·737	·442	— ·821	350 36	151 42	·747	·933
November .	— ·140	·758	·377	— ·823	346 55	155 23	·778	·905
December ..	— ·109	·719	·36[illegible]	— ·771	351 23	154 25	·727	·855
Jahr	·025	·647	·445	— ·764	2 13	149 47	·647	·884

Theilen wir das Jahr in vier Perioden und berechnen für diese sowohl die Amplituden a_2, als auch die auf dieselben Zeiten entfallende mittlere Bewölkung und Regenmenge in Procenten der Jahressumme, so erhalten wir folgenden lehrreichen Vergleich:

	December bis Februar Solstitium	März bis Mai Äquinoctium	Juni bis August Solstitium	September bis November Äquinoctium
Bewölkung ...	6·1	6·7	4·4	3·6
Regenmenge in Procenten ..	34	39	17	10
Amplitude a_2..	·852	·923	·858	·918

Aus dieser Zusammenstellung geht die vollkommene Unabhängigkeit der Größe der Amplitude der doppelten täglichen Barometerschwankung von der Witterung zur Evidenz hervor. Zur Zeit des Frühlings-Äquinoctiums fällt viermal so viel Regen als zur Zeit des Herbst-Äquinoctiums, die Bewölkung ist nahe die doppelte, die Amplituden der halbtägigen Luftdruckschwankungen werden dadurch nicht im geringsten beeinflusst. Ebenso treten die beiden Minima der Amplitude derselben bei sehr verschiedenen Witterungszuständen ein.

Die unmittelbar aus den Beobachtungen berechneten Werte von a_2 lassen sich auch durch die Gleichung ausdrücken:

$$0\cdot889+0\cdot025 \sin(271\cdot0°+x)+0\cdot050 \sin(281\cdot3°+2x).$$

Die doppelte Periode hat eine zweimal größere Amplitude als die einfache.

II. Temperatur.

Die Temperatur von Pará ist bisher zu hoch angenommen worden, wie dies wohl zumeist bei den tropischen Stationen der Fall sein dürfte. Dove nimmt die Temperatur von Pará nach $4^1/_2$jährigen Beobachtungen (Sa., 12, 8p.) zu 27·0° an.

Die angegebenen Beobachtungstermine würden fast ein richtiges Mittel liefern (Correction —0·1°).

Nach den neuen Isothermenkarten in den »Challenger Reports« kommt Pará gar eine Temperatur von rund 82° F. = 27·8° zu. Andere neuere Beobachtungen lieferten auch zumeist über 27·0° (Met. Z. XXXI, 1896, S. 112. Mittel der täglichen Extreme für 1894: 27·1°; Draenert, Klima des Amazonenthales, ebenda XXXVI, 1901, S. 504: 27·4°. Eine mir zugesendete gedruckte Tabelle der Beobachtungsergebnisse im Jahre 1893 würde gar 27·7° liefern als Mittel von »Nacht- und Tagtemperatur« nach Autographen).

Die ersten ziemlich richtigen Temperaturen für Pará lieferten die einjährigen Beobachtungen von Engelenburg, die schon oben citiert worden sind. Jahresmittel aus

$$(6^h+2^h+10^h):3 = 25\cdot8°, \text{ corrigiert } 25\cdot95°.$$

Ich habe in meinem Atlas der Meteorologie bei Pará die Isotherme 26° gezogen, zufällig mit dieser viel später veröffentlichten Temperaturbestimmung übereinstimmend.

Aber erst durch die jüngsten sechsjährigen Temperaturaufzeichnungen um 7^h, 2^h und 9^h von Dr. Goeldi ist die mittlere Temperatur von Pará sichergestellt worden. Das Mittel aus $(7^h+2^h+9^h+9^h):4$ berechnet, welche Combination, wie sich zeigen wird, wahre Mittel liefert, gibt 25·7° als Mittelwärme von Pará. Die älteren Angaben und die Isothermen im »Challenger Report« sind bis zu 2° zu hoch!

Derselbe Fehler hat sich bei den älteren Bestimmungen der Temperatur von Quito herausgestellt. Statt 15·6° (aus 6^h, 2^h, 10^h) oder 13·9° (Mittel 9^h a., 9^h p. 1858) oder 13·5° nach P. Menten (1878 bis 1881) wurde jetzt die Temperatur von Quito bloß zu 12·7° gefunden.

Auch auf der anderen Seite des Atlantischen Oceans unter dem Äquator finden wir in den »Challenger Reports« für das Ästuarium des Gabun als Mittel der täglichen Extreme 78·1° F. = 25·6° angegeben. Das richtige Mittel ist aber bloß 24·4°, um mehr als 1° niedriger.

An anderer Stelle habe ich gezeigt, dass auch für andere Orte in den Tropen die Temperatur zu hoch angegeben

worden ist,[1] so dass namentlich die Isothermen im »Challenger Report« einer Correctur bedürfen. Die Tropen sind da gewiss zu warm.

Die Beobachtungen auf der Insel São Thomé (0° 20′ N Br., 6° 43′ E. v. Gr.) in gleicher Breite mit der Station am Gabun ergaben als Mittel der täglichen Extreme 25·4°. Nach später Folgendem dürfte die Correction dieses Mittels jedenfalls größer als 0·6° sein, so dass das wahre Mittel unter 24·8° anzunehmen, also jenem am Gabun gleich zu setzen sein dürfte. Das Mittel für 9^h a. ist 26·1°, nach Pará corrigiert gibt das 24·6°, doch ist es natürlich sehr fraglich, ob man Pará als Vergleichsstation nehmen darf. Die Temperatur unter dem Äquator an der Westküste Afrikas ist also nicht über 24·5° rund anzunehmen! So weit nördlich erstreckt sich die Abkühlung.

Die Ursache der erwähnten fehlerhaften Bestimmungen der Mitteltemperatur sind schlechte Beobachtungstermine, schlechte Aufstellung der Thermometer und Täuschungen in Betreff der nöthigen Correctionen auf ein wahres Mittel, namentlich jener für die Mittel der täglichen Extreme.

Die neueren Temperatur-Registrierungen zu Pará von Dr. Goeldi, zu Quito von Gonnessiat und die stündlichen Beobachtungen von Soyaux am Gabun haben nun auf dem hier in Betracht kommenden Gebiete die Sachlage aufgeklärt.

Es mögen deshalb zunächst die stündlichen Temperaturen für Pará, für Quito und für die Mündung des Gabun, soweit solche vorliegen, hier zusammengestellt werden. Die Mittel für Gabun sind aus directen Ablesungen am 1. und 15. eines jeden Monates während zweier Jahre (also aus 48 Tagen) berechnet, jene für Quito sind aus ganzjährigen Registrierungen der Temperatur abgeleitet. Bei Quito ist die große Seehöhe zu berücksichtigen (2852 *m*). Diese Höhenlage erklärt die große tägliche Wärmeschwankung, im übrigen ist der tägliche Gang jenem am Meeresniveau zu Pará und am Gabun sehr ähnlich. Das Minimum tritt um 5 bis 6^h morgens ein, das Maximum sehr

---

[1] Z. B. Habanah im »Challenger Report« scheinbar richtig berechnet 25·8, in Wirklichkeit 24·2°. Met. Z., Bd. XXXIV, 1899, S. 505, 506.

bestimmt schon um 1^h p. Zu Quito ist der Temperaturabfall von 1^h bis 2^h sehr rasch (in beiden Halbjahren), sowie in dem Regenmonate April zu Pará.

Für Pará sind die mittleren Maxima und Minima den einzelnen Tagen entnommen, kommen also wahren mittleren Extremen näher. Für Gabun und Quito lagen mir diese Daten nicht vor.

Die Unterschiede im täglichen Gange der Temperatur in Pará in den einzelnen Monaten, sowie gegenüber Gabun sind aus der verschiedenen Bewölkung zu erklären und aus den verschiedenen Regenmengen, die ich aber nur für Pará angeben kann.[1]

---

[1] Die Gleichungen des täglichen Ganges der Temperatur sind:

Pará Trockenzeit.... $3 \cdot 88° \sin(244 \cdot 5° + x) + 1 \cdot 20 \sin(79 \cdot 4° + 2x)$
» Regenzeit ..... $3 \cdot 09° \sin(254 \cdot 6° + x) + 1 \cdot 10 \sin(89 \cdot 9° + 2x)$
» Im Mittel...... $3 \cdot 47° \sin(248 \cdot 9° + x) + 1 \cdot 15 \sin(84 \cdot 5° + 2x)$
Gabun....... $2 \cdot 66° \sin(241 \cdot 2° + x) + 0 \cdot 87 \sin(71 \cdot 2° + 2x)$
» Nov..... $2 \cdot 48° \sin(240 \cdot 9° + x) + 0 \cdot 66 \sin(56 \cdot 1° + 2x)$
Quito........ $5 \cdot 09° \sin(245 \cdot 0° + x) + 1 \cdot 77 \sin(81 \cdot 9° + 2x)$.

Pará und Quito stimmen in den Phasenzeiten vollkommen überein, aber Quito hat größere Amplituden; am Gabun sind die Phasenzeiten um eine halbe Stunde verzögert gegen Pará und die Amplituden sind relativ sehr klein. Pará Regenzeit Jänner bis Mai genommen.

Engelenburg hat zu Pará tagsüber öfters beobachtet. Die Mittelwerte für die einzelnen Tagesstunden sind nach ziemlich natürlichen Jahreszeiten:

Pará (December 1882 bis November 1883).

	Stunde							
	6^h	8^h	9^h	10^ha	2^hp	4^h	10^hp	Mittel ($6, 2, 10^h$)
December bis Februar ...	22·7	25·9	27·4	29·1	30·0	27·4	23·8	25·5
März bis Mai...........	22·8	25·8	27·6	29·0	29·7	27·4	23·8	25·4
Juni bis August.........	22·0	25·8	28·0	30·0	32·9	30·1	24·2	26·4
September bis November .	21·4	26·3	28·5	30·3	32·2	30·0	24·5	26·0
Mittel....	22·2	25·9	27·9	29·6	31·2	28·7	24·1	25·8

Täglicher Gang der Temperatur zu Pará.

1901 bis 1902	Jänner 1902	Febr. 1902	März 1902	April 1901	Mai 1901	Juni 1901	Juli 1901	Aug. 1901	Sept. 1901	Dec. 1901	Mittel	
											Regenzeit Jänner bis Mai	Trockenzeit Juni bis December
Mitternacht	—1·8	—1·9	—1·6	— 1·3	— 1·8	— 2·3	— 2·5	— 2·4	— 2·5	—2·2	— 1·7	— 2·4
1^h	—2·1	—2·2	—1·6	— 1·4	— 2·0	— 2·6	— 2·6	— 2·7	— 2·8	—2·6	— 1·9	— 2·7
2	—2·3	—2·2	—1·9	— 1·5	— 2·1	— 2·8	— 2·9	— 2·9	— 3·1	—3·0	— 2·0	— 2·9
3	—2·5	—2·4	—2·0	— 1·6	— 2·3	— 3·0	— 3·1	— 3·2	— 3·3	—3·2	— 2·2	— 3·2
4	—2·6	—2·5	—2·1	— 1·7	— 2·4	— 3·2	— 3·2	— 3·4	— 3·6	—3·4	— 2·3	— 3·4
5	—2·7	—2·7	—2·1	— 1·8	— 2·5	— 3·3	— 3·3	— 3·5	— 3·7	—3·6	— 2·4	— 3·5
6	—2·8	—2·7	—2·2	— 1·5	— 2·3	— 3·3	— 3·3	— 3·2	— 3·4	—3·6	— 2·3	— 3·4
7	—1·7	—1·8	—1·3	— 0·6	— 0·9	— 2·1	— 2·0	— 1·9	— 1·7	—2·5	— 1·3	— 2·0
8	—0·1	—0·2	—0·2	0·3	0·5	— 0·1	— 0·3	0·0	0·0	—0·4	0·1	— 0·2
9	1·5	1·2	1·3	1·2	1·5	1·2	1·3	1·9	1·9	1·2	1·3	1·5
10	2·7	2·6	2·5	2·4	2·2	2·1	2·7	3·3	2·9	2·9	2·5	2·8
11	3·5	3·4	3·4	3·3	3·1	3·3	3·6	4·2	4·1	3·1	3·3	3·7

Mittag	4·0	3·9	3·7	3·7	3·4	4·1	4·5	4·9	4·3	4·5	3·7	4·5
1h	3·5	4·6	3·5	2·9	3·9	4·4	4·7	5·1	4·3	4·7	3·7	4·7
2	3·0	4·4	3·0	2·2	3·8	4·7	4·8	4·8	4·8	4·2	3·3	4·7
3	2·4	2·8	1·7	1·0	2·8	4·3	4·2	3·5	4·3	3·9	2·1	4·0
4	1·6	1·3	1·2	0·2	1·8	3·5	3·1	2·4	2·9	2·9	1·2	3·0
5	1·0	0·7	0·4	— 0·1	0·4	2·0	1·7	1·0	1·1	1·7	0·5	1·5
6	0·2	0·0	—0·2	— 0·5	— 0·3	0·6	0·5	— 0·1	0·2	0·9	— 0·2	0·4
7	—0·4	—0·9	—0·7	— 0·7	— 0·9	— 0·7	— 0·5	— 1·0	— 0·5	—0·1	— 0·7	— 0·5
8	—0·7	—1·1	—1·0	— 0·8	— 1·2	— 1·1	— 1·3	— 1·2	— 1·0	—0·5	— 1·0	— 1·0
9	—1·0	—1·4	—1·2	— 1·0	— 1·4	— 1·6	— 1·6	— 1·5	— 1·4	—0·7	— 1·2	— 1·4
10	—1·3	—1·5	—1·2	— 1·1	— 1·5	— 1·9	— 2·1	— 1·8	— 1·8	—1·5	— 1·3	— 1·8
11	—1·5	—1·6	—1·5	— 1·2	— 1·6	— 2·2	— 2·4	— 2·1	— 2·1	—2·3	— 1·5	— 2·2
Mittleres Max. .	4·7	5·1	4·8	4·6	4·7	4·9	5·2	5·2	5·1	5·0	4·8	5·1
Mittleres Min. .	—2·9	—2·9	—2·4	— 2·0	— 2·8	— 3·5	— 3·6	— 3·7	— 3·7	—3·8	— 2·6	— 3·7
Differenz . . .	7·6	8·0	7·2	6·6	7·5	8·4	8·8	8·9	8·8	8·8	7·4	8·8

	April	Mai	Juni	Juli	August	September[1]	Mittel	Gabun
Mittlere Bewölkung								
7^h	6·6	5·7	2·9	3·1	1·1	(1·3)	3·4	8·6
2^h	8·1	6·1	3·9	4·8	4·9	(3·2)	5·2	8·1
^{h}	8·5	7·7	4·9	6·0	4·2	(1·1)	5·4	7·1
Mittel ...	7·7	6·5	3·9	4·6	3·4	(1·9)	4·7	7·9
Regenmenge	434	280	161	160	96	—	—	—
Tägliche Temperaturschwankung								
Amplitude ..	6·6	7·5	8·4	8·8	8·9	8·8	8·1	5·8

Der tägliche Wärmegang im April (1891) zu Pará und jener am Gabun hat bei nahe gleich starker mittlerer Bewölkung auch die größte Ähnlichkeit: das nächtliche Minimum ist sehr abgeschwächt, ebenso das Maximum bei Tag. Der rasche Abfall der Temperatur zu Pará im April (1901) von Mittag auf 1^h ist in dem starken Regen gleich nach Mittag begründet. In den folgenden Monaten erfolgt der Eintritt der Gewitter und Regen meist schon später.

Der tägliche Gang der Bewölkung ist zu Pará und am Gabun verschieden, an letzterem Orte nimmt die Bewölkung vom Morgen zum Abend ab, zu Pará verhält es sich umgekehrt. Vielleicht ist deshalb die nächtliche Temperatur-Depression am Gabun größer als zu Pará im April (1901).

Den eigenthümlichen Charakter des täglichen Wärmeganges zu Pará (beim Übergange der Regenzeit in die Trockenzeit) illustrieren einige Reproductionen der Aufzeichnungen des Thermographen. Zur Erläuterung sind denselben Auszüge

[1] Bewölkung nicht für 1901, sondern allgemeines Mittel.

aus den directen Ablesungen und Witterungsnotizen beigegeben. Beim Vergleiche der Autogramme mit den Ablesungen ist zu beachten, dass die Einstellung des Thermographen nicht immer genau war, was aber auf den täglichen Gang keinen Einfluss nimmt. Besondere Beachtung verdient die große Beständigkeit der Temperatur bei Nacht, die nächtliche Wärmeausstrahlung tritt in der dampfgesättigten, trüben Atmosphäre sehr wenig in Wirksamkeit.

Erläuterung der Temperaturcurven durch Auszüge aus dem Beobachtungsjournal.

Pará 1891.

Juni	Temperatur			Feuchtigkeit in Procenten			Bewölkung			Regen gemessen um 7ʰ morgens
	7ʰ	2ʰ	9ʰ	7ʰ	2ʰ	9ʰ	7ʰ	2ʰ	9ʰ	
11	23·0	29·0	24·2	100	79	98	5	4	0	42·8
12	23·8	30·6	25·8	99	70	94	2	2	0	0·5
13	24·2	31·2	25·0	98	68	100	1	3	0	0·0
14	23·8	31·6	24·4	100	68	100	1	2	10	4·5
15	24·6	30·0	24·6	100	76	100	8	4	10	10·8
16	24·2	31·2	26·2	100	63	92	0	2	0	9·0
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	24·4	28·2	22·4	100	89	100	8	5	10	0·5
19	22·9	30·2	23·4	100	73	99	6	4	10	34·3
20	23·6	30·4	24·2	100	70	100	3	2	5	1·0
21	23·4	30·8	24·6	100	70	96	1	2	0	1·7
22	23·8	31·2	25·8	99	63	94	0	3	4	0·0
23	24·0	31·6	26·4	100	58	91	0	1	0	0·0

Witterung:

11. K 2^{h} a.? ● $1^{h}\,10^{m}$ p., 4^{h} p.
13. ● $7^{h}\,45^{m}$ bis $8^{h}\,5^{m}$ p. < $6^{h}\,50^{m}$ bis 9^{h} p.
14. ● $6^{h}\,30^{m}$ bis $7^{h}\,50^{m}$ p. T. $7^{1}/_{2}{}^{h}$ p. ● $9^{h}\,15^{m}$ p.
15. T. $1^{h}\,10^{m}$ bis 2^{h} p. ● $4^{h}\,30^{m}$ p., $6^{h}\,10^{m}$ bis $8^{h}\,20^{m}$. T. $6^{h}\,20^{m}$ bis 9^{h}.
18. ● $5^{h}\,30^{m}$ a., 1^{h} p. T. $4^{h}\,20^{m}$ bis $5^{h}\,10^{m}$ p. ● $7^{h}\,30^{m}$ bis 9^{h} p. K $7^{h}\,30^{m}$ bis 9^{h} p.
19. ● $4^{h}\,10^{m}$ bis $4^{h}\,30^{m}$ p., 5^{h} bis $6^{h}\,40^{m}$ p. K $4^{h}\,10^{m}$ p. ● $9^{h}\,30^{m}$ p.
20. T. $5^{h}\,20^{m}$ p. ● $5^{h}\,30^{m}$ bis 7^{h} p.
23. < $6^{h}\,40^{m}$ p. — (Für den 16. fehlen Notizen).

Curven des täglichen Ganges der Temperatur zu Pará.

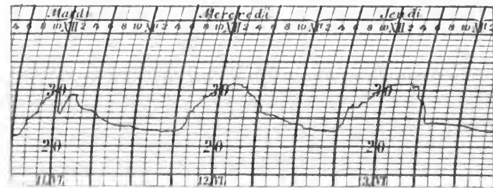


Fig. 1 (vom 11. bis 13. Juni 1891).

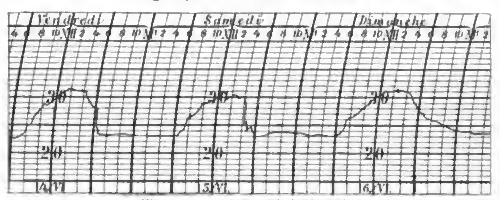


Fig. 2 (vom 14. bis 16. Juni 1891).

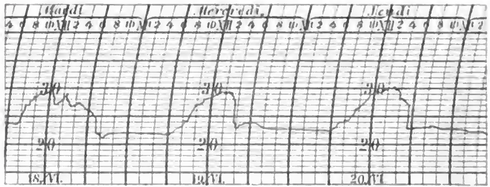


Fig. 3 (vom 18. bis 20. Juni 1891).

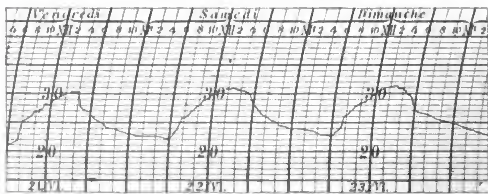


Fig. 4 (vom 21. bis 23. Juni 1891).

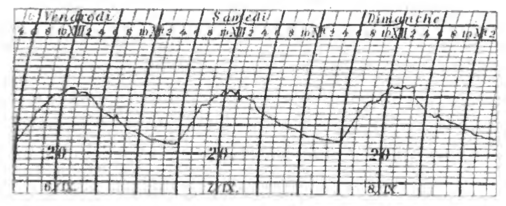


Fig. 5 (vom 6. bis 8. September 1901).

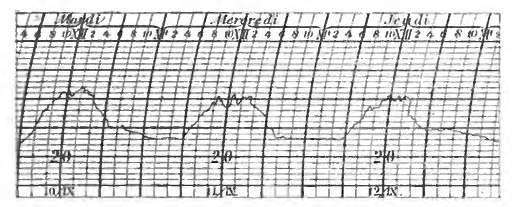


Fig. 6 (vom 10. bis 12. September 1901).

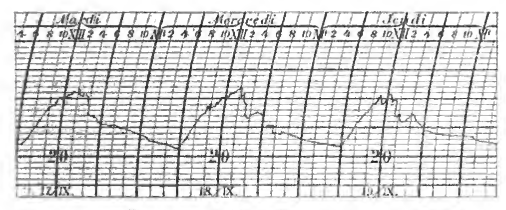


Fig. 7 (vom 17. bis 19. September 1901).

Der 16. Juni und die Tage vom 21. bis 23. Juni zeigen den Temperaturgang an regenlosen Tagen. Vom September, der schon zur Trockenzeit gehört, folgen auch einige Proben des täglichen Temperaturganges. Leider fehlt mir von diesem Monate das Beobachtungsjournal, so dass ich die directen Ablesungen und die Witterung nicht mittheilen kann.

Aus den Stundenmitteln der Temperatur ergibt sich, dass das Mittel aus $(7^h+2^h+9^h+9^h):4$ berechnet, zu Pará und am Gabun (also an der Küste) fast genau ein wahres Mittel vorstellt; zu Quito ist es aber etwas zu niedrig.

Correction des Mittels 7, 2, 9, 9 auf ein wahres Mittel.

Pará								Gabun	Quito
						Mittel			
April	Mai	Juni	Juli	August	September	Regenzeit	Trockenzeit		
—0·1	0·0	—0·1	—0·1	0·0	0·1	+0·1	0·0	0·05	+0·30

In Quito ist die Correction erheblich wegen des raschen Abfalles der Temperatur von 1^h auf 2^h (7^h, 1^h, 9^h, 9^h gibt fast ein genaues Mittel).

Für Quito ist das Mittel $(7^h+2^h+9^h):3$ richtiger (Correction —0·2), combiniert mit $(7^h+2^h+9^h+9^h)$, gibt es fast genau ein richtiges Mittel. Für die regenreichen Niederungen am Äquator ist aber das Mittel aus $(7^h+2^h+9^h+9^h):4$ zu berechnen.

Von besonderem Interesse ist es nun, das Mittel der täglichen Extreme mit dem wahren Mittel zu vergleichen, weil wir so häufig auf das Mittel der täglichen Extreme angewiesen sind. Man nimmt gewöhnlich an, dass dieses Mittel um 0·3° bis höchstens 0·5° zu hoch ist und corrigiert damit.[1]

Es zeigt sich aber, dass diese Correction in dem betrachteten Klimagebiete viel zu klein ist, weil die nächtliche Temperaturdepression gering ist, aber lange dauert, dagegen erhebt sich das Maximum um Mittag viel höher über den Mittelwert, aber die positive Abweichung dauert nicht lange.

[1] Siehe auch J. Valentin, Der tägliche Gang der Lufttemperatur in Österreich, S. 221. Denkschriften der Wiener Akad., Bd. 73 (1901). Für die Hochstationen ist die mittlere Correction nahezu Null, sonst schwankt sie zwischen —0·2 bis —0·5, örtlich ist sie sogar positiv.

Unsere Tabelle zeigt zunächst, dass dort, wo die Extreme den Registrierungen der einzelnen Tage entnommen sind, die Correctionen sich sehr groß herausstellen, und zwar im allgemeinen umso größer, je kleiner die tägliche Amplitude, d. h. je weniger extrem die nächtliche Abkühlung.

Pará. Correction des Mittels der täglichen Extreme.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	December	Mittel
Correction neg.	0·9	1·1	1·2	1·3	1·0	0·7	0·8	0·7	0·7	0·6	0·9
Tägl. Amplitude	7·6	8·0	7·2	6·6	7·5	8·4	8·8	8·9	8·8	8·8	8·1

Für Gabun und Quito können die mittleren Extreme nur dem periodischen Gange entnommen werden, fallen deshalb zu klein aus und damit auch die Correctionen. Für Gabun erhalten wir als Correction —0·5°, für Quito —0·8°.

Größer fallen aber auch hier die Correctionen aus, wenn man sie aus den Ablesungen der Max.-Min.-Thermometer berechnet, also so, wie dies für praktische Zwecke allein richtig ist. Wir wollen ja gerade jene Correctionen erfahren, welche an die Mittel aus den Aufzeichnungen der Max.-Min.-Thermometer anzubringen sind, wobei wir Instrumentalfehler als ausgeschlossen betrachten.[1]

Der Vergleich der aus $(7^h+2^h+9^h+9^h):4$ gebildeten, also (hier) wahren Mitteln gleichkommenden Temperaturmittel mit den Mitteln der täglichen Extreme lieferte nun folgende Correctionen.

[1] Von der meteorologischen Station am Gabun heißt es: Alle Thermometer sind vor ihrem Abgange nach Afrika mit Normalthermometern verglichen worden und auch nachträglich noch mittels eines nachgesendeten Normalthermometers von Herrn Soyaux auf ihre unveränderte Correction hin geprüft. Mittheilung des Vereines für Erdkunde zu Leipzig. 1880, S. 2.

Correctionen des Mittels der täglichen Extreme auf ein wahres Mittel.

Aus zwei und drei Jahrgängen berechnet.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
Pará (2 Jahre)												
-1·1	-1·2	-1·1	-1·0	-1·0	-1·0	-0·9	-0·9	-0·7	-0·6	-0·6	-0·6	-0·9
Gabun (3 Jahre)												
-1·2	-1·3	-1·2	-1·2	-1·1	-1·0	-1·0	-1·1	-1·2	-1·2	-1·2	-1·2	-1·2

In den Regenzeiten, bei kleinen täglichen Schwankungen, sind die Correctionen am größten, in den Trockenzeiten (Pará September bis December, am Gabun Juni bis August) am kleinsten. Die Station mit größerer Bewölkung (Gabun) hat auch eine größere Correction; die relativ (für die Äquatorialregion) heiteren Monate September bis December zu Pará haben die kleinsten Correctionen.

Auch für Quito konnte ich, nachdem jetzt stündliche Beobachtungen vorliegen, die Correctionen für das Mittel der täglichen Extreme berechnen. Man findet sie ebenso groß, wie für Pará und die Station am Gabun.

Correction des Mittels der täglichen Extreme für Quito (2 Jahre).

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
-1·3	-1·2	-1·2	-1·2	-1·1	-1·1	-1·2	-1·3	-1·2	-1·2	-1·3	-1·3	-1·2

Diese Correctionen sind demnach sogar noch etwas größer als die für Gabun und Pará, stimmen aber sonst vortrefflich mit letzteren. Der hohe Betrag dieser Correctionen ist sehr überraschend. Man kann sagen, dass in diesem Klimagebiete das Mittel der täglichen Extreme um 1·0 bis 1·2° zu hoch ist, also um 0·6 bis 0·8° höher, als man bisher angenommen hat.

Man ersieht daraus, wie sehr die Temperaturmittel der Tropen einer Revision bedürfen und dass viele der jetzt für die Tropen aufgestellten Temperaturmittel bedeutend zu hoch sein dürften.

Wegen der starken localen Verschiedenheit der Correction des Mittels der täglichen Extreme wird man nach Möglichkeit diese Mittel zu vermeiden suchen müssen.[1] Die Warnung ist nöthig, denn es werden vielfach die Mittel der täglichen Extreme jenen aus den Terminbeobachtungen vorgezogen.[2]

Einfluss der Aufstellung der Thermometer. Derselbe ist natürlich in den Tropen häufig Ursache zu hoher Temperaturmittel. Zwei Beispiele aus dem hier behandelten Klimagebiete sind darüber besonders lehrreich, da die Angabe

---

[1] An der äquatorialen Ostküste Afrikas, allerdings in südlicheren Breiten als die hier in Betracht gezogenen, weicht z. B. das Mittel der täglichen Extreme nicht mehr ab von einem wahren Mittel, als man bisher durchschnittlich angenommen. Dar-es-Salâm, 6° 48′ S Br., gibt als Correction —0·3°; Tanga, 5° 4′ S Br., auch —0·3° (das Maximum tritt an beiden Orten schon um 1^h p. ein); in Kwai, 4° 45′ S Br., 1610 *m* Seehöhe, beträgt die Correction kaum —0·4° (das Maximum tritt hier schon um Mittag ein). Man sieht, dass man die obigen Ergebnisse nicht zu sehr verallgemeinern darf. — Zu Assuncion, Paraguay, 25° 17′ S Br., beträgt die Correction des Mittels der täglichen Extreme:

Jänner bis März	—0·7°
September bis December ..	—0·4°
Im Jahresmittel	—0·6°,

ist demnach auch erheblich größer, als man hätte annehmen mögen (Met. Zeitschrift, 1902, S. 131).

[2] So hat z. B. Herr Buchan in den »Challenger Reports« für Gabun das Mittel der täglichen Extreme 78·1° = 25·6° dem von Danckelman berechneten Mittel aus $(7^h+2^h+9^h+9^h):4$ vorgezogen, das nur 24·4° beträgt. Ersteres ist aber um mindestens 1° zu hoch.

sehr guter Termine von vorneherein über die Richtigkeit der Mittel kaum einen Zweifel zu gestatten scheint.

Im »Annuaire de la Soc. Mét. de France«, Tome XXIX (1881), p. 123, theilte Dr. Borius die Ergebnisse meteorologischer Beobachtungen an der Mündung des Gabun mit, angestellt von Dr. Vincent, welche sonst volles Vertrauen beanspruchen dürfen.[1] Die Beobachtungstermine waren 6^h, 2^h, 9^h, also sehr günstig; das hieraus abgeleitete Temperaturmittel ist 26·2°, die Correction ist nach obigen stündlichen Beobachtungen Null. Das Mittel ist aber trotzdem 2° höher als die von Soyaux gefundene Mitteltemperatur. Was ist da die Ursache? Herr v. Danckelman hat sie schon aufgewiesen durch Vergleich der Mittel für die Beobachtungstermine.

	Temperatur		Mittel	Jahr
	6^h	7^h	2^h	9^h
Dr. Vincent.....	24·8	(25·6)	27·8	25·9
Soyaux	—	22·9	27·8	23·5

Es ist demnach bei Dr. Vincent die Morgen- und Abendtemperatur um circa 2 bis 3° zu hoch — die Temperatur um 2^h nachmittags stimmt. Die Thermometer von Dr. Vincent waren offenbar zu sehr geschützt aufgestellt, so dass die nächtliche Abkühlung fehlte. Um Mittag, bei lebhafterem Winde, gaben die Thermometer richtigere Lufttemperatur.

Ganz dasselbe muss auch bei den Beobachtungen unter Leitung des P. Menten in Quito der Fall gewesen sein. Die Beobachtungstermine waren sehr gut, 6^h, 2^h, 10^h. Das daraus berechnete Mittel stellt sich aber trotzdem zu hoch heraus gegen spätere Beobachtungen am selben Observatorium. Das Temperaturmittel (1878 bis 1881) von P. Menten ist 13·5°, das von Col. Martinez (1895 bis 1896) 12·8°, das neueste nach Gonnessiat (1900 bis 1901) 12·7°. Differenz also nahe 0·8°. Ein Vergleich der Temperaturen zu den Beobachtungszeiten klärt diese Differenz ganz wie im vorigen Falle auf:

[1] Auszug in Met. Zeitschrift, XVII, S. 144.

	Mittel für					Differenz
	6h	7h	2h	9h	10h	2h—7h
P. Menten	9·8	(11·6)	17·9	—	12·3	6·3
Martinez	—	10·0	18·3	10·9	—	8·3
Gonnessiat	—	9·8	18·3	10·8	10·3	8·5

Man sieht, die Beobachtungsergebnisse von Martinez und Gonnessiat stimmen vortrefflich, dagegen sind die Mittel für die Morgen- und Abendablesung bei P. Menten um circa 2° zu hoch, die Mittagstemperatur ist dagegen etwas zu niedrig. Die Thermometer waren demnach bei P. Menten sicherlich zu geschützt aufgestellt,[1] der natürlichen nächtlichen Abkühlung zu wenig zugänglich.

Auch diese zweite Fehlerquelle ist in der Richtung einer Erhöhung der Temperatur wirksam und ist eine weitere Ursache der Annahme zu hoher Temperatur in den Tropen.

Der jährliche Gang der Temperatur. Die Monatsmittel der Temperatur zu Pará unterliegen im Laufe des Jahres nur sehr geringen Änderungen, die Jahresschwankung beträgt nur 1·4°, während die mittlere tägliche Schwankung 8·8° erreicht. Die niedrigste Temperatur herrscht zu Beginn des Jahres, die höchste zu Ende desselben; von Mai bis September ist die mittlere Temperatur geradezu constant. Ein äquatorialer Gang der Wärme ist also zu Pará nicht vorhanden, das Maximum tritt beim zweiten Zenitstande der Sonne (der mit der Trockenzeit zusammenfällt) ein, auf den ersten Zenitstand fällt nahezu das Minimum. Die Regenvertheilung bestimmt hauptsächlich den jährlichen Wärmegang.

Ganz anders ist der jährliche Wärmegang auf der anderen Seite des Atlantischen Oceans unter dem Äquator am Gabun. Um denselben besser zu fixieren, will ich auch andere Beobachtungsreihen vom Gabun verwenden. Die schon erwähnte von Dr. Vincent lässt sich, wie sich zeigen wird, zu diesem Zwecke auch herbeiziehen, dann auch eine dreijährige Reihe

[1] Ob nicht auch Nachlässigkeit in der richtigen Einhaltung der Ablesetermine, muss dahingestellt bleiben. (Täglicher Barometergang fehlt oft.)

1896 bis 1898 zu Libreville, Französisch-Congo (0° 23′ N Br., 9° 26′ E v. Gr., Seehöhe 62 *m*). Mittel der täglichen Extreme.[1]

Der jährliche Gang der Temperatur in dieser Reihe stimmt gut mit jener von Soyaux, so dass es wohl gestattet ist, beide Reihen zu vereinigen.

Jährlicher Gang der Temperatur am Gabun.

a... Soyaux, 4 Jahre;
b... Libreville, 3 Jahre;
c... ebenda, Dr. Vincent, 1 Jahr.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
a....	0·9	0·7	0·8	0·9	0·8	-0·9	-2·0	-1·4	-0·2	0·1	0·0	0·4
b....	0·6	0·9	1·1	1·2	0·7	-0·9	-1·8	-1·4	-0·7	-0·3	-0·1	0·4
c....	0·8	0·7	0·2	0·9	1·0	-0·8	-1·1	-1·0	-0·1	-0·1	-0·1	-0·1

Die Reihe *c* wollen wir nicht weiter verwenden, die beiden ersten lassen sich aber vereinigen; das Resultat folgt später (S. 654) im Vergleiche mit Pará.

[1] 1896 bis 1897 inclusive. (Pharmacie) zu hoch, Mittel 26·8°, dagegen 1898 (Neues Hospital), Mittel 25·6, also corrigiert nach obigen 24·4° etwa, was genau mit dem Ergebnisse von Soyaux übereinstimmt! Somit gute Aufstellung. Merkwürdigerweise ist die tägliche Amplitude in beiden Reihen die gleiche und beträgt im Mittel der drei Jahre:

Mittlere tägliche (unperiodische) Temperaturschwankung zu Libreville.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
7·7	7·5	8·7	8·8	8·2	8·8	8·5	8·3	7·7	7·6	7·8	8·1	8·1

Die Amplituden sind kleiner als zu Pará und bei Soyaux.

Im Inneren des belgischen Congostaates liegen zwei Orte ganz nahe dem Äquator, deren jährlichen Wärmegang wir auch zum Vergleiche herbeiziehen wollen. Es sind dies: Equateurville, 0° 2½′ N Br., 18° 15′ E v. Gr., Seehöhe 320 *m*, 1891 bis 1892, 20 Monate. Mittel der täglichen Extreme 24·9°. Dann Liranga, 0° 40′ S Br., 17° 38′ E v. Gr., Seehöhe 320 *m*, 1893 bis 1894, 17 Monate; Beobachtungstermine 8^h, 2^h, 8^h. Die Mittel entnehme ich dem Werke: »Congrès national d'Hygiène et de Climatologie médicale de la Belgique et de Congo. Bruxelles, Aôut 1897; Bruxelles 1898, p. 596.

Bildet man die Abweichungen der Monatsmittel vom Jahresmittel, so erhält man folgende Zahlen:

Jährlicher Wärmegang am Äquator im Congostaate unter 18° E. L. in 320 *m* Seehöhe.

a... Equateurville; [1]
b... Liranga.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
a..	-0·1	1·0	0·2	1·1	0·2	-0·5	-0·6	-0·7	0·1	-0·2	-0·6	0·0
b...	0·2	1·0	1·4	0·8	-0·2	-0·3	-0·3	-0·7	-0·8	-1·2	-0·3	0·3
Gemittelt und ausgeglichen												
	0·3	0·7	1·0	0·7	0·1	-0·3	-0·5	-0·7	-0·6	-0·5	-0·3	0·1

[1] Nimmt man als Correction des Mittels der täglichen Extreme im Inneren etwas willkürlich —0·5° an und als Reduction auf das Meeresniveau +1·6°, so erhält man:

Mittlere Temperatur im Meeresniveau am Äquator im Inneren des Congostaates.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
26·3	26·7	27·0	26·7	26·1	25·7	25·5	25·3	25·4	25·5	25·7	26·1	26·0

Jährlicher Wärmegang am Äquator.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
Pará											
-0·3	-0·7*	-0·4	-0·3	0·1	0·1	0·0	0·1	0·1	0·5	0·7	0·3
Am Gabun [1]											
0·7	0·9	1·0	1·1	0·7	-1·0	-1·9*	-1·4	-0·5	-0·1	0·0	0·4
Im Inneren des Congostaates 320 *m*											
0·3	0·7	1·0	0·7	0·1	-0·3	-0·5	-0·7*	-0·6	-0·5	-0·3	0·1

Der jährliche Wärmegang ist auf den beiden Seiten des Atlantischen Oceans unter dem Äquator fast der entgegengesetzte. In den Unterschieden der jährlichen Periode des Regenfalles ist dies nicht begründet, denn auch am Gabun herrscht um die Zeit des Frühlings-Äquinoctiums die Regenzeit, die zweite zur Zeit des Herbst-Äquinoctiums fehlt dagegen zu

[1] Die Gleichung für diesen jährlichen Gang ist:

$1·56 \sin(60·2°+x)+0·59 \sin(268·6°+2x)+0·30 \sin(99·5°+3x)$.

Die daraus berechneten Werte sind:

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
0·7	1·2	1·0	1·2	0·6	—0·9	—1·9	—1·8	—0·4	—0·1	0·0	0·4

Die Spaltung des Maximums in zwei Maxima ist auch bei Gabun und in einzelnen Jahrgängen von Libreville vorhanden.

Pará. Nur der December ist überall ziemlich gleich warm. Im Inneren des Congostaates unter dem Äquator ist der Temperaturgang fast derselbe wie am Gabun, die Abkühlung von Juni bis October ist aber geringer. Die Jahresschwankung der Temperatur beträgt zu Pará nur 1·4° (Batavia 1·1°, Singapore 1·9°), sie ist am Gabun trotz der großen Bewölkung mehr als zweimal so groß (3·0°), im Inneren aber wieder kleiner, 1·7°, wovon wohl kaum die geringe Seehöhe von 320 *m* die Ursache sein kann.

Die mittleren und absoluten Jahresextreme sind: [1]

	Jahresextreme				
	mittlere		Differenz	absolute	
Zu Pará (6).........	33·2	19·7	13·5	33·8	18·1
Am Gabun (4).......	32·9	16·5	16·4	33·5	16·0
S. Thomé (20 Monate)	34·0	17·9	—	—	—
(Equateurville.......	33·4	18·2	15·2	34·5	18·0)

[1] Ich habe für Pará die mittleren Monats- und Jahresextreme sowohl aus den Terminablesungen um 7h, 2h, 9h, als auch aus den Ablesungen der Max.-Min.-Thermometer berechnet. Die Unterschiede stellen sich gering heraus. Die mittleren Differenzen dürften von einigem Interesse sein.

Wahre mittlere Monatsextreme. — Extreme aus den Ablesungen um 7h, 2h, 9h.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
Max.	0·2	0·6	0·2	0·2	0·6	0·7	0·5	0·1	0·2	0·1	0·1	0·5	0·7
Min.	−1·3	−1·2	−1·3	−1·3	−1·3	−1·4	−1·4	−1·3	−1·7	−2·1	−1·7	−1·9	−1·6
Wahre Monats- und Jahresschwankung, größer als die aus den Terminablesungen berechnete													
	1·5	1·8	1·5	1·5	1·9	2·1	1·9	1·4	1·9	2·2	1·8	2·4	2·2

Die wahren Minima gehen tiefer unter die genäherten hinab, als sich die Maxima darüber erheben.

Am Gabun sinkt in der kühlen Trockenzeit die Temperatur tiefer als in Pará, wo die Trockenzeit in die warme Zeit fällt.

Die tägliche unperiodische Wärmeschwankung unterliegt nur geringen Änderungen im Laufe des Jahres. Die Jahresmittel der unperiodischen Tagesschwankung der Temperatur sind:

Pará .... 8·8 Max. 9·9° October, Min. 7·4° März.
Am Gabun ...... 7·1 Max. 7·8° Februar, Min. 6·5° October (Gang somit umgekehrt). — Die französische Station Libreville hat 8·1°. Equateurville, im Inneren 320 *m* hoch, 7·8° mit geringer jährlicher Variation.

Ich habe aus den täglichen Beobachtungsregistern der Jahre 1896 und 1897 die extremen Tagesschwankungen der Temperatur zu Pará aufgesucht und will hier nur die Mittel für die Monate und die absoluten Extreme der zwei Jahrgänge anführen:

Größte und kleinste unperiodische Tagesschwankung der Temperatur zu Pará.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
9·7	9·5	8·9*	9·7	9·8	10·4	10·7	10·5	11·3	**11·7**	10·9	11·3	11·7
5·0	4·5	2·7*	3·5	5·8	6·9	5·7	7·8	**8·3**	8·0	6·6	7·8	1·8

In der Regenzeit bleibt zuweilen zu allen drei Beobachtungsterminen die Temperatur fast gleich, wie bei uns an den schlechtesten, stürmischen Regentagen, allerdings weit seltener. In der Trockenzeit sind die täglichen Temperaturschwankungen stets ziemlich groß.

Soyaux hat auch Bodentemperaturen bei der Ssibange Farm am Gabun gemessen in 0·5 und 1·0 *m* Tiefe.[1] Ich habe

[1] Die beiden Erdthermometer waren je in einer Holzröhre im Thermometerhäuschen selbst in dem Erdboden, der aus einem mergelhaltigen Thone besteht, eingelassen, so dass nur die Abendsonne den Boden bescheinen konnte. Über den Platz war eine Holzkiste gestülpt. Die Thermometer hatten

die correspondierenden Monatsmittel von Luft- und Bodentemperatur aus zweijährigen Beobachtungen abgeleitet, verzichte aber auf die Wiedergabe der Monatsmittel selbst und will nur die Gleichungen für den jährlichen Gang, sowie die Mittel der extremen Monate anführen.

Luft: Jahresmittel 24·5, Maximum 25·4 April,
Minimum 22·4 Juli. Differenz 3·0.
Boden 0·5 *m*: 25·6, Maximum 26·5 Mai,
Minimum 24·6 August. Differenz 1·9.
Boden 1·0 *m*: 26·2, Maximum 26·9 Mai,
Minimum 25·6 September. Diff. 1·3.

Jährlicher Gang: (x=0 für Mitte Jänner).

Luft

$$24{\cdot}48+1{\cdot}17\sin(66{\cdot}3°+x)+0{\cdot}63\sin(264{\cdot}7+2x).$$

Boden 0·5 *m*

$$25{\cdot}62+0{\cdot}72\sin(30{\cdot}8°+x)+0{\cdot}35\sin(236{\cdot}8+2x).$$

Boden 1 *m*

$$26{\cdot}23+0{\cdot}57\sin(\ 0{\cdot}9°+x)+0{\cdot}17\sin(205{\cdot}4+2x).$$

Auffallend ist die hohe mittlere Temperatur des Bodens in ½ und 1 *m* Tiefe. Wegen der großen Regenmengen, welche die Wärmebewegung in den oberen Bodenschichten in hohem Maße beeinflussen müssen, ist eine weitere physikalische Verwertung der obigen Gleichungen kaum möglich. Das Jahresminimum der Temperatur wird im Boden viel stärker abgeschwächt als das Maximum, letzteres überhaupt nur relativ zum Jahresmittel.

Veränderlichkeit der Temperatur von einem Tage zum nächsten zu Pará. Es wurde die interdiurne Veränderlichkeit der Temperatur sowohl für jeden der drei Beobachtungstermine (aus einjährigen Beobachtungen) berechnet, als auch

sehr große cylindrische Gefäße und waren deshalb sehr träge. Sie befanden sich in dünnen, geschlitzten Röhren aus Messing, die nach oben in einen Holzgriff übergiengen, mittels dessen sie emporgezogen werden konnten. Die Ablesungen erfolgten zweimal täglich, um 7^h a. und 2^h p.

(aus einem anderen Jahrgange) die Veränderlichkeit der Tagesmittel der Temperatur. Die Ergebnisse finden sich in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Parà. Veränderlichkeit der Temperatur zu den drei Beobachtungsterminen.

	7^h	2^h	9^h	Mittel
Jänner	0·57	1·93	1·06	1·19
Februar	·53	1·86	·79	1·06
März	·50	1·88	·72	1·03
April	·65	1·15	·79	0·86
Mai	·50	·71	·80	0·67
Juni	·43	·91	·96	0·77
Juli	·40	·60	·82	0·61
August	·46	·42	·86	0·58
September	·35	·54	·85	0·58
October	·51	·59	·61	0·57
November	·63	1·40	·80	0·94
December	·61	1·61	·83	1·02
Mittel				
November bis April	0·58	1·64	0·83	1·02
Mai bis October	0·44	0·61	0·82	0·62

Die Veränderlichkeit der Temperatur ist am größten von December bis März, am kleinsten von August bis October. Der tägliche Gang ist sehr merkwürdig. In dem Halbjahre November bis April ist die Veränderlichkeit der Temperatur um 2^h nachmittags am größten, wie dies auch im allgemeinen zu erwarten wäre. Von Mai bis October jedoch ist die Veränderlichkeit um 9^h abends am größten; morgens ist sie das ganze Jahr hindurch am kleinsten. Es wird sich später zeigen, dass sich der Eintritt der Gewitter von Mai an gegen den Abend hin zu verspäten scheint. Das könnte einer der Gründe sein für die große Abnahme der Veränderlichkeit der Temperatur um 2^h nach-

mittags von Mai an. Doch verdient diese interessante Thatsache eine weitere Untersuchung.

Die Tagesmittel der Temperatur selbst haben natürlich eine geringere Veränderlichkeit als die oben berechnete. Ein Jahrgang (ein anderer als der obiger Rechnung zugrunde gelegte) lieferte folgende Werte:

Veränderlichkeit der Tagesmittel der Temperatur zu Pará.

Jänner	1·10	April	0·96
Februar	0·75	Mai	0·72
März	1·02	Juni	0·52
Mittel	0·96	Mittel	0·73
Juli	0·44	October	0·50
August	0·40	November	0·39
September	0·34	December	0·43
Mittel	0·39	Mittel	0·54

Die größte Veränderlichkeit haben Jänner bis April, d. i. die Regenzeit, die kleinste Juli bis September, der Beginn der Trockenzeit. Die mittlere Veränderlichkeit 0·66 ist sehr gering. Für Quito habe ich die Veränderlichkeit etwas größer gefunden: 0·72 im Jahresmittel, October bis März 0·80, April bis September 0·63. Die mittlere Häufigkeit eines Temperaturwechsels von 1 bis 2° von einem Tage zum nächsten beträgt dort 97 im Jahre, von 2 bis 3° 7·5.

Häufigkeit gewisser Änderungen der Tagesmittel zu Pará.

Intervall	Jänner bis März	April bis Juni	Juli bis September	October bis December	Jahr
0 bis 1/2°	34	40	66	59	199
1/2 » 1	23	27	23	25	98
1 » 1 1/2	16	15	3	8	42
1 1/2 » 2	14	8	0	0	22
über 2	3	1	0	0	4

Die Häufigkeit einer Änderung der mittleren Tagestemperatur im Betrage von 1 bis 2° beträgt zu Pará nur 64, von 2 bis 3° bloß 4 im Jahre, ist also kleiner als zu Quito. Am größten sind die Änderungen von Jänner bis März, am kleinsten von Juni bis September. Die größte Änderung der Tagesmittel war 2·3° dreimal (einmal Steigen, zweimal Fallen).

Ich habe dann auch noch die Häufigkeit gewisser Änderungen der Temperatur um 2^h nachmittags von einem Tage zum nächsten aufgesucht und gefunden.

Häufigkeit gewisser interdiurner Temperaturänderungen um 2^h nachmittags.

Intervall	Jänner bis März	April bis Juni	Juli bis October	November bis December	Jahr
0 bis 2°	59	82	122	46	309
2 » 4	20	9	1	10	40
4 » 6	9	0	0	5	14
6 » 8	2	0	0	0	2

Um 2^h nachmittags kommen von Jänner bis März ziemlich große Temperaturänderungen vor, von Juli bis October jedoch fehlen etwas größere Änderungen ganz. Bemerkenswert ist, dass die etwas größeren Änderungen schon im November beginnen, wo auch das Maximum der interdiurnen Veränderungen wieder um 2^h nachmittags eintritt.

Die größten positiven und negativen Temperaturänderungen um 2^h nachmittags von einem Tage zum anderen haben einen ausgesprochenen jährlichen Gang, den ich dadurch charakterisieren will, dass ich für jeden Monat die zwei größten Änderungen herausgreife und das Mittel davon nehme.

Das Halbjahr November bis April hat die größten positiven und negativen Änderungen. Die negativen Änderungen sind im allgemeinen größer als die positiven.

Größte Änderungen: *a* negative, *b* positive (Mittel). Absolute Maxima im Jahre.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
a..	-6·4	-4·8	-4·6	-2·6	-1·7	-2·8	-2·1	-1·0	-1·4	-1·3	-4·1	-4·8	-7·6°
b..	4·6	4·6	6·0	2·6	2·3	2·1	1·5	1·0	1·3	1·2	4·3	4·8	6·8

III. Feuchtigkeit.

Die Luftfeuchtigkeit ist in Pará mit einem Haarhygrometer von Usteri-Reinacher (Zürich) gemessen worden, zu Ssibange Farm am Gabun mit dem Psychrometer. Das Jahresmittel der relativen Feuchtigkeit ist für beide Orte sehr hoch und gleich gefunden worden. Mittel $(7^h+2^h+9^h):3 = 88°$ Pará und $87\%_0$ Gabun. Die Feuchtigkeit bleibt das ganze Jahr hindurch gleichmäßig hoch. In Pará haben Jänner und Februar $94\%_0$, zu Ssibange Farm November bis April $89\%_0$, die Minima sind $84\%_0$ Juni und $85\%_0$ September bis November zu Pará und 82 bis $84\%_0$ Juli bis September (Trockenzeit) am Gabun. In den Morgen- und Abendstunden herrscht an beiden Orten das ganze Jahr hindurch fast völlige Sättigung der Luft mit Wasserdampf; um 2^h nachmittags sinkt in der trockeneren Zeit die Feuchtigkeit auf 66 bis $67\%_0$ herab, tiefer und länger zu Pará, als am Gabun.

Der mittlere Dampfdruck beträgt zu Pará 21·9 *mm*, am Gabun nur 19·9 *mm*, weil die Trockenzeit hier schärfer ausgeprägt ist. Es sinkt hier von Juni bis August der mittlere Dampfdruck auf 17·2 *mm* herab, zu Pará nur auf 21·2 *mm* (Juni). Doch mag der Dampfdruck zu Pará, aus der relativen Feuchtigkeit zurückberechnet, überhaupt ein wenig zu hoch sein. Den täglichen Gang des Dampfdruckes zu Pará mögen die folgenden Mittelwerte, aus Engelenburg's Beobachtungen berechnet, illustrieren.

Mittlerer Dampfdruck zu Pará.

	6^h	8^h	9^h	10^h a.	2^h p.	4^h	10^h	Mittel (6+2+10) : 3
Dec. bis Febr.	19·6	22·2	22·3	22·0	21·7	21·8	20·2	20·5
März bis Mai.	20·0	22·7	23·1	23·1	22·6	22·4	20·9	21·2
Juni bis Aug.	18·9	21·2	21·5	21·7	21·1	20·7	20·4	20·1
Sept. bis Oct.	18·1	20·2	19·9	19·6	20·8	20·6	19·6	19·5
Mittel...	19·1	21·6	21·7	21·6	21·5	21·4	20·3	20·3

Die Ergebnisse stündlicher Beobachtungen an zwei Termintagen in jedem Monate von Soyaux am Gabun findet man in einer Tabelle, Seite 664, zugleich mit dem täglichen Gange der anderen meteorologischen Elemente. Am Gabun erreicht der Dampfdruck das Maximum erst um 6^h abends, das Minimum zur Zeit des Temperaturminimums um 5^h und 6^h morgens (Amplitude 1·9 *mm*). Die kleinste relative Feuchtigkeit tritt um Mittag und 1^h p. ein, 72%, die größte 96% um 5^h und 6^h morgens, zugleich mit dem Minimum des Dampfdruckes (Amplitude 24%).

Die Mittel für die drei Beobachtungstermine sind:

Am Gabun	Luftfeuchtigkeit (Jahresmittel)		
	7^h	2^h	9^h
Dampfdruck...	19·5	20·3	20·1 *mm*
Procente......	94·0	73·1	93·6

Die Luftfeuchtigkeit ist am Gabun so groß, dass die Mosquitonetze über den Betten am Morgen von Nässe triefen. Nebel sind sehr häufig, von October bis März besonders, die Thaufälle sehr stark. Daher gibt es viel rheumatische Affectionen.

Von Pará heißt es auch, dass man sich wie in einem Dampfbade befindet. Man kann kaum trockene Kleider haben, auf den Schuhen wächst über Nacht der Schimmel. Gestärkte Wäsche zu haben ist unmöglich. Wallace bezeichnet trotzdem das Klima von Pará als eines der angenehmsten der Welt.

IV. Bewölkung.

Die mittlere Bewölkung ist zu Pará ziemlich hoch, 5·2; in der Haupt-Regenzeit von Jänner bis April 6·9, in der Trockenzeit von August bis November bloß 3·6. Am Gabun ist sie aber viel höher, 7·9 im Jahresmittel! Sie geht nur im Jänner und Februar auf kaum 7·1 herab (Maximum für Pará) und beträgt von September bis November 8·5.

In Pará ist die Bewölkung morgens am kleinsten, nachmittags am größten (von Mai bis August tritt das Maximum abends ein). Die einjährigen Aufzeichnungen von Engelenburg liefern folgende Mittel:

Mittlere Bewölkung zu Pará.

	Stunde						
	6^h	8^h	9^h	10^h a.	2^h p.	4^h	10^h
December bis Februar..	6·3	5·5*	6·4	6·3	6·3	7·4	6·2
März bis Mai	5·6*	5·7	5·9	6·6	6·5	7·7	(8·2)
Juni bis August	1·9*	2·1	2·6	3·4	4·7	5·3	4·5
September bis Nov. ...	0·8*	1·7	4·2	5·6	5·2	3·5	1·8
Mittel...	3·6*	3·8	4·8	5·5	5·7	6·0	5·2

Die stärkste Bewölkung haben der Nachmittag und der Abend. In den trockenen Monaten ist die Bewölkung am Morgen fast Null und erreicht zwischen 10^h und 4^h ihr Maximum. In den Regenmonaten ist der Himmel schon morgens stark bewölkt und die Bewölkung erreicht zwischen 4^h und 10^h abends ihren größten Betrag. »Cumuluswolken herrschen bei Tag, die Morgenwolke in der Regenzeit ist eine Art Cirrocumulus mit sehr großen Schäfchen, das ganze sieht einer von der Sonne ausgetrockneten und gebrochenen Lehmschichte ähnlich« (Engelenburg).

Am Gabun ist der tägliche Gang der Bewölkung ein anderer. Die Bewölkung ist morgens am größten, abends am kleinsten.

Täglicher Gang der meteorologischen Elemente am Gabun (Soyaux).

Zahl der Tage	Luftdruck (24)	Temperatur (48)	Temperatur Nov. 1880 (30)	Feuchtigkeit: Dampfdruck in Millimetern (24)	Feuchtigkeit: relative in Procenten (24)	Bewölkung Nov. 1880	Windstärke Nov. 1880
Mitternacht	·53	— 1·6	— 1·6	— 0·2	7	— 0·7	—
1h	·31	— 1·8	1·8	— 0·5	7	— 0·2	—
2	— ·12	— 2·0	— 1·9	— 0·7	7	0·3	—
3	— ·36	2·2	— 1·9	— 0·8	8	0·6	—
4	— ·35	— 2·3	— 1·9	— 0·9	8	0·9	—
5	·00	— 2·4*	2·0*	— 1·1*	9	0·9	—
6	·36	2·4	— 2·0	— 1·0	9	1·1	—
7	·82	— 1·6	— 1·4	— 0·4	6	1·4	0·5
8	1·32	— 0·5	— 0·4	0·2	3	1·0	0·8
9	1·45	— 0·6	0·5	0·2	— 2	0·4	1·0
10	1·27	1·7	1·4	0·3	— 7	0·1	1·3
11	·90	2·4	2·1	0·2	—11	0·4	1·3
Mittag	·26	3·0	2·6	0·4	—12	0·5	1·3
1h	— ·47	3·4	2·9	0·2	—15*	0·4	1·4
2	—1·08	3·2	3·0	0·6	—14	0·0	1·7
3	—1·55	2·9	2·7	0·4	—13	— 0·5	1·8
4	—1·74	2·3	2·4	0·6	— 9	— 0·7	1·8
5	—1·66	1·2	1·5	0·6	— 6	— 0·7	1·6
6	—1·14	0·5	0·5	0·8	0	— 0·8	1·1
7	— ·58	— 0·3	— 0·3	0·6	3	— 1·1	0·8
8	·03	— 0·8	— 0·7	0·4	5	— 1·2*	—
9	·29	— 1·0	— 1·0	0·1	5	— 1·2*	—
10	·59	— 1·2	— 1·3	0·1	6	— 1·1	—
11	·77	— 1·3	— 1·5	— 0·1	6	— 0·9	—
Mittel	759·24	24·5	24·3	20·0	87	8·3	—

Die Mittel sind:

Gabun. Mittlere Bewölkung.

	7h	2h	9h
Jahr..........	8·6	8·2	7·0*

Die stündlichen Beobachtungen im November 1880 ergaben Soyaux das Minimum um 8^h und 9^h abends 7·1, das Maximum um 7^h morgens 9 7.[1] Die Bewölkung zeigte aber in den Jahren 1880, 1882 und 1883 wesentliche Verschiedenheiten sowohl im täglichen, wie im jährlichen Gange. 1880 und 1882 war der Jänner namentlich in den Abendstunden bemerkenswert heiter, und die Monate der Trockenzeit waren die trübsten, während im Jahre 1883 der Jänner sehr stark bewölkt war, auch abends, während die Monate Juni und Juli eine ungewöhnlich geringe Bewölkung hatten.

V. Regenverhältnisse und Gewitter.

Die Regenverhältnisse von Pará werden charakterisiert durch eine einzige Regenzeit von Jänner bis April und eine einzige lange (relative) Trockenzeit von Mai bis December. Doch regnet es auch in der Trockenzeit ziemlich häufig. Pará hat eine außerordentlich große Zahl von Regentagen. Der Regen fällt fast ausschließlich nachmittags und auch abends in Form von Gewitterregen. Die jährliche Vertheilung der Regenmenge ist anormal für die Äquatorialregion, die zweite Regenzeit beim zweiten Zenitstande der Sonne fehlt. Dagegen herrschen am Gabun die normalen Regen- und Trockenzeiten und die große Trockenzeit von Juni bis September ist eine wirkliche Trockenzeit, in der die Regenwahrscheinlichkeit auf 0·1 bis 0·2 herabsinkt, während sie in Pará nie unter 0·43 herabgeht. Die jährliche Regenvertheilung am Gabun ist viel extremer als zu Pará. Zu Pará beträgt die Amplitude 12% der jährlichen Regenmenge, am Gabun fast 17%.

---

[1] Die Gleichung für den täglichen Gang der Bewölkung ist (November 1880):

$$1{\cdot}08 \sin(340{\cdot}1^\circ + x) + 0{\cdot}26 \sin(336{\cdot}0^\circ + 2x).$$

Niederschlagsverhältnisse am Äquator zu Para und am Gabun.

	Regenmenge						Mittlere Zahl der Regentage		Regen-wahrscheinlichkeit	
	in Millimetern		in Tausendtheilen der Jahressumme		Abweichung von gleichförmiger Vertheilung					
	Pará	Gabun	Pará	Gabun	Pará	Gabun	Pará	Gabun	Pará	Gabun
Jänner	303	192	129	81	44	—4*	27·8	14·4	·90	·47*
Februar	317	188	136	80	59	3	26·5	14·2	·95	·51
März	357	323	153	137	68	52	28·4	17·4	·92	·56
April	356	345	152	147	70	65	26·9	18·9	·90	·63
Mai	229	185	98	79	13	—6	24·8	13·3	·80	·43
Juni	145	8	62	3	—20	—79	22·1	2·4	·74	·08*
Juli	115	4*	49	2	—36	—83*	19·5	3·4	·63	·11
August	92	19	39	8	—46	—77	18·2	7·1	·59	·23
September	77*	106	33	45	—49	—37	17·1	16·5	·57	·55
October	81	371	35	158	—50*	73	13·2	24·4	·43*	·79
November	97	393	41	167	—41	85	13·2	22·6	·44	·75
December	170	220	73	93	—12	8	19·3	16·7	·62	·54
Jahr	2339	2354	1000	1000	0	0	257·0	171·3	·70	·47

Nachweise zu dieser Tabelle. Die hier comperierenden Regenmessungen zu Pará und am Gabun findet man in besonderen Tabellen. Was die Zahl der Niederschlagstage anbelangt, so habe ich die Regentage zu Pará 1845 bis Juni 1849 nach Dewey bei Dove mit jenen von Goeldi in ein Mittel vereinigt mit den Gewichten 4 und 6. Die Vertheilung und die Jahressummen stimmen vortrefflich in beiden Reihen, Jahressumme bei Dewey 265·5, bei Goeldi 252·9.

Die älteren Regenmessungen zu Pará, soweit sie mir bekannt geworden sind, finden sich in der nachfolgenden Tabelle vereinigt.

Einige Resultate älterer Regenmessungen zu Pará.

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Jahr
(1¹/₂) (?)	165	279	294	367	256	134	83	90	64	18	72	60	1813
(3) 1872/1874	248	263	322	367	190	169	80	69	31	96	184	204	2228
1883	463	228	450	283	171	94	95	48	56	17	114	140	2159
1893	339	212	178	286	84	45	76	14	86	68	118	166	1672
1894	248	409	396	485	266	152	30	56	61	147	58	149	2457

a) Nach Dove, Klimatologische Beiträge, Bd. I, S. 88 und 90; Bd. II, S. 112.

b) Dränert, Das Klima im Thale des Amazonas. Met. Zeitschrift (1902), Bd. XXXVI, S. 512.

c) Ryckevorsel, oben citiert; November muss statt 20 114 *mm* stehen.

d) de Souza, Met. Beob. am Met. Cabinet. Gedrucktes Resumé, das ich Herrn Dr. Goeldi verdanke. Die anderen Beobachtungsergebnisse unbrauchbar.

e) Ebenfalls nach einer Mittheilung von Dr. Goeldi. Siehe Met. Zeitschrift, Bd. XXXI (1896), S. 112.

Diese fünf Reihen wurden mit Rücksicht auf ihr Gewicht (Zahl der Jahrgänge *a* als 1 Jahr genommen) mit den Regenmessungen am Museum Goeldi 1895 bis 1901 vereinigt.

Die vorstehende Tabelle enthält in übersichtlicher Weise alle Elemente zur Beurtheilung der Regenverhältnisse zu Pará und am Gabun. Die mittlere Regenmenge ist für Pará aus 13jährigen Messungen berechnet, jene am Gabun aus etwas mehr als 11jährigen. Die mittlere Zahl der Regentage wurde für Pará aus 10jährigen, für Gabun aus $11^1/_3$jährigen Aufzeichnungen abgeleitet. Die Mittelwerte repräsentieren demnach schon recht verlässlich die jährliche Regenvertheilung, wie auch die mittlere Regenmenge und Zahl der Regentage.

Die Tabelle zeigt auch sehr schön die Übereinstimmung in den Regenverhältnissen in der ersten Hälfte des Jahres zu Pará und am Gabun, in der zweiten Hälfte fehlt aber die normale Regenzeit in Pará und die Trockenzeit dauert auch beim zweiten Zenitstande der Sonne noch an, ja erreicht sogar ihr Maximum um diese Zeit.

Die jährlichen Regenmengen sind gleich, aber die Zahl der Tage mit Regen ist zu Pará viel größer als am Gabun, die Regendichte also kleiner. Zu Pará liefert ein Regentag durchschnittlich kaum 9·1 *mm*, am Gabun 13·0 *mm*. Die jährliche Regenvertheilung kommt am schärfsten zum Ausdrucke in der Darstellung von Angot, d. i. in Form von Abweichungen der wirklichen Vertheilung der Regenmenge auf die Monate von jener, wie sie bei einer ganz gleichförmigen Vertheilung stattfinden würde. Im letzteren Falle kämen auf die Monate mit 31 Tagen 85 Tausendtheile, auf jene mit 30 Tagen 82 und auf den Februar 77 Tausendtheile. Die Differenzen gegen die wirkliche Vertheilung finden sich in der Tabelle.

Pará hat 5 Monate mit einem Excess des Regenfalles, Jänner bis Mai, dann folgen 7 Monate, die alle zu wenig Regen haben. Am Gabun gelangen in dieser Darstellung die beiden Regenzeiten um die Zenitstände der Sonne, sowie die kleine Trockenzeit (December bis Februar), und die große (Mai bis September) sehr schön zum Ausdrucke. Auch das excessivere Auftreten der Regen- und Trockenzeiten am Gabun gegenüber Pará tritt sehr gut hervor.

Nach Danckelman dauerte am Gabun die große Trockenzeit:

	1880	1881	1882	1883	1884	Mittel
Tage	60	111	82	82	124	92

also im Mittel etwas mehr als 3 Monate. Danckelman macht auch darauf aufmerksam, dass in den trockenen Jahren am Gabun nicht so sehr der Ausfall der Zahl der Regentage, als die Ergiebigkeit der Regen in Betracht kommt. In dem nassen Jahre 1880 war die Regendichte 11·0, in dem sehr trockenen folgendem Jahre dagegen nur 8·9; die Zahl der Tage mit mehr als 1 *mm* betrug 1880 120, dagegen 1881 nur 102.

Die Regenfälle sind am Gabun intensiver als zu Pará. Das mittlere Tagesmaximum beträgt hier im fünfjährigen Mittel 111 *mm*, zu Pará (6 Jahre) nur 82 *mm*. Das absolute Tagesmaximum am Gabun war 153 *mm*, zu Pará 131 *mm*.

Interessant ist auch ein Vergleich der Regenwahrscheinlichkeit sowohl nach dem absoluten Betrage, als auch nach der jährlichen Vertheilung. Die mittlere Regenwahrscheinlichkeit ist zu Pará außerordentlich groß, 0·70 im Jahresmittel, am Gabun nur 0·47. In den vier Monaten Jänner bis April beträgt die mittlere Regenwahrscheinlichkeit zu Pará 0·92, am Gabun erreicht sie in den vier Regenmonaten März, April und October, November bloß 0·60 und 0·77 (Mittel 0·68). Die zwei trockensten Monate October und November haben zu Pará noch immer eine Regenwahrscheinlichkeit von 0·44, dagegen am Gabun (Juni und Juli) bloß 0·10. In Wien überschreitet der Monat mit der größten Regenwahrscheinlichkeit (der Juli) mit 0·45 kaum den Monat mit der kleinsten Regenwahrscheinlichkeit zu Pará 0·43 (October). Die Trockenzeit zu Pará hat noch immer mehr Regentage, als die Sommerregenzeit in Wien.

Im Inneren des Congostaates, in Equateurville, scheint nach allerdings bloß 20monatlichen Beobachtungen (1891 bis 1892, Jänner bis April 1891 fehlen aber) die Trockenzeit weniger strenge aufzutreten als an der Küste. Die mittlere Zahl der Regentage beträgt:

December bis Februar	26*
März bis Mai	34
Juni bis August	31*
September bis November	42

Die Monate December bis Februar bilden hier die große Trockenzeit. Die Regenwahrscheinlichkeit des Jahres beträgt

kaum 0·37, vielleicht sind aber Tage mit sehr schwachem Regen nicht gezählt.

Die tägliche Periode der Niederschläge lässt sich für Pará nach den 4$^1/_2$jährigen Aufzeichnungen von Dewey durch folgende Zahlen kennzeichnen:

Häufigkeit der Regenfälle zu Pará (Mittel pro Monat).

	Morgens	Mittags	Nachmittags	Nachts
December bis Februar....	6·0	6·1	17·9	4·0
März bis Mai	**8·3**	**9·0**	**20·9**	6·4
Juni bis August	0·6	0·7	11·7	**9·9**
September bis November..	0·3	0·3	11·8	2·1
Jahr	3·8	4·0	**15·6**	5·6

Es regnet am seltensten am Morgen, am häufigsten am Nachmittage. In der Regenzeit December bis Mai sind Morgen- und Vormittagsregen häufiger als Nachtregen. Umgekehrt verhält es sich in der Trockenzeit, wo Morgen- und Vormittagsregen äußerst selten sind. Von Mai bis August erreichen die Nachtregen ihre größte Häufigkeit. Von September bis November sind sie am seltensten.

Soyaux hat am Gabun den Regen um 6^h morgens und um 6^h abends gemessen. Hiernach fielen im rund dreijährigen Mittel 67% bei Nacht und nur 33% bei Tag (d. h. von 6^h a. bis 6^h p.). Die Abend- und Nachtregen überwiegen demnach bedeutend.

Gewittertage. Pará gehört zu den Orten mit größter Gewitterhäufigkeit. Die mittlere Zahl der Gewittertage (Tage, an denen Donner gehört wurde) beträgt 170·5, fast die Hälfte der Tage des Jahres. März und April haben die meisten Gewittertage (je 17·8), October und November die wenigsten (je 8·3). Das Jahr 1897 hatte 206 Gewittertage, das Jahr 1899 deren nur 153. Monate mit 24 bis 25 Gewittertagen kamen öfter vor, der Mai 1898 zählte deren 28.

Am Gabun wurden in drei vollen Jahren durchschnittlich 99·7 Tage mit Gewitter und 29·7 mit Wetterleuchten notiert. Die meisten Gewittertage haben Februar und März (je 12·4

durchschnittlich) und November und December (je 17·5 im Mittel). Von Juni bis August gibt es so gut wie kein Gewitter.

In Equateurville, im Inneren, wurden 71 Gewitter (Gewittertage?) im Jahre beobachtet, mit ziemlich gleichmäßiger Vertheilung über das ganze Jahr.

Die Gewitter treten zu Pará zumeist früh am Nachmittage ein, doch unterliegt der Beginn der Gewitter einer sehr ausgesprochenen jährlichen Periode. Im Mittel von zwei Jahren fand ich als mittlere Zeit des Eintretens der Gewitter:

Jänner bis März	$3·4^h$ p.
April bis Mai............	$4·2^h$ p.
Juni bis August	$4·4^h$ p.
September bis November..	$5·6^h$ p.

Der Eintritt der Gewitter verspätet sich vom Anfang gegen das Ende des Jahres.

Im Jahre 1897 ist der Beginn des ersten Gewitters sorgfältig notiert und die mittlere Zeit desselben besonders bequem zu ermitteln. Ich fand:

Mittlerer Beginn der Gewitter im Jahre 1897 zu Pará.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
Zahl....	13	17	10	18	17	16	22	18	24	13	14	24
Beginn..	2·5	3·0	4·1	4·1	5·2	6·1	6·3	5·3	3·8	3·7	3·8	4·3

Hier ist der Gang etwas anders. Der Eintritt der Gewitter verspätet sich nur von Jänner bis Juli oder August, in der Tockenzeit treten die Gewitter wieder früher ein. Es ist aber hiezu zu bemerken, dass ich hier stets nur das erste Gewitter des Tages gezählt habe. Es kommen auch Abend- und Nachtgewitter vor, doch sind sie ziemlich selten. Im Jahre 1897 gab es von 6 bis 7^h 20, von 7 bis 8^h 18, von 8 bis 9^h 12 und von 9 bis 10^h 9 Gewitter (denen keines früher am Tage vorausgegangen), d. i. im ganzen kaum 29% aller Gewitter.

Am Gabun entfielen nach den Zusammenstellungen von Danckelman in den Jahren 1882 und 1883 auf die Tageszeiten

	6^h a. bis Mittag	Mittag bis 6^h p.	6^h bis 9^h p.	9^h p. bis 6^h a.
Gewitter.....	17	39	24	20%
pro Stunde...	2·8	6·5	8·0	2·2

Die meisten Gewitter treten hiernach zwischen 6^h und 9^h abends ein, die wenigsten in der Nacht von 9^h bis 6^h früh.

Am Gabun zieht die Mehrzahl der Gewitter aus dem nordöstlichen Quadranten, wie überhaupt an der tropischen Westküste Afrikas. Die Gewitter ziehen vom Lande her, nur sehr selten vom Meere. Wie es sich damit zu Parà verhält, ist nicht bekannt.

Wir geben noch folgende lehrreiche Tabelle nach Danckelman:

Am Gabun.

	1880	1881	1882	1883	1884	Mittel
Erstes Wetterleuchten	9. Sept.	24. Sept.	8. Sept.	?	20. Sept.	15. Sept.
Erstes Gewitter	9. Sept.	24. Sept.	24. Sept	?	22. Sept.	20 Sept.
Erster Regen > 1 *mm* .	7. Aug.	20. Sept.	24. Aug.	17. Aug.	28. Sept.	1. Sept.
Letztes Wetterleuchten	16. Mai	3. Mai	2. Juni	26. Mai	24. Mai	20. Mai
Letztes Gewitter.....	16. Mai	3. Mai	2. Juni	21. Mai	23. Mai	18. Mai
Letzter Regen > 1 *mm*	8. Juni	31. Mai	2. Juni	27. Mai	26. Mai	31. Mai
Dauer der kleinen Trockenzeit (Tage).	6	36	fehlte	?	9 Tage	(18 Tg.)

VI. Windverhältnisse.

Die relative Häufigkeit der acht Hauptwindrichtungen zu Parà in der Regenzeit und in der Trockenzeit zeigt übersichtlich die folgende kleine Tabelle.

Relative Häufigkeit der Winde zu Pará.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
Dec. bis Febr.	4	**21**	18	11	3	2	6	7	28
März bis Mai	4	**19**	16	10	4	3	6	7	31
Juni bis August ..	1	19	**26**	22	4	2	2	4	20
Sept. bis Nov.	1	**24**	22	20	2	2	6	8	15
Regenzeit	4	**20**	17	10	4	2	6	7	30
Trockenzeit	1	21	**24**	21	3	2	4	6	18

In der Trockenzeit dreht sich der Wind mehr nach E und SE, in der Regenzeit ist er mehr nördlich. Die Windstillen sind in der Regenzeit fast zweimal häufiger als in der Trockenzeit.

Eine tägliche Periode der Windrichtung ist kaum zu bemerken. Die Häufigkeit der Winde nach den drei Tageszeiten war im Jahre 1897 z. B. folgende:

Nasse Zeit (December bis Mai)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Stillen
7^h....	15	56	13	1	2	0	0	0	95
2^h....	34	105	33	3	2	0	0	1	4
9^h....	5	19	2	2	0	0	0	4	150

Trockene Zeit (Juni bis November)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Stillen
7^h....	9	87	46	13	2	2	0	0	24
2^h....	8	101	58	15	0	0	0	1	0
9^h....	5	28	21	4	0	0	0	0	125

Um 9^h abends gibt es fast nur Windstillen, besonders in der Regenzeit (doppelt so viel als in der Trockenzeit), um 2^h nachmittags fehlen sie fast ganz.

Die Änderung der Windrichtung von 7^h auf 2^h nachmittags ist ganz unbedeutend; alle Winde, die überhaupt vorkommen, nehmen ziemlich gleichmäßig zu, wie folgende Zahlen dies zeigen:

Relative Häufigkeit der Winde (in Procenten, ohne Stillen).

December bis Mai (nasse Zeit)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
7^h....	18	64	15	1	2	0	0	0
2^h....	19	59	19	2	1	0	0	0

Juni bis November (trockene Zeit)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
7^h....	6	55	30	8	1	0	0	0
2^h....	4	56	32	8	0	0	0	0

Eine Winddrehung von 7^h morgens bis 2^h nachmittags ist nicht zu erkennen; abends herrschen Windstillen fast ausschließlich vor. Man bemerkt auch hier wieder die Winddrehung nach E und SE in der Trockenzeit und die viel häufigeren Nordwinde in der nassen Zeit.

In den Beschreibungen des Klimas von Pará heißt es, dass der Seewind Pará noch erreicht. Damit ist wohl die Verstärkung der östlichen Winde am Nachmittage gemeint, die mit einer starken Zunahme der Häufigkeit derselben verbunden ist.

Die tägliche Periode der Windstärke ist sehr stark ausgesprochen, wie die Daten für die mittlere Stärke um 7^h, 2^h und 9^h in unserer Klimatabelle für Pará zeigen. In der Trockenzeit von Juni an gibt es auch schon morgens um 7^h und auch noch abends Winde. Die Beobachtungen von Engelenburg liefern folgende tägliche Periode der Windstärke.

Mittlere Windstärke zu Pará (Scala 0 bis 6).

Zeit	6^h	8^h	9^h	10^h a.	2^h p.	4^h	10^h	Mittel (6, 2, 10)
Dec. bis Febr..	0·0	0·6	1·2	**1·7**	1·5	1·5	0·5	0·7
März bis Mai .	0·0	0·7	1·3	1·5	**1·8**	1·4	0·1	0·6
Juni bis Aug. .	0·4	1·3	2·0	2·1	**2·3**	1·9	1·1	1·3
Sept. bis Nov..	0·2	1·9	2·8	2·9	2·9	**3·0**	1·2	1·4
Mittel	0·1	1·1	1·8	2·0	2·1	1·9	0·7	1·0

In dem Werke des Dr. van Ryckevorsel heißt es: »In der Nacht herrscht Windstille. In den Regenmonaten tritt das Maximum der Windstärke um 10^h vormittags ein, in der Trockenzeit viel später, gegen 4^h nachmittags. Die Regenschauer der trockenen Zeit treten meist um 4^h nachmittags ein, es gehen ihnen gewöhnlich einige heftige Windstöße voraus«. — Ein anderer Reisender sagt: »Pará wird noch vom Seewinde erreicht. Nachmittags um 4^h circa kommt der tägliche Regenschauer, der 1 bis $1^1/_2$ Stunden dauert. Dann folgt unmittelbar die Seebrise, welche die Luft höchst angenehm macht«.

Obgleich auch an der äquatorialen Westküste Afrikas am Gabun eine sehr constante Windrichtung (SW) herrscht, ist doch eine tägliche Periode der Windrichtung dort sehr ausgeprägt vorhanden, wenn es auch zu eigentlichen Landwinden, zu einer vollen Winddrehung nicht kommt. Die folgende Tabelle zeigt dies:

Häufigkeit der acht Hauptwindrichtungen am Gabun nach den Tageszeiten.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Mittlere Richtung	Stillen (Proc.)
7^h....	1	1	6	27	**43**	14	4	4	S3° E	33
2^h....	2	1	1	3	14	27	**33**	19	S74° W	5
9^h....	5	5	7	10	12	**25**	19	17	S60° W	50

Die südöstliche und südliche Windrichtung des Morgens dreht sich bis 2^h nachmittags nach SW und W (um 77°) und kehrt bis 9^h abends wieder in eine südlichere Richtung zurück. Es werden dann auch N und NE etwas häufiger. Auch am Gabun sind die Stillen abends am häufigsten und liefern die Hälfte aller Beobachtungen. Um 2^h nachmittags sind die Windstillen selten.

»Nachts von 11^h bis 5 oder 6^h morgens herrscht Windstille, wenn nicht ein Gewitter eintritt. Um 6 bis 8^h morgens setzt eine leichte Brise aus S bis SE ein und dreht sich dann langsam in westlicher Richtung, bis gegen 5 und 6^h nachmittags rein westliche Winde herrschen, die dann um 7 bis 8^h abends abflauen, zuweilen aber noch einige Zeit bis gegen 11^h nachts anhalten und dann eine immer nördlichere Richtung

annehmen, die sogar in NE übergehen kann. Winde aus E und NE, eigentliche Landwinde, sind außerordentlich selten.

Zuweilen dreht sich der Wind, nachdem er in den Nachmittagsstunden eine rein westliche Richtung erreicht hat, wieder nach SW oder S zurück und erstirbt, wie er am Morgen begonnen hat, als leichter S oder SE«.

Starke, stürmische Winde kommen zuweilen bei Gewittern vor. — Von Mitte Mai, den ganzen Juni hindurch bis in den Juli hinein treten bald nach Sonnenuntergang, zwischen 7^h und 8^h bis $^1/_2 9^h$ starke Windstöße aus WSW bis WNW ein, wie sie südlicher im Okandegebiete noch heftiger auftreten. Die Ursache dieser nächtlichen Westwinde in der kühlen Jahreszeit an der äquatorialen Küste von Westafrika ist noch nicht aufgeklärt.

Zeitweilig treten auch kalte Windstöße aus NE, sowie auffallend warme Winde aus W ein, wie an der Loango-Küste.

Die Cirruswolken kommen ausnahmslos von ESE bis ENE aus dem Inneren des Landes, wie auch an der Loango-Küste. Es liegen 134 Beobachtungen über die Zugrichtung von Cirrostratus und Cirrocumulus vor. Die relative Häufigkeit der verschiedenen Zugrichtungen ist:

Zugrichtung der Cirrocumulus- und Cirrostratuswolken am Gabun (Häufigkeit in Procenten).

N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
1	25	**42**	11	7	9	4	1

Die tieferen Wolken, Cumulus, Stratocumulus, Nimbus, folgen häufiger der unteren Windrichtung. Der untere Wolkenzug macht die tägliche Winddrehung von S nach W vielfach mit, auch der Wechsel der Land- und Seewinde hat eine entsprechende Änderung des Zuges der unteren Wolken zur Folge (Soyaux und Danckelman).

Während die tägliche Änderung der Windrichtung am Gabun sehr ausgesprochen ist, wie obige kleine Tabelle zeigt, ist eine jährliche Änderung kaum vorhanden. In den Regen-, wie in den Trockenzeiten bleibt der Wind fast constant bei SW, in den Regenzeiten werden nur die nördlichen Winde ein wenig häufiger, sowie auch die Windstillen.

Relative Häufigkeit der Winde am Gabun (Procente).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Stillen
Trockenzeit...	1	1	2	9	17	**19**	14	8	29
Regenzeit.....	2	2	3	8	13	**16**	15	10	31

Die mittlere Windrichtung der Trockenzeit ist S 40° W, jene der Regenzeiten S 50° W.

Instrumente und deren Aufstellung zu Pará.

Stationsbarometer Fueß, Berlin, Nr. 1233, hängt im Arbeitsraume des Botanikers Herrn Dr. J. Huber, 2·73 *m* über dem Erdboden. Nach directen Messungen befindet sich letzterer 10·25 *m* über dem mittleren Flussniveau bei Pará. Also Seehöhe des Barometers 13 *m* über dem Meere. Leider ist die Correction des Barometers noch unbekannt.

Überdies ist ein zweites Barometer Fueß Nr. 1406 in gleicher Seehöhe aufgehangen im geologischen Arbeitszimmer. Zudem ist ein Barometer Tonnelot Nr. 2802 vorhanden, ein Aneroid und zwei Registrierbarometer von Richard.

Thermometer: Normalthermometer, Max.-Min.-Thermometer, Hygrometer Usteri Reinacher durch die Met. Centralanstalt in Zürich bezogen. Selbe befinden sich in einer Blechbeschirmung, Modell des Berliner Met. Institutes, auf der offenen Veranda in der Nordostecke des Museumsgebäudes, durch Bäume leidlich geschützt. Dazu Thermograph Richard, steht frei auf einem Gestelle in der Veranda.

Die Abendablesungen geschehen bei Barometer und Thermometer mittels elektrischer Contactlampe.

Regenmesser Usteri Reinacher steht frei im Hofe des Museums.

Die Wild'sche Windfahne befand sich auf dem Firste der Werkstättenbaracke. Wird jetzt eine freiere und höhere Aufstellung bekommen.

Pará. Monatsmittel der meteorologischen Elemente nach den Beobachtungen am Museum Goeldi.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Luftdruck 700 *mm*+													
1895	—	—	—	—	—	—	60·8	59·5	59·4	58·6	58·8	58·0	—
96	58·9	59·3	58·6	58·6	59·9	60·6	61·2	60·6	59·5	59·1	57·8	58·7	59·38
97	58·5	59·6	58·7	59·7	59·3	60·6	60·7	60·3	60·2	59·2	57·9	58·4	59·43
98	58·5	58·0	57·5	59·3	59·9	60·3	60·8	60·6	60·1	59·4	58·1	59·1	59·31
99	59·1	59·6	59·1	59·4	60·2	60·9	60·0	60·2	60·5	59·2	58·7	58·3	59·59
1900	58·0	59·3	58·8	59·0	59·4	60·9	60·0	60·4	59·9	58·7	58·4	58·8	59·31
1901	58·8	59·4	59·2	58·9	59·1	60·0	59·7	59·9	—	—	—	—	—
Mittel	58·6	59·2	58·7	59·1	59·6	60·6	60·5	60·4	59·9	59·0	58·3	58·6	59·36
Temperatur													
1895	—	—	—	—	—	—	25·9	25·7	26·2	26·4	26·5	26·2	—
96	25·2	25·0	25·1	25·2	26·0	25·7	25·7	25·6	26·1	26·3	26·7	26·4	25·7
97	25·7	24·9	25·4	25·3	26·0	25·8	25·5	25·9	25·7	25·9	26·0	26·0	25·7
98	25·2	24·6	25·7	25·5	25·4	25.5	25·3	25·5	25·3	25·8	26·1	25·5	25·4
99	24·8	24·2	24·6	24·7	25·0	25·6	25·8	26·0	25·7	26·1	26·6	26·1	25·4
1900	25·8	25·7	25·8	26·2	26·6	25·9	25·6	25·9	26·0	26·5	26·3	25·7	26·0
1901	25·4	25·4	25·1	25·4	25·8	26·4	25·9	26·2	—	—	—	—	—
Mittel	25·4	25·0	25·3	25·4	25·8	25·8	25·7	25·8	25·8	26·2	26·4	26·0	25·7

Niederschlagsmenge													
1895	—	—	—	—	—	—	—	117	56	96	50	139	—
96	242	297	483	319	226	125	98	305	56	50	33	189	2423
97	263	460	420	481	250	150	223	83	197	133	156	110	2926
98	377	316	271	296	311	192	117	40	84	65	31	263	2363
99	414	406	438	411	404	93	148	112	139	132	33	99	2829
1900	296	331	312	221	155	227	231	126	106	43	45	286	2379
1901	390	385	428	434	280	161	160	96	—	—	—	—	—
Mittel	330	366	392	360	271	158	163	126	106	86	58	181	2597
Bewölkung													
1895	—	—	—	—	—	—	—	4·2	2·7	2·7	3·2	3·6	—
96	6·3	6·7	7·7	6·7	4·7	4·4	3·7	4·2	2·9	3·4	4·1	5·4	5·0
97	6·6	6·6	8·3	7·3	6·4	5·7	5·3	4·2	4·5	4·8	4·7	4·8	5·8
98	7·5	7·6	6·3	7·1	7·0	5·7	4·0	2·4	4·0	3·6	3·5	6·4	5·4
89	6·2	7·6	7·4	7·4	6·9	4·2	4·8	3·5	3·4	3·9	3·2	4·4	5·2
1900	6·3	6·7	5·6	5·3	4·6	5·3	5·2	4·3	3·8	3·6	3·5	6·0	5·0
1901	5·4	6·7	8·3	7·7	6·5	3·9	4·6	3·4	—	—	—	—	—

Ssibange Farm, Gabun. Einzelne Monatsmittel nach Soyaux.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Luftdruck 700 *mm* +													
1882	57·8	58·0	57·7	58·3	59·1	61·2	62·8	62·0	60·6	59·3	58·1	58·2	759·4
83	58·8	58·1	58·4	57·3	58·7	—	—	—	—	—	—	—	—
84	—	—	57·3	57·7	58·7	60·5	61·6	60·7	60·6	59·2	59·0	58·3	—
85	58·7	57·8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Temperatur $(7^h+2^h+9^h+9^h):4$													
1880	25·5	25·1	25·1	25·3	25·0	22·8	22·7	23·1	24·3	24·7	24·2	24·5	24·4
82	25·6	25·5	25·9	25·5	25·1	23·3	22·1	22·5	24·3	24·3	24·5	24·9	24·5
83	25·0	24·9	25·0	25·3	25·7	23·4	22·7	23·4	—	—	—	—	—
84	—	—	24·8	25·3	24·8	23·6	22·1	23·2	24·3	24·7	24·6	25·2	—
85	24·9	25·4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Regenfall am Gabun.

	Nach Dr. Borius		Ssibange Farm (Soyaux)					Libreville					Mittel
	1869	1870	1880	1881	1882	1883	1884/85	1896	1897	1898	1899	1900	
Jänner	—	200	170	120	60	231	(193)[2]	273	265	114	326	165	192
Februar	—	208	271	238	168	239	(168)	151	134	156	187	113	188
März	—	325	490	195	487	254	321	250	170	329	386	342	323
April	—	167	331	267	639	404	265	298	203	405	559	254	345
Mai	146	118	64	81	247	122	334	147	74	279	198	409	185
Juni	5	0	30	0	5	0	1	2	0	0	7	40	8
Juli	25	0	1	0	1	1	0	0	17	0	0	2	4
August	32	62	27	0	5	21	2	6	51	5	15	2	19
September ..	153	173	108	22	26	—	5	62	309	168	93	42	106
October	351	536	198	307	503	—	142	375	429	?	327	539	371
November ..	374	465	619	175	605	—	293	495	283	513	218	280	393
December ..	232	(82)[1]	299	65	360		171	276	280	390	93	174	220
Jahr		(2336)	2608	1470	3106		1895	2335	2215		2409	2392	2354

[1] December 1868.

[2] Jänner und Februar 1885.

Die Jahre 1869 und 1870 nach Dr. Borius; Annuaire de la Soc. Mét. de France, XXIX. — 1880 bis 1885 nach Soyaux; Mitth. des Vereines für Erdkunde in Leipzig, 1880, 1883 und 1884; dann Danckelman in Met. Zeitsch., Bd. XVII (1882), S. 371, Jahr 1881, das an citierter Stelle fehlt. — 1896 bis 1898 nach den Annales du Bureau Central Mét. de France. — 1899 und 1900 verdanke ich einer brieflichen Mittheilung von Herrn Angót in Paris (auch die Regentage dieser Jahre).

Pará. Täglicher Gang des Luftdruckes in Abweichungen von dem Tagesmittel.

	2h a.	4h	6h	8h	10h	Mittag	2h	4h	6h	8h	10h	12h
1899												
Jänner	— ·21	— ·41	·17	·95	1·09	·45	— ·68	—1·21	— ·90	— ·16	·51	·36
Februar	— ·16	— ·38	·05	·93	1·29	·54	— ·81	—1·31	— ·98	— ·19	·56	·44
März	— ·31	— ·31	·21	1·13	1·21	·31	—1·18	—1·37	— ·86	·13	·76	·34
April	— ·28	— ·35	·15	·99	1·21	·24	—1·11	—1·46	— ·86	·07	·86	·53
Mai........	— ·08	— ·29	·12	·80	1·04	·33	—1·15	—1·57	— ·88	·17	·90	·64
Juni	·09	— ·06	·33	1·15	·97	·23	—1·27	—1·55	—1·07	— ·04	·68	·60
Juli........	·21	— ·09	·17	·88	1·08	·44	— ·89	—1·57	—1·28	— ·23	·56	·77
August.....	— ·03	— ·22	·14	1·01	1·36	·86	— ·79	—1·57	—1·29	— ·45	·46	·57
September ..	— ·20	— ·35	·13	1·13	1·36	·64	— ·84	—1·50	—1·26	— ·26	·61	·53
October	— ·37	— ·39	·30	1·19	1·46	·58	— ·80	—1·46	—1·17	— ·16	·36	·30
November ..	— ·27	— ·33	·35	1·20	1·43	·53	— ·72	—1·37	—1·21	— ·30	·47	·28
December...	— ·20	— ·25	·43	1·35	1·36	·57	— .76	—1·50	—1·30	— ·31	·38	·26
Jahr	— ·15	— ·29	·21	1·06	1·24	·48	— ·92	—1·43	—1·09	— ·15	·61	·47

1901													
Jänner	— ·09	— ·31	·15	·98	·94	·36	— ·93	1·33	·93	·02	·61	·43
Februar	— ·15	— ·28	·18	·58	1·12	·40	— ·87	—1·35	— ·90	·00	·73	·52
März	— ·09	— ·32	·04	·82	1·21	·47	—1·00	—1·46	— ·93	— ·02	·71	·59
April	— ·08	— ·29	·00	·77	1·01	·44	— ·88	—1·30	— ·84	— ·07	·67	·55
Mai	— ·05	— ·28	·03	·73	·99	·30	— ·97	—1·44	— ·80	·08	·75	·65
Juni	·16	— ·14	·17	·82	1·08	·55	— ·80	—1·66	—1·21	— ·23	·62	·69
Juli	·20	— ·08	·16	·75	1·03	·46	— ·69	—1·46	—1·18	— ·30	·47	·60
August	·05	— ·20	·16	·87	1·09	·56	— ·73	—1·43	—1·19	— ·28	·56	·54
September*	·02	— ·20	·12	·92	1·30	·71	— ·61	—1·40	—1·24	— ·40	·39	·45
October*	— ·33	— ·26	·42	1·22	1·44	·43	— ·89	—1·36	—1·12	— ·41	·56	·38
November*	— ·35	— ·28	·42	1·38	1·38	·46	— ·76	—1·44	—1·12	— ·27	·38	·20
December*	— ·17	— ·26	·41	1·06	1·06	·44	— ·84	—1·44	—1·14	— ·14	·58	·44
Jahr	— ·07	— ·24	·19	·91	1·14	·46	— ·83	—1·42	—1·05	— ·17	·59	·50

* Zur Ergänzung aus dem Jahre 1900.

Über das Wesen und über Unterschiede der Adsorption[1]

von

W. Müller-Erzbach.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Ältere Versuche über die Adsorption von Dämpfen des Wassers und des Schwefelkohlenstoffes[2] habe ich seit einigen Jahren in veränderter Anordnung so fortgesetzt, dass die verdunstenden Flüssigkeiten durch ihre Temperatur oder durch chemische Anziehung andauernd bei geringerer Dampfspannung gehalten wurden, als sie durch die an der Stelle der sich vollziehenden Adsorption herrschende Temperatur bedingt war. In eine mit einem eingeriebenen und eingefetteten Stöpsel gut verschließbare Standflasche war ein oben offener Glascylinder eingesetzt und unten befestigt. Das untere Drittel vom Zwischenraume zwischen dem Glascylinder und der Flaschenwand wurde zur Regulierung des Feuchtigkeitsdruckes mit entsprechend verdünnter Schwefelsäure gefüllt. Sollte der Dampf von Schwefelkohlenstoff neben dem des Wassers zur Verwendung kommen, so wurde flüssiger Schwefelkohlenstoff in den untersten Theil des Glascylinders gebracht und die Standflasche dann regelmäßig in einen mit Wasser gefüllten flachen Teller gestellt, so dass der Schwefelkohlenstoff durch die Verdunstung des außen befindlichen Wassers andauernd 1·1° bis 1·4° kälter war als der obere Theil des Glascylinders, in welchen ein Probierglas

---

[1] Der I. Theil auszugsweise mitgeth. Verhandl. Deutsch. Phys. Ges., IV, 3, S. 35 (1902).

[2] Verhandl. Phys. Ges., Berlin, 4, S. 8 (1885).

mit den adsorbierenden Körpern (Thonerde, Eisenoxyd oder Tannenkohle) eingestellt war. So wurde die Ablagerung von abgekühlten Dämpfen des Schwefelkohlenstoffes an die Adsorptionskörper durch deren etwas höhere Temperatur vermieden. Ebenso hinderte die Berührung mit der Schwefelsäure die Sättigung und Übersättigung der Luft mit Wasserdampf, so dass Cohäsionswirkungen ganz ausgeschlossen waren und die Adsorption gleichmäßig und constant vor sich gieng.

Weil gepulverte Tannenkohle bei der Adsorption ein früher bereits von mir erwähntes, von der Thonerde wie vom Eisenoxyd abweichendes Verhalten gezeigt hatte, so wurden mit neu hergestellten Präparaten die älteren Versuche wiederholt. Das Resultat blieb unverändert. Auch jetzt wurde der von der Thonerde oder vom Eisenoxyd adsorbierte Schwefelkohlenstoff durch Hineinwerfen der gebildeten Körper in Wasser oder durch Aufgießen von Wasser sofort in flüssiger Form abgeschieden. Es ist gewiss, dass jedenfalls der größte Theil des Schwefelkohlenstoffes sich an der Oberfläche abgelagert hat. Die gepulverte Tannenkohle dagegen hatte den adsorbierten Schwefelkohlenstoff viel fester gebunden und gestattete durch keine der benützten Flüssigkeiten eine Abtrennung von Schwefelkohlenstoff in Tropfenform, wenn auch die Kohle benetzt wurde. Der festere Zusammenhang zeigte sich aber noch weiter. Während aus den zu den Versuchen gebrauchten weiten Probiergläsern von 25 *mm* Durchmesser und 68 *mm* Länge der von 0·440 *g* Thonerde adsorbierte Schwefelkohlenstoff in ungefähr 35 Minuten vollständig an die Luft entwich, hielt die Kohle denselben viel stärker zurück. Von der überhaupt durch 0·419 *g* Kohle adsorbierten Gewichtsmenge von 25·7 Procent waren bei gewöhnlicher Zimmertemperatur in 70 Minuten nur 7·6 Procent verdunstet. Selbst nach 22 Stunden betrug der nicht verdunstete Rückstand noch 14·8 Procent und nach 118 Stunden 12·9 Procent. Als das Probierglas mit der Kohle 50 Minuten lang in siedendes Wasser eingetaucht und dann gewogen wurde, fand sich ein Rest von 5·95 Procent. Durch stärkeres Erwärmen bis auf 300° konnte derselbe zwar leicht entfernt werden, aber er entwich nicht mehr unzersetzt, sondern es bildete sich

ziemlich viel Schwefelwasserstoff, und die rückständige Kohle hatte von ihrem Anfangsgewicht etwas verloren. Wegen dieses Verhaltens hatte ich schon früher die Vereinigung der Kohle mit dem fester zurückgehaltenen Schwefelkohlenstoff als eine halb vollendete chemische Verbindung bezeichnet. Ihr gegenüber ist die Thonerde mit dem von ihr adsorbierten Schwefelkohlenstoff nur ein sehr loses Aggregat.

Über die Ausführung meiner Versuche sei noch bemerkt, dass die Probiergläser nach der Adsorption aus der mit Luft und mit dampfförmigem Schwefelkohlenstoff gefüllten Standflasche mit der Zange rasch herausgenommen und, durch einen Korkstöpsel verschlossen, auf die Wage gebracht wurden. Die Gewichtszunahme des Probierglases infolge der Adsorption war deshalb um das Mehrgewicht des an Stelle von Luft in das Glas eingedrungenen Schwefelkohlenstoffdampfes zu vermindern. Dasselbe beträgt für einen Cubikcentimeter 2·1 *mg* und berechnet sich für ein Glas von 27 cm^3 Inhalt bei 13° oder 225·2 *mm* Dampfdruck zu 13·0 *mg*, bei 17° und 265 *mm* Druck des dampfförmigen Schwefelkohlenstoffes zu 14·7 *mg*. Diese Beträge sind der Lufttemperatur vor der Wägung entsprechend bei den nachstehenden Angaben in Abrechnung gebracht.

Zuerst wurden 0·286 *g* einer stark geglühten und schwächer adsorbierenden Thonerde verwandt. Sie wurde neben Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1·596 oder bei einem Feuchtigkeitsgehalte der Luft von 8·7 Procent den Dämpfen des Schwefelkohlenstoffes ausgesetzt und zeigte folgende Veränderungen:

Datum der Wägung	Temperatur vor der Wägung	Gewicht der Thonerde	Zunahme in Procenten
27./XI. (10 Uhr vorm.)		0·286 *g*	
29./XI. (1 Uhr mittags)	16·8°	0·326	14·0
30./XI. (10 Uhr vorm.)	16·4	0·337	17·8
3./XII.	16·7	0·344	20·3
6./XII.	17·2	0·342	
7./XII.	17·0	0·343	
10./XII.	16·5	0·343	
15./XII.	14·8	0·343	

Datum der Wägung	Temperatur vor der Wägung	Gewicht der Thonerde	Zunahme in Procenten
19./XII.	16·6°	0·340 *g*	
20./XII.	17·7	0·340	
24./XII.	8·1	0·368	32·2
27./XII.	7·5	0·369	
29./XII.	6·5	0·368	
31./XII.	7·1	0·368	
2./I.	11·9	0·367	
	16·2	0·347	
4./I.	17·0	0·336	

Nach dem schnell beendigten Verdunsten des adsorbierten Schwefelkohlenstoffes an der Luft betrug das Gewicht der rückständigen Thonerde 0·287 *g*, sie hatte also nur 1 *mg* Wasser aufgenommen. Die ersten Mengen des Schwefelkohlenstoffes werden schnell adsorbiert, dann erfolgt die Gewichtszunahme viel langsamer, und erst nach 6 Tagen hatte sie aufgehört. Die späteren kleinen Schwankungen sind zweifellos auf vorausgegangene Wärmebewegungen zurückzuführen, die auf die sehr lose anhaftenden äußeren Schichten des adsorbierten Dampfes starken Einfluss ausüben müssen. In einzelnen der späteren Beobachtungen waren sie bei stärkerem Adsorptionsvermögen bedeutend größer. Die durch die Fortsetzung des Versuches im ungeheizten Zimmer veranlasste und tagelang gleichmäßig andauernde Abkühlung bewirkt eine beträchtliche Zunahme des adsorbierten Schwefelkohlenstoffes, die mit eintretender Erwärmung wieder verschwindet.

Als 0·302 *g* derselben Thonerde, wie sie in dem eben beschriebenen Versuche benützt war, einer durch Schwefelsäure andauernd bis zu 91 Procent mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre ausgesetzt wurde, zeigte sich nach 2 Tagen eine Gewichtszunahme von 3·6 Procent, nach 6 Tagen von 4·8 Procent, nach 9 Tagen von 5·3 und 18 Tage nach dem Anfange des Versuches von 5·8 Procent. 4 Tage nachher wurde keine Veränderung mehr bemerkt. Als diese so mit Wasserdampf beladene Thonerde in eine feucht gehaltene, aber zugleich mit Schwefelkohlenstoffdampf gesättigte Atmosphäre gebracht

wurde, hielt sie sich 8 Tage lang unverändert. Als aber in trockener Luft ihr Wasser bis auf 3·9 Procent verloren hatte, nahm sie neben diesem Wasserrest noch 7·2 Procent an Schwefelkohlenstoff auf, der leicht an die Luft abdunstete und dann in fast gleicher Höhe noch einmal adsorbiert wurde.

Eine sich anfangs mir aufdrängende Vermuthung, dass die Adsorption von der Oberflächenspannung oder der Cohäsion der adsorbierten Dämpfe wesentlich abhängig sein könnte, habe ich bald aufgeben müssen, weil die adsorbierten Dämpfe nicht flüssig vorausgesetzt werden können. Ferner wird das zuerst von der Thonerde aufgenommene Wasser so stark zurückgehalten, dass es bei gewöhnlicher Temperatur nicht wieder abdunstet, während die zuletzt adsorbierten Mengen desselben bei doch annähernd gleicher Oberflächenspannung sich leicht verflüchtigen. Schwefelkohlenstoff besitzt zur Luft eine viel geringere Oberflächenspannung als das Wasser, und doch wird der erstere vom Wasser sowohl, als auch von Kohlenpulver ungleich stärker aufgenommen. Schon diese Erwägungen führen dazu, in der durch die Art des Stoffes bedingten chemischen Anziehung die hauptsächlichste Ursache der Adsorption zu suchen.

Zur weiteren Prüfung des Verhaltens des adsorbierten Wassers und des adsorbierten Schwefelkohlenstoffes zueinander wurde ausschließlich schwach geglühte Thonerde von hohem Adsorptionsvermögen benützt. Sie war als chemisch rein von Merk in Darmstadt bezogen. Zuerst wurde sie mit Wasserdampf beladen. 0·373 *g* derselben nahmen aus einer bis 92 Procent mit Feuchtigkeit gesättigten Atmosphäre am ersten Tage 8·4 Procent, am zweiten Tage weitere 2·7 Procent Wasser auf, und nach 14 Tagen betrug bei einem Wassergehalte von 19·2 Procent die Gewichtszunahme an einem Tage weniger als $^1/_2$ *mg*, so dass die Adsorption als annähernd beendigt angesehen werden konnte. Diese wasserhaltige Thonerde nahm aus einer gleich feuchten Atmosphäre von gleichzeitig vorhandenem Schwefelkohlenstoff an einem Tage weniger als $^1/_2$ Procent auf.

Wiederholungen ergaben

bei 19·1 Procent Wasser.... 1·8 Procent Schwefelkohlenstoff (nach einem Tage),
bei 19·6 Procent Wasser.... 2·2 Procent Schwefelkohlenstoff (nach zwei Tagen),
bei 19·6 Procent Wasser.... 0·5 Procent Schwefelkohlenstoff (nach zwei Tagen),
bei 19·8 Procent Wasser.... 0 Procent Schwefelkohlenstoff (nach einem Tage),
bei 19·6 Procent Wasser.... 0·3 Procent Schwefelkohlenstoff,
bei 19·7 Procent Wasser.... 0 Procent Schwefelkohlenstoff (zweimal nach zwei Tagen).

Nach Entfernung des Wassers bis 18·6 Procent wurden 3·0 Procent Schwefelkohlenstoff, bei 18·0 Procent Wasser 5·1 Procent Schwefelkohlenstoff adsorbiert.

Der Wassergehalt wurde dabei in diesen, wie in fast allen anderen Versuchen durch das Gewicht des Rückstandes nach der Verdunstung des Schwefelkohlenstoffes bestimmt. Zur Vergleichung des Adsorptionsvermögen's genügt es, wenn in allen Fällen übereinstimmend die Gewichtszunahme für einen Tag festgestellt wird. Das ist in der Folge geschehen, und nur die Ausnahmen sind noch hervorgehoben. Wasserfreie und schwach erhitzte Thonerde wird durch die Aufnahme von Wasser leicht in ihrem Gewichte verändert, deshalb wurde der größeren Beständigkeit wegen zuerst die Feuchtigkeit in der Versuchsflasche auf 9 Procent gehalten und nachher, wenn die Thonerde gegen 10 Procent Wasser enthielt und es weniger lebhaft anzog, eine Atmosphäre von 91 Procent Feuchtigkeit verwendet. Ausnahmen sind auch dabei besonders bezeichnet. In trockener Luft muss dem Partialdrucke entsprechend mehr Schwefelkohlenstoff adsorbiert werden als in feuchter Luft, aber es kommen dabei noch die später genannten Einflüsse in Betracht. Weil weiter zurückliegende Temperaturschwankungen einen länger wirksamen Einfluss ausüben können, so sind für die stärker adsorbierende Thonerde die Endtemperaturen nicht mehr angegeben.

Statt dessen ist zu beachten, dass 12·8° und 17·1° die Grenzen dieser Versuchstemperaturen ausmachen. Um den

Vorgang vielseitiger beobachten zu können, wurde für jede Versuchsreihe die Thonerde zwar mäßig, aber doch verschieden erhitzt. Die bei demselben Gewichte der Thonerde zusammengestellten Resultate bilden demnach allein eine zusammenhängende Reihe, die nicht ohne weiteres mit den anderen verglichen werden darf. Doch war das Adsorptionsvermögen der Thonerde nicht sehr verschieden, wie die Menge des aufgenommenen Wassers ergibt.

0·379 *g* Thonerde.

Procent Wasser	Procent Schwefelkohlenstoff	
4·9	32·0	
5·2	26·2	(91 Procent Feuchtigkeit)
6·6	36·2	
8·9	30·1	
15·3	12·1	
15·4	12·0	
15·8	12·8	
16·3	10·2	
16·6	10·4	
17·1	2·8	
17·3	4·1	
17·6	4·2	
18·3	2·6	
18·6	1·5	
18·9	3·2	(zwei Tage)
19·1	0·6	
19·1	0·2	
20·3	2·2	(nach vier Tagen)
20·3	0	(dreimal nacheinander)
20·4	0·5	
20·4	0	
20·3	0·4	(nach zwei Tagen)
20·4	0	(dreimal).

0·449 *g* Thonerde.

Procent Wasser	Procent Schwefelkohlenstoff	
4·5	39·3	
6·6	38·0	
7·3	31·6	
8·6	28·2	
10·1	8·3	
10 9	9·6	
13·1	7·6	
14·0	3·4	
15·1	6·2	
15·8	2·4	
16·2	2·2	
16·6	1·2	(nach zwei Tagen)
17·3	0·2	(nach zwei Tagen)
18·1	0	
18·5	0	
19·5	0	(drei Tage nacheinander)
20·1	0	(nach vier Tagen)
20·3	0 6	(nach drei Tagen).

0·440 *g* Thonerde.

Procent Wasser		Procent Schwefelkohlenstoff	
5·2		37 5	
7·3		28·2	(91 Procent Feuchtigkeit)
7·4		39·1	
6·8	In trockener Luft etwas Wasser vorher entfernt	34·8	
7·2		32·3	
7·0		35·0	
8·1		31·8	
10·5		11·6	
11·3		10·8	

0·389 *g* Thonerde (etwas länger erhitzt).

Procent Wasser	Procent Schwefelkohlenstoff
1·3	23·2
2·3	27·2
7·7	24·4
9·0	14·6

Es kommen zwar manche recht beträchtliche Schwankungen vor, aber die Abnahme des adsorbierten Schwefelkohlenstoffes mit dem steigenden Wassergehalte ist doch ganz zweifellos. Das trat auch noch in anderen nicht mehr mitgetheilten Versuchen ebenso deutlich hervor. Anfangs nimmt die wasserarme Thonerde aus der Luft oder aus der regulierenden Schwefelsäure viel Wasser auf, und dieser Vorgang scheint die Ablagerung des Schwefelkohlenstoffes auf der Thonerde zu stören, so dass die Abnahme des Adsorptionsvermögens in dieser Phase in engeren Grenzen undeutlich bleibt. Die fast oder ganz mit Wasser gesättigte Thonerde nimmt dagegen auch bei längerer Einwirkung in keinem Falle eine größere Menge von Schwefelkohlenstoff auf. Die vereinzelt vorkommenden geringen Abweichungen möchte ich darauf zurückführen, dass an der einen oder anderen Stelle die Thonerde durch Erwärmen oder durch Schütteln einmal etwas von der Wasserdecke verliert und dadurch dem Schwefelkohlenstoff zugänglich wird.

Im Laufe der Untersuchung wurde ich dann auf eine sehr auffällige Erscheinung aufmerksam. Eine Thonerdeprobe mit einem Wassergehalte von ungefähr 7·2 Procent hatte sich in einer Atmosphäre von 9 Procent Feuchtigkeit in vier Tagen mit 57·6 Procent Schwefelkohlenstoff bedeckt. Dieselbe wurde in eine ganz feuchte (91 Procent) und mit dampfförmigem Schwefelkohlenstoff erfüllte Luft gebracht. Nach zwei Tagen ergab sich ein Gewichtsverlust an Schwefelkohlenstoff von 91 *mg*, während sich die Menge des adsorbierten Wassers um 8 *mg* vergrößert erwies. Bei der gleichen Veränderung der

Luftfeuchtigkeit verlor Thonerde an einem Tage 49 *mg* oder fast 13 Procent an Schwefelkohlenstoff, während sich ihr Wassergehalt um 4 *mg* vergrößerte. Dieselbe Erscheinung wurde außerdem noch dreimal bestätigt. Es vollzieht sich dabei ein Austausch, der sich nach meiner Ansicht aus der

Lagerung der adsorbierten Schichten

erklärt. Da in allen Versuchen ausnahmslos das von der Thonerde einmal adsorbierte Wasser trotz nachträglichen Beladens der wasserhaltigen Thonerde mit Schwefelkohlenstoff nach dem Verdunsten desselben in unveränderter Menge vorhanden ist, so erfährt das abgesetzte Wasser durch das Hinzutreten von Schwefelkohlenstoff keine Störung. Umgekehrt wird dagegen von abgelagertem Schwefelkohlenstoff ein großer Theil durch den Eintritt von Wasser verdrängt. Das lässt sich nun ohne Schwierigkeit so erklären, dass das adsorbierte Wasser die unterste, der Thonerde nächste Schicht bildet und dass über derselben der Schwefelkohlenstoff liegt.

Wenn der Schwefelkohlenstoff zuerst und unmittelbar auf der Thonerde abgelagert war, so erfolgt das spätere Eindringen des Wassers zuweilen so lebhaft, dass am ersten Tage mehr Schwefelkohlenstoff weggerissen wird, als nach dem Wassergehalte bleiben könnte. Dann stellt sich in den folgenden Tagen das rechte Gleichgewicht durch neues Absetzen von Schwefelkohlenstoff wieder her. Doch dauert es stets längere Zeit bis zum Eintreten des Gleichgewichtes, wenn der Feuchtigkeitsgehalt der wirksamen Atmosphäre eine Änderung erfahren hat.

Da die Oberflächenspannung des Schwefelkohlenstoffes zur Luft geringer ist als diejenige des Wassers zur Luft, so könnte man das Verdrängen des Schwefelkohlenstoffes durch Wasser einfach mechanisch erklären, wenn die Adhäsion beider zur Thonerde gleich groß wäre und wenn sie beide flüssig an der Oberfläche der Thonerde vorausgesetzt werden könnten. Beide Voraussetzungen sind aber nicht zutreffend, und daher kann die beschriebene Erscheinung nur auf die überwiegend chemische Natur der Adsorption zurückgeführt werden. Nach der Menge der festgehaltenen Gase erweist sich nicht nur

ihre Aufnahme durch feste Körper, sondern ebenso diejenige durch Flüssigkeiten, die Absorption, in erster Linie von der substantiellen Natur der einwirkenden Stoffe abhängig. Wie bei anderen chemischen Vorgängen erkennen wir in beiden Fällen einen bedeutenden Einfluss der Temperatur, die bei starker Steigerung ein absolutes Hindernis werden kann. Adsorption wie Absorption zeigen sich gleich anderen chemischen Processen von Wärmewirkungen begleitet. Zunehmender Druck befördert nach Hunter's umfassenden Versuchen die Adsorption der Gase durch feste Körper, und in gewissen Temperaturgrenzen ist sogar nach dem Henry'schen Gesetze die Absorption dem Drucke proportional. Auch bei vielen chemischen Vorgängen spielt der Druck eine wesentliche Rolle, und ich konnte selbst in einer früheren Untersuchung[1] den Nachweis führen, dass in zugeschmolzenen oder an einer Seite abgesperrten Röhren bei einer bestimmten Temperatur eine bestimmte Menge von Wasserdampf die reducierende Wirkung des Wasserstoffes aufhebt. Sainte-Claire-Deville[2] hat später meine Beobachtungen weiter fortgesetzt, und es steht demnach fest, dass die chemische Verbindung des Wasserstoffes mit dem Sauerstoffe von oxydiertem Eisen in ähnlicher Art vom Partialdrucke des Wasserstoffes abhängt, wie es von der Absorption der Gase bekannt ist.

Auf eine chemische Anziehung hat man also die Adsorption der Dämpfe von Wasser und von Schwefelkohlenstoff zurückzuführen. Durch Diffusion dringt der Wasserdampf in den adsorbierten Schwefelkohlenstoff ein und verdrängt denselben, weil er stärker an der Thonerde haftet. Der dampfförmige Schwefelkohlenstoff wird eine adsorbierte Wasserschicht in derselben Art durchsetzen, aber er ist nicht imstande, die festere Verbindung des Wassers mit der Thonerde zu lösen, und deshalb bildet die Hauptmenge desselben über dem Wasser eine zweite Ablagerungsschicht. Man mag diese einfachen oder doppelten Schichten beliebig oft durch Verdampfen entfernen, sie können stets in der früheren

[1] Pogg. Ann., Bd. 129, S. 459 und Bd. 133, S. 236 (1867).

[2] Compt. rend., T. 70, p. 1105; T. 71, p. 30 (1870).

Höhe wiederhergestellt werden. Das Anziehungsvermögen der Thonerde erstreckt sich also bis zu einem ganz bestimmten Abstande. Sei es nun, dass dasselbe von der Thonerde oder von den Dämpfen oder, was am nächsten liegt, dass es von beiden ausgeht, es reicht bis zu der bezeichneten Grenze und hört dann auf, diese Grenze ist diejenige der Wirkungssphäre der Thonerde. Wenn auch der Wärme der erste Antrieb für die Bewegung und Annäherung der Dämpfe zugeschrieben werden muss, so würden sie doch nicht gehemmt und zurückgehalten werden, wenn der Einfluss der Wirkungssphäre nicht vorhanden wäre. Wie ich früher bereits ausgeführt habe,[1] ist die Ausdehnung dieser Sphäre nach der Dicke der Ablagerungsschichten viel größer, als es die älteren Werte angeben, aber sie ist wahrscheinlich zugleich nach der Art der einwirkenden Stoffe verschieden, und deshalb hat die Frage nach ihrer absoluten Größe nur geringeres Interesse.

Unterschiede in der Adsorption.

Es ist schon darauf hingewiesen, dass der Schwefelkohlenstoff an der Holzkohle unvergleichlich fester haftet als an Thonerde oder Eisenoxyd und dass diese Festigkeit im ersten Falle an diejenige einer chemischen Verbindung erinnert. Aber auch in anderer Beziehung unterschied sich die Adsorption durch die Kohle ganz wesentlich. Während die beiden anderen Körper in einer mit dem Dampf von Wasser oder von Schwefelkohlenstoff vermischten Atmosphäre nach 5 bis 10 Tagen ein ziemlich constantes Gewicht annehmen, war die Aufnahme von Schwefelkohlenstoff durch Kohle in 20 Stunden so vollständig beendigt, dass ihr jetzt vorhandenes Gewicht in den 10 folgenden Tagen unverändert blieb und nur an einzelnen Tagen etwas hin- und herschwankte. Als nachher ein Theil des Schwefelkohlenstoffes verdunstet war und die Kohle mit dem Rest in ganz feuchte Luft gebracht wurde, nahm ihr Gewicht zwar etwas zu, und es konnte auch durch eine neue Aufnahme von Schwefelkohlenstoff ein etwas größeres Gesammtgewicht erreicht werden, aber dieser Zuwachs erwies sich nicht

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 105, IIa, April 1896.

beständig und war nach einigen Tagen bei 0·419 *g* Kohle bis auf 4 *mg* verschwunden.

Das stärkere Anhaften der Dämpfe an die Holzkohle gab sich weiter noch in der geringeren Veränderlichkeit des gebildeten Productes bei Temperaturschwankungen zu erkennen. Th. de Saussure hatte in seiner bekannten älteren Untersuchung bereits festgestellt, dass bei 10 verschiedenen Gasen die Adsorption durch Buchsbaumkohle in 1 bis $1^1/_2$ Tagen vollständig beendigt wäre. Der schnelle Abschluss scheint also durch eine Eigenthümlichkeit der Holzkohle bedingt zu sein.

Die Verbindung des Wassers mit Eisenoxyd und besonders mit Thonerde ist wieder viel beständiger als diejenige des Schwefelkohlenstoffes. Weshalb die Ablagerung der beiden Dämpfe an diese Oxyde so auffallend langsam erfolgt, ist bis jetzt völlig unaufgeklärt und räthselhaft geblieben. Bei dem adsorbierten Wasser könnte man besonders für die Thonerde an eine allmähliche Umwandlung in Hydroxyd denken, aber dann müsste die ganze Menge des Wassers oder wenigstens ein Verbindungsgewicht desselben mit gleicher Leichtigkeit entfernt werden können, während in Wirklichkeit die Schwierigkeit der Verdunstung in dem Maße wächst, wie der Rest des gebundenen Wassers kleiner wird, ein Theil davon wird bei gewöhnlicher Temperatur überhaupt nicht an die durch Schwefelsäure getrocknete Luft abgegeben. Für die Annahme einer molecularen Umänderung bei der Adsorption von Schwefelkohlenstoff ist noch weniger ein Anhalt gefunden. Welcher Art aber auch diese Vorgänge sein mögen, es ist nach der Festigkeit der entstehenden Producte, wie nach der Art ihrer Bildung eine unbestreitbare Thatsache, dass die beschriebene Adsorption durch Holzkohle von derjenigen der Thonerde und des Eisenoxydes sich wesentlich unterscheidet.

Der innere Druck, die innere Reibung, die Größe der Molekeln und deren mittlere Weglänge bei Flüssigkeiten

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. April 1902.)

Wie für ein Gas müssen wir auch für eine Flüssigkeit annehmen, dass die Molekeln bei einer bestimmten Temperatur eine bestimmte mittlere kinetische Energie besitzen. Diese hat einen bestimmten Druck zur Folge, welcher gleich sein muss dem äußeren Drucke p, der auf der Flüssigkeit lastet, vermehrt um den sogenannten inneren Druck P, den wir uns durch die Anziehungskraft der Molekeln hervorgebracht denken. Halten wir die Flüssigkeit auf constantem Volumen, so wird die Wärme, welche wir ihr zuführen, lediglich zur Erhöhung der kinetischen Energie der Molekeln verwandt. In diesem Falle wächst die mittlere kinetische Energie einer Molekel proportional der absoluten Temperatur der Flüssigkeit, folglich muss für diesen Fall auch die Summe aus innerem und äußerem Drucke proportional der absoluten Temperatur sein. Für die absolute Temperatur T sei der innere Druck P; der äußere sei bei dieser Temperatur so klein, dass er vernachlässigt werden kann. Wir erhöhen nun bei constantem Volumen die Temperatur um Δ; der äußere Druck soll dabei die Größe p annehmen; der innere Druck bleibt in diesem Falle constant. Wir erhalten sonach folgende Gleichung:

$$\frac{P}{P+p} = \frac{T}{T+\Delta}. \qquad 1)$$

Ist bei vernachlässigtem äußeren Drucke für die Temperatur T das Volumen der Flüssigkeit v, für die Temperatur $T+\Delta$ entsprechend v', so können wir:

$$v' = v(1+\alpha\Delta) \tag{2}$$

setzen und α den Ausdehnungscoefficienten der Flüssigkeit nennen. Wollen wir die Flüssigkeit vom Volumen v' bei constanter Temperatur aufs Volumen v zurückbringen, so haben wir einen entsprechend hohen äußeren Druck p aufzuwenden, und wir können schreiben:

$$v = v'(1-kp), \tag{3}$$

wobei wir k den Compressionscoefficienten nennen. Aus Gleichung 2) folgt nun:

$$v'-v = v'\alpha\Delta,$$

aus Gleichung 3):

$$v'-v = v'kp,$$

folglich ist:

$$\alpha\Delta = kp$$

oder:

$$\Delta = \frac{k}{\alpha}p.$$

Führen wir diesen Wert für Δ in Gleichung 1) ein, so finden wir nach leichter Reduction:

$$P = \frac{\alpha}{k}T. \tag{4}$$

Wir erhalten also durch diese Gleichung die Möglichkeit, den inneren Druck einer Flüssigkeit aus dem Ausdehnungs- und Compressionscoefficienten zu berechnen.

In der Abhandlung: »Das Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln«[1] habe ich gezeigt, dass für eine ideale Flüssigkeit gerade so wie für den dazugehörigen »idealen« Dampf das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Molekeln gilt. Wir wollen annehmen, dass dies auch für gewöhnliche Flüssigkeiten der Fall sei, was

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CXI, 1902.

mit großer Annäherung sicherlich zutrifft. Steht die Flüssigkeit mit dem zugehörigen gesättigten Dampf im thermischen Gleichgewichte, so muss die Zahl der Molekeln, welche in der Zeiteinheit aus dem Dampf in die Flüssigkeit übertreten, gleich sein der Zahl der in einer Secunde entgegengesetzt wandernden Molekeln. Diese Überlegung ergibt die Gleichung:

$$\frac{2P}{m\alpha^3\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du = \frac{N}{2}\bar{u}, \qquad 5)$$

in welcher die Buchstaben folgende Bedeutung haben: P ist der innere Druck, m die Masse einer Molekel, α die mittlere Geschwindigkeit der Molekeln, u die Geschwindigkeitscomponente einer Molekel senkrecht zur Oberfläche der Flüssigkeit, $\bar{u}$ der Mittelwert sämmtlicher positiver u, a die Arbeit, welche zur Überwindung der Capillarkraft nothwendig ist, wenn die Molekel aus dem Inneren der Flüssigkeit ins Innere des Dampfes übertritt. N ist die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit des Dampfes. Beachten wir noch, dass der äußere Druck

$$p = \frac{Nm\alpha^2}{2},$$

folglich:

$$\frac{N}{2} = \frac{p}{m\alpha^2}$$

ist, so können wir 5) auch schreiben:

$$\frac{2P}{\bar{u}\alpha\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du = p$$

oder

$$\frac{2P\alpha}{\bar{u}\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} \frac{u}{\alpha} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} d\left(\frac{u}{\alpha}\right) = p.$$

Die Durchführung der Integration ergibt dann:

$$\frac{P\alpha}{\bar{u}\sqrt{\pi}}\left|-e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\right|_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} = \frac{P\alpha}{\bar{u}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2a}{m\alpha^2}} = p. \qquad 6)$$

Wie ich früher gezeigt[1] habe, können wir:

$$\frac{2a}{m\alpha^2} = \frac{rJ}{RT}$$

setzen, was in Gleichung 6) eingesetzt, schließlich ergibt:

$$p = Pe^{-\frac{rJ}{RT}}$$

oder

$$P = pe^{\frac{rJ}{RT}}. \qquad 7)$$

Es bedeutet hier r die Verdampfungswärme, J das mechanische Wärmeäquivalent, R die Gasconstante für die Masseneinheit Dampf.

Wir erhalten also auf diesem Wege ebenfalls einen Ausdruck für den inneren Druck einer Flüssigkeit.

Es erscheint mir nun nicht uninteressant, zu untersuchen, ob wir nach den beiden gewonnenen Formeln für die einzelnen Flüssigkeiten nach Einsetzung der numerischen Werte denselben inneren Druck erhalten. Da Gleichung 7) aus der Annahme folgt, dass die Molekeln für den flüssigen und dampfförmigen Zustand dieselbe Constitution besitzen, so ist der weitere Schluss erlaubt, dass für den Fall, als Gleichung 4) und 7) dasselbe numerische Resultat ergeben: die Flüssigkeits- und Dampfmolekeln gleichartig sind. Ist die Gleichartigkeit nicht vorhanden, so entspricht Gleichung 7) nicht den thatsächlichen Verhältnissen, und dann steht auch nicht mehr zu erwarten, dass die Gleichungen 4) und 7) denselben numerischen Wert für den inneren Druck liefern. Es hat sich in der That gezeigt, dass, soweit es das Beobachtungsmaterial gestattet, für Quecksilber beide Formeln denselben Wert des inneren Druckes

[1] L. c.

ergeben. Für andere Flüssigkeiten jedoch, wie Wasser, Äther etc. ergeben die verschiedenen Formeln gänzlich voneinander verschiedene Werte, so dass wir nicht annehmen können, dass für diese Flüssigkeiten die Constitution der Molekeln im flüssigen Zustande dieselbe ist wie im dampfförmigen.

Setzen wir mit Amagat für Quecksilber bei 0° C.: $k = 0{\cdot}000003918$ und nehmen wir für den Ausdehnungscoefficienten: $\alpha = 0{\cdot}0001818$, so ergibt sich nach 4): $P = 12700$ Atmosphären. — Für den Wert: $k = 0{\cdot}00000338$, welchen Colladon und Sturm angaben, wird: $P = 14700$ Atmosphären. Amaury und Descamps finden für 15° C.: $k = 0{\cdot}00000187$, demnach würde: $P = 28000$ Atmosphären. Es scheint dieser letzte Wert des k weniger zuverlässig zu sein als die Angaben von Colladon und Sturm und Amagat.

Berechnen wir nun nach Gleichung 7) den inneren Druck, so bietet sich dafür folgendes Beobachtungsmateriale. Nach Person ist die Verdampfungswärme des Quecksilbers bei 350° C. 62 Calorien, danach erhalten wir für den inneren Druck: $P = 20200$ Atmosphären. Es stimmen sonach thatsächlich, mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Bestimmung der in den Gleichungen vorkommenden Größen, die auf beiden Wegen gewonnenen Werte für den inneren Druck vollkommen befriedigend überein.

Machen wir nun für Äther dieselbe Rechnung, so erhalten wir nach Gleichung 4) einen inneren Druck von 2000 bis 3000 Atmosphären; nach Formel 7) aber den höchst unwahrscheinlichen Wert von gegen 100.000 Atmosphären. Ähnlich verhält es sich beim Wasser, so dass hieraus wohl aufs deutlichste hervorzugehen scheint, dass die Molekeln dieser Substanzen beim Übergange aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand ihre Constitution ändern.

Wir wollen jetzt versuchen, eine Formel für die innere Reibung der Flüssigkeiten abzuleiten. Wir verstehen dabei unter der inneren Reibung geradeso wie bei einem Gas die Gesammtbewegungsgröße, welche durch die Flächeneinheit einer Ebene in der Zeiteinheit infolge der Wärmebewegung der Molekeln getragen wird.

Bewegen sich die einzelnen Schichten eines Gases parallel zur xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und ist das Gefälle der sichtbaren Bewegung: $\frac{du}{dz}$, so lässt sich die innere Reibung per Flächeneinheit darstellen durch:

$$R = \frac{du}{dz} \Sigma nm\zeta z,$$

wenn wir unter ζ die Geschwindigkeit verstehen, welche eine Molekel parallel zur z-Achse hat, während z jene Lage der Molekel angibt, in welcher sie den letzten Zusammenstoß erfahren hat Nach der Untersuchung, welche ich in der Abhandlung: »Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase«[1] gemacht habe, ist letzter Ausdruck für R noch mit $\frac{5}{4}$ zu multiplicieren, so dass wir erhalten:

$$R = \frac{5}{4} \frac{du}{dz} \Sigma nm\zeta z.$$

Während bei verdünnten Gasen n einfach die Zahl der Molekeln in der Volumseinheit bedeutet, denen die Geschwindigkeitscomponente ζ zukommt, müssen wir diese Größe bei Flüssigkeiten, wie ich es bereits in der eingangs citierten Abhandlung gezeigt habe, durch ν ersetzen, wobei ν eine bedeutend größere Zahl ist als der dem n entsprechende Wert, da infolge der Zusammenstöße der Molekeln die Zahl jener, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer bestimmten Ebene passieren, bedeutend erhöht wird. Während wir bei verdünnten Gasen ohneweiters unter z die Ordinate des Mittelpunktes der Molekel einführen können, da wir die Größe der Molekel gegenüber deren mittlerer Weglänge als sehr klein ansehen, ist dies bei Flüssigkeiten jedoch nicht gestattet. Wir müssen dort im Gegentheile die mittlere Weglänge gegenüber dem Durchmesser der Molekel als sehr klein betrachten, so dass wir unter z nicht die Ordinate des Mittelpunktes einer Molekel, sondern die des jeweiligen Stoßpunktes der Ober-

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CVIII, S. 447 ff. (1899)

fläche der Molekel einführen müssen. Es ergibt sich aus dieser Betrachtungsweise ferner, dass zwischen zwei Zusammenstößen die Molekel kaum ihren Platz verlässt, so dass wir für die Entfernung der beiden Stoßpunkte im Raume einfach die Länge der Sehne einführen können, welche die beiden Stoßpunkte der Molekel miteinander verbindet. Da alle Punkte der Oberfläche einer Molekel mit derselben Wahrscheinlichkeit gestoßen werden, so ist der Mittelwert der Entfernungen zweier aufeinander folgender Stoßpunkte, wie man sich durch eine einfache Rechnung leicht überzeugen kann, gleich dem Radius der Molekel, also gleich $\frac{\sigma}{2}$. Diese Größen haben wir bei Flüssigkeiten an Stelle der mittleren Weglänge in die Formel für die innere Reibung einzuführen. Wir haben demnach zu setzen:

$$z = -\frac{\zeta\sigma}{2c}.$$ [1]

Danach ergibt sich weiter:

$$R = -\frac{5}{8}\frac{du}{dz}\frac{\sigma}{c}\Sigma\nu m\zeta^2.$$

Nun ist aber

$$\Sigma\nu m\zeta^2 = P,$$

d. i. der innere Druck der Flüssigkeit. Folglich können wir für die Reibung auch schreiben:

$$R = -\frac{5}{8}\frac{du}{dz}\frac{P\sigma}{c}$$

und für den Reibungscoefficienten

$$\eta = 5\frac{P\sigma}{8c}.$$

Da wir in der Lage sind, den Reibungscoefficienten einer Flüssigkeit experimental zu bestimmen und deren inneren

[1] Siehe das Nähere in den Lehrbüchern, z. B. Winkelman, Handbuch der Physik. Artikel: Kinetische Theorie der Gase.

Druck, wie früher gezeigt, zu berechnen, so ergibt die letzte Formel die Möglichkeit, den Durchmesser einer Flüssigkeitsmolekel zu ermitteln, da ja nach ihr ist

$$\sigma = \frac{8c\eta}{5P}.$$

Wenden wir dies wieder auf Quecksilber an und setzen wir für 0° C. $P = 13000$ Atmosphären, $\eta = 0\cdot01697$ (S. Koch), $c = 18431\,cm$ berechnet aus der Druckformel: $p = \frac{\rho c^2}{3}$, so finden wir nach der letzten Gleichung:

$$\sigma = 38.10^{-9}\,cm.$$

Falls wir annehmen, wie wir bisher thaten, dass im flüssigen Zustande die Molekeln sehr nahe aneinander liegen, so lässt sich für Flüssigkeiten der Wert der relativen Größe des Raumes, welchen eine Molekel einnimmt, leicht aus dem Moleculargewichte und dem specifischen Gewichte ρ der Flüssigkeit finden. Die Durchmesser der Molekeln sind dann einfach den Cubikwurzeln dieser Räume proportional. Wenn also z. B. der Durchmesser der Wassermolekel: $43.10^{-9}\,cm$ gesetzt wird (Mittel aus sechs verschiedenen Berechnungsweisen),[1] so ergibt sich für den Durchmesser der Molekel anderer Flüssigkeiten:

$$\sigma = 43.10^{-9}\sqrt[3]{\frac{M}{18\rho}},$$

woraus für Quecksilber folgt:

$$\sigma = 40.10^{-9}\,cm.$$

Wir haben eine geradezu glänzende Übereinstimmung der von uns angewandten Methoden.

Mit Zuhilfenahme des inneren Druckes der Flüssigkeit sind wir auch in der Lage, eine Formel für die mittlere Weglänge der Molekeln abzuleiten, falls wir voraussetzen, dass die

[1] G. Jäger, Über die Größe der Molekeln. Monatshefte für Mathematik und Physik. Dritter Jahrgang, S. 235 ff.

Molekeln Kugelgestalt besitzen. Die mittlere Weglänge finden wir aus der mittleren Geschwindigkeit einer Molekel und der Zahl der Zusammenstöße, die sie mit anderen Molekeln in der Secunde macht. Nennen wir die mittlere Geschwindigkeit c, die mittlere Weglänge λ, so ist $\frac{c}{\lambda}$ die Zahl der Stöße, welche eine Molekel in der Secunde erfährt. Ist N die Zahl der Molekeln in der Volumseinheit der Flüssigkeit, so ist $\frac{Nc}{2\lambda}$ die Zahl sämmtlicher Stöße, welche in der Secunde in der Volumseinheit stattfinden, wobei der Zweier davon herrührt, dass an jedem Zusammenstoße zwei Molekeln theilnehmen. Aus der Zahl der Zusammenstöße lässt sich nun abermals eine Formel für den inneren Druck ableiten, wie ich dies bereits in der Abhandlung: »Die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens«[1] gezeigt habe. Gewisse Zusammenstöße der Molekeln werden unter der Bedingung erfolgen, dass die relative Geschwindigkeit mit der Centrilinie zweier Molekeln beim Stoße den Winkel χ einschließt. Die Zahl derselben erhalten wir, wenn wir die Gesammtzahl der Stöße $\frac{Nc}{2\lambda}$ mit $2 \sin\chi \cos\chi d\chi$ multiplicieren. Wollen wir dann von dieser neuen Zahl noch die Zahl jener kennen lernen, für welche die Centrilinie mit der Normalen zu jener Ebene, für deren Flächeneinheit wir den Druck berechnen, den (spitzen) Winkel α einschließt, so haben wir noch mit $\sin\alpha d\alpha$ zu multiplicieren. Diese letzte Zahl ist also:

$$\frac{Nc}{\lambda} \sin\chi \cos\chi d\chi \sin\alpha d\alpha.^1$$

Bei jedem solchen Stoße erfährt die Bewegungsgröße eine Förderung:

$$\sigma m r \cos\chi \cos^2\alpha,$$

wobei wir unter r die relative Geschwindigkeit der Molekeln gegeneinander verstehen. Wie ich in der bereits citierten

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CV, S. 15 ff. (1896).

Abhandlung gezeigt habe, entspricht die Gesammtsumme der Förderung der Bewegungsgröße per Zeiteinheit in der Volumseinheit dem inneren Drucke des Gases, in unserem Falle der Flüssigkeit. Da wir von vornherein genöthigt waren, wie es ja eigentlich nicht streng richtig ist, Mittelwerte der Geschwindigkeit und der Stoßzahl einzuführen, so wollen wir auch jetzt für die relative Geschwindigkeit $r = \frac{4}{3} c$ setzen, was der Fall wäre, wenn wir sämmtlichen Molekeln die Geschwindigkeit c ertheilen. Darnach ist die Förderung der Bewegungsgröße für alle Stöße gleich:

$$\frac{4Nc^2 \pi m}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \chi \cos^2 \chi d\chi \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{4Nc^2 \pi m}{9\lambda}.$$

Diese Größe ist nun auch gleich dem inneren Drucke, also:

$$P = \frac{4c^2 \pi \rho}{9\lambda},$$

indem wir noch beachten, dass $Nm = \rho$ der Dichte der Flüssigkeit ist. Für die mittlere Weglänge der Flüssigkeitsmolekeln erhalten wir sonach:

$$\lambda = \frac{4c^2 \pi \rho}{9P}.$$

Nach den uns bereits bekannten numerischen Werten der einzelnen Größen erhalten wir für die mittlere Weglänge der Quecksilbermolekeln im flüssigen Zustande

$$\lambda = 6.10^{-9} \, cm.$$

Es ist dieser Wert also thatsächlich, wie wir vorausgesetzt haben, bedeutend kleiner als der Durchmesser einer Quecksilbermolekel.

Versuch einer Berechnung der Luftdruckänderungen von einem Tage zum nächsten

von

Dr. **Felix M. Exner.**

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. April 1902.)

Die vorliegende Arbeit enthält einen Versuch, auf Grund der Hydrodynamik das in den täglichen synoptischen Wetterkarten angehäufte Material von Luftdruckvertheilungen sowie von deren Änderungen von einem Tage zum nächsten zur Darstellung der Bewegungen im Luftmeere und deren Gesetze zu verwerten und den Weg zu einer bis zu gewissem Grade exacten Methode der Vorausbestimmung des Luftdruckes anzubahnen.

Eine aufmerksame Betrachtung einer größeren Zahl von Wetterkarten führt nothgedrungen bald zu der Erkenntnis, dass es, auch abgesehen von der oft besprochenen Erscheinung der Zugstraße der Depressionen, Luftdruckvertheilungen gibt, die unter bestimmten Voraussetzungen häufig, oft auch fast regelmäßig an gewissen Orten wiederkehren, deren Ursache man daher in der geographischen Beschaffenheit daselbst zu suchen veranlasst wird. Ich erinnere z. B. an den so oft wiederkehrenden Verlauf einer Isobare längs des ganzen Kammes der Alpenkette mit der Biegung nach Süden im westlichen Theile derselben. Solcher Erscheinungen gibt es gewiss viele, doch besteht eine große Schwierigkeit, dieselben irgendwie in exacter Weise darzustellen oder zu definieren, theilweise weil die Wetterkarten uns nur alle Tage ein Bild des momentanen Zustandes am Grunde des Luftmeeres geben,

hauptsächlich aber, weil durch Übereinanderlagerung der verschiedensten Vorgänge eine Isolierung und Erkenntnis des Einzelnen fast ausgeschlossen ist. Versuche, gewisse geographische Einflüsse, besonders der Alpen und hoher Küsten, bei bestimmten Wetterlagen mittels Berechnung von Mittelwerten der Druckvertheilung oder bloßem statistischen Abzählen darzustellen, führten zu keinem allgemein befriedigenden Resultate und waren die nächste Veranlassung zu dem Versuche, die totale Erscheinung der Luftdruckänderung an einem Orte in ihre einzelnen Summanden zu zerlegen und so den Einfluss derselben einzeln kennen zu lernen, sowohl in Bezug auf ihre Richtung als auf ihre Größenordnung. Die eine Kategorie der Erscheinungen, welche eine Änderung des Luftdruckes zur Folge haben, ist schon erwähnt worden; sie umfasst jene Vorgänge, die an die geographische Lage des Ortes im weitesten Sinne dieses Wortes gebunden sind. Die zweite, weitaus allgemeinere und wichtigere Kategorie aber enthält jene Vorgänge, die sich auf Grund einer bestimmten Luftdruckvertheilung im Sinne der Hydrodynamik wegen der flüssigen Eigenschaft der Luft entwickeln und abspielen; sie bestehen der Hauptsache nach im Ausgleiche von Luftdruckdifferenzen unter dem Einflusse der Erdrotation.

Sehen wir zunächst von den Vorgängen der ersten Kategorie ganz ab und suchen wir die Ausgleichstendenz von Luftdruckdifferenzen zu formulieren. Wenn wir für sämmtliche mit der Höhe in der Atmosphäre variierenden Größen, als Druck, Dichte und Temperatur, einen bezüglichen Mittelwert annehmen, so können wir die Erscheinung der Luftbewegung als in der ganzen Höhe gleichmäßig vor sich gehend ansehen und, soweit die Krümmung der Erde nicht in Betracht kommt, sie auf ein orthogonales Coordinatensystem beziehen. Sei p der mittlere Druck, ρ die mittlere Dichte, T die mittlere Temperatur der Luftsäule, t die Zeit, x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes P, so lautet die hydrodynamische Continuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Hier bedeuten u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten nach der x-, y-, z-Richtung im Punkte P. Es gelte das Boyle-Mariotte'sche Gesetz $p = \rho RT$ (R = Gasconstante); dann ist auch für constantes T:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (pu)}{\partial x} + \frac{\partial (pv)}{\partial y} + \frac{\partial (pw)}{\partial z} = 0.$$

Die Annahme über die Mittelwerte von p, ρ und T kann wie alle folgenden Abstractionen und Voraussetzungen zwar plausibel gemacht, aber doch nur durch das Resultat gerechtfertigt werden; doch ist zu betonen, dass die obenstehende Differenzialgleichung im übrigen strenge gilt, dass also die Druckänderung $\frac{\partial p}{\partial t}$ während einer kurzen Zeit dt nur von den Verhältnissen im nächsten Umkreise von p abhängt, es also für dieselbe ganz gleichgiltig ist, ob tiefe Depressionen oder hohe Maxima in der Umgebung von P lagern. Es ist nicht unwichtig, sich dies vor Augen zu halten. Die nächste Annahme betrifft die Geschwindigkeiten u und v. Es sei

$$\sqrt{u^2 + v^2} = q \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2};$$

q ist eine nicht näher bestimmte positive Constante. Die Geschwindigkeit in der Horizontalen sei also proportional dem horizontalen Gradienten.

Wie in Fig. 1 angegeben, sei φ der Winkel des negativen Gradienten GG' mit der X-Axe, α der Winkel, den die Geschwindigkeit $c = \sqrt{u^2 + v^2}$ mit dem Gradienten bildet; da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} \cos \varphi$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} \sin \varphi,$$

so folgt:

$$u = -q \left[\cos \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial p}{\partial y}\right],$$

$$v = q \left[\sin \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial p}{\partial y}\right],$$

weil

$$u = -c\cos(\alpha - \varphi), \qquad v = c\sin(\alpha - \varphi).$$

Über α wird zunächst keine Annahme gemacht; die Geschwindigkeit c wird im Mittel nach der Höhe rechts oder

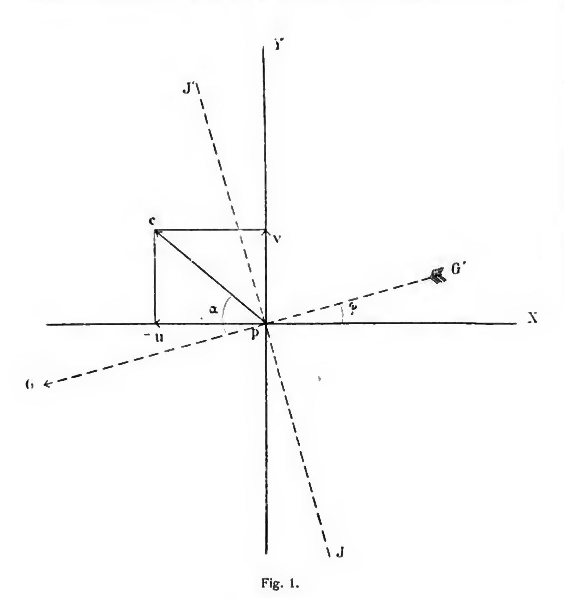


Fig. 1.

links von der Geraden JJ', der Tangente an die Isobare im Punkte P, liegen können.

Werden die Werte für u und v nun in die Continuitätsgleichung eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = pq \cos\alpha\left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)\right] + q\cos\alpha\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right] -$$

$$-pq\frac{\partial p}{\partial x}\left[\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]+$$

$$+pq\frac{\partial p}{\partial y}\left[\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]-\frac{\partial(pw)}{\partial z}.$$

Das letzte Glied $-\frac{\partial(pw)}{\partial z}$ wurde bei der Kleinheit von w, da über die Größe der Verticalgeschwindigkeit nichts bekannt ist, in der folgenden Untersuchung nicht berücksichtigt. Doch sei bemerkt, dass, wenn man dasselbe in die beiden Glieder $-\frac{\partial p}{\partial z}w-\frac{\partial w}{\partial z}p$ zerlegt und das letzte wegen der Kleinheit von $\frac{\partial w}{\partial z}$ weglässt, dann bei einer bestimmten durch die übrigen Glieder der Gleichung gegebenen Druckvertheilung die Verticalgeschwindigkeit w verkehrt proportional der Druckabnahme $\frac{\partial p}{\partial z}$ mit der Höhe ist. w wird also größer in einem ceteris paribus warmen Theil einer Cyclone als in einem kalten, was mit der größeren Verbreitung der Niederschläge im Süden als im Norden einer Depression unserer Halbkugel übereinstimmt.

Die nächste Annahme, die gemacht wird, ist folgende:

$$pq\cos\alpha = a,$$

$$q\cos\alpha = b,$$

$$-pq\left[\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]=c,$$

$$pq\left[\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]=d.$$

Hier sollen die Größen a, b, c und d für einen bestimmten Punkt der Erdoberfläche näherungsweise Constanten sein. Die Gleichung lautet dann:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right]+b\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]+c\frac{\partial p}{\partial x}+d\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Schreibt man für die Summe der zweiten Differentialquotienten der Bequemlichkeit halber das bekannte Symbol $\nabla^2 p$ und für die Summe der Quadrate der ersten $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^2$, wo $\frac{\partial p}{\partial n}$ die Zunahme des Druckes in der Normalen zur Isobare bezeichnet, so ist auch:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\nabla^2 p + b\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^2 + c\frac{\partial p}{\partial x} + d\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Mittels dieser Gleichung wurde der Versuch gemacht, die Änderung des Luftdruckes darzustellen, und zwar, obwohl dieselbe nur für das Zeittheilchen dt gilt, für die Dauer von 24 Stunden. Letztere Annahme ist es, welche wohl die größten Fehler mit sich brachte; es konnte aber an eine Integration der Differentialgleichung nicht gedacht werden. Die Constanten a, b, c, d wurden empirisch aus den in den Wetterkarten verzeichneten Druckvertheilungen bestimmt, und zwar auf folgende Weise: Legt man durch einen Ort auf der Wetterkarte ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit der positiven X-Axe gegen Osten, der positiven Y-Axe gegen Norden, und bezeichnet man den Druck im Punkte P selbst mit p, den im Punkte mit den Coordinaten $(+1, 0)$ mit p_x, den in $(-1, 0)$ mit p_{-x}, den in $(0, 1)$ mit p_y, den endlich in $(0, -1)$ mit p_{-y}, so kann man setzen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_x - p_{-x}}{2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_y - p_{-y}}{2},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = p_x + p_{-x} - 2p, \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial y} = p_y + p_{-y} - 2p.$$

Im Sinne der Differentialrechnung müssten die hier mit der Länge 1 bezeichneten Strecken natürlich äußerst klein gewählt werden. Hier ist dies aber nicht möglich und wäre auch gar nicht von Vortheil; die Ungenauigkeiten in der ermittelten Druckvertheilung sind viel zu groß, und außerdem ist es möglich, durch Wahl einer ziemlich großen Einheitsstrecke den Einfluss etwas entfernterer Gebiete, der sich ja im Laufe eines Tages natürlich geltend macht, in die Rechnung einzuführen.

Wenn man nun die aus den Wetterkarten (sei es aus der Lage der Isobaren, sei es aus gemessenen Druckwerten) ermittelten Drucke $p, p_x, p_{-x}, p_y, p_{-y}$ in die Rechnung einführt, so liegt dem wieder die Annahme zugrunde, dass die an der Erdoberfläche beobachtete Luftdruckvertheilung gleichmäßig durch die ganze Höhe der Atmosphäre herrscht, was jedenfalls in Gebieten des Meeres oder nahe der Küste besser zutrifft als an Orten mit continentalem Klima.

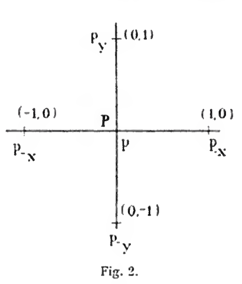


Fig. 2.

Unter $\frac{\partial p}{\partial t}$ wird im folgenden die Änderung des Druckes im Punkte P im Laufe von 24 Stunden verstanden. Da es, wie das Folgende zeigt, durchaus unklar ist, ob die Größen a, b, c, d von der Lage der Isobaren abhängen, so wurden aus einer größeren Zahl von Wetterkarten, die an einem Punkte ungefähr ähnlichen Verlauf der Isobaren zeigten, z. B. den Verlauf von SW nach NE mit dem Hauptdruckgefälle gegen NW, die Drucke $p_x, p_{-x}, p_y, p_{-y}, p, \frac{\partial p}{\partial t}$ bestimmt und in die obenstehende Gleichung eingesetzt. Als Einheitsstrecke wurden zunächst 3 Meridiangrade angenommen (im Maßstabe der Wetterkarte). Die Richtung E—W wurde dabei nicht genau eingehalten, da orthogonale Coordinaten auf die Kegelprojection der Karten übertragen wurden; doch dürfte dieser Fehler nur von sehr geringem Belange sein.

Die obige Gleichung ist allein aus der Hydrodynamik unter gewissen Voraussetzungen abgeleitet; es erübrigt nun noch, den Einfluss örtlicher Verhältnisse in Betracht zu ziehen und die Erdrotation zu berücksichtigen. Was letztere betrifft, so ist es hauptsächlich die allgemeine Circulation, und zwar in unseren Breiten die Strömung von W nach E, die eine constante Wirkung üben dürfte, bestehend in dem Nachrücken des

Druckes von W nach E. Ist $\frac{\partial p}{\partial x}$ positiv, d. h. tiefer Druck im Westen, so wird diese Circulation zur Änderung von p einen Beitrag leisten, der negativ, ist $\frac{\partial p}{\partial x}$ negativ, einen solchen, der positiv ist, und zwar wird dieser Beitrag in erster Näherung $\frac{\partial p}{\partial x}$ proportional sein; wir können also denselben zu dem Gliede $c\frac{\partial p}{\partial x}$ zuschlagen; das c, welches die Karten geben, wird dann nicht mehr die einfachere Bedeutung haben, die wir ihm oben zuschrieben.

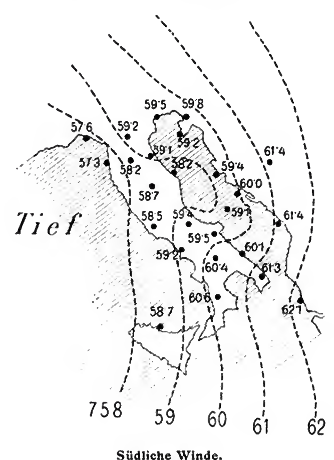
Ähnlich wird es mit dem Einflusse der örtlichen Verhältnisse sein, doch sei es gestattet, etwas näher hierauf einzugehen.

Die wichtigsten diesbezüglichen Erscheinungen dynamischen Charakters (von den thermischen werde abgesehen) dürften in Reibungswirkungen von hohen Küsten und Gebirgen bei Windrichtungen, die zu diesen parallel sind, und in Stauwirkungen bei Winden senkrecht zu ihnen bestehen.

Unter Reibungswirkungen werden hier solche verstanden, welche die Verzögerung einer Luftschichte gegen eine sich neben dieser parallel bewegende bewirken; solche Vorgänge werden die Bildung eines mehr oder weniger ausgeprägten Wirbels zur Folge haben, der, je nachdem er in cyclonaler oder anticyclonaler Richtung sich auszubilden bestrebt ist, sich verstärken oder abschwächen kann. Auf der nördlichen Halbkugel werden hiernach Winde, die längs einer Küste wehen, die Ausbildung einer Depression zur Folge haben können, wenn das Land links in der Richtung der Bewegung liegt; die Wirkung wird ausbleiben oder der Druck wird steigen, wenn das Land auf der rechten Seite ist. Ein Beispiel hiefür scheint mir die Entstehung der Minima an der südfranzösischen Küste zu sein, die fast mit vollkommener Regelmäßigkeit eintritt, wenn daselbst ein starkes Druckgefälle gegen Norden geherrscht hat.

Diese Wirkungen äußern sich oft auch nur in einer Ausbuchtung der Isobaren, so z. B. an den Küsten Italiens und der Küste Dalmatiens. Bei südlichen Winden tritt daselbst

verhältnismäßig tiefer Druck an der Ostküste von Italien ein, während die beiden anderen Küsten die Isobaren nicht merkbar zu beeinflussen scheinen; bei nördlichen Winden zeigen die Isobaren relativ tiefen Druck an der westitalischen und dalmatinischen Küste, wie aus mittleren Isobarenkarten, die für diese zwei vorherrschenden Windrichtungen aus je 60 Fällen



Südliche Winde.

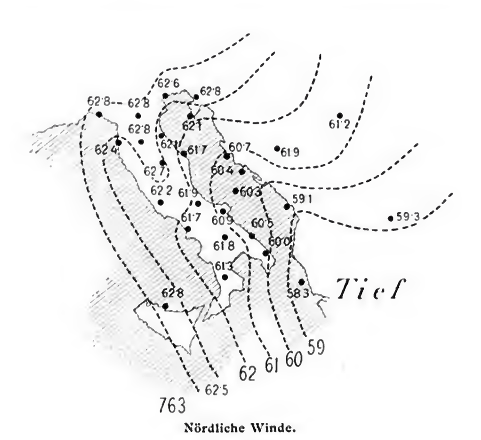
Fig. 3.

berechnet wurden, hervorgeht (siehe Fig. 3 und 4). An der Ost- und Westküste von Vorderindien tritt eine ähnliche Isobarenausbuchtung, in der Zeit der Südwest-Monsune an der Ostküste, in der Zeit der Nordost-Passate an der Westküste, ein und dauert continuierlich während der Zeit einer Windrichtung fort.

Die Continuitätsgleichung für einen circularen Wirbel in der X-Y-Ebene lautet, wenn r die Entfernung vom Mittelpunkte, $\dot{r}$ die Geschwindigkeit in der Richtung von r ist:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p\dot{r}}{r} + \dot{r}\frac{\partial p}{\partial r} + p\frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = 0.$$

Ist $\dot{r}$ dem Druckgefälle proportional analog der früheren Annahme, so liefert der Wirbel in den totalen Ausdruck für $\frac{\partial p}{\partial t}$ unserer Gleichung Glieder mit den ersten Differentialquotienten.



Nördliche Winde.

Fig. 4.

mit deren Quadraten und mit den zweiten, so dass es annähernd möglich sein dürfte, auch diese Verhältnisse in unsere Gleichung mit einzubeziehen und durch die empirischen Constanten auszudrücken.

Was die Stauwirkungen der Gebirge anlangt, so scheinen sie mir am besten in den so häufig wiederkehrenden Keilen hohen Druckes nördlich und südlich der Alpenkette ausgeprägt zu sein. Die ersteren treten bei Luftströmungen mit einer Com-

ponente gegen Süden, die letzteren bei solchen mit einer Componente gegen Norden auf. Sie erscheinen allerdings meist in der kälteren Jahreszeit; aber wenn auch thermische Verhältnisse dabei eine Rolle spielen, so ist doch in jener Zeit die Bewegung der Luft in unseren Breiten am größten und so die Gelegenheit für dynamische Wirkungen auch am ehesten gegeben. Streicht Luft mit der Geschwindigkeit u in der X-Axe senkrecht über eine Gebirgskette (deren Längenerstreckung in die Y-Axe fällt), so ist für den stationären Zustand folgende Gleichung die Bedingung der Continuität:

$$\int_E^\infty \frac{\partial(u\rho)}{\partial x}\,dh = 0$$

oder

$$\int_E^\infty \frac{\partial(up)}{\partial x}\,dh = 0$$

für eine constante mittlere Temperatur.

Hier ist E die jeweilige Höhe der Erdoberfläche über der xy-Ebene, eine Function von x.

Wenn die Gleichung erfüllt ist, so wird durch jeden Querschnitt senkrecht zu u, sei derselbe durch das Gebirge eingeengt oder nicht, dieselbe Quantität Luft fließen. Die Windgeschwindigkeit u wird jedenfalls eine Function von x und über dem Gebirge größer als über der Ebene sein; bei den complicierten Verhältnissen, wo auf- und absteigende Ströme, Reibung und Wirbelbildungen auftreten, ist es aber höchst unwahrscheinlich, dass ρ und somit p von x unabhängig sein und u allein die Continuität aufrecht erhalten sollte; es ist vielmehr anzunehmen, dass sowohl u als p Functionen von x sind, eine Stauwirkung im Sinne einer Druckänderung über dem Gebirge also vorhanden ist. Allerdings lässt sich diese nicht berechnen, ohne Annahmen über die Function u und das Profil des Gebirges zu machen. Doch kommt man wohl zu qualitativ richtigen Resultaten, wenn man voraussetzt, dass der eine Summand von p_H in der Höhe H, der Maximalhöhe des Gebirges, über der Ebene seinen kleinsten Wert hat, bei Annäherung an den Kamm des Gebirges wächst, über dem Kamme

seinen Maximalwert erreicht und dann wieder bis zur Ebene hinab abnimmt. Werde dieser Theil von p_H in Fig. 5 durch die Curve *AB* dargestellt und nimmt man noch den zweiten Summanden, nämlich den die Luftströmung erzeugenden Gradienten *CD* hinzu, so gibt die Superposition beider die für den »Keil« charakteristische Curve *CEFD.*

Mit einer gewissen Annäherung dürften sich auch diese Verhältnisse durch unsere Gleichung darstellen lassen. Da aber eine quantitative Berechnung der besprochenen und eventuell

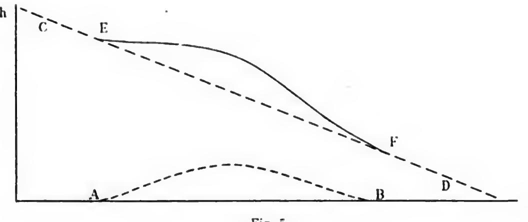


Fig. 5.

noch unbekannter ähnlicher Einflüsse nicht möglich ist, zeigt sich eben der Vortheil in der gewählten Methode, alle derartigen Factoren in empirische Constanten zusammenzufassen. Zugleich ist es klar, dass die geographischen Einflüsse ganz von den Windrichtungen abhängen.

Kehren wir nun zur Anwendung unserer Gleichung auf Wetterkarten zurück. Für einen gegebenen Ort wurden die Drucke p, p_x, p_{-x}, p_y, p_{-y} aus der Karte bestimmt und $\frac{\partial p}{\partial t}$, das ist die Druckänderung bis zum folgenden Tage, gebildet. 30 solcher Wertgruppen wurden vereinigt und aus ihnen gemäß der Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\nabla^2 p + b\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^2 + c\,\frac{\partial p}{\partial x} + d\,\frac{\partial p}{\partial y}$$

die Constanten *a*, *b*, *c*, *d* nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Da die Rechnung sehr langwierig und zeitraubend ist, so konnte sie bisher nur für 10 solcher Orte, beziehungsweise Situationen durchgeführt werden; da ferner die Constanten von der Windrichtung abhängig sind, wurden von vorneherein bestimmte Situationen zusammengefasst, z. B. solche mit dem Hauptdruckgefälle gegen NW für Wien; die Einheitsstrecke von 3 Meridiangraden erwies sich nicht überall als vortheilhaft, daher wurden öfters statt dieser 5° genommen, was im folgenden stets beigefügt ist; das für Wien gegebene Beispiel wird hiernach folgendermaßen bezeichnet: »Wien, NW, 3°«. In analoger Weise sind die übrigen Fälle im folgenden zur Vereinfachung genannt. Ich gebe zunächst die berechneten Constanten an und füge die Zahlen über die Genauigkeit dieser Darstellung später hinzu.

Es wurden folgende Constanten berechnet:

	Wien, NW, 3°	**Wien,** NE, 3°	**Wien,** SE, 3°	**Wien,** SW, 3°	**Paris,** NW, 5°
$a =$	0·740	0·301	0·322	0·417	0·301
$b =$	0·045	0·039	0·005	0·288	0·095
$c =$	—0·653	—1·050	—0·881	—2·133	—0·898
$d =$	0·812	0·493	0·265	—0·037	0·431

	Berlin, NW, 3°	**Stockholm,** W, 5°	**Toulon,** N, 5°	**Lesina,** W, 3°	**50° nördl. Br.** 10° w.L.v.G., 5°
$a =$	0·668	0·371	0·181	0·925	0·595
$b =$	0·262	0·002	—0·152	0·128	0·036
$c =$	—1·896	—0·200	—0·529	—1·628	—0·511
$d =$	1·116	0·815	—0·380	—0·555	0·482

Ich bemerke zunächst, dass die Constanten, die mit 3° Einheit berechnet wurden, sich mit denen von 5° nicht direct vergleichen lassen; von letzteren müssen *a* und *b* mit $\left(\frac{5}{3}\right)^2$, *c* und *d* aber mit $\frac{5}{3}$ multipliciert werden, um in der gleichen Einheit ausgedrückt zu sein. Was ferner den letzten Punkt betrifft, der im Meere südwestlich der Scilly-Inseln gelegen ist, so wurden seine Constanten ohne Rücksicht auf die Lage der

Isobaren ermittelt, da aus den anderen Rechnungen hervorzugehen schien, dass dieselben, wenn nicht locale Einflüsse eine bedeutende Rolle spielen, was für das Meer am wenigsten der Fall ist, für alle Wetterlagen dieselben sind. Natürlich kommen auch Temperaturverhältnisse in Betracht; doch wurden die jahreszeitlichen Schwankungen derselben nirgends berücksichtigt, indem unter je 30 Fälle solche aus ganz beliebigen Monaten Aufnahme fanden.

Ehe auf die Erörterung der Constanten etwas näher eingegangen wird, möge die Genauigkeit der Darstellung besprochen werden. Werden mittels der der Rechnung zugrunde gelegten Gradienten und der gefundenen Constanten die Änderungen $\frac{\partial p}{\partial t}$ berechnet, so stimmen diese Werte natürlich besser mit den gemessenen $\frac{\partial p}{\partial t}$ überein, als wenn ganz neue Controlefälle von ähnlichen Situationen mit den obigen Constanten berechnet werden; doch ist dieser Unterschied nicht besonders groß. Der Fehler eines gerechneten $\frac{\partial p}{\partial t}$ beträgt gegenüber dem gemessenen durchschnittlich ungefähr $100^0/_0$. Damit wäre wenig gewonnen, wenn diese Abweichungen in allen Fällen ziemlich gleichmäßig ausfielen. Nun zeigt sich aber, dass die Mehrzahl derselben verhältnismäßig gute Werte liefert, während eine geringe Zahl sehr bedeutende Fehler aufweist. Dieser Umstand ist ganz erklärlich aus der angewandten Methode: Die aus der Wetterkarte von 7^h a. bestimmte Druckvertheilung sollte 24 Stunden wenigstens qualitativ ähnlich anhalten, um richtige Werte geben zu können; es kommt aber häufig vor, dass dieselbe schon nach kurzer Zeit sich vollständig umgewandelt hat und jetzt die entgegensetzte Druckänderung bewirkt. Hier macht sich eben der Mangel einer Integration fühlbar. Da also die Bestimmung der Größe von $\frac{\partial p}{\partial t}$ sehr zweifelhafte Resultate ergibt, so wurde hauptsächlich das Vorzeichen von $\frac{\partial p}{\partial t}$ berücksichtigt, und es zeigt sich, dass in $70^0/_0$ bis $90^0/_0$ der untersuchten Fälle dasselbe richtig bestimmt

wurde. Es ist also als das Hauptergebnis der vorliegenden Untersuchung anzusehen, dass es mittels der angegebenen Methode bei den untersuchten Stationen möglich ist, mit 70% bis 90% Wahrscheinlichkeit vorauszusagen, ob der Luftdruck an einem Orte nach 24 Stunden gestiegen oder gesunken sein wird.

Die Genauigkeit, mit welcher sich die Druckänderungen an verschiedenen Stationen durch unsere Gleichung darstellen lassen, ist ziemlich ungleich. Wie zu erwarten, ist sie am größten bei Stationen mit geringen geographischen Einflüssen auf die Druckänderung; unter den berechneten Beispielen schließen sich jene von 50° nördlicher Breite und 10° westlicher Länge den Beobachtungen am besten an, obwohl für diese die Druckwerte nur den Isobaren der synoptischen Wetterkarten für den nordatlantischen Ocean entnommen wurden. Ziemlich gut stimmen ferner die Rechnungen für Stockholm und Paris, weniger die übrigen, am schlechtesten die für Wien und Berlin. Toulon und Lesina, die wegen ihrer deutlichen geographischen Verhältnisse von Interesse waren, zeigen im Durchschnitte nicht schlechtere Resultate als die übrigen Stationen, obwohl die Constanten eben durch jene Verhältnisse bedeutend modificiert erscheinen. Die Procentzahlen der Fälle, in denen das Vorzeichen richtig bestimmt wurde, sind im folgenden angegeben, und zwar I. für die Fälle, mit denen die Constanten berechnet wurden, und II. für andere zur Controle herbeigezogene, mit denselben Constanten behandelte Fälle.

	I.	II.
Wien, NW, 3°	77%	70%
Wien, NE, 3°	70	—
Wien, SE, 3°	70	—
Wien, SW, 3°	73	—
Paris, NW, 5°	87	70
Berlin, NW, 3°	70	67
Stockholm, W, 5°	73	73
Toulon, N, 5°	77	73
Lesina, W, 3°	77	70
50° N, 10° W, 5°	90	87

Für den letzten Ort sei es gestattet, die Druckänderungen im Laufe eines beliebigen Monates, wie sie berechnet und gemessen wurden, zusammenzustellen. Die Constanten waren wie in II. aus anderen Daten berechnet.

50° N, 10° W, 5°	$\frac{\partial p}{\partial t}$ berechnet	$\frac{\partial p}{\partial t}$ gemessen
1889, 1. Jänner....	3·2 *mm*	9·0 *mm*
2. »	2·3	6·5
3. »	—10·5	— 3·0
4. »	— 8·6	— 6·5
5. »	— 7·8	— 7·5
6. »	— 2·7	— 5·5
7. »	— 7·6	—18·0
8. »	17·5	13·0
9. »	5·1	8·5
10. »	— 3·7	—12·0
11. »	— 0·7	0·5
12. »	10·2	14·0
13. »	— 1·6	2·0
14. »	—10·6	— 6·0
15. »	— 7·0	— 5·0
16. »	5·1	14·0
17. »	—12·4	4·0
18. »	—11·0	2·5
19. »	— 1·5	— 0·5
20. »	— 1·6	0·0
21. »	— 0·6	0·0
22. »	— 2·5	0·0
23. »	— 1·2	0·0
24. »	— 2·0	0·0
25. »	— 5·2	0·0
26. »	— 4·8	— 1·0
27. »	— 3·1	— 3·0
28. »	— 5·2	—12·0
29. »	9·5	5·0
30. »	0·6	0·5

Der mittlere Fehler einer einzelnen Berechnung beträgt hiernach $\pm 6\, mm$. Bedenkt man alle bei dieser Berechnungsmethode gemachten Annahmen und Vernachlässigungen, besonders die Anwendung einer Differentialgleichung auf einen Zeitraum von 24 Stunden, die Annahme von durch die ganze Höhe der Atmosphäre gleichen Druckvertheilungen, die Nichtberücksichtigung der Temperaturverhältnisse, der inneren Reibung, der aufsteigenden Luftströme, der Niederschläge etc., und schließlich die Ungenauigkeit der Wetterkarten und mithin der aus ihnen entnommenen Druckwerte, so kann man nach den angeführten Resultaten der Methode eine gewisse Berechtigung wohl nicht absprechen; allerdings sind die oben gegebenen Zahlen von solchen, die mit fremden Constanten berechnet wurden, die besten. Doch kann es für die Prognose einer Druckvertheilung auch schon von Wert sein, wenn nur mit 70% Wahrscheinlichkeit das Vorzeichen von $\frac{\partial p}{\partial t}$ richtig bestimmt wird, und es ist zu erwarten, dass, wenn die Berechnung für viele Stationen durchgeführt würde, durch bloße Vergleichung der berechneten Änderungen für nahegelegene Stationen viele Fehler eliminiert werden und so die Wahrscheinlichkeit der richtigen Bestimmung von $\frac{\partial p}{\partial t}$ noch etwas gesteigert werden könnte; hiernach würde die Möglichkeit, eine qualitativ ziemlich richtige Druckkarte auf 24 Stunden vorauszuzeichnen, nicht ganz ausgeschlossen erscheinen.

Es ist auffallend, dass für die Orte mit geringen localen Einflüssen, wie den erwähnten Punkt südwestlich der Scilly-Inseln, ferner Stockholm und auch Paris das Vorzeichen von $\nabla^2 p$ für die folgende Druckänderung allein schon fast maßgebend ist und jedenfalls den größten Einfluss hat. Durch Berechnung der übrigen drei Glieder wird da nur mehr verhältnismäßig wenig gewonnen, im großen Gegensatze zu anderen Stationen, z. B. Toulon, wo das erste Glied eine geringe Rolle spielt und die anderen von großer Wichtigkeit sind. Es ist dadurch für erstere Stationen die Möglichkeit gegeben, aus bloß fünf Druckwerten ohne Kenntnis von Constanten mit einiger Wahrscheinlichkeit die Druckänderung zu

bestimmen. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt für Wien circa 70%, für Paris 72%, für Stockholm 75% und für den Punkt im Südwesten der Scilly-Inseln sogar 82%.

Eine Durchsicht der oben angegebenen Constanten drängt zu der Auffassung, dass dieselben für alle Isobarenlagen principiell dieselben sind und nur durch geographische Einflüsse an einem Orte bei verschiedenen Windrichtungen verschieden ausfallen. Die Constanten für 50° nördlicher Breite und 10° westlicher Länge scheinen typisch zu sein und den rein hydrodynamischen Theil zusammen mit der allgemeinen Circulation zu repräsentieren. Hiebei ist a positiv, ebenso b und d, während c negativ ist. In der Constante c ist jedenfalls die erwähnte Circulation von W gegen E enthalten, und zwar in einer allerdings unbekannten negativen Zahl, deren Größe entscheiden würde, ob das rein hydrodynamische c positiv oder negativ ist. Die Kenntnis der mittleren Geschwindigkeit der Weströmung in unseren Breiten und eine größere Zahl von ähnlichen Constanten für andere Orte ließe diese Entscheidung wohl zu; allein es fehlt leider an einer ausreichenden Menge von Berechnungen, weswegen die theoretische Prüfung der Methode überhaupt vorläufig nur angedeutet werden kann.

Über den Ablenkungswinkel lässt sich aus a und b nur folgern, dass derselbe kleiner als 90° ist. Was c und d betrifft, so muss, damit ersteres negativ, letzteres positiv sei, sowohl der Ausdruck

$$\sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

als auch:

$$\cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

positiv sein. Über sie lässt sich vorläufig nichts Bestimmtes aussagen, natürlich auch nicht, ob sie es sind, welche die Constanten c und d in ihrem Werte hauptsächlich bestimmen. Die Bestätigung der Theorie ist daher noch ganz unvollkommen, doch scheint die Möglichkeit vorhanden zu sein, bei Zuhilfenahme von mehr statistischem Materiale derselben auf dem angegebenen Wege näher zu kommen.

Leider ist die Berechnung der Constanten eine sehr langwierige und mühsame Aufgabe, wenn sie für viele Orte durchgeführt werden will, und die hier gegebenen Daten können nur als Beispiele aufgefasst werden; so würde auch bezüglich der praktischen Seite der Untersuchung, der Prognose, erst eine ausgiebigere Durchführung der Arbeit über die Verwendbarkeit entscheiden. Freilich ist mit einer Prognose der Druckvertheilung noch keine Prognose des Wetters gegeben; die anfangs eingeführte Gleichung zeigt zur Genüge die Compliciertheit des Zusammenhanges zwischen Druckvertheilung und Verticalgeschwindigkeit oder auf- und absteigendem Luftstrome.

Der Staubfall vom 9. bis 12. März 1901

von

J. Valentin in Wien.

(Mit 3 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1902.)

Einleitung.

Man hat auf unserem Planeten schon sehr verschiedene Arten von Niederschlägen beobachtet, welche jedesmal mehr weniger Aufsehen erregt haben. Besonders der sogenannte »Blutregen«, welcher schon von den alten Geschichtsschreibern erwähnt wird, wurde in früheren Zeiten als böses Omen betrachtet, solange man sich keine Rechenschaft über seine Herkunft zu geben vermochte. Wenn auch gegenwärtig der terrestrische Ursprung des Blutregens, d. i. eines mit röthlich-gelbem Staub vermischten Regens, fast allgemein zugegeben wird, so ist doch bei manchen derartigen Staubfällen deren Herkunft oft schwer festzustellen. Dies ist zwar bei dem Staubfalle vom März 1901, der sowohl wegen seiner Intensität, wie wegen seiner ungewöhnlichen Ausbreitung besonderes Aufsehen gemacht hat, nicht der Fall; kein Fachmann, der die Wettersituation an den in Betracht kommenden Tagen verfolgt hat, wird an der Herkunft des Staubes aus Afrika zweifeln, doch erscheint ein näherer Nachweis für diesen interessanten Fall deshalb angezeigt, weil er die Möglichkeit bietet, den Übergang einer Depression über die Alpen darzuthun, was bisher niemals so klar nachgewiesen worden ist, dass nicht noch immer Zweifel darüber erhoben würden. Ferner gibt dieser Staubfall wichtige Anhaltspunkte über die Luftbewegung in Cyclonen; denn durch den gefallenen Staub ist ja die Zugstraße

der Depression gegeben und die örtliche Vertheilung des Staubniederschlages in Bezug auf die jeweilige Lage des Centrums der Cyclone zeigt, dass die Wirbelbewegung der Luftmassen der Cyclone gegenüber der gewöhnlicher Annahme sehr gering ist.

Arago und Quetelet waren überzeugt von dem kosmischen Ursprunge aller Staubfälle, welche nicht vulcanischen Ursprunges sind, und erklärten den Staub als durch Explosion von Meteoren entstanden. Ehrenberg, dessen Ansichten lange Zeit in wissenschaftlichen Kreisen verbreitet waren, vermuthete, dass der Passat- und Polarstaub zum größten Theile aus einem permanenten Staubringe herstamme, der unsere Erdkugel, der Äquatorialebene parallel, umgibt. Beim Niedersinken mischt er sich mit terrestrischem Staube, hauptsächlich dem Passatstaube. Ehrenberg nahm allerdings an, dass das Material zu diesem Staubringe terrestrischen Ursprunges sei; er scheint sogar geglaubt zu haben, dass die Meteorsteine sich durch eine Art Condensation im Staubringe bilden.[1]

A. E. Nordenskiöld hält Ehrenberg's Ansicht bezüglich des Passat- und Polarstaubes fest und formuliert sie nach neueren Beiträgen zur Erforschung dieses Phänomens in folgender Weise[2]: »Ein Staubring von großer Ausdehnung umgibt unsere Erde, der Äquatorialebene parallel. Das Material in demselben besteht aus einem feinen, scharfkantigen Silicatstaube, mit einer wasserstoff- und stickstoffhaltigen Kohlensubstanz gemengt. Von diesem Ringe findet ein langsamer Staubniederschlag namentlich in den Äquatorialgegenden statt, wo der Staub beim Herabfallen als Passatstaub stark mit reinem terrestrischen Staube untermischt wird. In nördlicheren Gegenden ist dieser permanente Staubniederschlag weniger merkbar, aber hier werden durch zufällige Verrückungen im Staubringe, möglicherweise durch Meteore, vielleicht auch durch gewaltsame Vulcanausbrüche auf der Erdoberfläche hervorgerufen, zeitweilig bedeutendere Massen von Staub auf

[1] Ehrenberg, Passatstaub und Blutregen. S. 39 und 170.

[2] A. E. Nordenskiöld, Über den großen Staubfall in Schweden und angrenzenden Ländern am 3. Mai 1892. Meteorolog. Zeitschrift, Bd. XXIX. 1894, S. 218.

einmal, als »Polarstaub« herabgeführt. Dieser ist weniger als der Passatstaub mit terrestrischem Staube gemengt. Die Aufschlüsse, welche die astrophysischen Forschungen der letzten Jahre über das wahrscheinliche Entstehen der Sonnensysteme gegeben haben, das Zodiakallicht, die mächtigen Luftsedimentbildungen der Äquatorialgegenden und andere physische und geologische Verhältnisse sprechen kräftig für die Existenz eines solchen Staubringes, von dem in der ungeheuren Länge der geologischen Zeitperioden unserer Erdkugel neues Material zugeführt worden ist. Möglicherweise hat man hier eine Probe von einem Theile der Urnebulose, aus der unser Sonnensystem und besonders unsere Erdkugel herausaggregiert worden ist, einen Rest von dem Rohmaterial, aus dem in längstvergangenen geologischen Zeiten die granitischen Gesteinsarten gebildet worden sind.

Dieser Staubring darf nicht mit den Kometoiden verwechselt werden, von denen die Meteorsteine und der wirkliche kosmische Staub herrühren und die bei der Zusammenaggregierung der Erdkugel wahrscheinlich das Material zu den lagerförmigen Basalt- und Gabbrobildungen auf der Erdoberfläche, und zu den Schmelzherden im Erdinneren geliefert haben, aus denen die gangförmigen, plutonischen und vulcanischen Gesteinsarten hervorgebrochen sind«.

Wenn auch die Argumentation von Nordenskiöld einen Schein von Wahrscheinlichkeit hat und auf unleugbare Thatsachen sich stützt, so ist sie doch für die Erklärung der fraglichen Staubfälle[1] eine Hypothese, welche höchst problematisch, ja unhaltbar ist. Wenn sie auch einen Anhaltspunkt zur Erklärung des bis jetzt noch immer räthselhaften Zodiakallichtes gibt, so spricht doch das Fehlen von Beobachtungen anderer optischer Erscheinungen, welche dieser permanente, »durchsichtige« Staubring hervorbringen müsste, entschieden dagegen. Wenn der langsam sinkende Staub in unsere Atmosphäre kommt, müssten jedenfalls ähnliche Erscheinungen, wie die des Bischop'schen Ringes und der Dämmerungserscheinungen nach dem Krakatao-Ausbruche

[1] Es handelt sich ja nicht um Staubniederschläge, welche im Laufe von langen geologischen Zeitperioden stattgefunden haben können.

zu beobachten sein. Bei der Quantität des Staubes, welche in einzelnen Fällen, insbesondere auch bei jenem vom März 1901 gefallen ist, müssten ähnliche Beugungserscheinungen unbedingt aufgetreten sein, wenn der Staub längere Zeit in der Atmosphäre schwebend geblieben wäre.

Ferner bildet auch die ausgesprochen jahreszeitliche Vertheilung der Staubfälle große Schwierigkeiten für deren Herkunft von einem kosmischen Staubringe. Gerade die Abhängigkeit derselben von der Jahreszeit zeigt, dass wir die Ursache der Staubfälle auf der Erdkugel selbst zu suchen haben. Endlich spricht das Fehlen von Kobalt, Nickel und metallischem Eisen in den gesammelten Staubproben entschieden gegen einen kosmischen Ursprung desselben.

Für die weitaus größte Anzahl von Staubfällen ist der terrestrische Ursprung sicher nachzuweisen, nur ist der Nachweis in den einzelnen Fällen deshalb oft schwierig, weil der feine Staub wegen seiner Leichtigkeit von den Luftströmungen sehr weit fortgetragen werden kann, so dass sein Weg nicht immer leicht zu verfolgen ist. Bei anderen außergewöhnlichen Niederschlägen, wie Frosch-, Fisch-, Samenregen u. dgl., ist die irdische Herkunft viel leichter zu verfolgen, abgesehen davon, dass wir uns eine andere Herkunft nicht denken können.

Da die Staubfälle, insbesondere in Italien, immer unter denselben Erscheinungen auftreten: das Barometer fällt, die Temperatur steigt, es wird schwül, der ziegelfärbige Staub, welcher immer dasselbe Aussehen hat, fällt fast nur in Verbindung mit anderen Niederschlägen; so nahm Secchi[1] schon im Jahre 1864 den Ursprung aus Afrika an, weil die in Rom nicht seltene Trübung der Luft durch Staub immer bei Scirocco und großer Trockenheit eintritt. Tarry[2] stellte im Jahre 1870 die bestimmte Behauptung auf, dass die häufigen Staubfälle von Südeuropa aus der Sahara stammen. Hellmann weist auch in seiner Arbeit: »Über die im Atlantischen Ocean in der Höhe der Capverdischen Inseln häufig vorkommenden Staubfälle« den Ursprung dieser trockenen Staubfälle aus Afrika nach, welche jenem Theile des Atlantischen Oceans den Namen »Dunkel-

[1] Nach Jelinek, diese Sitzungsber., Bd. 53, 1866, S. 558.

[2] Comptes rendus, 1870, S. 1043 und 1369.

meer« gebracht haben. In vielen einzelnen Fällen hat man in neuerer Zeit dieses Phänomen vom Anfange bis zum Ende verfolgen können; besonders wichtig waren hiebei die täglichen Wetterkarten, aus welchen die Richtung der allgemeinen Luftströmungen entnommen werden konnte. In früheren Zeiten, als die heutige Communication noch nicht bestand, mussten ähnliche Erscheinungen allerdings räthselhaft erscheinen und zu phantastischen Erklärungsversuchen Anlass geben.

Damit will ich jedoch nicht behaupten, dass ein kosmischer Ursprung der Staubfälle, der vielfach früher behauptet wurde, ganz ausgeschlossen sei. Es wurde vielfach eine Explosion von Meteoriten zur Erklärung herangezogen und A. E. Nordenskiöld führt eine Anzahl von Staubfällen »unzweifelhaft kosmischen Ursprungs« an, die gleichzeitig mit Meteorfällen beobachtet wurden.[1] Als solchen führt er auch den Staubfall vom 5. November 1883 in einer Höhe von 11000 Fuß bei Paso de los Damas auf den Cordilleren von Chile an und erwähnt nach Dr. K. Stolp zum Beweise dafür den »rothen Schein«, der im Herbste des Jahres 1883 überall auf der Erde bei Sonnenauf- und Untergang zu beobachten war. Dieser »rothe Schein« ist aber nach den verschiedenen Untersuchungen, insbesondere von E. Douglas Archibald[2] und Kießling,[3] unzweifelhaft den

[1] 1618, August, Staubfall auf der Grenze von Ungarn und Steiermark bei gleichzeitigem Meteorfalle. — 1813, 14. März, Staubfall in Calabrien, in den Abbruzzen, in Toscana, Friaul und Krain, bei gleichzeitigem Meteorfalle in Cutro. — 1814, 5. November, Staubfall in Doab, Ostindien, mit gleichzeitigem Meteorfall. — 1869, 1. Jänner, Staubfall mit Meteorfall bei Hessle in Upland. — Besonders zweifelhaft erscheint wegen seiner Ausdehnung der Staubfall vom Jahre 1813; inwieferne die angeführten Thatsachen richtig sind oder nicht, ist wohl nicht mehr zu entscheiden. Abgesehen davon, dass die aufgeregte Phantasie in solchen Fällen eine Rolle gespielt haben kann, ist ja auch ein zufälliges Zusammentreffen eines Meteorfalles mit einem Staubfalle nicht ausgeschlossen. — Es scheint mir überhaupt kaum möglich, dass durch Explosion von Meteoren so gleichmäßig feiner Staub entstehen kann, wie er thatsächlich bei den Staubfällen beobachtet wird; es müssten jedenfalls auch viel größere Theilchen in großer Anzahl zu beobachten sein, wovon aber niemals berichtet wird.

[2] »The Eruption of Krakatoa«, Royal Society Comittee, 1888. Part IV, Section VII.

[3] »Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen zur Erklärung der nach dem Krakatau-Ausbruche beobachteten atmosphärisch-optischen Störung. 1888«.

durch den Krakatau-Ausbruch in sehr hohe Schichten der Atmosphäre hinaufgesendeten Staubmassen zuzuschreiben. Die Ursache des »rothen Scheines« war also in diesem Falle Staub unzweifelhaft terrestrischen Ursprunges; dass der in den Cordilleren gefallene Staub vom Krakatau-Ausbruche herstammen sollte, ist natürlich daraus nicht zu schließen, denn der Staubring hielt sich 2 bis 3 Jahre lang in der Atmosphäre. A. E. Nordenskiöld suchte in diesem einen Falle den kosmischen Ursprung des Staubes durch den »rothen Schein« nachzuweisen; gerade das Fehlen dieser optischen Erscheinung, welche sich längere Zeit vor jedem Staubfalle kosmischen Ursprunges zeigen müsste, spricht entschieden gegen eine solche Herkunft der oft sehr ausgedehnten Staubfälle. Dass die Wolken hiebei oft röthlich erscheinen, ist nur der Beimischung von röthlichem Staube zuzuschreiben, der in den Wolken selbst schwebt; der »rothe Schein«, die Beugungserscheinungen der nur langsam sinkenden Staubmassen, müsste sich auch bei klarem Himmel, und zwar längere Zeit vor dem Staubfalle zeigen, weil der feine Staub wegen des Luftwiderstandes nur äußerst langsam fallen kann.[1]

Eine weitere Ursache von Staubfällen, welche bei dem vom März 1901 nicht in Betracht kommt, sind Vulcanausbrüche, wodurch mehr weniger große Staubmassen in oft bedeutende Höhen der Atmosphäre hinaufgesendet werden. Es mag nur an die Verschüttung von Pompei durch Staub und Asche bei einem Ausbruche des Vesuvs erinnert werden. In diesem Falle liegt ein ungeheurer Staubfall in nächster Nähe des Vulcans vor, was durchaus nicht immer der Fall ist. So ist der Staubfall vom 30. April 1812 infolge eines Vulcanausbruches auf St. Vincent bekannt, bei welchem die ganze Insel Barbados, 80 *km* östlich von St. Vincent gelegen, mit einer 3 *cm* hohen

[1] Die Dämmerungserscheinungen anlässlich des Krakatau-Ausbruches waren ja sehr intensiv und doch scheinen die Staubmassen, welche dieselben hervorgebracht haben, nicht sehr dicht gewesen zu sein, weil der Staub einfach spurlos verschwunden ist, ohne dass Staubfälle bemerkt worden wären. Bei der Dichte der beobachteten Staubfälle wären ähnliche Erscheinungen viel intensiver zu erwarten, wenn der Staub aus dem kosmischen Staubringe langsam in unserer Atmosphäre sinken würde.

Staubschichte bedeckt wurde. Sehr wahrscheinlich ebenfalls vulcanischen Ursprunges war der Staubfall vom 30. März 1875 in Skandinavien, der nach dem Ausbruche eines Vulcans auf Island folgte. A. E. Nordenskiöld findet zwar Schwierigkeiten darin, dass der Staub sich 20 bis 30 Stunden in der Luft schwebend erhalten hat und mit einer Geschwindigkeit von 86 *km* pro Stunde nach Osten getragen worden ist. Beide Einwände entfallen nach den neueren Kenntnissen, insbesondere nach den Studien über den Krakatau-Ausbruch,[1] dessen Staubtheilchen 2 bis 3 Jahre lang in der Atmosphäre nachgewiesen werden konnten; eine Windgeschwindigkeit von 86 *km* pro Stunde ist in nicht allzu großen Höhen nach den neueren Ballonfahrten in der Regel zu erwarten. Außer dem Krakatau-Ausbruche ist noch von der neuesten Zeit der Ausbruch des Mauna Loa (Hawaii) zu erwähnen, dessen Aschentheilchen nach 14 Tagen auf Hawaii niederfielen, nachdem sie in der Höhe von der SW-Strömung 900 bis 1000 *km* weit getragen und von dem unteren NE-Passat wieder zurückgeführt worden waren, also im ganzen einen Weg von ungefähr 2000 *km* zurückgelegt hatten.

Außer diesen beiden Arten von Staubfällen, welche immerhin zu den Seltenheiten gehören, sind, insbesondere in den Mittelmeerländern, eigenartige Staubfälle eine häufig beobachtete Erscheinung. Weil es zur Feststellung der Ursache dieser und ähnlicher Staubfälle von Wichtigkeit ist, ihr jahreszeitliches Auftreten hervorzuheben, gebe ich im folgenden eine Reihe von Staubfällen wieder, welche ich aus verschiedenen Abhandlungen und Zeitschriften zusammengesucht habe; mit dieser Zusammenstellung ist zugleich die örtliche Vertheilung der Staubfälle für Europa gegeben.

1646, 6. October, in Brüssel.[2]
1689 in Venedig.[3]

[1] J. Kießling, Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen zur Erklärung der nach dem Krakatau-Ausbruche beobachteten atmosphärisch-optischen Störung. 1888.

[2] »Ciel et Terre«, XXII. Jahrg., Nr. 2, 16. März 1901.

[3] Prof. N. Passerini e Prof. G. D'Achiardi: »Sopra la pioggia melmosa«, Firenze 1901, p. 15 ff.

1763, in den ersten Tagen des Octobers in Ribemont, Picardie.[1]
1765, 14. November, in Ribemont, Picardie.[1]
1813, 14. März, in Calabrien und in den Abbruzzen, Toscana, Friaul und Krain.[2]
1816, 15. April, in Nord-Italien.[3]
1819, 2. November, in Blankenberg.[1]
1829, 1. October, in Orleans.[1]
1830, 16. Mai, in Siena.[1]
1836, 22. April, in Osteroide, Preussen.[1]
1840, 15. Mai, auf dem Mittelländischen Meere.[4]
1841, 17. bis 19. Februar, in Genua, Parma, am Lago maggiore und auf den Ost-Pyrenäen.[5]
1842, 24. bis 25. März, in Griechenland.[1]
1846, October, in Guyane, in den Vereinigten Staaten, auf den Azoren, in Mittel-Frankreich und Nord-Italien.[1]
1847, 16. bis 17. October, in Süd-Frankreich.[6]
1848, 31. Jänner, in Schlesien.[7]
1851, 4. Februar, in Graubünden (Schweiz).[6]
1854, 15. Februar, in Schlesien.[7]
1860, 28. December, in Siena.[8]
1862, 31. December, in Schlesien.[7]
1863, 7. Februar, auf den Canarischen Inseln.[9]
1863, 1. Mai, auf den Ost-Pyrenäen und Süd-Frankreich.[4]
1864, 22. Jänner, in Schlesien.[10]

---

[1] Prof. N. Passerini e Prof. G. D'Achiardi: »Sopra la pioggia melmosa«. Firenze 1901, p. 5 ff.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 53, 1866, S. 559.

[3] Met. Zeitschrift, XXIX. Bd., 1894, S. 216.

[4] Tissandier, »L'Océan aérien«, p. 217 ff.

[5] G. B. Canobbio, »Descrizione ed analisi d'un 'aqua di pioggia rossa caduta a Genova in Febbrajo 1841«, Giornale Astronomico 1842, Parma.

[6] Met. Zeitschrift, XIX. Bd., 1894, S. 201 ff.

[7] C. Jelinek, Mittheilung über einige in den letzten Jahren beobachtete Staubfälle. Diese Sitzungsber., Bd. 53, 1866. S. 555 ff.

[8] Comptes-rendus, LII. Bd., p. 107 und 1037.

[9] Comptes-rendus, LVII. Bd., p. 363.

[10] Prof. Ferd. Cohn, Über den Staubfall vom 22. Jänner 1864. Breslau 1864.

1864, 20. bis 21. Februar, in Rom und Krain.[1]
1864, 28. Februar, in Albanien.[1]
1865, 15. März, in Tunis und Rom.[1]
1866, 28. Februar, in Rom und Kärnten.[1]
1867, 15. Jänner, am Nordabhange der Seealpen und in Graubünden.[2]
1867, 20. März, in Galizien.[3]
1869, 10. März, in Palermo, Neapel, Rom und Subjaco.[4]
1869, 23. bis 24. März, in Sicilien, Calabrien, Neapel, Rom, Subjaco, Lesina, Krain und Steiermark.[5]
1870, 13. bis 14. Februar, in Italien.[4]
1872, 27. Februar, in Cosenza.[6]
1872, 7. bis 11. März, in Palermo, Cosenza, Rom und Perugia.[7]
1872, 19. bis 20. April, in Sicilien, ganz Italien und Lesina.[8]
1872, 10. Mai, in Sirakus.[9]
1874, 1. April, in Sicilien.[10]
1876, 9. October, in Boulogne.[9]
1879, 24. bis 25. Februar, in Algerien, Palermo, Neapel, Rom, Lesina, Istrien, Krain und Kärnten.[11]
1879, 17. Mai, in Sicilien.[10]
1880, 29. bis 30. März, in Catania und Modica, Sicilien.[12]

---

[1] C. Jelinek, Mittheilung über einige in den letzten Jahren beobachtete Staubfälle. Diese Sitzungsber., Bd. 53, 1866, S. 555 ff.

[2] Annali della Meteorologia Italiana, 1879, p. 105.

[3] Met. Zeitschrift, II. Bd., 1867, S. 380.

[4] Comptes-rendus, 1870, p. 534, 1043 und 1369; Instituto Veneto, S. III, t. XV, p. 1389 bis 1396.

[5] Met. Zeitschrift, IV. Bd., 1869, S. 203, 205, 206, 229, 230; Comptes-rendus, 1870, p. 1043 und 1369.

[6] Comptes-rendus, 1872, p. 826.

[7] G. De Lisa, »Il nebbione e la pioggia di sabbia 7, 8, 9, 10 e 11 marzo 1872, Palermo 1872; Comptes rendus 1872, p. 826 und 991.

[8] Comptes-rendus, 1872, p. 1268.

[9] Tissandier, »L'Océan aérien«, p. 217 ff.

[10] Prof. N. Passerini e Prof. G. D'Achiardi, »Sopra la pioggia melmosa«, Firenze 1901, p. 16.

[11] Met. Zeitschrift, XIV. Bd., 1879, S. 141 und 309.

[12] Atti della R. Akademia dei Lincei, Vol. IV, 1880, p. 163.

1880, 21. bis 25. April, in den Voralpen.[1]
1882, 6. bis 7. März, in Sicilien.[2]
1885, 14. October, in Klagenfurt.[3]
1885, 16. October, in Castasegna, Locarno und Baiern.[4]
1887, 3. Mai, in Süd-Tirol.[5]
1888, 5. Februar, in Schlesien, Mähren, West-Galizien und Nordwest-Ungarn.[6]
1889, 12. bis 15. Mai, in Biskra, auf Corsica, in Toscana, Emilien, Ligurien, Piemont und in der Lombardei.[2]
1892, 3. Mai, in Schweden und den angrenzenden Ländern.[7]
1893, 1. bis 3. Mai, in Nord-Russland, Finnland, Schweden und Dänemark.[8]
1896, 25. bis 26. Februar, in Ungarn, Steiermark, Niederösterreich bis Schlesien.[9]
1896, 4. November, in Bizerte.[10]
1897, 24. April, in Italien.[11]
1898, 15. bis 18. Februar, auf den Canarischen Inseln.[12]
1898, 6. bis 7. März, in Sicilien.[13]
1899, 10. März, in Sicilien.
1901, 9. bis 11. März, in Algerien, Tunis, Sicilien, Italien, Ost-Alpen, Dalmatien, Bosnien, Ungarn, Galizien und Nord-Deutschland.

[1] Comptes-rendus, XC. Bd., p. 2098.

[2] Prof. N. Passerini e Prof. G. D'Achiardi, »Sopra la pioggia melmosa«. Firenze 1901, p. 16.

[3] Met. Zeitschrift, XX. Bd., 1885, S. 419 und 518; diese Sitzungsber., 93. Bd., 1886, S. 81.

[4] Met. Zeitschrift, XXI. Bd., 1886, S. 24 und 36.

[5] Met. Zeitschrift, XXII. Bd., 1887, S. 336.

[6] Met. Zeitschrift, XXIII. Bd., 1888, S. 122.

[7] Met. Zeitschrift, XXIX. Bd., 1894, S. 201 ff.

[8] Met. Zeitschrift, XXX. Bd., 1895, S. 149.

[9] Met. Zeitschrift, XXXI. Bd., 1896, S. 105 und 469; Verhandlungen der k. k. geol. Reichsanstalt, 1896, Nr. 9; Mittheil. der Section für Naturkunde, 1896, Nr. 3.

[10] Comptes-rendus, 1896, II. Th., p. 1093.

[11] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Ser. V, vol. VI, p. 299.

[12] Bolletino dell'Accademia Gioena in Catania. Fascicolo LXII, März 1898.

[13] Met. Zeitschrift, XXXVI. Bd., 1901, S. 236.

image
not
available

fast nur auf die Sommermonate beschränkt, wo die Erwärmung des Bodens oft Veranlassung zur Bildung heftiger Luftwirbel gibt, welche je nach den vorhandenen atmosphärischen Bedingungen mehr weniger weit fortziehen. Nach den Beobachtungen von Reisenden ist an 30°/₀ aller Tage die Luft am Rande der Sahara mit Staub erfüllt.

Ich erwähne noch die Staubstürme, welche Peking[1] im Winter sechs- bis siebenmal im Jahre heimsuchen und auf mehrere Tage in einen dicken Staubnebel hüllen. Diese Staubstürme treten nur bei W- und NW-Winden auf, sind an eine besondere Vertheilung des Luftdruckes geknüpft und bringen den Sand aus der mongolischen Wüste. Im Süden von Russland[2] sind Staubstürme ebenfalls eine sehr häufige Erscheinung; sie reißen die oberen Schichten des Erdbodens auf und tragen den Staub oft sehr weit fort. Diese Orkane scheinen aus einer Reihe von Wirbelstürmen zu bestehen, welche in parallelen Gruppen weiterziehen; im weiteren Verlaufe reißen die Stürme den Boden nicht mehr auf, sondern es tritt nur leichter Staubnebel ein. Ebenso sind in Mesopotamien häufig sehr dichte Staubfälle beobachtet worden; am 20. Mai 1857 wurde Bagdad bei SW-Sturm um 5^h p. in eine Staubwolke gehüllt, welche die Stadt in die dunkelste Nacht versenkte. Der Übergang zur vollständigen Finsternis geschah in weniger als einer Viertelminute, nach 5 Minuten trat dunkelrothe Färbung ein, welche nur langsam lichter wurde. Ein englischer Dampfer beobachtete dieselbe Erscheinung um dieselbe Zeit 150 Meilen südlich von Bagdad.[3] Ebenso regelmäßig sind im Nilthale trockene Staubfälle bei heißen Stürmen von der lybischen Wüste her. Vom westlichen Afrika führt Hellmann in seiner Arbeit: »Über die im Atlantischen Ocean in der Höhe der Capverdischen Inseln häufig vorkommenden Staubfälle« 65 Staubfälle in den Jahren 1854 bis 1871 an. Diese Staubfälle waren oft gleichzeitig an mehreren Orten und dauerten manchmal mehrere Tage. Im Jahre 1859 wurden auf englischen Schiffen 14 Staubfälle beob-

[1] Harrington, »Peking Duststorms«. Met. Zeitschrift, XXI. Bd., 1886, S. 548.

[2] Met. Zeitschrift, XXX. Bd., 1895, S. 149.

[3] Met. Zeitschrift, V. Bd., 1870, S. 469.

achtet; nur in den Jahren 1855, 1864 und 1870 sind von dieser Region keine Staubfälle berichtet worden. Von den 65 Staubfällen waren 8 Sandfälle, 3 Sand- und Staubfälle. Bei den Capverdischen Inseln sind jährlich circa 13 bis 15 Staubfälle zu erwarten, am häufigsten im Jänner und Februar, wo der Passat am kräftigsten vom Lande her weht. Nach den Untersuchungen von Hellmann und Dinklage[1] ist kein Zweifel mehr, dass dieser Staub aus der afrikanischen Wüste stammt.

Auf die verschiedenen Erscheinungen bei anderen Arten von Tromben, Tornados und ähnlichen Luftwirbeln, welche oft die verschiedensten Niederschläge hervorgebracht haben, braucht hier nicht eingegangen zu werden.

I.

Bevor an die Darstellung der atmosphärischen Verhältnisse zur Zeit des Staubfalles, welche zu demselben Veranlassung gegeben haben, geschritten wird, halte ich es für nothwendig, die räumliche und zeitliche Vertheilung des Staubfalles, wie sie durch die verschiedenen Berichte gegeben ist, zusammenfassend wiederzugeben.

Die folgenden Angaben sind zum größten Theile den verschiedenen kleinen Mittheilungen über den Staubfall, welche im Jahrgange 1901 der »Meteorologischen Zeitschrift« enthalten sind, entnommen; davon verdienen besonders hervorgehoben zu werden die Aufsätze von K. Prohaska, S. 231, S. Róna, S. 173 und 279. Ferner wurden die Angaben der Wetterkarten, insbesondere jener von Algerien, zuhilfe genommen, welche durch die Notizen in den »Comptes-rendus«, Tome 132, p. 899 und p. 1153, vervollständigt wurden. Von den österreichischen Alpenländern lagen mir 48 Berichte mit und 37 ohne Staubproben, nebst 42 Fehlberichten vor, welche von den Herren Professor Fugger und v. Angermayr in Salzburg in dankenswerter Weise aus eigener Initiative durch Rundfragen gesammelt wurden. Außerdem fanden sich in den Beobachtungs-

---

[1] »Staubfälle im Passatgebiete des Nordatlantischen Oceans«, Segelhandbuch für den Atlantischen Ocean. Hamburg 1899.

bögen von 37 meteorologischen Stationen kurze, auf den Staubfall bezügliche Notizen vor. Ein Vergleich der verschiedenen Mittheilungen zeigt, dass Localeinflüsse von großer Bedeutung für die Vertheilung des Staubfalles waren; es kommen öfters benachbarte Orte vor, von denen der eine den Staubfall meldete, während der andere eine Fehlanzeige einsendete. Etwas verdächtig dürften allerdings die Fehlanzeigen mancher Orte sein, doch im allgemeinen sind Täuschungen nicht anzunehmen, weil in den Alpenländern fast überall noch Schnee lag, an welchem eine röthliche Färbung hätte auffallen müssen. Manche Fehlanzeigen sind jedoch sicher darauf zurückzuführen, dass nach dem röthlichen Schnee gewöhnlicher weißer Schnee fiel, der die röthliche Schichte bedeckte. Die Daten für Norddeutschland, von welchen ich nur eine geringe Anzahl fand, konnte ich nach der soeben erschienenen Arbeit von G. Hellmann und W. Meinardus: »Der große Staubfall vom 9. bis 12. März 1901« im letzten Augenblicke wesentlich vervollständigen.

Schon am 8. März morgens meldet Dielfa, im Süden von Algier, dass in der Nacht ein Sandsturm vorübergezogen ist; im westlichen Theile von Algier herrschen NW- und NNW-Winde bis zu Orkanstärke, in Tunis stürmische Südwinde; in Touzeur, im südlichen Tunis, herrschte ebenfalls am 8. März ein Sandsturm. Vom 8. bis zum 9. ist die Temperatur im Inneren von Algier etwas gefallen, in der Nacht fiel fast überall Regen, vielfach mit Schnee und Graupeln gemischt. Am 9. März morgens herrschen im nördlichen und mittleren Theil Algeriens und Tunesiens schwache, unbedeutende Winde von variabler Richtung. In Ouargla, an der Südgrenze von Algerien, zieht ein Sandsturm vorüber, um 9^h a. ist die Luft in Biskra ganz mit Staub erfüllt; in Tunis tritt um 9^h p. ein Wetterumschlag ein, heftiger, heißer Scirocco stellt sich ein, röthlichgelbe Wolken ziehen von Süden herauf. Im äußersten Süden von Tunesien stellen sich Sciroccostürme von einer bisher nie erlebten Heftigkeit ein, in Sfax, an der Ostküste von Tunesien, zieht in der Nacht eine Staubtrombe vorüber. An der Westseite von Algerien fällt in der Nacht Regen und

vielfach Schnee bei Temperaturen wenig über Null und schwachen NW-Winden. In Tunesien ist die Temperatur mit dem Einsetzen des Scirocco plötzlich in die Höhe gegangen und steht fast um 20° höher als im westlichen Algerien.

Während der ganzen Nacht vom 9. zum 10. wüthet in Tunis der Scirocco, der dort eine häufig beobachtete Erscheinung ist. Am Morgen des 10. hüllt dichter Nebel von braungelber Farbe die Stadt ein, der Scirocco dauert fort, die Luft ist ganz undurchsichtig, es wird so finster, dass man in den Wohnungen Licht anzünden muss, eine angezündete Kerze brennt im Freien mit einer sehr weißen Flamme, so intensiv wie Auerlicht, gleichzeitig fällt langsam dichter, dunkelgelber Staub; die Finsternis dauert mit kurzer Unterbrechung um die Mittagszeit bis nach 4^h p. fort; um diese Zeit wird der Staubfall schwächer, eine leichte NW-Brise setzt ein, die schweren Wolken beginnen sich zu zerstreuen und die Sonne dringt weißlichblau durch den Nebel. In Ouargla herrscht am 10. wieder ein Sandsturm; im Westen von Algerien fällt vielfach Schnee und Hagel auf dem Hochplateau, in der Niederung Regen, die stürmischen Winde verlieren allmählich ihre Heftigkeit. —

Im folgenden können nur Angaben gemacht werden, wann der Niederschlag erfolgte, da der Staubfall nicht trocken, sondern nur in Verbindung mit Niederschlägen erfolgte; diese Angaben sind natürlich für den Staubfall selbst nicht ganz genau, da die Niederschläge nicht immer schon am Beginne mit Staub gemischt waren; vielfach fiel zuerst gewöhnlicher Niederschlag, wie daraus zu ersehen ist, dass in den Alpen zuerst weißer, dann röthlicher Schnee fiel.

In Sicilien waren ganz ähnliche Erscheinungen zu beobachten, wie in Tunis; der heiße Scirocco setzte auch dort schon in der Nacht vom 9. zum 10. März ein, eine fahle Wolkendecke bedeckte am 10. morgens den Himmel, durch welche die Sonne mittags nur bläulich durchscheinen konnte, das Tageslicht war ähnlich wie bei einer Sonnenfinsternis; dabei herrschte die für den Scirocco charakteristische Trockenheit der Luft. In Catania, wo nur schwächere NE-Winde herrschen, beginnt der mit Staub gemischte Regen schon um 9^h a.; an der Süd-

küste von Sicilien zieht um 7^h p. ein Gewitter auf, von 9^h p. bis Mitternacht fällt schwacher, staubvermischter Regen; in Palermo fällt der Staubregen bei heftigem Sciroccosturm gegen Mitternacht.

Vom 10. morgens an weht über ganz Süditalien ein heftiger, heißer Scirocco, der das ganze Land in eine rothe Dunstwolke hüllt. In Castrovillari, Calabrien, beginnt ein ergiebiger Staubregen um die Mittagszeit. In Neapel wird gegen 5^h p. eine Fata morgana beobachtet, welche von der ungleichmäßigen Temperierung der Luft zeigt; abends stellt sich eine auffallend rothe Abenddämmerung ein, die Stadt ist von grellem Lichte überflutet, dem gegenüber die bereits brennenden Straßenlaternen einen kläglichen Eindruck machen. In der Stadt liegt allerwärts dicker Staub; wer zu dieser Zeit auf der Straße war, wurde ganz mit Staub bedeckt, man konnte die Augen nur schwer offen halten und dachte allgemein an einen Ausbruch des Vesuvs, welcher im Nebel unsichtbar war; die Erscheinung dauerte ungefähr 3 Stunden. In Avellino bei Neapel begann schon morgens ein dichter Staubfall.

In Rom war ebenfalls eine auffallende Abenddämmerung zu bemerken und in der Nacht vom 10. zum 11. fiel der sogenannte Blutregen; auch Wanderheuschrecken, welche in Italien nicht heimisch sind, wurden vom Winde gebracht. Während des Sciroccosturmes stieg die Temperatur auf 22° C.; am folgenden Tage wehte ein frischer Westwind. In Florenz fiel der mit Staub vermischte Regen um 10^h p., in Livorno um 11^h p. Im nördlichen Italien traten abends heftige Gewitter auf, die zum Theile von Hagelfällen begleitet waren, eine Erscheinung, die gewiss um diese Jahreszeit selten ist; der Niederschlag war überall mit Staub vermischt, nur im E der Apenninenkette, sowie auf Sardinien und Corsica und in Piemont scheint kein Staub gefallen zu sein.

Dagegen wurde der Staubfall im Osten des Adriatischen Meeres wieder beobachtet; in Lesina und Meleda setzte nachmittags Scirocco ein, nachts fiel leichter Staubregen. Auf der Insel Curzola trat der Staubregen bei heftigem Ostwinde um 2^h a. des 11. auf. In Sarajevo begann um 9^h p. des 10. ein

schwacher, staubgemischter Regen bei schwachem Nordwinde, in der Nacht war der Himmel mit tiefdunklen Wolken bedeckt.

In Fiume begann der Regenfall um 11 bis 12^h p. bei heftiger Bora, NE 4—6, während die Wolken aus SE zogen; der Staubniederschlag war deshalb nur an den nördlichen und östlichen Fenstern zu bemerken.

In Triest gewann der Scirocco erst um 4^h a. des 11. die Oberhand über die Bora; der schwache, staubgemischte Regen fiel in den Morgenstunden des 11. Besonders auffallend waren die schweren, ziegelfarbigen Wolken, welche in geringer Höhe mit großer Geschwindigkeit aus SE heranzogen.

In Görz fiel der Staubregen von 10^h p. des 10. bis 11^h a. des 11. aus scheinbar sehr niedrig schwebenden Wolken. In Mašun, am Krainer Schneeberge, setzten seit 3^h p. des 10. zwischen den Borastößen einzelne heftige Südwindstöße ein, welche von staubgemischtem Regen begleitet waren; um 9^h p. gewann der Südwind die Oberhand und von da an war der Staubfall ein continuierlicher.

Die Gewitter von Nord-Italien zogen nach Norden, erloschen vielfach am Südfuße der Alpen, einzelne Gewitterzüge aber überquerten fast die ganze Alpenkette, überall fiel die röthliche Färbung der Wolken auf. In den Carnischen Alpen und Dolomiten begann schon am Abend des 10. stürmisches, regnerisches Wetter, um Mitternacht zogen heftige Gewitter, vielfach bei stürmischen NE-Winden, vorüber.

Nach Kärnten[1] kam um 2^h a. des 11. ein heftiges Gewitter von Italien her nach Raibl, nachdem der Sturm auch hier schon vor Mitternacht eingesetzt hatte, und zog mit einer Geschwindigkeit von circa 50 *km* pro Stunde nach NNE bis Irdning in Obersteiermark, wo es um 4^h 30^m a. anlangte; in Kremsmünster fiel der Staubregen von 6 bis 7^h a. Der Staubniederschlag fand in den Alpen fast überall in Verbindung mit Schneefall statt, und zwar in der Art, dass zuerst weißer, dann röthlicher und darauf wieder weißer Schnee oder Regen folgte.

---

[1] Karl Prohaska, Rother Schnee, Schlammregen und Gewitter am 11. März 1901 in den österreichischen Alpenprovinzen. Met. Zeitschrift, 1901, S. 231.

Manche Orte melden, dass die Berggipfel weiß waren, weil der nachfolgende weiße Schnee den röthlichen überdeckte, während im Thale Regen folgte, so dass der unmittelbar vorher gefallene rothe Schnee sichtbar blieb. Der eigentliche Beginn des staubgemischten Niederschlages ist aus diesem Grunde nicht genau festzustellen, weil der gewöhnliche Niederschlag vielfach schon bedeutend früher begann; so meldet z. B. Döllach schon um 4^h p. des 10. Schneefall und abends Gewitter. In den Süd- und Centralalpen war der Südwind in den Thälern nicht vorhanden, wohl aber in der Höhe; deshalb waren auch die Südabhänge des Gebirges überall viel intensiver röthlich gefärbt, wie die Nordabhänge. Auf der Nordseite der Alpen herrschte am 10. nachmittags und in der Nacht zum 11. Föhn, auch Wetterleuchten im Süden wurde in der Nacht vielfach beobachtet; in den Morgenstunden des 11. stellten sich auch dort die Niederschläge ein; in Zell am See um 4^h a., sie waren aber bedeutend geringer als auf der Südseite der Alpen und hörten an den äußersten Ausläufern der Alpen fast gänzlich auf.

In dem östlichen Theile der Alpen wurde der Staubniederschlag nur mehr strichweise beobachtet, vielfach fanden überhaupt keine messbaren Niederschläge statt, dagegen ist er im ganzen westlichen Ungarn wieder aufgetreten, und zwar begann er in Fünfkirchen am 11. um $7^h 30^m$ a. bei NE 4, wobei jedoch die Wolken in bedeutender Höhe aus SW zogen, in Martinsberg um $9^h 30^m$ a., in Váczhartya um 11 bis 12^h a. und in Schemnitz mittags. Nördlich von den Karpathen setzte sich der Staubniederschlag in West-Galizien fort, er trat in Krakau am 11. um 4^h p., in Tarnow von 5 bis 6^h p. ein.

In Böhmen, Mähren und Schlesien fanden überhaupt keine Niederschläge statt; in Süd-Deutschland fiel allerdings an einzelnen Orten leichter Regen, dem aber kein Staub beigemischt war. Erst von Franken liegen wieder ganz vereinzelte Meldungen vor; in Bamberg begann der Niederschlag um 6^h a., in Sachsen 7 bis 8^h a., in Brandenburg 9 bis 11^h a., in Pommern 12 bis 3^h p., bei Königsberg nachts, im südlichen Holstein und an der unteren Elbe in den späteren Abendstunden und in den ersten Nachtstunden. In West-Deutschland sind von der Linie Frankfurt—Trier nordwärts schon in

den Vormittagsstunden einzelne Regenschauer mit Staubbeimischung niedergegangen, und zwar war die Fortpflanzungsrichtung derselben von Frankfurt aus eine westnordwestliche. Auch in Nord-Deutschland war der südliche Oberwind während des Regenfalles noch nicht bis zur Erdoberfläche herabgedrungen; bei Schneefall wurde ebenso wie in den Alpen die Beobachtung gemacht, dass nur die mittlere Schichte des gefallenen Schnees röthlich war.

II.[1]

Die im Vorangehenden gezeigte zeitliche und örtliche Vertheilung des Staubfalles spricht schon deutlich für den Ursprung des Staubes aus Afrika; noch mehr wird dieser Ursprung klar bei Betrachtung der Luftdruckvertheilung, beziehungsweise -Verlagerung während der in Betracht kommenden Tage. Ich habe mir zu dieser Untersuchung aus den verschiedenen Wetterkarten neue Karten für die betreffenden Tage construieren müssen, da die Wetterkarten der einzelnen Institute die Luftdruckverhältnisse nicht für das ganze in Betracht kommende Gebiet mit genügender Sicherheit wiedergeben. Für die Nachmittags- und Abendkarten habe ich mir die nothwendigen Daten von den betreffenden meteorologischen Landesinstituten erbeten.

Es wurden vorzüglich die algerischen und italienischen Wetterkarten verwendet; bei letzteren habe ich die Luftdruckangaben von 8^h a. nach den Autographen von Catania, Rom und Mailand auf 7^h a. reduciert. Die nothwendigen Daten für 2^h p. theilte mir Herr L. Palazzo, Director des meteorologischen Institutes in Rom, mit. Die Daten für die Abendkarten wurden ebenfalls nach den Autographen auf 9^h p. reduciert, wobei für Tunis und Algerien das in den algerischen Wetterkarten publicierte Barogramm verwendet wurde. Außerdem dienten mir zur Reduction auf die gleichen Termine 7^h a., 2^h p., 9^h p. die Barogramme von Zürich, München und Hamburg, und die Angaben der französischen Wetterkarten über die Luftdruckänderung in Paris von drei zu drei Stunden. Die Karten

[1] Zur Erläuterung dieses Abschnittes dienen die Isobarenkärtchen der Tafeln I und II.

für das Niveau 2500 *m* wurden auf Grund der Angaben der französischen Wetterkarten und den brieflichen Mittheilungen des Herrn Directors Billwiller, welcher mir die Barogramme von Zürich und Säntis zur Verfügung stellte, sowie des Herrn Directors Fr. Erk, welcher mir außer dem Barogramm von München die Terminbeobachtungen einer großen Anzahl von bairischen Stationen, insbesondere Höhen- und Gipfelstationen, mittheilte. Außerdem wurden neben den mir vollständig zur Verfügung stehenden Beobachtungen der österreichischen Höhen- und Gipfelstationen die Wetterkarten der deutschen Seewarte, insbesondere das darin enthaltene Barogramm für Hamburg zur Reduction auf die gleichen Termine, sowie die russischen Wetterkarten verwendet. Auf Grund dieses Materiales glaubte ich die Isobaren mit großer Sicherheit für die Zugstraße der Cyclone zeichnen zu können, insbesondere da keine bedeutenden Zeitdifferenzen für das in Betracht kommende Gebiet vorhanden sind.

Vom 7. zum 8. März ist eine Depression von der Nordsee über Frankreich nach Süden gezogen; am 8. morgens herrschten infolge dessen in West-Algerien stürmische NW-Winde, in Tunesien stürmische Südwinde. Am 9. morgens hat sich die Depression im westlichen Theile des Mittelländischen Meeres zum großen Theile ausgefüllt, die längere Axe der Ovalgestalt ist von SW nach NE gerichtet, während sie am Vortage von SSE nach NNW gerichtet war.

Infolge der verminderten Luftdruckdifferenz sind die Luftströmungen in Algerien und Tunesien sehr schwach und von unbestimmter Richtung. Dies ist die vorbereitende Luftdruckvertheilung, welche sehr ähnlich ist jener, welche den Cyclonen der tropischen und subtropischen Meere vorausgeht: geringe Luftdruckdifferenzen mit anfangs schwachen Winden von unbestimmter Richtung. Im Süden von Algerien und Tunesien nehmen aber schon tagsüber die Südwinde rasch an Stärke zu, Sandstürme haben sich in Ouargla und Biskra eingestellt.

Am 9. abends zeigt die Karte schon eine ausgesprochene Depression von allerdings nur geringer Tiefe über dem nördlichen Tunesien und dem südlichen Sardinien. Zu dieser Zeit setzt der heiße, heftige Scirocco in Tunis ein; in Sfax wird

eine Staubtrombe in der Nacht beobachtet. Am 10. morgens ist die Depression noch fast an derselben Stelle, mit dem Centrum ungefähr über Tunis, doch hat sie sich um ungefähr 5 *mm* vertieft; in Tunis herrscht kein Luftzug und es fällt langsam der dichte Staub, mit dem die ganze Luft erfüllt ist. Diese Windstille in Tunis ist offenbar mit der Windstille im Centrum der tropischen Cyclonen identisch. Im westlichen Theile von Sicilien, welches schon weiter vom Centrum der Depression entfernt, wüthet noch immer der Scirocco fort, der schon am Abende des Vortages sich eingestellt hat. Der Staubfall findet aber hier nur mehr in Verbindung mit Niederschlägen statt, die in den verschiedenen Theilen der Insel nicht gleichzeitig beginnen.

In Catania beginnt der Regenfall schon um 9^h a., der allgemeine Regenfall über Sicilien beginnt erst abends, um 7^h p. treten an der Südküste Siciliens Gewitter auf, von 9 bis 12^h fällt ein leichter Regen, welcher mit Staub vermischt ist; in Palermo beginnt der Regenfall erst gegen Mitternacht. Auffallend für die Situation, welche durch die Morgenkarte vom 10. gegeben ist, ist der Temperaturgegensatz auf der West- und Ostseite der Depression; ein solcher tritt ja bei allen Cyclonen stärker oder schwächer auf, dass er aber in so niedrigen Breiten so groß ist, wird nicht oft vorkommen. In Algerien ist die mittlere Temperatur ungefähr 8°, Constantine im östlichen Theile hat nur 5·2°, Tunis dagegen hat 13·4° und nahezu Windstille, Sfax 17·0°, Touzeur 22·2°, Djerba 20·0° und El-Djem 23·0° bei heftigen südlichen Winden. In Sicilien ist die Temperaturerhöhung im westlichen Theile der Insel besonders auffallend, Palermo hat 27·3°, Trapani 22·9°, d. i. für Palermo eine Temperaturerhöhung von 15·9°, für Trapani eine solche von 10·2° gegen den Vortag. Catania und Sirakus dagegen haben nur 12·8° und 14·0°. Diese hohe Temperatur auf der Südostseite der Depression hat jedenfalls dazu beigetragen, dass die Cyclone nicht nach Osten abbiegen konnte, wie es auf der nördlichen Hemisphäre Regel ist; denn wegen dieses Temperaturgegensatzes war der Luftdruck in der Höhe auf der Ostseite der Cyclone bedeutend höher als auf allen anderen Seiten.

Die Wetterkarte vom Nachmittage des 10. zeigt die Depression über Sardinien und Corsica, sie ist also um circa 500 *km* nach NNW gerückt; in Sardinien selbst ist die Temperatur nur auf 16° gestiegen, Palermo hat aber noch immer 27·3°, in Rom ist die Temperatur auf 22·3°, in Neapel auf 19·6° gestiegen. — Besondere Aufmerksamkeit verdient der Keil hohen Luftdruckes, welcher sich am Südfuße der Ostalpen gegen die Po-Ebene hin vorschiebt und Veranlassung war zu den heftigen Borastürmen an der Ostküste des Adriatischen Meeres.

Bis zum Abend des 10. ist die Depression nur wenig weiter nach Norden gerückt, das Centrum lagert jetzt über dem nördlichen Theile von Corsica; die Depression hat zwar an Tiefe nicht zugenommen, doch drängen sich die Isobaren zwischen Genua und Turin stark aneinander, man ersieht daraus den Einfluss des Landes, speciell des Gebirges, der darin besteht, dass die unteren Luftmassen dem Gradienten wegen der größeren Reibung nicht folgen können. Dieselbe Ursache hat wohl auch der Keil hohen Luftdruckes im Süden der Ostalpen, dessen stärkster Gradient nun mehr gegen die Centralalpen nach Norden gerückt ist, während er auf der Nachmittagskarte über dem Küstenland und Dalmatien lag. Infolge dessen gewinnt an der Ostküste der Adria der Südwind der höheren Luftschichten immer mehr die Oberhand gegen die Bora, und zwar für gleiches Niveau von SW nach NE, und von der Höhe in die Tiefe fortschreitend. Daraus erklärt es sich, dass der Niederschlag an Orten, welche nicht weit voneinander liegen, aber verschiedene Seehöhe haben, zu bedeutend verschiedenen Zeiten begann. So begann der Niederschlag auf der Südseite der Alpen vielfach früher als in Nord-Italien und dem Küstenlande; in Sarajevo, 537 *m* Seehöhe, begann der Regenfall schon um 9^h p. des 10., während er auf der Insel Curzola erst um 2^h a. des 11. begann, obwohl die Insel bedeutend weiter westlich liegt. Ebenso begann in Mašun, am Krainer Schneeberge (1003 *m* Höhe), der Kampf zwischen der Bora der unteren Schichten und dem Südwinde der oberen Luftschichten schon um 3^h p. des 10. und gewann letzterer um 9^h p. die Alleinherrschaft, während der Niederschlag in Fiume erst um

11 bis 12^h p. noch bei Nordostwind stattfand, wobei die Wolken aus SE zogen.

Der Keil hohen Luftdruckes über den Ostalpen war jedenfalls auch die Ursache des Föhn auf der Nordseite der Alpen, welcher in Bucheben schon um 3^h p. des 10. auftrat und in der Nacht auf der Nordseite der Ostalpen überall sich bemerkbar machte. Wir haben also hier die Erscheinung, dass Bora an der Adria und Föhn auf der Nordseite der Alpen gleichzeitig auftreten. Die Ursache beider im Wesen gleichen Erscheinungen ist in dem Keil hohen Luftdruckes zu suchen, der sich infolge Stauung der Luftmassen in den Gebirgsthälern gebildet hat.

Da es sich nun darum handelt, nachzuweisen, ob die Depression die Alpen wirklich überschritten hat, was in einigen Fällen fast sicher festgestellt ist, aber noch immer bezweifelt wird,[1] hielt ich es für nützlich, mir Isobarenkarten für ein höheres Niveau zu zeichnen. Der erste Versuch für 400 *m* Höhe ergab nun, dass diese Karte von der Karte für das Meeresniveau kaum zu unterscheiden war. Deshalb entschloss ich mich, die Isobaren für 2500 *m* Höhe zu zeichnen; ich konnte dazu die verschiedenen Gipfelstationen von den Pyrenäen bis zu den Karpathen verwenden, hatte also die Luftdruck- und Temperaturvertheilung von W nach E sichergestellt. Die Luftdruck- und Temperaturvertheilung von S nach N war allerdings weniger sicher festzustellen, besonders weil im Süden der Alpen jeder sichere Anhaltspunkt fehlte.[2] Es blieb mir daher nichts übrig, als von den Alpenstationen auszugehen und in der Höhe denselben Temperaturgradienten anzunehmen, wie er am Erdboden war. Dadurch gewann ich eine Isothermenkarte für 2500 *m*, welche in auffallendster Weise den Temperaturunterschied auf der West- und Ostseite der Cyclone zum Ausdrucke brachte, und damit konnte ich die Isobaren für dieselbe Höhe zeichnen. Dieser Vorgang schließt allerdings eine gewisse Willkür in sich; da es sich jedoch nur um die Isobaren für 2500 *m* handelt, können bedeutende

---

[1] Zeitlexikon 1901, S. 390.

[2] Das Ätna-Observatorium functioniert nach Angabe des Herrn Directors A. Riccò in den Wintermonaten nicht.

Fehler nicht vorkommen, weil Fehler in der Zeichnung der Isothermen für diese Höhe auf die Isobaren nur geringen Einfluss haben.

Es zeigt sich in dieser Abendkarte in 2500 *m* Höhe vom 10., dass das Centrum der Depression gegenüber der Lage im Meeresniveau etwas nach NW verschoben ist, die Axe der Cyclone war also nach dieser Richtung etwas geneigt, was von vorneherein durch den Einfluss der hohen Temperaturen auf der Südostseite der Depression zu erwarten war. Es zeigt sich aber weiter, dass die Depression nichts anders ist als eine Theildepression, welche zu dem über Finnland liegenden Minimum gehört. Aus dieser Luftdruckvertheilung in 2500 *m* ist nun zu erwarten, dass die Theildepression nach N weiter fortschreiten wird, um sich mit dem Hauptminimum zu vereinigen. Auffallend ist bei dieser Isobarenkarte in 2500 *m*, dass der Keil über den Ostalpen auch in dieser Höhe, wenn auch mit verringerten Gradienten, vorhanden ist; diesem Verlaufe der Isobaren entsprechen auch die Windbeobachtungen der Gipfelstationen in den Ostalpen:[1] Obir (2044 *m*) hat E 3, Sonnblick (3106 *m*) SSE 6, Schmittenhöhe (1968 *m*) E 8, Zugspitze (2964 *m*) SE 9. An den östlichen Ausläufern der Alpen ist ein Abströmen der Luft nach entgegengesetzter Luft angedeutet durch die Beobachtungen von der Raxalpe SW 6 und Schneeberg W 8. Es scheint sich also infolge des starken Gradienten in den unteren Luftschichten, dem die Luftmassen wegen der Gebirgszüge nicht folgen konnten, ein geschlossener kleiner Rücken hohen Luftdruckes gebildet zu haben, welcher selbst in 2500 *m* Höhe noch sehr deutlich ausgeprägt ist.

Auf der Westseite der Depression findet in größerer Entfernung vom Centrum in der Höhe schon ein Ausströmen der Luft statt, auf dem Pic du Midi (2859 *m*) wurde NE 1, auf dem Puy de Dome (1467 *m*) NNE 3 beobachtet; in unmittelbarer Nähe jedoch findet ein Einströmen zum Centrum der Depression statt: Mont Aigouat (1554 *m*) hat NW 6, Mont Ventoux (1900 *m*) NNE 3, Mont Mounier (2740 *m*) N 9.

---

[1] Windscala 0 bis 10.

Wie richtig der obige Calcul in Bezug auf das Weiterziehen der Cyclone, beziehungsweise Vereinigung der Theildepression mit dem Hauptminimum war, zeigt die Morgenkarte im Meeresniveau vom 11. März. Auf den ersten Blick fällt eine gewisse Ähnlichkeit dieser Karte mit der Isobarenkarte für 2500 *m* vom Vorabende auf. Die Depression hat sich beim Betreten des Festlandes etwas ausgefüllt, wie es ja bei Cyclonen als Regel gilt, doch ist schon deutlich der Charakter derselben als secundäre ausgesprochen. Allerdings zeigen sich auch zwei getrennte kleine Minima in derselben, eines bei Genua und das zweite bei Salzburg; letzteres ist in diesem Falle nur eine Wirkung des Föhn, welcher seit dem Vorabende am Nordfuße der Alpen herrschte. Durch denselben wurden die unteren Luftschichten erwärmt, wodurch ein Abströmen in der Höhe bewirkt wurde, und infolge dessen stellte sich über dem Föhngebiete niedriger Luftdruck ein. Es ist also in diesem Falle sicher der Föhn die Ursache, welche das kleine Minimum an den nördlichen Ausläufern der Alpen hervorgebracht hat, und nicht umgekehrt; diese Wirkung des Föhn hat auch R. Billwiller an einigen Beispielen deutlich nachgewiesen.[1] Das Minimum bei Genua ist zum Theile ebenfalls durch Erwärmung der unteren Luftschichten infolge des Sciroccos zu erklären, zum Theile als noch nicht ausgefüllter Rest der Cyclone vom Vorabende anzusehen, weil das Zuströmen durch das Gebirge geschwächt wurde.

Viel einfacher sind die Luftdruckverhältnisse am Morgen des 11. März in 2500 *m* Höhe; das Centrum der ausgeprägten secundären Depression liegt ungefähr über Zürich, die beiden kleinen Theilminima, in Genua und Salzburg, sind nicht mehr vorhanden; allerdings ist auch in diesem Falle die Axe der Cyclone wegen der bedeutend höheren Temperaturen im E derselben nach NW geneigt. Die höchste Temperatur für das Niveau 2500 *m* ist über den bairischen Gipfelstationen, von da nimmt sie nach W rasch, nach E langsam ab. Der Luftdruckvertheilung in der Höhe entsprechen ebenso wie am Abende vorher die Windbeobachtungen der Gipfelstationen. Die

[1] R. Billwiller, Bildung barometrischer Theilminima durch Föhne. Met. Zeitschrift, Bd. XXXVI (1901), S. 1 ff.

schweizerischen Gipfelstationen haben schwache Südwestwinde, die baierischen stärkere Südostwinde, bei den österreichischen Gipfelstationen dreht der Wind beim Fortschreiten nach E von SSE (Sonnblick) über S nach SW (Raxalpe); auf dem Großen Belchen wurde NW 2 beobachtet, also ein Einströmen der Luft zum Minimum. Der Pic du Midi mit NE 8 und Puy de Dome mit NE 1 zeigen wie am Vorabende ein Ausströmen, der Mont Aigouat mit NW 6, Mont Ventoux mit NW 3 und Mont Mounier mit W 3 in größerer Nähe des Centrums ein Einströmen der Luft in den höheren Schichten zum Centrum der Theildepression.

Beim Übergange der Depression über die Alpen fand der stärkste Staubniederschlag statt, und zwar, wie die Niederschläge überhaupt, hauptsächlich auf der Südseite der Alpen, wo es auch zu heftigen Gewitterentladungen kam. In Baiern fiel wohl in den Morgenstunden des 11. März leichter Regen, der aber keinen Staub mitführte, was wohl dadurch zu erklären ist, dass der Staub der niederen Luftschichten beim Übergange über die Alpen vom Regen und Schnee mitgerissen worden war und der in Baiern gefallene Regen nur aus den niederen Luftschichten fiel. Der in der Höhe befindliche, wegen seiner Feinheit nur langsam sinkende Staub konnte erst nach einiger Zeit in die unteren Schichten herabsinken, wo die Regenbildung stattfand.

Die Karte vom Nachmittage des 11. im Meeresniveau zeigt, dass die Depression nach NNE weitergerückt ist, der Charakter als secundäre ist schon viel deutlicher ausgeprägt, als am Morgen, indem sich der Rücken hohen Luftdruckes über Jütland weiter nach E zurückgezogen hat. Es zeigen sich jedoch auch auf dieser Karte zwei Theilminima, eines über Ischl, das zweite an der Nordwestecke des Böhmerwaldes. Beim Vergleiche der Karten vom Morgen und Nachmittage sieht es fast aus, als ob das Minimum von Genua nach Ischl, jenes von Salzburg zur Nordwestecke des Böhmerwaldes gezogen sei; die im Gebiete der Theilminima herrschenden Temperaturen deuten jedoch darauf hin, dass auch in diesem Falle Föhnwirkungen vorhanden sind, in Salzburg und Ischl sind die Temperaturen um fast 10° höher als in der Umgebung,

in Bamberg und Chemnitz ist der Unterschied zwar nicht so groß, aber diese Orte liegen am Nachmittage näher dem Centrum der Cyclone, so dass schon ein geringerer Temperatureinfluss in den unteren Schichten hinreichte, um das Theilminimum an der Nordwestecke des Böhmerwaldes hervortreten zu lassen. Eine wenn auch nicht so große Föhnwirkung wie in den Alpen kann durch den Böhmerwald hervorgebracht sein, von dem die Luft gegen das Centrum der Depression hin strömte. Auffallend ist die Ausbuchtung, welche die Depression über der Po-Ebene zeigt; dieselbe ist jedenfalls auch als Stauwirkung durch die Alpen zu erklären, welche durch größere Reibung den regelmäßigen Ausgleich der Gradienten verzögern; die Gebirge müssen infolge derselben sowohl das Abziehen eines Minimums, wie eines Maximums des Luftdruckes verzögern, weil die Luft im Gebirge bis zu 2000 bis 3000 *m* nicht dem Gradienten entsprechend so rasch folgen kann, wie über der freieren Ebene. Ein solcher Einfluss einer höheren Gebirgskette ist sicher anzunehmen, denn der Luftdruck bis 2000 bis 3000 *m* macht ja schon ein Viertel bis ein Drittel des Atmosphärendruckes aus, ist also jedenfalls von Bedeutung.[1]

Bis zum Morgen des 11. ist der Staubfall immer nur auf der Südostseite der Depression aufgetreten, und zwar in niederen Breiten bedeutend nach dem Vorübergange des Centrums der Depression für die betreffende Breite. Selbstverständlich trat auch noch eine Verspätung des Staubniederschlages mit der Entfernung nach E auf, die dem Fortschreiten des niederen Druckes nach dieser Richtung hin zuzuschreiben ist. Am 11. tagsüber jedoch tritt der Staubfall schon auch auf der Ost-, Nordost- und Nordwestseite auf, am Abend hat sich der Staubfall über das ganze Gebiet der Depression verbreitet. Diese

---

1 Eine Bestätigung hiefür sind die in den Alpen häufig vorkommenden Gradienten, zu deren Zustandekommen allerdings oft auch Föhnwirkungen in Betracht kommen mögen. So war am 11. März, 7^h a. der auf Meeresniveau reducierte Luftdruck in Salzburg 747·4, in Ischl 749·8, in Kremsmünster 751·9, in Klagenfurt 759·5, in Graz 759·9, in Wien 759·2 *mm*; die Entfernung Klagenfurt—Salzburg ist 160 *km*, also wäre ein Luftdruckgradient von 8·4 *mm* vorhanden gewesen, was in diesen Breiten nur im Gebirge denkbar ist. Dieser Gradient ist nicht etwa auf die Reduction auf das Meeresniveau zurückzuführen, denn die Seehöhe von Klagenfurt und Salzburg ist fast genau dieselbe.

Verbreitung ist natürlich aus dem Verhältnisse der Windgeschwindigkeit zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Depression zu erklären. Im S war die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ungefähr von derselben Größenordnung wie die Windgeschwindigkeit, der Staubfall fand daher immer auf derselben Seite statt, die staubtragende Süd- und Südostströmung lief parallel der Depression, konnte daher in keinen anderen Quadranten der Depression gelangen.

Schon beim Übergange über die Alpen hat sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Depression etwas verringert, die staubführenden Luftschichten fanden bei der herrschenden Windgeschwindigkeit Zeit, in den Nordwest-Quadranten der Depression (Rheinland) zu gelangen. Noch auffallender zeigt sich dieser Vorgang zur Zeit, wo die Depression über Norddeutschland nahezu stationär wurde; man ersieht neben der zeitlichen Vertheilung von S nach N ein successives Fortschreiten des Staubfalles um das Centrum der Depression von NE über N nach W. In Berlin fand der Staubfall schon vormittags statt, in Holstein nachmittags und an der unteren Elbe erst in den Abend- und ersten Nachtstunden. Der in Pommern auch erst in den späten Abendstunden gefallene Staub wurde von den Luftschichten am äußeren Rande der Depression getragen, welche naturgemäß wegen der schwächeren Gradienten eine geringere Geschwindigkeit hatten.

Die Natur hat mit diesem Staubfalle sozusagen ein Experiment gemacht, um das Wesen der Luftwirbel zu zeigen. Die Cyclone ist mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 50 bis 60 *km* in der Stunde von S nach N gezogen; die Windgeschwindigkeit auf der Ostseite der Depression betrug höchstens 80 bis 100 *km* pro Stunde, die Registrierungen auf dem Sonnblickgipfel gaben nur für eine Stunde ein Maximum 80 *km*, im Mittel 70 *km* Geschwindigkeit des Südsüdost- und Südwindes. Wenn die absolute Geschwindigkeit eines Lufttheilchens in der Entfernung R vom Centrum der Depression c ist und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Cyclone mit v bezeichnet wird, so kommt für die Wirbelbewegung der Luftmassen nur die Differenz $c-v$ in Betracht. In unserem Falle

ist c ungefähr gleich 80 *km*, v ungefähr 50 *km* pro Stunde. Der Staubniederschlag erfolgte in Süd-Italien in 500 bis 600 *km* Entfernung vom Centrum der Depression in den Vormittagsstunden des 10. im Südost-Quadranten; am nächsten Tage um dieselbe Zeit erfolgte der Niederschlag in Nord-Deutschland in ungefähr derselben Entfernung vom Centrum, aber im Nordost-Quadranten. In ungefähr 24 Stunden hat also die Rotationsbewegung nur 90° betragen; setzen wir obige Werte ein, so ergibt sich, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Luftmassen der Cyclone, und T die Zeit einer ganzen Drehung ist:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad c - v = R\omega = \frac{2\pi R}{T}, \quad \text{also} \quad T = \frac{2\pi R}{c - v},$$

für $R = 500$ *km*:

$$T = \frac{2 \times 500 \times 3 \cdot 14}{30} = \text{ungefähr 100 Stunden.}$$

Nach dieser Schätzung nach den festgestellten Größen der Windgeschwindigkeit und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Cyclone würden die Luftmassen 100 Stunden für eine vollständige Drehung brauchen, also für die Drehung um einen Quadranten 25 Stunden, was mit der Beobachtung (24 Stunden) sehr gut übereinstimmt, wenn man bedenkt, dass alle Angaben nur genäherte Schätzungen sind.

Ein Lufttheilchen auf der Ostseite der Depression, welches infolge der cyclonalen Bewegung der Luft eine der Cyclonenbahn parallele Geschwindigkeit hatte, beschrieb also nahezu eine Cycloide. Es war allerdings ein Gradient gegen das Centrum der Cyclone hin vorhanden, jedoch konnte in den mittleren Luftschichten die Bewegung gegen das Centrum hin nur sehr gering sein; denn am Erdboden findet bekanntlich in der Cyclone ein Einströmen, in den höchsten Schichten ein Ausströmen statt, in den mittleren Schichten ist also fast nur die Rotationsbewegung in derselben Entfernung vom Centrum der Depression vorhanden; außerdem wirkt auch die Fliehkraft gegen eine Bewegung im Sinne des herrschenden Gradienten. Jene Luftschichten, welche dieselbe Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung haben, wie die Cyclone, ziehen im mittleren Niveau

parallel mit der letzteren. Da der Unterschied zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit bei den weiterziehenden Cyclonen in der Regel nicht groß ist, sind die Luftmassen jener Seite der Cyclone, welche dieselbe Windrichtung haben wie die Fortpflanzungsrichtung der Cyclone, auf große Entfernungen nahezu dieselben. Im Cyclonenbereiche müssen die Luftmassen in derselben Entfernung vom Centrum dieselbe Rotationsgeschwindigkeit haben, wenn die Cyclone stationär ist; beim Fortschreiten jedoch sind die Windgeschwindigkeiten auf der Vorder- und Rückseite bedeutend kleiner als zu beiden Seiten, weil ein Theil der Energie der bewegten Luftmassen auf der Vorderseite dazu verwendet wird, den hohen Luftdruck durch Fortschaffen von Luftmassen zu vermindern, während auf der Rückseite der tiefe Luftdruck durch Herbeischaffen seitlicher Luftmassen ausgefüllt wird; auf den beiden Seiten kommt die Rotationsbewegung mehr ungeschwächt zum Ausdrucke. Dem entsprechen die Windgeschwindigkeiten, welche beim Vorübergange der Staubcyclone auf den Berggipfeln beobachtet wurden. Die südlichen Winde auf der Ostseite hatten ungefähr dieselbe Stärke 6 bis 9, wie die nördlichen Winde auf der Westseite, während die Ost- und Westwinde auf der Nord- und Südseite bedeutend schwächer waren.

Beim Übergange der Cyclone über die Alpen sind vorzüglich durch Behinderung der aufsteigenden Strömung Störungen eingetreten, die wir später bei Betrachtung der Barogramme näher ins Auge fassen werden. Dadurch ist es auch zu erklären, dass neben dem Hauptstaubgebiet in Nord-Deutschland, im unteren Rheinland der Staub gleichzeitig wie in Sachsen und Brandenburg fiel.

Doch ist dieser Staubfall in Rheinland verhältnismäßig sehr gering, obwohl der Wasserniederschlag auffallend groß war; es ist also der Staubfall auf der Westseite der Cyclonenbahn als eine Störung zu betrachten, welche durch die ungleiche Windgeschwindigkeit in verschiedener Entfernung vom Centrum der Cyclone und die Störung beim Übergange über die Alpen zu erklären ist. Die Hauptmasse des Staubes ist jene, welche in Nord-Deutschland zuerst auf der Nordost-,

dann auf der Nord- und Westseite der Cyclone gefallen ist, als dieselbe nahezu stationär geworden war. Hiebei ist zu beachten, dass immer nur die gleichen Entfernungen vom Depressionscentrum direct miteinander vergleichbar sind, da das Verhältnis von Winkelgeschwindigkeit und absoluter Geschwindigkeit der Luftmassen mit der Entfernung vom Centrum der Cyclone sich ändert. Dadurch ist es zu erklären, dass der Niederschlag in Ungarn und Hinterpommern bedeutend später erfolgte, wie für Orte in gleicher Breite, welche näher dem Centrum der Cyclone lagen. Dagegen ist die Verspätung des Niederschlages in Hamburg durch Wirbelbewegung jener Luftmassen zu erklären, welche vormittags den Staub über Brandenburg gebracht haben.

Diese Darlegungen gehen aus dem Vergleiche der Wetterkarten und der Zeit des Staubniederschlages hervor; der einfachste Beweis dafür liegt jedoch darin, dass im Westen der Cyclonenbahn kein Staubfall bemerkt wurde, obwohl Niederschläge vorgekommen sind. So fanden nach den Wetterkarten vom 10. zum 11. in Turin, Lugano, Nizza, Genf, Clermont und auf dem Säntis und Pilatus, vom 11. zum 12. auf dem Säntis und Pilatus, in Clermont, Paris und Biarritz zum Theile bedeutende Niederschläge ohne Staubfall statt. Der Staub war also nicht im ganzen Bereiche der Cyclone vertheilt, sondern wurde durch die Luftmassen getragen, welche im S den Südost-Quadranten der Depression bildeten und beim Fortschreiten auf die Ost-, Nordost-, Nord- und Westseite der Depression gelangten.

G. Hellmann und W. Meinardus[1] sind allerdings der Ansicht, dass ein »breiter Luftstrom von S nach N Sicilien, Italien und Mittel-Europa überweht hat«. Ebenso glaubt S. Róna,[2] dass nicht der Wirbel der Cyclone den Staub

---

[1] G. Hellmann und W. Meinardus, Der große Staubfall vom 9. bis 12. März 1901 in Nordafrika, Süd- und Mitteleuropa. S. 91. — Die große Arbeit, welche eine große Menge sonst nicht publicierter Detailberichte enthält, ist mir leider erst nach Fertigstellung des Manuscriptes zugegangen und konnte nur mehr zu theilweiser Ergänzung dieser Arbeit benützt werden.

[2] Bemerkungen zu dem Staubfalle im März. S. Róna, Met. Zeitschrift, April 1901, S. 173.

getragen habe, weil eine fortwährende Übergabe des Staubes an die nächste im Wirbel einbezogene Luftmasse stattfinden müsste. Er nimmt deshalb an, dass die äquatoriale Strömung der oberen Schichten Trägerin des Staubes war. Dazu ist zu bemerken, dass die polwärts gerichtete Componente der oberen westlichen Luftströmungen viel zu gering ist, um die Geschwindigkeit der Ausbreitung des Staubfalles zu erklären. Für die große Geschwindigkeit dieser Südströmung müsste ein ungeheurer Gradient nach NW vorhanden sein, um die ablenkende Kraft der Erdrotation, welche in den höheren Breiten von größter Bedeutung wird, zu compensieren. Hellmann und Meinardus glauben, dass die Bewegung der Cyclone von S nach N durch eine allgemeine, sie forttragende südliche Luftströmung in den unteren und mittleren Schichten zurückzuführen ist. Dagegen sprechen die Wetterkarten für die in Betracht kommenden Tage, und zwar für das Meeresniveau und das Niveau von 2500 *m*, welche zeigen, dass die Depression gegen einen Sattel höheren Luftdruckes gezogen ist, denselben durchbrochen und sich mit dem im N befindlichen Minimum vereinigt hat. Die Frage, warum die Depression gegen den höheren Luftdruck gezogen ist, muss vorläufig unbeantwortet bleiben; man kann nur in den hohen Temperaturen auf der Ostseite derselben einen Grund sehen, warum sie nicht nach E ziehen konnte. Der »breite Luftstrom von S nach N«, der den Staub mit sich führte, war nicht eine continuierliche Strömung auf der ganzen Strecke, sondern es war nur die cyclonale Strömung auf der Ostseite der Cyclone, welche mit dieser fortschreitend die Richtung S—N hatte.

Übrigens ist im allgemeinen eine Nordcomponente der westlichen Luftströmungen für die höheren Breiten nur in den untersten Schichten bis circa 3 *km* Höhe und in den obersten Schichten über 10 *km* Höhe vorhanden; in den mittleren Schichten, in 3 bis 8 *km* Höhe, hat die westliche Strömung im allgemeinen eine äquatorwärts gerichtete Componente.[1] Nun war die staubführende Schichte jedenfalls über 3 *km*, denn auf dem Sonnblick (3106 *m*) war der gefallene Schnee intensiv röthlich

---

[1] Nach Ferrel; siehe Hann, Lehrbuch der Meteorologie, S. 450 ff.

gefärbt. Gegen die Annahme, dass der Staub von den obersten Schichten weitergetragen und von den mit der Cyclone verbundenen Niederschlägen herabgerissen wurde, spricht jedoch die verhältnismäßige Kleinheit der Niederschläge, welche es unwahrscheinlich macht, dass die Condensation in der Cyclone bis zu diesen obersten Schichten hinaufgereicht hat.

Ferner wäre es unerklärlich, warum der Staubfall in Süd-Deutschland eine Lücke aufweist, wenn die staubführende Schichte in großer Höhe war; da in Süd-Deutschland, wenn auch nur geringe Niederschläge, aber ohne Beimischung von Staub gefallen sind, liegt offenbar ein Einfluss der Alpenkette vor, welche den Staub der niederen Schichten abgefangen hat. Die allerdings vorhandene Südströmung ist nur eine Folge der cyclonalen Bewegung der mit der Cyclone fortschreitenden Luftmassen und ist auf den SE- und E-Quadranten beschränkt; im N und S vom jeweiligen Standpunkt der Cyclone herrschen, der Wirbelbewegung entsprechend, NE—E- und SW—W-Winde; es kann daher von einem »breiten Luftstrom von S nach N« nicht die Rede sein.

Der Umstand, dass die Staubniederschläge im S bei Süd- und Südwestwinden, in mittleren Breiten bei Süd- und Südostwinden und im N bei Nordost- und Nordwinden in der Höhe stattgefunden haben, zeigt, dass dieselben Luftmassen den Staub vom Südost-Quadranten der Depression in den Nordost- und schließlich Nordwest-Quadranten getragen haben, was aus dem Verhältnisse der infolge des Luftdruckgradienten herrschenden Windgeschwindigkeit zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Cyclone zu erklären ist. Dass die unteren Luftströmungen in mittleren Breiten vielfach entgegengesetzt dem Zuge der schweren röthlichen Wolken waren, zeigt nur, dass die cyclonale Bewegung noch nicht bis zum Erdboden herabgedrungen war, als die Condensation schon begonnen hatte. Deshalb ist auch die mittlere S—N-Geschwindigkeit des Staubfalles in Ungarn, wie im centralen Theile der Depression von derselben Größenordnung, d. i. circa 50 *km* pro Stunde; eine genaue Bestimmung der Geschwindigkeit ist nicht gut möglich, weil die Niederschläge von localen Verhältnissen offenbar sehr abhängig

waren, was daraus hervorgeht, dass sie oft an nahegelegenen Orten zu bedeutend verschiedenen Zeiten begannen.

Die Abendkarte vom 11. zeigt die Depression mit dem Centrum ungefähr über Berlin; über ganz Europa sind schwache Gradienten, nur das Hauptminimum im N hat an Tiefe etwas zugenommen, die Depression über Mitteleuropa bildet dazu eine sackförmige Ausbuchtung. Auf der Morgenkarte des 12. März ist die Vereinigung der secundären mit der Hauptdepression schon weiter fortgeschritten, auf der Abendkarte des 12. ist nur mehr eine Ausbuchtung der Isobaren bei Wilna und Smolensk zu sehen.

III.[1]

Interessant ist der Vergleich der verschiedenen Barogramme beim Vorübergange der staubbringenden Depression, speciell in Bezug auf den Beginn des Regenfalles und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Cyclone.

Die im folgenden besprochenen Barogramme sind diesen Ursprunges: Das Barogramm von Algier habe ich den algerischen Wetterkarten entnommen; Herr Director A. Riccò übersandte mir das Barogramm von Catania, Herr Director L. Palazzo jenes von Rom, Herr Director G. Celoria jenes von Mailand. Die Barogramme von Zürich und Säntis wurden mir von Herrn Director Billwiller, jenes von München von Director Fr. Erk, jenes von Innsbruck von Prof. P. Czermak, jenes von Kremsmünster von Professor Schwarz mitgetheilt. Die Barogramme der übrigen österreichischen Stationen standen mir an der meteorologischen Centralanstalt zur Verfügung; die Barogramme von Budapest und Hamburg habe ich den Wetterkarten, welche an beiden Orten herausgegeben werden, entnommen.

Das Barogramm von Algier zeigt vom 9. zum 10. März nur eine geringe Schwankung, es lässt sich mit voller Sicherheit gar nicht feststellen, ob das Minimum des Luftdruckes um 4^h bis 5^h p. des 9. oder von 7^h a. des 10. dem Vorübergange der Cyclone in Tunis entspricht; wahrscheinlich ist es jenes um

[1] Siehe hiezu Tafel III.

4^h bis 5^h p. des 9. In Catania ist aus der Barographencurve der Vorübergang der Depression ebenfalls nicht zu erkennen; es ergibt sich daraus, dass die Depression, die zwischen diesen beiden Orten durchgezogen ist, in diesen Breiten noch einen sehr kleinen Durchmesser hatte; umso kräftiger konnte die Wirbelbewegung in der Nähe des Centrums sein.

In Palermo dagegen, welches ungefähr 160 *km* von Catania entfernt ist, ist der Vorübergang sehr deutlich ausgesprochen, wie die folgenden, auf das Meeresniveau reducierten Barometerstände zeigen:

	9. März 1901			10. März 1901			11. März 1901		
	8^h a.	3^h p.	9^h p.	8^h a.	3^h p.	9^h p.	8^h a.	3^h p.	9^h p.
Palermo	759·1	59·1	56·1	752·1	51·2	53·2	758·1	58·7	62·1
Catania	61·1	61·8	61·5	59·9[1]	58·3	59·0	59·1	58·9	60·7

Für 8^h a. des 10. ergibt sich also zwischen beiden Orten ein Gradient von 5·4 *mm* pro Grad, d. i. ein Gradient, wie er in höheren Breiten nur bei sehr heftigen Stürmen beobachtet worden ist. Wenn man dazu noch bedenkt, dass demselben Gradienten in niederen Breiten eine größere Windstärke entspricht, wie in höheren Breiten, so kann man sich einen Begriff machen von der Gewalt der Cyclone; selbst wenn es nicht zur Bildung von Staubtromben gekommen wäre, wie aus den algerischen Wetterkarten feststeht, könnte schon dadurch der Staubfall eine gewiss hinreichende Erklärung finden. Trotz dieses großen Gradienten herrschte in Catania vormittags nur schwacher, nachmittags etwas stärkerer Nordostwind, die Wirbelbewegung der Cyclone, welche in der Höhe aus dem Zuge der Wolken von S her zu erkennen war, war also noch nicht bis zum Erdboden herabgedrungen. Es ist deshalb anzunehmen, dass der Gradient im Inneren der Cyclone noch bedeutend größer war. An der Südküste Siciliens hatte aller-

[1] Director A. Riccò hat mich aufmerksam gemacht, dass in den Wetterkarten irrthümlich ein zu niedriger Wert mitgetheilt ist.

dings der Scirocco eine dem Gradienten entsprechende Heftigkeit. Der Staubfall begann in Catania bei leichtem Regen, und zwar schon vormittags, wurde aber in Sicilien erst in den Abend- und Nachtstunden des 10. allgemein, also jedenfalls bedeutend nach dem Vorübergange der Depression, denn nachmittags liegt das Centrum derselben schon über dem nördlichen Theile von Sardinien, abends südlich von Genua.

In Rom gieng ebenfalls das Minimum des Luftdruckes dem Beginne des Niederschlages bedeutend voraus; ein Vergleich der Barographencurve von Rom (3) mit jener von Mailand (4) ist jedoch nicht zulässig, weil Rom von der Zugstraße der Cyclone viel weiter entfernt ist. Aus dem Vergleiche von Rom mit Pelagosa (11), welches in gleicher Breite ungefähr 330 *km* östlich liegt, ergibt sich, dass die Luftdruckwelle fast genau 12 Stunden[1] brauchte, um diesen Weg nach E hin zurückzulegen, also eine Geschwindigkeit W—E von circa 28 *km* pro Stunde hatte. Die Schwankung ist jedoch in Pelagosa schon bedeutend kleiner. Trotzdem war der Niederschlag an beiden Orten fast gleichzeitig, ja in Sarajevo, welches noch um 150 *km* weiter östlich von Pelagosa liegt, begann er schon um 9^h p., also sogar etwas früher als in Rom.

Der Vergleich der Barogramme von Mailand (4) mit Görz (12) in derselben Breite, aber 350 *km* östlich davon, ergibt kaum 2 Stunden Verspätung im Eintritte des Minimums des Luftdrucks für den letzteren Ort; die Größe der Schwankung ist an beiden Orten fast ganz gleich. Der Umfang der Cyclone hat also in dieser Breite schon bedeutend zugenommen, was auch aus der Vergrößerung der Schwankung in Görz gegenüber Pelagosa hervorgeht. Hier giengen die Niederschläge dem Eintritte des Minimums bedeutend voraus. Weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Depression beim Betreten des Festlandes

[1] Fast alle Barogramme sind nach Ortszeit gezeichnet, die österreichischen nach mitteleuropäischer Zeit; es sind daher alle vergleichbar, weil die Abweichung der verschiedenen Orte von einem und demselben Meridian so klein ist, dass die Zeitunterschiede nach dem in der Zeichnung benützten Maßstabe nicht mehr zu erkennen ist. Nur Wien und Budapest, welche Ortszeit haben, gestatten wegen des Längenunterschiedes nicht einen genauen Vergleich mit den anderen Stationen.

und bei dem Übergange über die Alpen sich etwas verminderte, hat die Windgeschwindigkeit in der Nähe des Centrums der Cyclone die Oberhand erlangt und die staubführenden Luftmassen sind infolge dessen vom Südostquadranten zum Nordostquadranten der Depression vorgerückt. Der Einfluss des Festlandes, speciell des niederen Gebirgszuges zwischen Turin und Genua, tritt auch aus dem Zusammenrücken der Isobaren hervor; die Entfernung Turin—Genua beträgt ungefähr 120 *km*, die auf das Meeresniveau reducierten Barometerstände für den 10. März sind jedoch:

	8^h a.	9^h a.	3^h p.	9^h p.
Genua.......	757·6	56·9	51·5	51·6 *mm*
Turin	762·7	62·1	58·8	55·8

Es bestand also um 3^h p. ein Luftdruckunterschied von 7·3 *mm* oder ein Gradient von 7·2 *mm*, was nur wegen des dazwischenliegenden Gebirges denkbar ist; in der Höhe war der Gradient wegen der höheren Temperatur von Genua jedenfalls bedeutend geringer.

Der Übergang der Depression über die Alpen könnte sehr genau verfolgt werden, weil auf diesem Gebiete viele Thal- und Gipfelstationen mit Barographen ausgestattet sind, wenn nicht der Übergang durch den Einfluss des Gebirges zu compliciert geworden wäre. Ja, die Stationen liegen so nahe beieinander, dass die Zeitordinate der kleinen Richard-Barographen, welche meistens in Verwendung sind, zu klein ist, um die Eintrittszeiten des Minimums an den verschiedenen Stationen miteinander mit Sicherheit vergleichen zu können. Die Barographencurven der österreichischen Alpenstationen, sowohl der Thal-, wie der Gipfelstationen, zeigen zwei getrennte Minima beim Übergange der Depression über die Alpen, die 6 bis 8 Stunden voneinander entfernt sind; dazwischen ist ein kleines Maximum, welches in Zell am See mehr als 4 *mm* gegen das vorausgehende Minimum erreicht. Die Übereinstimmung aller österreichischen Stationen zeigt, dass es nicht eine locale Erscheinung gewesen sein kann, insbesondere da sie auch auf dem Obir noch deutlich und auf dem Sonnblick weniger ausgeprägt erscheint. Es liegt nahe, anzunehmen, dass im Wirbel der Cyclone am

Südfuße der Alpen sich zwei Theilminima ausgebildet haben, die nacheinander denselben Weg gezogen sind; vielleicht liegen jedoch auch Föhnwirkungen vor. Es ist ja von vorneherein zu erwarten, dass der Übergang des Luftwirbels über die Alpen sich compliciert gestalten werde. Auffallenderweise zeigen Zürich und Säntis nicht das doppelte Minimum, was wohl daraus zu erklären ist, dass die beiden kleinen Theilminima östlich davon vorbeigezogen sind; dafür spricht auch der Umstand, dass das Minimum des Luftdruckes in Zürich um 2 bis 3 Stunden früher eintrat als in Innsbruck und Bozen in ungefähr gleicher Breite. Von Genua aus hat also die Depression eine nordöstliche Richtung eingeschlagen; dafür spricht auch, dass der Unterschied der Eintrittszeit des Minimums für Zürich und Säntis bedeutend verschieden ist; allerdings mag auch die Neigung der Axe der Cyclone nach NW hiebei eine Rolle gespielt haben. Der Säntis zeigt gegen Zürich eine Verspätung des Minimums von ungefähr 3 Stunden. Der Obir und Sonnblick dagegen zeigen eine Verfrühung gegen die nächstliegenden Thalstationen Klagenfurt, Döllach und Bucheben; allerdings ist die Entfernung Säntis—Zürich bedeutend größer als bei österreichischen Gipfelstationen und den zugehörigen Thalstationen. Zu bemerken ist, dass die Zeitbestimmung für den Eintritt des Minimums bei den Stationen Zürich, Säntis, Innsbruck, Sonnblick, Obir eine ziemlich sichere ist, weil die Zeitordinate der betreffenden Autographen eine hinreichend große ist.

Auffallend ist der Unterschied in der Eintrittszeit des Minimums in Zürich und Mailand; in Mailand liegt jedenfalls eine Verspätung, in Zürich eine Verfrühung desselben vor. Die Verspätung in Mailand ist dadurch zu erklären, dass die Depression nicht mit gleicher Tiefe weiterzog, sondern in der Po-Ebene sich theilweise ausfüllte. Die Verfrühung des Minimums in Zürich ist jedenfalls durch Temperatur (Föhnwirkung) beeinflusst, der Barograph zeigte große Unruhe, es herrschte offenbar böiges Wetter, vielleicht föhnartige Windstöße.

Dass die beiden getrennten Theilminima auf der Ostseite der Depression in den Alpen nur Temperatureinflüssen zuzuschreiben sind, geht daraus hervor, dass in den Barogrammen von Mailand, München, Kremsmünster und Wien nichts davon

zu bemerken ist. In Budapest dagegen scheinen wieder zwei weniger ausgesprochene Theilminima vorbeigezogen zu sein.

Da die südlichen, wie die nördlichen Alpenthäler in gleicher Weise beide Minima zeigen, ist es ausgeschlossen, dass sich auf der Nordseite der Alpen ein neues Minimum, ungefähr bei Genf, gebildet hat und am Nordfuße der Alpen ostwärts zog, wie im Zeitlexikon 1901, S. 390, behauptet wird. Es zeigt sich auch deutlich ein Fortschreiten der beiden Minima von S nach N; dass die Eintrittszeiten desselben für die östlicheren Stationen später fallen, ist durch die größere Entfernung vom Centrum der Depression zu erklären.

Auch die Windbeobachtungen auf den Gipfelstationen der Alpen zeigen deutlich, dass die Depression über den centralen Theil derselben gezogen ist. Auf dem Obir drehte der stürmische Wind in der Nacht vom 10. zum 11. von SE über SSE, S nach SW und WSW; auf dem Sonnblick drehte der ebenfalls stürmische Wind von SSE über S nach WSW und ließ gleichzeitig an Stärke etwas nach; auf der Zugspitze herrschte am 10. abends SE 9, welcher in der Nacht mit Beginn des Schneefalles abflaute; am 11. morgens war SE 3; der Mont Mounier hatte am 10. morgens NNE 9, abends N 9, am 11. morgens W 3; der Mont Ventoux am 10. morgens NNE 3, abends NNE 3, am 11. morgens NW 3. Die Winddrehung auf allen diesen Gipfelstationen weist übereinstimmend darauf hin, dass in der Nacht vom 10. zum 11. eine Cyclone über den centralen Theil der Alpen gezogen ist.

Am Südfuße der Alpen, sowie im Alpengebiete selbst, hat der Niederschlag und der damit verbundene Staubfall bedeutend vor Eintritt des Minimums des Luftdruckes begonnen; ebenso in Ungarn und Galizien, natürlich gegenüber den Alpenländern mit einer Verspätung, die der größeren Entfernung vom Centrum der Cyclone entsprechend war.

Im unteren Rheinlande fällt der Niederschlag ebenfalls etwas vor dem Eintritte des Luftdruckminimums; vergegenwärtigt man sich die gleichzeitige Lage des Centrums der Cyclone, so findet man, dass hier der Niederschlag im Nordwestquadranten stattfindet; die Verzögerung, welche die Cyclone beim Übergange über die Alpen erlitten hat, hat es

also den staubführenden Luftmassen zum Theile schon ermöglicht, in diesen Quadranten der Depression (Rheinland) zu gelangen. Die Hauptmasse bleibt jedoch im Nordostquadranten; in Sachsen und Brandenburg fällt der Staub auch bedeutend vor dem Minimum des Luftdruckes; in Hamburg dagegen erfolgt beides nahezu gleichzeitig, die Depression ist zur Zeit, wo der Staubfall in Hamburg beginnt, im E davon. Aus den verschiedenen Zeitangaben für den Beginn des Niederschlages ist ganz deutlich zu ersehen, dass die staubführenden Luftmassen in Nord-Deutschland, wo die Depression nahezu stationär geworden war, um das Centrum derselben von NE über N nach W wanderten. Dies gilt natürlich nur für ungefähr dieselbe Entfernung vom Centrum der Cyclone; dass in größerer Entfernung, in Pommern, der Staubfall später erfolgte ist durch die Windverhältnisse am Rande der Cyclone, ebenso wie für Ungarn und Galizien, zu erklären.

Die Discussion der Barogramme führt also zu demselben Resultate wie die Betrachtung der Wetterkarten: Die staubführenden Luftmassen waren ein Bestandtheil der Cyclone, welche von Afrika über die Alpen nach Nord-Deutschland gezogen ist, wobei sie fortwährend an Umfang zugenommen hat. Eine genaue Festsetzung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Cyclone ist jedoch auch aus den Barogrammen nicht möglich, weil sie erst in der Breite der Alpen direct über Barographenstationen gezogen ist; jedoch auch hier lässt sich die Zeit des Vorüberganges wegen der Bildung von Theilminima nicht genau feststellen. Das Barogramm von Hamburg zeigt jedenfalls die Ankunft der Depression für die entsprechende Breite auch zu spät an, weil das Centrum der Cyclone bedeutend weiter östlich vorbeizog.

IV.

Was die an verschiedenen Orten gesammelten Staubproben anbelangt, so ist zu bemerken, dass sie sowohl in ihrem Äußeren, wie in ihrer Zusammensetzung einander überaus ähnlich sind und nur solche Unterschiede aufweisen, die durch locale Beimischungen und durch die größere oder geringere Sorgfalt beim Sammeln erklärt werden können. Der gefallene

Staub wurde in verschiedenen Laboratorien chemisch und mikroskopisch untersucht; alle Untersuchungen führten zu dem gleichen Resultate, dass der gefallene Staub dem von den verschiedenen Autoren besprochenen Wüstensande der Sahara vollkommen ähnlich ist; anderseits konnten keine Bestandtheile gefunden werden, welche auf einen vulcanischen oder kosmischen Ursprung hinweisen würden.[1] Auch wurde von verschiedenen Seiten auf die Ähnlichkeit dieses Staubes mit jenem von früheren Staubfällen, insbesondere von jenen von den Jahren 1879 und 1885 hervorgehoben.

Was die Größe der Theilchen betrifft, findet Professor G. D'Achiardi[2] wohl einen Unterschied in den Staubproben von Pisa und Benevent, und zwar sind im Mittel die Theilchen des in Benevent gefallenen Staubes größer als die des in Pisa gefallenen. Diesen Unterschied glaubt Prof. D'Achiardi allerdings zum Theile der Art des Einsammelns zuschreiben zu sollen — in Pisa wurde das Regenwasser von der Dachtraufe gesammelt, wobei die größeren Theilchen vielleicht auf dem Dache zurückgeblieben sind, während in Benevent der getrocknete Staubniederschlag von Marmorterrassen gesammelt wurde — zum Theile jedoch glaubt er an einen wirklichen Unterschied von S nach N; die mittlere Größe der Theilchen schwankt bei den von ihm untersuchten Proben von wenigen Hundertel bis zu wenigen Tausendtel Millimetern. Professor F. Becke[3] konnte mit Sicherheit an den in Österreich[4] gesammelten Staubproben keine merklichen Unterschiede in der Größe der Staubtheilchen constatieren, weder in der Richtung von S nach N (Lesina—Kufstein), noch in der Richtung von W nach E (Tirol—Ungarn); als Maximalgröße fand Becke 0·07

---

[1] F. Becke, Mikroskopische Untersuchung der Proben von Staubschnee vom 11. März 1901. Met. Zeitschrift, XXXVI. Bd., 1901, S. 321.

[2] Prof. N. Passerini e Prof. G. D'Achiardi: »Sopra la pioggia melmosa caduta in Firenze la sera del 10 Marzo 1901«, p. 9.

[3] Met. Zeitschrift, Juli 1901, S. 321.

[4] Herr Prof. Fugger und v. Angermayer sammelten mehr als 48 Proben und über 150 Berichte aus den verschiedensten Theilen der Alpenländer und stellten sie bereitwilligst der k. k. Centralanstalt für Meteorologie zur Verfügung. — Auf alle Einzelnheiten einzugehen erachte ich an dieser Stelle als unzulässig.

bis 0·08 *mm*, einzelne Proben von West-Kärnten zeigten auch Theilchen von 0·11 und 0·13 *mm*, doch ist nach Becke die Herkunft derselben zweifelhaft; die meisten Partikel hatten eine Größe zwischen 0·02 und 0·001 *mm*.

Der in Fiume gefallene und von M. Barač[1] untersuchte Staub zeigte eine mittlere Korngröße von 0·017 *mm*, ein Minimum von 0·001 *mm* und ein Maximum von 0·051 *mm*; bei gelben, structurlosen Mineralpartikelchen kamen Größen bis zu 0·113 *mm* vor. Die Untersuchung der in Ungarn gesammelten Staubproben von Dr. Schafarzik[2] ergab als mittlere Größe der Theilchen 0·0013 bis 0·04 *mm*, nur wenige Körner zeigten einen größeren Durchmesser als 0·067 *mm*, ausnahmsweise wurde ein Quarzkorn von 0·11 *mm* Durchmesser gefunden.

Aus der Arbeit von Hellmann und Meinardus[3] entnehme ich noch nachträglich die folgenden Bestimmungen: Die von Prof. Dr. J. Früh untersuchten Staubproben von Palermo und Piedimonte d'Alife, 80 *km* nördlich von Neapel, ergaben dieselbe Mittelgröße von 0·01 bis 0·0019 *mm*, das mittlere Maximum war 0·07 *mm*; Theilchen, welche größer waren als 0·1 *mm*, waren selten. Die Grundmasse des in Bergedorf bei Hamburg gesammelten Staubes bilden Theilchen von 0·007 bis 0·001 *mm* Größe, in dieser Masse erscheinen Splitter von 0·02 *mm* schon relativ groß, das mittlere Maximum betrug 0·04 bis 0·1 *mm*, ausnahmsweise wurde ein Korn von 0·13 *mm* Länge und 0·11 *mm* Breite entdeckt. Prof. Dr. J. Früh kommt allerdings aus dem Vergleiche der Proben von Palermo und Bergedorf zum Schlusse, dass der Staub von Bergedorf entschieden feiner ist; insbesondere fehlen in der Probe von Bergedorf, wenigstens in den verwendeten Präparaten, die großen Quarzsplitter und Glimmerblättchen des Staubes von Süd-Italien.

Die Unterschiede sind also so gering, dass man mit Prof. D'Achiardi an einen Einfluss der Art des Einsammelns

[1] Met. Zeitschrift, October 1901, S. 404.

[2] Met. Zeitschrift, Juni 1901, S. 279.

[3] G. Hellmann und W. Meinardus, Der große Staubfall vom 9. bis 12. März 1901 in Nordafrika, Süd- und Mitteleuropa.

denken muss und die Realität des Unterschiedes zweifelhaft erscheint, wenn auch aus zeitlicher und örtlicher Vertheilung ein solcher zu erwarten wäre.

Auf die verschiedenen chemischen Untersuchungen einzugehen, halte ich nach dem Vorausgehenden für überflüssig; ich verweise diesbezüglich auf die Zusammenstellung S. 54 ff., welche in der Arbeit von G. Hellmann und W. Meinardus »Der große Staubfall« alle Details wiedergibt.

Was die Menge des gefallenen Staubes betrifft, so liegen wohl verschiedene Bestimmungen vor, jedoch ist dazu zu bemerken, dass dieselben nur angenähert den richtigen Wert geben können, weil die Exposition der Auffangfläche, sowie die Sorgfalt des Einsammelns von großer Wichtigkeit ist.

Von Tunis liegt von Ottavi[1] die Nachricht vor, dass der dort trocken gefallene Staub die Terrassen mit einer 0·5 *mm* hohen Schichte deckte. Ich habe nach den in den Alpen gesammelten Staubproben das specifische Gewicht des Staubes (mit Luft als Zwischenraum) zu 0·7 gefunden; wenn der in Tunis trocken gefallene Staub dasselbe specifische Gewicht hatte, was ungefähr zutreffen dürfte, so ergibt obige Angabe 350 *g* auf 1 m^2; die Angabe von 0·5 *mm* dürfte allerdings etwas unsicher sein, jedoch wenn auch nur 0·1 *mm* anstatt 0·5 *mm* angenommen wird, so ergeben sich noch immer 70 *g* auf 1 m^2 oder 70 Tonnen auf 1 km^2.

In Taormina (Sicilien) sammelte Prof. A. W. Rücker[2] den Staub von drei marmornen Tischplatten für mikroskopische Untersuchungen; das Mittel von zwei Bestimmungen ergab 2·1 *g* auf 1 m^2, also ganz bedeutend weniger als in Tunis, was leicht begreiflich ist, weil Tunis in unmittelbarer Nähe des Ursprungsortes liegt; außerdem befindet sich Taormina auf der Westküste Siciliens in der Nähe von Catanien, wo der Vorübergang der Cyclone, wie die Barographencurve und die Windverhältnisse zeigen, sich nur schwach äußerte. Für Neapel ergab die Bestimmung des Ingenieurs Enrico Passaro[3] 11 *g*

---

[1] Bulletin de la Société Astronomique de France (Avril 1901).

[2] Met. Zeitschrift, Mai 1901, S. 237.

[3] Nach G. Hellmann oder W. Meinardus, »Der große Staubfall«, S. 30.

auf 1 m^2. In Livorno fielen nach den Bestimmungen von E. Neu[1] 4·5 *g* auf 1 m^2; in Florenz dagegen fielen nach einer Bestimmung von Prof. Passerini[2] 12·6 *g* auf 1 m^2; die Unsicherheit dieser Bestimmung geht jedoch schon daraus hervor, dass Prof. Passerini 2·1 *mm* Niederschlag maß, während am Ximenianischen Observatorium nur 0·35 *mm* mittels eines Richard'schen Pluviographen gemessen wurden.

In Fiume wurden von M. Barač[3] auf einer Fläche von 1400 m^2 260 *g* gesammelt, also 0·19 *g* auf 1 m^2, ein Wert, der auffallend klein ist, was wohl vom Mangel an Sorgfalt beim Sammeln auf der großen Fläche kommen mag. In Görz fielen nach Prof. Ferd. Seidl 11·23 *g*, in Mašun am Krainer Schneeberg nur 1·12 *g* auf 1 m^2. Für das westliche Kärnten findet Prof. K. Prohaska[4] aus dem Mittel von zwei Bestimmungen 8 *g* auf 1 m^2; im östlichen Kärnten scheint der Staub viel weniger dicht gefallen zu sein, denn in Klagenfurt entfiel nach einer Messung von Dr. H. Swoboda nur 1·5 *g* auf 1 m^2. In Schemnitz (Ungarn)[5] entfielen 1·9 *g* auf 1 m^2.

Für Nord-Deutschland[6] ergaben sich folgende Werte: Für Hamburg 1·7 *g*, für Segeburg 1 *g* und für Lütjenburg 4·2 *g* auf 1 m^2.

Aus der Verschiedenheit dieser Angaben ergibt sich, dass Localeinflüsse von großer Bedeutung waren; direct erkennbar ist nur der Einfluss der Alpen, welche auf der Südseite einen auffallend starken Staubniederschlag aufweisen.

Was die Grenzen des Staubgebietes betrifft, so kann im S ungefähr der 30. Parallelkreis als solche angenommen werden, die Nordgrenze bildet Jütland, die Westgrenze Graubünden (Engadin, Davos) und das untere Rheinland, die Ostgrenze Sarajevo, West-Ungarn, West-Galizien und Hinterpommern.

---

1 Met. Zeitschrift, Mai 1901, S. 234.

2 Prof. N. Passerini e Prof. G. D'Achiardi, »Sopra la pioggia melmosa caduta in Firenze la sera del 10 Marzo 1901.

3 Met. Zeitschrift, Juli 1901, S. 313 und S. 463.

4 Met. Zeitschrift, Mai 1901, S. 231.

5 S. Róna, Bemerkungen zu dem Staubfalle im März. Met. Zeitschrift, April 1901, S. 173.

6 Nach G. Hellmann und W. Meinardus, Der große Staubfall, S. 30.

Doch ist nicht auf dem ganzen dazwischenliegenden Gebiete Staub gefallen; an der Grenze zwischen Steiermark, Ungarn und in Niederösterreich erfolgte der Staubniederschlag nur strichweise; in Böhmen, Mähren, Schlesien erfolgte überhaupt kein Niederschlag, in Süd-Deutschland kamen leichte Niederschläge mehrfach vor, doch scheint denselben kein Staub beigemischt gewesen zu sein.

Wenn man für eine angenäherte Schätzung der ganzen Staubmasse annimmt, dass im Mittel 2 *g* auf 1 m^2 oder 2 Tonnen auf 1 km^2 gefallen ist, was nicht zu viel sein dürfte, da, abgesehen von Tunis, Italien und die Alpenländer bedeutend größere Mengen aufweisen, wodurch das Fehlen des Staubniederschlages in Süd-Deutschland ungefähr compensiert werden dürfte, so ergibt sich als rohe Schätzung für die 2300 *km* S—N-Entfernung und 800 *km* W—E-Entfernung eine Menge von 3,680.000 Tonnen. Macht man nun die Annahme, dass in der Sahara die Schichte von nur 1 *mm* durch einen Wirbel an einer und derselben Stelle fortgetragen wurde, so hätte der Wirbel einen Durchmesser von 80 *km* gehabt, ein Wert, der sehr gut denkbar wäre. Da aber in Wirklichkeit Staubtromben die unmittelbare Ursache waren, wie wir gesehen haben, so hat natürlich diese Rechnung keinen reellen Wert, denn Tromben graben sich ja förmlich in den Erdboden hinein, was beim losen Sande der Wüste umso leichter geschehen konnte, und ziehen in der Regel in Gruppen mit großer Geschwindigkeit weiter; allerdings ist der Durchmesser dieser Wirbel unvergleichlich kleiner, doch je kleiner der Wirbel, umso größer ist in der Regel die Stärke des Windes. Doch halte ich es für überflüssig, für diesen Fall unter irgendwelchen Annahmen eine Rechnung, wenn auch nur um eine Vorstellung zu gewinnen, durchzuführen; denn einerseits sind die Kraftäußerungen der Tromben hinlänglich bekannt, anderseits sind alle diesbezüglichen Annahmen sehr willkürlich.

Außergewöhnlich ist am Staubfalle vom 9. bis 12. März 1901 nur die Ausdehnung desselben; ganz ähnlich war die Aufeinanderfolge der Erscheinnngen bei einigen früheren

Staubfällen. Große Ähnlichkeit mit dem besprochenen Staubfalle hatte der Staubfall vom 23. bis 25. März 1869; am 23. wurde der Staubfall in Sicilien und Calabrien beobachtet, in der Nacht vom 23. zum 24. in Rom, am 24. morgens in Lesina bei Borastürmen, welche am Abend vorher eingesetzt hatten, in der Nacht vom 24. zum 25. in Krain. Auch in Steiermark wurde eine »fahle Morgenbeleuchtung« und Staubniederschlag bemerkt. Wie beim Staubfalle 1901 war vielfach der Wind an der Erdoberfläche entgegengesetzt der oberen Luftströmung, in beiden Fällen herrscht an der Adria störmische Bora; die hohe Temperatur, die Trockenheit der Luft, das Aussehen des Staubes sind ebenfalls beiden Staubfällen gemeinsam.

Große Ähnlichkeit mit dem besprochenen zeigt auch der Staubfall vom Februar 1879; die Luftdruckvertheilung, beziehungsweise -Verlagerung zeigt genau denselben Charakter, als vorbereitende Situation für die Bildung der Cyclone sehr geringe Luftdruckgradienten über Nord-Afrika und das Mittelländische Meer mit veränderlichen Winden; in Algier und Tunis treten Gewitter mit Hagel und Schnee, darauf heftige Sciroccostürme auf. Die inzwischen zur vollen Entwickelung gelangte Cyclone zieht nach N, überquert die Alpen und vereinigt sich mit einem über West-Russland befindlichen Minimum. In Palermo wurde am 24. Februar abends orangerothe Färbung des Himmels, am 25. Staubfall beobachtet; derselbe wurde auch in Neapel beobachtet. In Rom zog um 8^h a. ein Gewitter aus SSE auf, um 10^h a. begann der Staubfall; auffallend war der Temperaturanstieg beim Einsetzen des Südsüdostwindes. In Lesina begann der Staubfall bei gleichzeitigem Südostorkan um $11^h 30^m$ a., und zwar kam er aus einer von SSE heraufziehenden Wolke; in Albona (Istrien) fand der Staubfall um 10 bis 11^h a. bei heftigem Südostwind statt; in Pontafel war zuerst röthlicher, dann weißer Schnee gefallen; in Klagenfurt fiel $1^h 30^m$ bis 3^h p. röthlicher Schnee bei Südoststurm; jedoch vorher und nachher fiel gewöhnlicher Schnee.

Auch bei dem Staubfalle vom October 1885 zeigen sich dieselben Erscheinungen; besonders auffallend ist in diesem Falle der Temperaturgegensatz auf der West- und Ostseite der

Cyclone; Perpignan hat 6°, Biarritz 7·5°, dagegen Neapel und Rom 24°, Livorno 21°.

So zeigen die meisten Staubfälle von Süd-Europa dieselben Erscheinungen; deshalb versuchte Tarry auf Grund der Staubfälle von 1869 und 1870 eine Theorie derselben zu geben, welche sich in späteren Fällen öfters und auch beim Staubfalle vom 9. bis 12. März 1901 wenigstens zum Theile bewährt hat. Nach Tarry ziehen Cyclonen vom Norden Europas schnell nach Afrika, heben den Sand der Sahara in die Höhe und kehren wieder mit Staub beladen nach N zurück. Auf Grund dieser Theorie prognosticierte Tacchini mit Erfolg den Staubfall vom März 1872. Thatsächlich ist auch vor dem Staubfalle vom 9. bis 12. März 1901 eine Cyclone von Nordwest-Europa über Frankreich nach S gezogen, dann eine mit Staub beladene nach N gezogen; dass es in beiden Fällen ein und dasselbe Gebilde gewesen ist, ist wohl nicht anzunehmen, jedoch scheint ein ursächlicher Zusammenhang nicht ausgeschlossen, indem die erste Cyclone günstige Bedingungen für die sich neu bildende Cyclone schafft.

Es ist jedoch in manchen Fällen sichergestellt, dass Staubfälle einen anderen terrestrischen Ursprung als Afrika haben; das oft ganz verschiedene Aussehen des Staubes legt schon diese Annahme nahe. Dazu gehört sicher der Staubfall vom Februar 1896 in Ungarn und Steiermark, welcher auf ungewöhnlich heftige Südoststürme in Serbien und im Banate zurückzuführen ist. In anderen Fällen ist jedoch der Ursprung des Staubes schwer festzustellen, weil er durch Luftwirbel wegen seiner Feinheit oft sehr weit getragen wird. Dass der Staub oft von weit entfernten Gegenden kommt, ist im Winter schon daraus zu schließen, dass das Staubgebiet in weiter Umgebung von einer Schneedecke bedeckt und der Boden gefroren ist, so dass Staub in der Nähe nicht aufgewirbelt werden konnte; auch wenn ausgedehnte Niederschläge vorausgegangen sind, kann mit Sicherheit geschlossen werden, dass der Ursprungsort außerhalb des Niederschlagsgebietes zu suchen ist.

Zusammenfassung.

Fassen wir die Resultate der vorausgehenden Arbeit zusammen, so ergibt sich:

1. Es ist nach den bisherigen verlässlichen Beobachtungen nicht anzunehmen, dass Staubfälle von der Art des hier untersuchten kosmischen Ursprunges sind.

2. Ob Staubfälle durch Explosion von Meteoren entstehen können, bleibt sehr fraglich, jedenfalls ist für ausgedehnte Staubfälle ein solcher Ursprung nicht anzunehmen.

3. Die Staubfälle entstehen, abgesehen von Vulcanausbrüchen, im allgemeinen dadurch, dass die Staubmassen vom Erdboden durch Luftwirbel in die Höhe gehoben und durch die oberen Luftströmungen weitergetragen werden; hiebei ist nicht nothwendig, dass nur die Luftströmung einer Depression den Staub weiterträgt, wie dies beim Staubfalle vom 9. bis 12. März 1901 sicher der Fall war, sondern er kann auch, von einem Luftwirbel in die Höhe gehoben, von der allgemeinen Circulation erfasst und weitergetragen werden. Es erscheinen daher auch Staubfälle in Gebieten hohen Luftdruckes nicht ausgeschlossen, jedoch ist dann der Ursprungsort in großer Entfernung zu suchen, da der Staub nur innerhalb einer Depression in die Höhe gelangen kann.

4. Staubfälle kommen in größerer Entfernung vom Ursprungsorte nur in Verbindung mit Niederschlägen vor, da der freifallende Staub infolge des Luftwiderstandes so langsam fällt, dass er durch die allgemeine Luftcirculation über ein sehr großes Gebiet vertheilt wird und deshalb wegen der geringen Dichte nicht als Staubfall bemerkt wird. Nur in der Nähe der Staubquelle, wo die in der Luft schwebenden Staubmassen sehr bedeutend sind, kommen auch trockene Staubfälle vor.

5. Träger der trockenen Staubfälle sind in der Regel die Luftströmungen unmittelbar über dem Erdboden.

6. Bei dem Staubfalle vom 9. bis 12. März 1901 waren die zum Körper der Cyclone gehörigen Luftmassen Träger des Staubes, welcher sicher afrikanischen Ursprunges ist.

7. Es ist sicher, dass die Staubcyclone auf ihrer Bahn von S nach N die Alpen überschritt.

Der behandelte Staubfall hat die successive Wirbelbewegung der Staubcyclone gezeichnet und führt, unter der Voraussetzung, dass der Staubfall dieselbe richtig zum Ausdrucke gebracht hat, zu folgenden allgemeinen Schlüssen über das Wesen der Wirbelbewegung in Cyclonen:

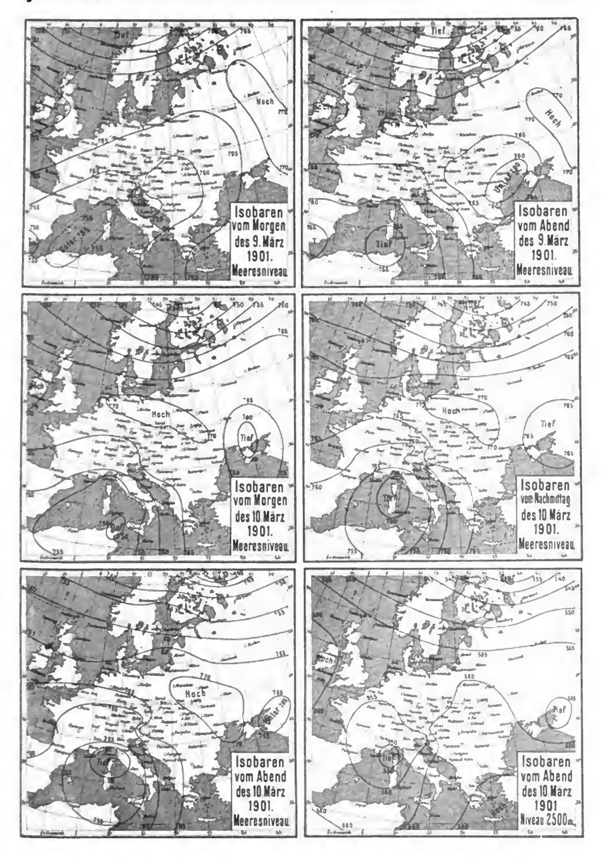
8. Es scheint, dass dieselben Luftmassen der Cyclone in mittlerer Höhe auf jener Seite der Depression, wo die Windrichtung parallel der Cyclonenbahn ist, auf große Entfernungen nahezu parallel mit der Depression weiterziehen; auf dieser Seite der Cyclone werden nur sehr allmählich neue Luftmassen (für eine und dieselbe Entfernung vom Centrum) in die Wirbelbewegung einbezogen; selbstverständlich werden jedoch durch Ausbreitung der cyclonalen Bewegung in größerer Entfernung neue Luftmassen in den Wirbel einbezogen, ziehen dann auch auf jener Seite der Cyclone, wo die Windrichtung parallel der Richtung der Cyclonenbahn ist, nahezu parallel der Depression weiter.

9. Haben diese Luftmassen, welche eine zur Cyclonenbahn parallele Strömung haben, eine größere absolute Geschwindigkeit als die Fortpflanzung der Cyclone, so schreiten sie im Sinne der Wirbelbewegung langsam zum nächsten Quadranten bei gleichzeitiger Annäherung an das Centrum der Depression vor; die Curve, welche ein solches Lufttheilchen hiebei beschreibt, ist in Bezug auf die Cyclone eine Spirale, die auf dem Erdboden projicierte Bahn ist jedoch nahezu eine Cycloide. Ist die Geschwindigkeit dieser Luftmassen kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Cyclone, so bleiben sie zurück und entfernen sich immer weiter von der Cyclone.

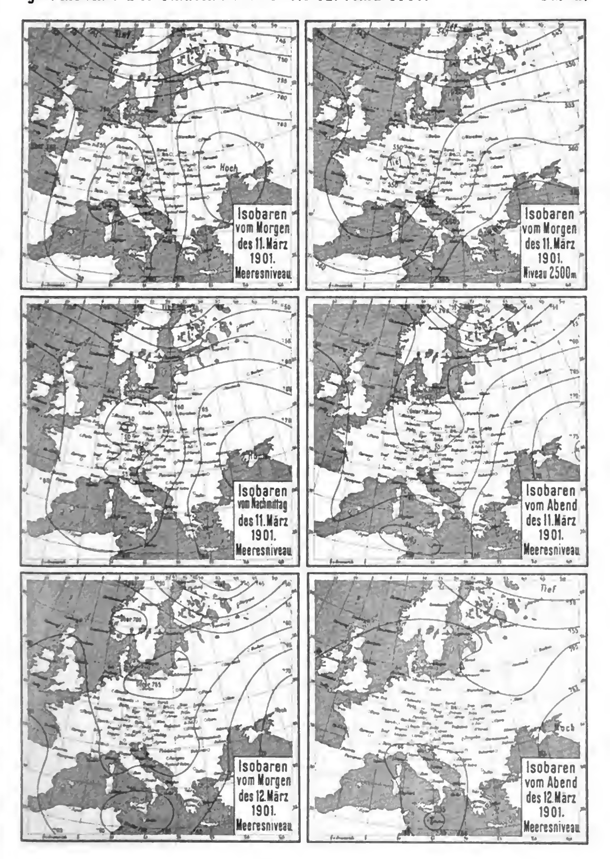
10. Da die Windgeschwindigkeit mit zunehmender Entfernung vom Centrum der Depression im allgemeinen abnimmt, muss es in einer bestimmten Entfernung vom Centrum immer eine Luftmasse geben, welche ihre relative Lage in Bezug auf die Depression unverändert beibehält, vorausgesetzt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der letzteren constant und kleiner als die größte im Bereiche der Cyclone vorkommende Windgeschwindigkeit ist. Die Luftmassen außerhalb dieser bestimmten Schichte können auf dieser Seite der Cyclone

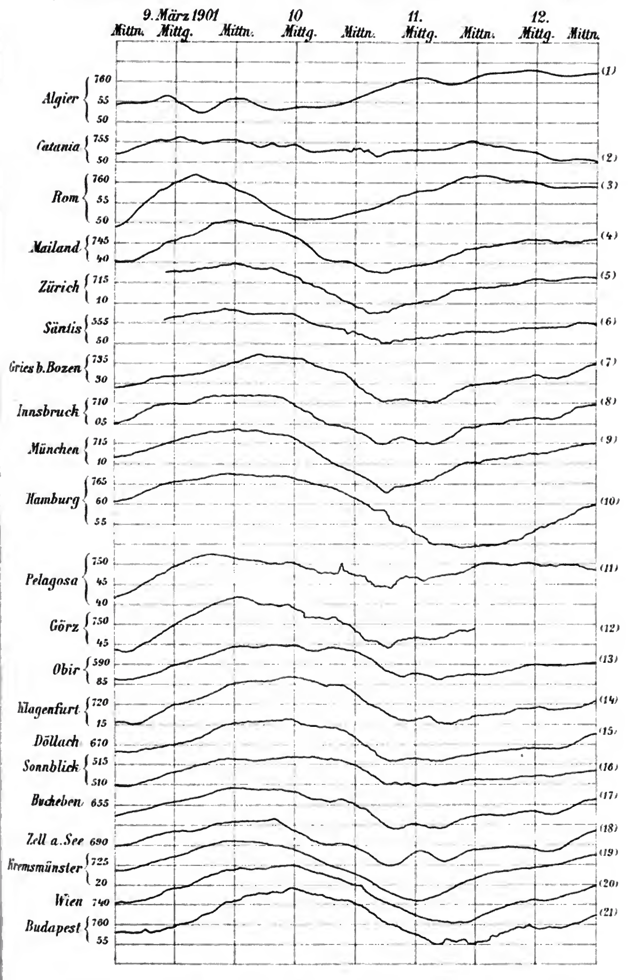
sich nicht mehr dem Gradienten entsprechend dem Centrum der Depression nähern.

11. Bei rasch fortschreitenden Depressionen ist die Windgeschwindigkeit auf beiden Seiten der Fortpflanzungsrichtung ungefähr von derselben Größenordnung und bedeutend größer als auf der Vorder- und Rückseite, und zwar wächst dieses Verhältnis mit zunehmender Fortpflanzungsgeschwindigkeit; bei stationären Cyclonen ist dagegen die Windgeschwindigkeit in allen Quadranten von derselben Größenordnung.


Isobaren vom Morgen des 9. März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Abend des 9. März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Morgen des 10 März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Nachmittag des 10 März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Abend des 10 März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Abend des 10 März 1901 Niveau 2500m.
Hoch
Tief

Digitized by Google


Isobaren vom Morgen des 11. März 1901. Meeresniveau
Hoch
Isobaren vom Morgen des 11. März 1901. Niveau 2500 m
Tief
Isobaren vom Nachmittag des 11. März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Abend des 11. März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Morgen des 12. März 1901. Meeresniveau
Isobaren vom Abend des 12. März 1901. Meeresniveau
Tief
Hoch


9. März 1901
10
11.
12.
Mittn.
Mittg.
Mittn.
Mittg.
Mittn.
Mittg.
Mittn.
Mittg.
Mittn.
Algier 760 55 50 (1)
Catania 755 50 (2)
Rom 760 55 50 (3)
Mailand 745 40 (4)
Zürich 715 10 (5)
Säntis 555 50 (6)
Gries b. Bozen 735 30 (7)
Innsbruck 710 05 (8)
München 715 10 (9)
Hamburg 765 60 55 (10)
Pelagosa 750 45 40 (11)
Görz 750 45 (12)
Obir 590 85 (13)
Klagenfurt 720 15 (14)
Döllach 670 (15)
Sonnblick 515 510 (16)
Bucheben 655 (17)
Zell a. See 690 (18)
Kremsmünster 725 20 (19)
Wien 740 (20)
Budapest 760 55 (21)

Über eine Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers

von

Dr. Anton Wassmuth,

ordentlichem Professor der mathematischen Physik an der Universität in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Mai 1902.)

Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers wurden in ihrer allgemeinsten Form aus dem Hamilton'schen Principe von G. Kirchhoff[1] abgeleitet. Dabei hat man »die Variation der lebendigen Kraft« δT und die Arbeit der wirkenden Kräfte U' für irgend eine Variation der Lage des Körpers zu bilden und die Summe $\delta T + U'$ auf die Form: $\sum\left(R\varepsilon + S\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$ zu bringen, wo die ε unendlich kleine, von einander unabhängige Größen sind, welche die Variation der Lage des Körpers bedingen; die Differentialgleichungen der Bewegung sind dann die Gleichungen: $\frac{dS}{dt} = R$.

Für die Größen ε kann man entweder — in der Bezeichnung Kirchhoff's — die Variationen u', v', w', p', q', r' oder die $\lambda', \mu', \nu', \pi', \chi', \rho'$ wählen, so dass die Arbeit U' im ersten Falle $= Xu' + Yv' + Zw' + M_x p' + M_y q' + M_z r'$ und im zweiten Falle $= \Xi\lambda' + \mathrm{H}\mu' + Z\nu' + M_\xi \pi' + M_\eta \chi' + M_\zeta \rho'$ wird. Umständlicher gestaltet sich die Entwickelung von δT, wie man schon

---

[1] G. Kirchhoff, Mechanik, 4. Aufl., 1898, 5. und 6. Vorlesung. Die dort gebrauchten Zeichen sollen auch hier zur Anwendung kommen und die Nummern von Kirchhoff's Gleichungen kurz durch ein K. mit beigefügter Zahl citiert werden.

daraus erkennt, dass bei Kirchhoff nicht weniger als drei Seiten hiezu nöthig sind. Man hat natürlich sofort, da die lebendige Kraft nur von u, v, w, p, q, r und Constanten abhängt:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial u}\delta u + \frac{\partial T}{\partial v}\delta v + \frac{\partial T}{\partial w}\delta w + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r,$$

muss aber dann — und darin besteht die große Schwierigkeit (l. c., S. 57, 58, 59) — die sechs Variationen $\delta u, \delta v, \delta w, \delta p, \delta q$ und δr durch $u'v'w'p'q'r'$, respective $\lambda'\mu'\nu'\pi'\chi'\rho'$ ausdrücken.

Es geht z. B. in dem speciellen Falle, wo es sich bloß um die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt handelt, nicht, die Winkelgeschwindigkeiten pqr zu unabhängig Variabelen zu wählen, um nun an der Hand der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art zu den Euler'schen Gleichungen gelangen zu können. Der Grund liegt, wie schon Routh[1] hervorgehoben hat, darin, dass sich die Coordinaten eines jeden Massenpunktes des Körpers nicht durch p, q, r ausdrücken lassen, ohne Differentialquotienten nach der Zeit in die geometrischen Gleichungen (i. e. die Transformationsgleichungen) einzuführen. — Es ist auch bekannt, dass man unter Einführung der sogenannten Euler'schen Winkel die Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen wirklich benützen kann (z. B. Routh l. c.), obwohl da noch einige Transformationen nöthig sind.

Es gibt indes noch einen anderen, bisher, wie es scheint, noch nicht betretenen Weg, der in einfacher und übersichtlicher Weise zur allgemeinen Lösung der Aufgabe führt. Die Lage eines starren Körpers ist nämlich auch eindeutig bestimmt, wenn für ein im Raume festes Coordinatensystem $(\xi\eta\zeta)$ bekannt sind: I. die Coordinaten α, β, γ eines (sonst beliebigen) Punktes G im starren Körper und II. die neun Richtungscosinusse $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \ldots \alpha_3\beta_3\gamma_3$, welche drei durch G gehende und zu einer senkrechte Axen (x, y, z) im starren Körper mit den Axen der $\xi\eta\zeta$ bilden. Es bestehen dann allerdings zwischen diesen neun Richtungscosinussen sechs Bedingungsgleichungen, so dass in die Lagrange'schen Gleichungen, wenn gerade die zur Anwendung

[1] Routh, Die Dynamik, I, Leipzig, 1898, S. 365.

kommen sollen, sechs vorher noch unbestimmte Factoren $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_6$ — es sind Drehungsmomente — eingeführt werden müssen; es ist indes leicht, diese Größen λ zu eliminieren, worauf man sofort auf die allgemeinsten Bewegungsgleichungen stößt. Vor der Auseinandersetzung dieser Methode mögen einige kinematische Betrachtungen in Erinnerung gebracht werden.

I.

Sind xyz die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes m des starren Körpers in Bezug auf ein mit ihm fest verbundenes Coordinatensystem (der xyz), $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten desselben Punktes für das im Raume feste System (der $\xi\eta\zeta$), so gelte das Schema

	x	y	z
$\xi-\alpha$	α_1	α_2	α_3
$\eta-\beta$	β_1	β_2	β_3
$\zeta-\gamma$	γ_1	γ_2	γ_3

(1)

woraus sich (K., 5. Vorl., 4) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-1 = 0 \\ F_2 &= \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-1 = 0 \\ F_3 &= \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-1 = 0 \\ F_4 &= \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3 = 0 \\ F_5 &= \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3 = 0 \\ F_6 &= \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

und für $\Delta = +1$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2 \\ \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3 \\ \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1 \end{aligned} \tag{3}$$

ergeben. Bei der Bewegung bleiben xyz constant, $\xi\eta\zeta$ ändern sich, alle 12 Größen $\alpha\beta\gamma\ldots\alpha_3\beta_3\gamma_3$ sind Functionen der Zeit t

Für die Summe gewisser Verrückungen setzen wir wie Kirchhoff:

$$\begin{aligned}\pi' &= \beta_1\delta\gamma_1+\beta_2\delta\gamma_2+\beta_3\delta\gamma_3\\ \chi' &= \gamma_1\delta\alpha_1+\gamma_2\delta\alpha_2+\gamma_3\delta\alpha_3\\ \rho' &= \alpha_1\delta\beta_1+\alpha_2\delta\beta_2+\alpha_3\delta\beta_3\end{aligned}\tag{4}$$

und

$$\begin{aligned}\lambda' &= \delta\alpha-\gamma\chi'+\beta\rho'\\ \mu' &= \delta\beta-\alpha\rho'+\gamma\pi'\\ \nu' &= \delta\gamma-\beta\pi'+\alpha\chi'\end{aligned}\tag{5}$$

sowie

$$\begin{aligned}u' &= \alpha_1\delta\alpha+\beta_1\delta\beta+\gamma_1\delta\gamma\\ v' &= \alpha_2\delta\alpha+\beta_2\delta\beta+\gamma_2\delta\gamma\\ w' &= \alpha_3\delta\alpha+\beta_3\delta\beta+\gamma_3\delta\gamma\end{aligned}\tag{6}$$

und

$$\begin{aligned}p' &= \alpha_3\delta\alpha_2+\beta_3\delta\beta_2+\gamma_3\delta\gamma_2\\ q' &= \alpha_1\delta\alpha_3+\beta_1\delta\beta_3+\gamma_1\delta\gamma_3\\ r' &= \alpha_2\delta\alpha_1+\beta_2\delta\beta_1+\gamma_2\delta\gamma_1\end{aligned}\tag{7}$$

so dass bekanntlich (l. c., 5. Vorl., 23)

$$\begin{aligned}u' &= \alpha_1\lambda'+\beta_1\mu'+\gamma_1\nu'+(\gamma_1\beta-\beta_1\gamma)\pi'+(\alpha_1\gamma-\gamma_1\alpha)\chi'+\\ &\quad+(\beta_1\alpha-\alpha_1\beta)\rho'\\ v' &= \alpha_2\lambda'+\beta_2\mu'+\gamma_2\nu'+(\gamma_2\beta-\beta_2\gamma)\pi'+(\alpha_2\gamma-\gamma_2\alpha)\chi'+\\ &\quad+(\beta_2\alpha-\alpha_2\beta)\rho'\\ w' &= \alpha_3\lambda'+\beta_3\mu'+\gamma_3\nu'+(\gamma_3\beta-\beta_3\gamma)\pi'+(\alpha_3\gamma-\gamma_3\alpha)\chi'+\\ &\quad+(\beta_3\alpha-\alpha_3\beta)\rho'\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}p' &= \alpha_1\pi'+\beta_1\chi'+\gamma_1\rho'\\ q' &= \alpha_2\pi'+\beta_2\chi'+\gamma_2\rho'\\ r' &= \alpha_3\pi'+\beta_3\chi'+\gamma_3\rho'\end{aligned}\tag{9}$$

wird.

Die elementare Arbeit U' für die Verrückungen $\lambda'\mu'\nu'\pi'\chi'\rho'$ wird dann:

$$U' = \Xi\lambda'+\mathrm{H}\mu'+Z\nu'+M_\xi\pi'+M_\eta\chi'+M_\zeta\rho',\tag{10}$$

wo Ξ, H, Z die Summe der Componenten der Kräfte nach den Achsen der ξ, η, ζ und die M_ξ, M_η, M_ζ die Drehungsmomente der Kräfte in Bezug auf dieselben Achsen vorstellen.

Wir führen nun in den Ausdruck (10) für $\lambda' \mu' \nu' \pi' \chi' \rho'$ die Werte aus (5) und (4) ein und bringen so die elementare Arbeit U' auf die Form:

$$\begin{aligned} U' = A\delta\alpha + B\delta\beta + C\delta\gamma &+ A_1\delta\alpha_1 + B_1\delta\beta_1 + C_1\delta\gamma_1 \\ &+ A_2\delta\alpha_2 + B_2\delta\beta_2 + C_2\delta\gamma_2 \\ &+ A_3\delta\alpha_3 + B_3\delta\beta_3 + C_3\delta\gamma_3 \end{aligned} \tag{11}$$

so dass man sofort erhält:

$$\left.\begin{aligned} & A = \Xi, \quad B = \mathrm{H}, \quad C = Z \\ & \frac{A_1}{\gamma_1} = \frac{A_2}{\gamma_2} = \frac{A_3}{\gamma_3} = M_\eta + Z\alpha - \Xi\gamma \\ & \frac{B_1}{\alpha_1} = \frac{B_2}{\alpha_2} = \frac{B_3}{\alpha_3} = M_\zeta + \Xi\beta - \mathrm{H}\alpha \\ & \frac{C_1}{\beta_1} = \frac{C_2}{\beta_2} = \frac{C_3}{\beta_3} = M_\xi + \mathrm{H}\gamma - Z\beta \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

II.

Es soll nun der oben angedeutete Gedanke zur Ausführung kommen, als Variabeln die 12 Größen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ gewählt und die entsprechenden 12 Lagrange'schen Gleichungen aufgestellt werden. Es ist dies gestattet, weil die sechs Bedingungsgleichungen (2) keine Differentialquotienten nach der Zeit — solche sollen durch einen darüber gesetzten Punkt dargestellt werden — enthalten. Die drei ersten Gleichungen lauten demnach, da die lebendige Kraft T von α, β, γ unabhängig ist (K., S. 56):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) = A, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) = B, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}}\right) = C. \tag{13}$$

Bei der Bildung der weiteren neun Gleichungen hat man auf die Bedingungsgleichungen (2) Rücksicht zu nehmen, dieselben in bekannter Weise nach den Coordinaten zu differentieren und mit einstweilen noch unbestimmten Factoren $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6$ multipliciert links hinzuzuaddieren, d. i. nach dem Schema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial s} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial s} + \ldots + \lambda_6 \frac{\partial F_6}{\partial s} = S$$

vorzugehen, wo der Reihe nach für s die Werte $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ zu nehmen sind.

Man erhält so weitere drei Gleichungen in der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} + 2\lambda_1\alpha_1 + \lambda_5\gamma_1 + \lambda_6\beta_1 = A_1$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} + 2\lambda_1\alpha_2 + \lambda_5\gamma_2 + \lambda_6\beta_2 = A_2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} + 2\lambda_1\alpha_3 + \lambda_5\gamma_3 + \lambda_6\beta_3 = A_3.$$

Dieselben werden der Reihe nach mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ multipliciert. addiert und liefern:

$$\gamma_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1}\right) + \gamma_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2}\right) + \gamma_3 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_3}\right) - \\ - \left[\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial \alpha_3}\right] + \lambda_5 = M_\zeta + Z\alpha - \Xi\gamma, \quad (14)$$

da nach (12): $A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3 = M_\zeta + Z\alpha - \Xi\gamma$ ist. Ebenso erhält man:

$$\alpha_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_1}\right) + \alpha_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_2}\right) + \alpha_3 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_3}\right) - \\ - \left[\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial \gamma_1} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial \gamma_2} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial \gamma_3}\right] + \lambda_5 = 0, \quad (15)$$

indem ebenfalls nach (12): $C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 = 0$ wird.

Man sieht, dass durch Subtraction von (15) und (14) die Größe λ_5 eliminiert wird, doch sollen zuvor in diese Gleichungen und in die obigen Nr. 13 eingeführt werden die sechs Größen:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1\dot{\alpha} + \beta_1\dot{\beta} + \gamma_1\dot{\gamma} \\ v &= \alpha_2\dot{\alpha} + \beta_2\dot{\beta} + \gamma_2\dot{\gamma} \\ w &= \alpha_3\dot{\alpha} + \beta_3\dot{\beta} + \gamma_3\dot{\gamma} \\ p &= \alpha_3\dot{\alpha}_2 + \beta_3\dot{\beta}_2 + \gamma_3\dot{\gamma}_2 \\ q &= \alpha_1\dot{\alpha}_3 + \beta_1\dot{\beta}_3 + \gamma_1\dot{\gamma}_3 \\ r &= \alpha_2\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\beta}_1 + \gamma_2\dot{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (16)$$

indem bekanntlich die lebendige Kraft T (cf. K., S. 54)

$$T = \frac{1}{2} \sum m \{[u+zq-yr]^2 + [v+xr-zp]^2 + [w+yp-xq]\} \quad (17)$$

von diesen sechs Größen und den Constanten m, x, y, z abhängt.

Es ist also z. B.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{du}{d\dot{\alpha}} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial p} \frac{dp}{\partial \dot{\alpha}} + \ldots = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w}$$

oder es werden die Gleichungen (13) mit Rücksicht auf (12):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) &= \frac{d}{dt}\left[\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right] = \Xi \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left[\beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right] = H \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}}\right) &= \frac{d}{dt}\left[\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right] = Z
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Das sind genau Kirchhoff's Gleichungen 14 der 6. Vorlesung.

Ebenso hat man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} &= \dot{\alpha} \frac{\partial T}{\partial u} + \dot{\alpha}_3 \frac{\partial T}{\partial q}, & \frac{\partial T}{\partial \gamma_1} &= \dot{\gamma} \frac{\partial T}{\partial u} + \dot{\gamma}_3 \frac{\partial T}{\partial q} \\
\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} &= \dot{\alpha} \frac{\partial T}{\partial v} + \dot{\alpha}_1 \frac{\partial T}{\partial r}, & \frac{\partial T}{\partial \gamma_2} &= \dot{\gamma} \frac{\partial T}{\partial v} + \dot{\gamma}_1 \frac{\partial T}{\partial r} \\
\frac{\partial T}{\partial \alpha_3} &= \dot{\alpha} \frac{\partial T}{\partial w} + \dot{\alpha}_2 \frac{\partial T}{\partial p}, & \frac{\partial T}{\partial \gamma_3} &= \dot{\gamma} \frac{\partial T}{\partial w} + \dot{\gamma}_2 \frac{\partial T}{\partial p}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} = \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} = \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_3} = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial q}$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_1} = \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_2} = \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_3} = \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial q}.$$

Mit diesen Werten werden nun unsere beiden Gleichungen (14) und (15) übergeführt in:

$$\gamma_1 \frac{d}{dt}\left(\alpha_2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \gamma_2 \frac{d}{dt}\left(\alpha_3 \frac{\partial T}{\partial p}\right) + \gamma_3 \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial q}\right) -$$

$$-\left[\gamma_1 \dot{\alpha} \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_1 \dot{\alpha}_3 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_2 \dot{\alpha} \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_2 \dot{\alpha}_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \gamma_3 \dot{\alpha} \frac{\partial T}{\partial w} + \gamma_3 \dot{\alpha}_2 \frac{\partial T}{\partial p}\right] + \lambda_5 =$$

$$= M_\eta + Z\alpha - \Xi\gamma$$

$$\alpha_1 \frac{d}{dt}\left(\gamma_2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \alpha_2 \frac{d}{dt}\left(\gamma_3 \frac{\partial T}{\partial p}\right) + \alpha_3 \frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial q}\right) -$$

$$-\left[\alpha_1 \dot{\gamma} \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_1 \dot{\gamma}_3 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_2 \dot{\gamma} \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_2 \dot{\gamma}_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_3 \dot{\gamma} \frac{\partial T}{\partial w} + \alpha_3 \dot{\gamma}_2 \frac{\partial T}{\partial p}\right] + \lambda_5 = 0.$$

Subtrahiert man, um λ_5 zu eliminieren, diese beiden Gleichungen und berücksichtigt die Beziehungen (3), wonach z. B. aus: $\beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1$ folgt: $\dot{\beta}_3 = \gamma_1\dot{\alpha}_2 + \dot{\gamma}_1\alpha_2 - \alpha_1\dot{\gamma}_2 - \dot{\alpha}_1\gamma_2$, so erhält man sofort die **zweite Gleichung** des nachstehenden Systems:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) +$$

$$+ (\gamma_1\dot{\beta} - \beta_1\dot{\gamma}) \frac{\partial T}{\partial u} + (\gamma_2\dot{\beta} - \beta_2\dot{\gamma}) \frac{\partial T}{\partial v} + (\gamma_3\dot{\beta} - \beta_3\dot{\gamma}) \frac{\partial T}{\partial w} =$$

$$= M_\xi + \mathrm{H}\gamma - Z\beta$$

$$\frac{d}{dt}\left[\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right] +$$

$$+ (\alpha_1\dot{\gamma} - \gamma_1\dot{\alpha}) \frac{\partial T}{\partial u} + (\alpha_2\dot{\gamma} - \gamma_2\dot{\alpha}) \frac{\partial T}{\partial v} + (\alpha_3\dot{\gamma} - \gamma_3\dot{\alpha}) \frac{\partial T}{\partial w} = \tag{19}$$

$$= M_\eta + Z\alpha - \Xi\gamma$$

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right] +$$

$$+ (\beta_1\dot{\alpha} - \alpha_1\dot{\beta}) \frac{\partial T}{\partial u} + (\beta_2\dot{\alpha} - \alpha_1\dot{\beta}) \frac{\partial T}{\partial v} + (\beta_3\dot{\alpha} - \alpha_3\dot{\beta}) \frac{\partial T}{\partial w} =$$

$$= M_\zeta + \Xi\beta - \mathrm{H}\alpha$$

Eliminiert man hieraus mit Hilfe der schon abgeleiteten Beziehungen (18) die Kräfte Ξ, H, Z, indem man z. B. für die mittlere Gleichung:

$$\Xi\gamma - Z\alpha = \gamma \frac{d}{dt}\left[\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right] - \\ - \alpha \frac{d}{dt}\left[\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right]$$

einführt, so stößt man auf die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_\xi &= \frac{d}{dt}\Big[(\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\frac{\partial T}{\partial u} + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\frac{\partial T}{\partial v} + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\frac{\partial T}{\partial w} + \\ &\qquad + \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r}\Big] \\ M_\eta &= \frac{d}{dt}\Big[(\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\frac{\partial T}{\partial u} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\frac{\partial T}{\partial v} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\frac{\partial T}{\partial w} + \\ &\qquad + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r}\Big] \\ M_\zeta &= \frac{d}{dt}\Big[(\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\frac{\partial T}{\partial u} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\frac{\partial T}{\partial v} + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)\frac{\partial T}{\partial w} + \\ &\qquad + \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r}\Big], \end{aligned} \tag{20}$$

die völlig identisch sind mit Kirchhoff's Gleichungen 15 der 6. Vorlesung. Die Gleichungen (18) und (20) oder, wenn man will, die Gleichungen (18) und (19) stellen die allgemeinsten Differentialgleichungen der ersten Art für die Bewegung starrer Körper vor. Die Gleichungen (19) erleichtern überdies den Übergang zu denen der zweiten Art. Es geschieht dies nach dem Schema:

$$X = \alpha_1 \Xi + \beta_1 H + \gamma_1 Z \text{ u. s. w.}$$

und:

$$M_x = \alpha_1[M_\xi + H\gamma - Z\beta] + \beta_1[M_\eta + Z\alpha - \Xi\gamma] + \gamma_1[M_\zeta + \Xi\beta - H\alpha]$$

u. s. w.,[1]

[1] Diese Beziehungen sind einfache Umkehrungen gewisser Relationen (K., 5. Vorl., S. 51): Sie werden auch erhalten, wenn man in den beiden Ausdrücken für die Arbeit U' die Größen $\lambda'\mu'\nu'\pi'\chi'\rho'$ durch die $u'v'w'p'q'r'$ ausdrückt.

d. h. also, dass man die Kraft X erhält, indem man der Reihe nach die Gleichungen (18) mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ multipliciert und nachher addiert und dass man ferner durch den ganz gleichartigen Vorgang an den Gleichungen (19) das Drehungsmoment M_x gewinnt. Wegen: $\alpha_1\dot{\alpha}_1 + \beta_1\dot{\beta}_1 + \gamma_1\dot{\gamma}_1 = 0$, $\alpha_1\dot{\alpha}_2 + \beta_1\dot{\beta}_2 + \gamma_1\dot{\gamma}_2 = -r$ und $\alpha_1\dot{\alpha}_3 + \beta_1\dot{\beta}_3 + \gamma_1\dot{\gamma}_3 = q$ erhält man zuerst:

$$X = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) - r\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial w}$$

und analog:

$$Y = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) - p\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial u} \tag{21}$$

$$Z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) - q\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Das sind die Gleichungen 12 von Kirchhoff. Und ebenso erhält man aus (19) aus denselben Gründen und wegen:

$$\alpha_1\gamma_2\dot{\beta} - \alpha_1\beta_2\dot{\gamma} + \alpha_2\beta_1\dot{\gamma} - \beta_1\gamma_2\dot{\alpha} + \beta_2\gamma_1\dot{\alpha} - \alpha_2\gamma_1\dot{\beta} = \dot{\alpha}(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) +$$
$$+ \dot{\beta}(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) + \dot{\gamma}(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) = -[\dot{\alpha}\alpha_3 + \dot{\beta}\beta_3 + \dot{\gamma}\gamma_3] = -w$$

$$\alpha_1\gamma_3\dot{\beta} - \alpha_1\beta_3\dot{\gamma} + \alpha_3\beta_1\dot{\gamma} - \beta_1\gamma_3\dot{\alpha} + \beta_3\gamma_1\dot{\alpha} - \alpha_3\gamma_1\dot{\beta} = \dot{\alpha}(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) +$$
$$+ \dot{\beta}(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) + \dot{\gamma}(\alpha_3\beta_1 - \beta_1\gamma_3) = \dot{\alpha}\alpha_2 + \dot{\beta}\beta_2 + \dot{\gamma}\gamma_2 = v$$

$$M_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) - r\frac{\partial T}{\partial q} + q\frac{\partial T}{\partial r} - w\frac{\partial T}{\partial v} + v\frac{\partial T}{\partial w}$$

und durch Vertauschung

$$M_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - p\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial T}{\partial p} - u\frac{\partial T}{\partial w} + w\frac{\partial T}{\partial u} \tag{22}$$

$$M_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) - q\frac{\partial T}{\partial p} + p\frac{\partial T}{\partial q} - v\frac{\partial T}{\partial u} + u\frac{\partial T}{\partial v}$$

oder Kirchhoff's Gleichungen Nr. 13.

Die Gleichungen (21) und (22) bilden die der zweiten Art, während, wie erwähnt, (18) und (19) oder (18) und (20) die der ersten Art vorstellen. Man sieht, dass die vorgeschlagene Methode in einfacher Art zum Ziele führt. Die Größen $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_6$

sind, wie die obigen Gleichungen lehren, **Drehungsmomente** der **Zwangskräfte**, deren weitere physikalische Natur noch zu erforschen wäre.

In derselben Art vorgehend, ließen sich auch Gleichungen bilden, in denen statt der Differentialquotienten der lebendigen Kraft T nach u, respective v, w, p, q, r die Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial \lambda}, \frac{\partial T}{\partial \mu}, \frac{\partial T}{\partial \nu}, \frac{\partial T}{\partial \pi}, \frac{\partial T}{\partial \chi}$ und $\frac{\partial T}{\partial \rho}$ auftreten.

Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung der Reflexe

von

Eduard Doležal,

o. ö. Professor an der k. k. Bergakademie in Leoben.

(Mit 5 Textfiguren und 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Mai 1902.)

I.

Die Reflexbilder, welche die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit von den umliegenden Objecten gibt, führen den denkenden Beobachter unmittelbar auf eine indirecte Bestimmung

der Distanz des reflectierten Gegenstandes vom Standpunkte des Beobachters und

der Höhe des betreffenden Objectes über dem Niveau der reflectierenden Fläche.

Die Lösung dieser Aufgabe ist elementar.

Bezeichnen wir in Fig. 1 die Strecken:

$\overline{CP''} = D$ als Horizontalentfernung des Objectes vom Standpunkte des Beobachters,

$\overline{PP'} = x$ die Höhe des Gegenstandes über der spiegelnden Ebene,

$\overline{PP''} = H$ die Höhe des Gegenstandes über dem Horizonte des Beobachters,

$\overline{CA'} = \overline{P'P''} = h$ die Höhe des Horizontes des Beobachters über dem Niveau der reflectierenden Ebene und

sind ferner

$$PCP'' = \beta, \quad P''CP_r = \beta_r$$

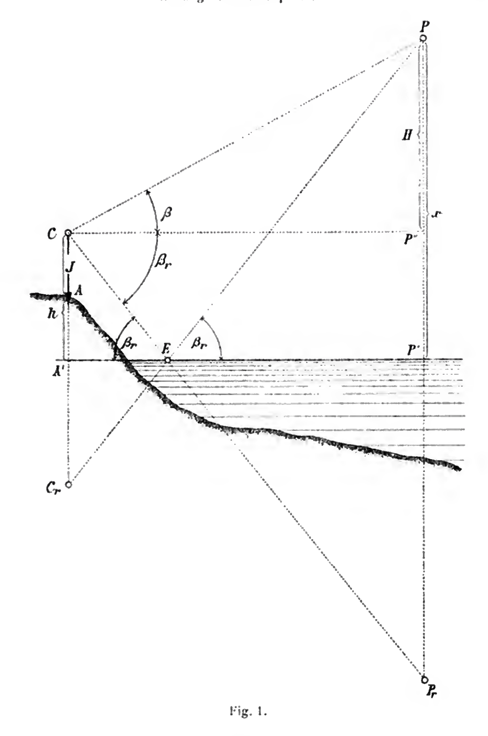


Fig. 1.

die Verticalwinkel nach dem Objecte und dem reflectierten Bilde, so folgt aus den Dreiecken CPP'' und $CP''P_r$:

$$\left.\begin{aligned} D &= (x-h)\operatorname{cotg}\beta = (x+h)\operatorname{cotg}\beta_r \\ H &= x-h \end{aligned}\right\},$$

aus welchen Gleichungen nach einfacher Rechnung sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\beta_r}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\beta_r} 2h = \frac{\cos\beta\cos\beta_r}{\sin(\beta_r-\beta)} 2h \\ H &= \frac{\operatorname{cotg}\beta_r}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\beta_r} 2h = \frac{\sin\beta\cos\beta_r}{\sin(\beta_r-\beta)} 2h \end{aligned}\right\} . \qquad 1)$$

Die Genauigkeit in D und H hängt von der Schärfe ab, mit welcher die Größen h, β und β_r gemessen werden.

Vorausgesetzt, Δh, $\Delta\beta$ und $\Delta\beta_r$ seien die mittleren Fehler dieser Größen, so rechnen sich die mittleren Fehler in D und H nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \Delta D &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial h}\right)^2 \Delta h^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial\beta}\right)^2 \Delta\beta^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial\beta_r}\right)^2 \Delta\beta_r^2} \\ \Delta H &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial h}\right)^2 \Delta h^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)^2 \Delta\beta^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial\beta_r}\right)^2 \Delta\beta_r^2} \end{aligned}\right\} . \qquad 2)$$

Werden die partiellen Differentialquotienten der vorstehenden Ausdrücke gebildet, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial h} &= 2\frac{\cos\beta\cos\beta_r}{\sin(\beta_r-\beta)} = \frac{D}{h} \\ \frac{\partial D}{\partial\beta} &= \frac{\cos^2\beta_r}{\sin^2(\beta_r-\beta)} 2h = \frac{\cos\beta_r}{\cos\beta\sin(\beta_r-\beta)} D \\ \frac{\partial D}{\partial\beta_r} &= -\frac{\cos^2\beta}{\sin^2(\beta_r-\beta)} 2h = -\frac{\cos\beta}{\cos\beta_r\sin(\beta_r-\beta)} D \end{aligned}\right\} .$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial h} &= 2\frac{\sin\beta\cos\beta_r}{\sin(\beta_r-\beta)} = \frac{H}{h} \\ \frac{\partial H}{\partial\beta} &= \frac{\sin\beta_r\cos\beta_r}{\sin^2(\beta_r-\beta)} 2h = \frac{\sin\beta_r}{\sin\beta\sin(\beta_r-\beta)} H \\ \frac{\partial H}{\partial\beta_r} &= -\frac{\cos\beta\sin\beta}{\sin^2(\beta_r-\beta)} 2h = -\frac{\cos\beta}{\cos\beta_r\sin(\beta_r-\beta)} H \end{aligned}\right\} .$$

Diese Werte, in die Gleichungen 2) eingeführt, geben:

$$\Delta D = \pm D \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta_r}{\cos\beta\,\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_r\,\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta_r\right)^2}$$

als absoluten und

$$\frac{\Delta D}{D} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta_r}{\cos\beta\,\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_r\,\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta_r\right)^2} \quad . \qquad 3)$$

als relativen Fehler der Distanz; für den mittleren Fehler in der Höhe hat man:

$$\Delta H = \pm H \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta_r}{\sin\beta\,\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_r\,\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta_r\right)^2}$$

Nehmen wir die mittleren Fehler $\Delta\beta$ und $\Delta\beta_r$ als einander gleich an, so vereinfachen sich die Gleichungen 3) für die mittleren Fehler, und es resultieren:

$$\Delta D = \pm D \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \frac{\cos^4\beta + \cos^4\beta_r}{\cos^2\beta\,\cos^2\beta_r\,\sin^2(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta^2}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \frac{\cos^4\beta + \cos^4\beta_r}{\cos^2\beta\,\cos^2\beta_r\,\sin^2(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta^2} \quad . \qquad 4)$$

$$\Delta H = \pm H \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \frac{(\sin\beta_r\cos\beta_r)^2 + (\sin\beta\cos\beta)^2}{\sin^2\beta\,\cos^2\beta_r\,\sin^2(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta^2}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Größe h mit großer Schärfe ermittelt wurde und ihr mittlerer Fehler $\Delta h = 0$ gesetzt werden kann, vereinfachen sich die Formeln 3) und 4) nicht unbedeutend; wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta D &= \pm \frac{D}{\sin(\beta_r - \beta)} \sqrt{\left(\frac{\cos\beta_r}{\cos\beta}\,\Delta\beta\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_r}\,\Delta\beta_r\right)^2} \\
\frac{\Delta D}{D} &= \frac{\sqrt{(\cos^2\beta_r\,\Delta\beta)^2 + (\cos^2\beta\,\Delta\beta_r)^2}}{\cos\beta\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)} \\
\Delta H &= \pm H \frac{\sqrt{(\sin\beta_r\cos\beta_r\,\Delta\beta)^2 + (\sin\beta\cos\beta\,\Delta\beta_r)^2}}{\sin\beta\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)}
\end{aligned}\right\} \quad 3')$$

und, wenn $\Delta\beta_r = \Delta\beta$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}
\Delta D &= \pm D \frac{\sqrt{\cos^4\beta + \cos^4\beta_r}}{\cos\beta\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta \\
\frac{\Delta D}{D} &= \frac{\sqrt{\cos^4\beta + \cos^4\beta_r}}{\cos\beta\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta \\
\Delta H &= \pm H \frac{\sqrt{(\sin\beta_r\cos\beta_r)^2 + (\sin\beta\cos\beta)^2}}{\sin\beta\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta
\end{aligned}\right\} \quad 4')$$

Es ist üblich, den Fehler in der Höhe für die Einheit der Distanz anzugeben; in diesem Falle hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta H}{D} &= \operatorname{tg}\beta \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta_r}{\sin\beta\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta_r\right)^2} \\
\frac{\Delta H}{D} &= \operatorname{tg}\beta \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \frac{(\sin\beta_r\cos\beta_r)^2 + (\sin\beta\cos\beta)^2}{\sin^2\beta\cos^2\beta_r\sin^2(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta^2}
\end{aligned}\right\};$$

wird $\Delta h = 0$ angenommen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta H}{D} &= \operatorname{tg}\beta \frac{\sqrt{(\sin\beta_r\cos\beta_r\,\Delta\beta)^2 + (\sin\beta\cos\beta\,\Delta\beta_r)^2}}{\sin\beta\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)} = \operatorname{tg}\beta\,\frac{\Delta H}{H} \\
\frac{\Delta H}{D} &= \operatorname{tg}\beta \frac{\sqrt{(\sin\beta_r\cos\beta_r)^2 + (\sin\beta\cos\beta)^2}}{\sin\beta\cos\beta_r\sin(\beta_r - \beta)}\,\Delta\beta
\end{aligned}\right\}$$

Denkt man sich durch den Standpunkt C ein rechtwinkliges Raumcoordinatensystem gelegt, so können die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Punktes P bestimmt werden, falls das Azimut einer Richtung, z. B. das Azimut ω der Verticalebene, in welcher sich das Original P und sein Spiegelbild P_r befinden, gemessen wurde.

Nehmen wir den Horizont C des Beobachters als xy-Ebene an, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x &= D \sin\omega \\ y &= D \cos\omega \\ z &= D \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} . \qquad 5)$$

Die mittleren Fehler der Raumcoordinaten ergeben sich mit:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial D}\right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 \Delta\omega^2} \\ \Delta y &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial D}\right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 \Delta\omega^2} \\ \Delta z &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial D}\right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 \Delta\beta^2} \end{aligned}\right\}, \qquad 6)$$

oder nach Substitution der partiellen Differentialquotienten hat man die mittleren absoluten Fehler:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \pm\sqrt{(\sin\omega\,\Delta D)^2 + (D\cos\omega\,\Delta\omega)^2} = \\ &= x\sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\operatorname{tg}\omega}\right)^2} \\ \Delta y &= \pm\sqrt{(\cos\omega\,\Delta D)^2 + (D\sin\omega\,\Delta\omega)^2} = \\ &= y\sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\operatorname{cotg}\omega}\right)^2} \\ \Delta z &= \pm\sqrt{(\operatorname{tg}\beta\,\Delta D)^2 + \left(\frac{D}{\cos^2\beta}\Delta\beta\right)^2} = \\ &= z\sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\frac{\sin 2\beta}{2}}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

und die relativen Fehler lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{x} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\operatorname{tg}\omega}\right)^2} \\
\frac{\Delta y}{y} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\operatorname{cotg}\omega}\right)^2} \\
\frac{\Delta z}{z} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\frac{\sin 2\beta}{2}}\right)^2}
\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

II.

Die Anwendung der gemachten Entwickelungen auf die Lösung des Wolkenproblems bietet sich unmittelbar und weist den eminenten Vortheil auf, dass die interessante Aufgabe von einem Standpunkte erledigt werden kann.

Eine Wasserfläche, welche gegen Wind ziemlich geschützt ist, gibt ruhige, reine und auch scharfe Reflexbilder.

Könnte man vom Standpunkte des Beobachters aus mit einem winkelmessenden geodätischen Instrumente die Verticalwinkel β und β_r nach dem Originale und seinem Spiegelbilde messen, was bei der sich bewegenden Wolke gleichzeitig erfolgen müsste, so ließen sich nach den Formeln 1) die Werte für D und H, beziehungsweise nach den Gleichungen 5) die Raumcoordinaten x, y, z bestimmen.

Wären Δh, $\Delta\beta$ und $\Delta\beta_r$ die mittleren Fehler der gemessenen Größen, so könnte man nach 2), 3) oder 4), eventuell nach 6), 7) oder 8) die mittleren Fehler der auf Grund von 1) und 5) bestimmten Größen D und H, sowie von x, y, z finden.

Zur Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Wolke gelangt man auf folgende Weise:

Wird am Originale einer Wolke ein markanter Punkt in seiner Lage mit P_1 bezeichnet zur Zeit t_1 und gleichzeitig sein Spiegelbild $P_{1,r}$ beobachtet, so erhält man:

$$\omega_1,\ \beta_1 \text{ und } \beta_{1,r},$$

welche Größen mit Zuhilfenahme von h zu ermitteln gestatten:

$$D_1,\ H_1 \text{ und } x_1, y_1, z_1.$$

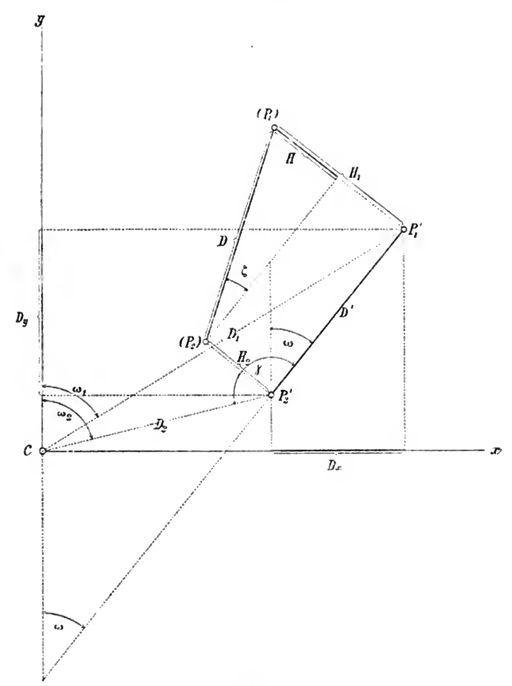


Fig. 2.

Nach Verlauf eines gewissen Zeitintervalles zur Zeit t_2 wird derselbe Wolkenpunkt in seiner zweiten Lage P_2 und sein Spiegelbild $P_{2,r}$ eingestellt, wodurch gewonnen werden:

$$\omega_2,\ \beta_2 \text{ und } \beta_{2,r};$$

es ist daher bestimmbar:

$$D_2,\ H_2,\ \text{sowie}\ x_2, y_2, z_2.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten des beobachteten Punktes P werden lauten nach Fig. 2:

$$\text{für } P_1 \ldots \left\{ \begin{aligned} x_1 &= D_1 \sin \omega_1 \\ y_1 &= D_1 \cos \omega_1 \\ z_1 &= D_1 \operatorname{tg} \beta_1 = H_1 \end{aligned} \right\} \qquad 1)$$

und

$$\text{für } P_2 \ldots \left\{ \begin{aligned} x_2 &= D_2 \sin \omega_2 \\ y_2 &= D_2 \cos \omega_2 \\ z_2 &= D_2 \operatorname{tg} \beta_2 = H_2 \end{aligned} \right\}. \qquad 2)$$

Der Weg, den der Wolkenpunkt von P_1 nach P_2 zurückgelegt hat, ist in der xy-Ebene:

$$\left. \begin{aligned} D' &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2 - 2 D_1 D_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \right\} \qquad 3)$$

und somit der im Raume:

$$\left. \begin{aligned} D &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2 - 2 D_1 D_2 \cos(\omega_2 - \omega_1) + (H_1 - H_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned} \right\}. \qquad 4)$$

Bezeichnen wir die wirkliche Geschwindigkeit der Wolke mit v, so wird dieselbe:

$$v = \frac{D}{t_2 - t_1}. \qquad 5)$$

Will man die componentalen Geschwindigkeiten, welche parallel zu den Achsen des räumlichen Coordinatensystems verlaufen, so ermittelt man zuvörderst den Winkel γ im Dreiecke $CP_1'P_2'$ und das Azimut ω von $\overline{P_1'P_2'}$ nach den Sätzen der Polygonometrie, und zwar aus der Gleichung:

$$\omega = \omega_2 + \gamma \pm 180,$$

oder

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}.$$

der Verticalwinkel ζ des Weges P_1P_2 bestimmt sich aus

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\zeta &= \frac{z_1-z_2}{D'} = \frac{H}{D'} \\ \text{oder}\quad \sin\zeta &= \frac{z_1-z_2}{D} = \frac{H}{D} \end{aligned}\right\}. \qquad 6)$$

Denkt man sich den Weg $P_1P_2 = D$ auf die Achsen x, y, z projiciert, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} D_x &= v_x(t_2-t_1) = D' \sin\omega = D\cos\zeta\sin\omega \\ D_y &= v_y(t_2-t_1) = D' \cos\omega = D\cos\zeta\cos\omega \\ D_z &= v_z(t_2-t_1) = D' \operatorname{tg}\zeta \;\; = D\sin\zeta \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

oder, wenn für $D = v(t_2-t_1)$ eingesetzt wird, so rechnen sich die componentalen Geschwindigkeiten einfach mit:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos\zeta\sin\omega \\ v_y &= v\cos\zeta\cos\omega \\ v_z &= v\sin\zeta \end{aligned}\right\}. \qquad 8)$$

Die Bewegungsrichtung der Wolke ist durch den Winkel ω angegeben, der aus Fig. 2 folgt:

$$\omega = \omega_2+\gamma-180, \qquad 9)$$

oder

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}.$$

Die Genauigkeit in der Bestimmung der Geschwindigkeit und der Bewegungsrichtung hängt von der Schärfe der Distanz D, den Winkeln ω, ζ und γ, beziehungsweise von der Güte der Raumcoordinaten x, y und z ab.

Wird die Zeitdifferenz t_2-t_1 als fehlerfrei vorausgesetzt, so hat man für die mittleren Fehler der Geschwindigkeiten:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\Delta D}{t_2-t_1} \\ \Delta v_x &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial v_x}{\partial v}\right)^2\Delta v^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial\omega}\right)^2\Delta\omega^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial\zeta}\right)^2\Delta\zeta^2} \\ \Delta v_y &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial v_y}{\partial v}\right)^2\Delta v^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial\omega}\right)^2\Delta\omega^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial\zeta}\right)^2\Delta\zeta^2} \\ \Delta v_z &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial v_z}{\partial v}\right)^2\Delta v^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial\omega}\right)^2\Delta\omega^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial\zeta}\right)^2\Delta\zeta^2} \end{aligned}\right\}. \qquad 10)$$

Werden die partiellen Differentialquotienten der vorstehenden Ausdrücke berechnet:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial v} &= \sin\omega\cos\zeta = \frac{v_x}{v}\\
\frac{\partial v_x}{\partial\omega} &= v\cos\omega\cos\zeta = \frac{v_x}{\operatorname{tg}\omega}\\
\frac{\partial v_x}{\partial\zeta} &= -v\sin\omega\sin\zeta = -\frac{v_x}{\operatorname{cotg}\zeta}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_y}{\partial v} &= \cos\omega\cos\zeta = \frac{v_y}{v}\\
\frac{\partial v_y}{\partial\omega} &= -v\sin\omega\cos\zeta = -\frac{v_y}{\operatorname{cotg}\omega}\\
\frac{\partial v_y}{\partial\zeta} &= -v\cos\omega\sin\zeta = -\frac{v_y}{\operatorname{cotg}\zeta}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_z}{\partial v} &= \sin\zeta = \frac{v_z}{v}\\
\frac{\partial v_z}{\partial\zeta} &= v\cos\zeta = \frac{v_z}{\operatorname{tg}\zeta}
\end{aligned}\right\},$$

ferner die mittleren Fehler der Argumente v, ω und ζ aufgestellt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{\Delta D}{t_2-t_1}\\
\Delta\omega &= \pm\sqrt{\Delta\omega_2^2+\Delta\gamma^2}\\
\Delta\operatorname{tg}\zeta &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\operatorname{tg}\zeta}{\partial H}\right)^2\Delta H^2+\left(\frac{\partial\operatorname{tg}\zeta}{\partial D'}\right)^2\Delta D'^2}\\
\Delta\sin\zeta &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\sin\zeta}{\partial H}\right)^2\Delta H^2+\left(\frac{\partial\sin\zeta}{\partial D}\right)^2\Delta D^2}
\end{aligned}\right\},$$

worin $\Delta\zeta$ nach Ermittlung der Werte:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{tg}\zeta}{\partial H} &= \frac{1}{D'} = \frac{\operatorname{tg}\zeta}{H} \\ \frac{\partial \operatorname{tg}\zeta}{\partial D'} &= -\frac{H}{D'^2} = -\frac{\operatorname{tg}\zeta}{D'}\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial \sin\zeta}{\partial H} &= \frac{1}{D} = \frac{\sin\zeta}{H} \\ \frac{\partial \sin\zeta}{\partial D} &= -\frac{H}{D^2} = -\frac{\sin\zeta}{D}\end{aligned}\right\}$$

übergeht in:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\zeta &= \pm\frac{\sin 2\zeta}{2}\sqrt{\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2+\left(\frac{\Delta D'}{D'}\right)^2} \\ &= \pm \operatorname{tg}\zeta\sqrt{\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2+\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2}\end{aligned}\right\},$$

so erhalten wir endlich für die mittleren Fehler der Geschwindigkeitscomponenten:

$$\left.\begin{aligned}\Delta v_x &= \pm v_x\sqrt{\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2+\left(\frac{\Delta\omega}{\operatorname{tg}\omega}\right)^2+\left(\frac{\Delta\zeta}{\operatorname{cotg}\zeta}\right)^2} \\ \Delta v_y &= \pm v_y\sqrt{\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2+\left(\frac{\Delta\omega}{\operatorname{cotg}\omega}\right)^2+\left(\frac{\Delta\zeta}{\operatorname{cotg}\zeta}\right)^2} \\ \Delta v_z &= \pm v_z\sqrt{\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2+\left(\frac{\Delta\zeta}{\operatorname{tg}\zeta}\right)^2}\end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

und für den mittleren Fehler der Bewegungsrichtung:

$$\Delta\omega = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial\omega_2}\right)^2\Delta\omega_2^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\gamma}\right)^2\Delta\gamma^2} = \pm\sqrt{\Delta\omega_2^2+\Delta\gamma^2}. \qquad 12)$$

Die vorstehenden Untersuchungen über das Wolkenproblem setzen voraus, dass die Bestimmung der Verticalwinkel β und β_r gleichzeitig erfolgt, was mit den in der Praxis gebräuchlichen visuellen Hilfsmitteln nicht geschehen kann. Es müsste denn ein eigenes Instrument für gleichzeitiges Anvisieren eines Originalpunktes und seines Reflexes construiert werden.

Vom mechanischen Standpunkte aus stehen der Ausführung eines solchen Apparates keine besonderen Schwierigkeiten entgegen; es ist theoretisch nicht schwer, auf Grund der mathematischen Beziehungen zwischen dem Originale, dem Reflexe und der Höhe des Standpunktes über der reflectierenden Ebene die Bedingungen aufzustellen, die ein Apparat zu erfüllen hätte, um Simultanbeobachtungen von Raumpunkten und ihren Reflexen zu ermöglichen.

Der Apparat müsste für verschiedene Höhen des Standortes über der Spiegelebene einstellbar sein; wäre die Einstellung vollzogen, so müsste nach Anvisieren des Originales gleichzeitig auch das Reflexbild wahrgenommen und die Verticalwinkel β und β_r abgelesen werden können.

Die Einstellung für die Beobachtungshöhe h könnte stets mit verfügbaren Fixpunkten, deren Reflexe sich nicht ändern, ausgeführt werden.

III.

Nun besitzen wir in der Photogrammetrie ein Mittel, Original und Spiegelbild gleichzeitig auf der photographischen Platte zu fixieren. Sind die perspectivischen Constanten des photogrammetrischen Instrumentes gegeben, kennt man den Orientierungswinkel der Bilddistanz, respective der Bildebene, so lassen sich aus den Platten-, beziehungsweise Bildcoordinaten des Originales und Reflexes die zur Lösung des Problems erforderlichen Winkel berechnen.

Das subjective Verfahren in der Bestimmung der Verticalwinkel ist durch ein streng objectives Verfahren ersetzt, wobei das Objectiv des photogrammetrischen Apparates in der minimalen Zeit von Secunden oder Bruchtheilen derselben die Aufnahme vollführt.

Die Aufnahme kann, wie es eben die Verhältnisse erfordern,

1. bei verticaler Lage oder
2. bei geneigter Lage der Bildebene

des photogrammetrischen Apparates erfolgen.

In beiden Fällen vermag man die Aufgabe auf rechnerischem oder graphischem Wege zu lösen.

1. Aufnahme bei verticaler Lage der Bildebene.

a) Lösung durch Rechnung.

Für D und H gelten die vorher abgeleiteten Formeln:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\cos\beta\cos\beta_r}{\sin(\beta_r-\beta)}\,2h \\ H &= \frac{\sin\beta\cos\beta_r}{\sin(\beta_r-\beta)}\,2h \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

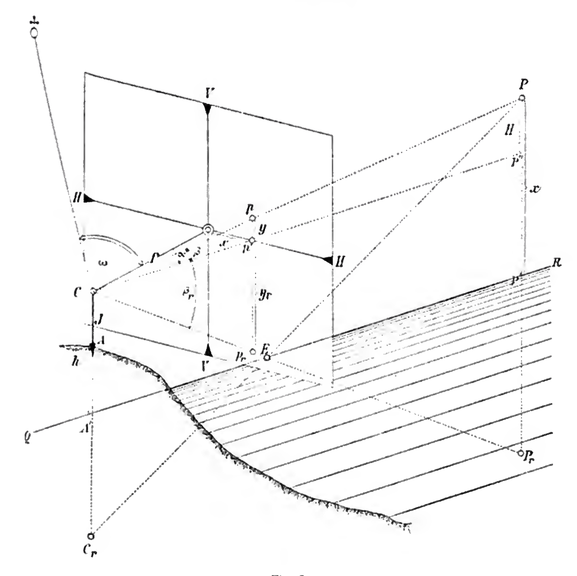


Fig. 3.

Nennen wir die Bildweite des photogrammetrischen Apparates f, sind die rechtwinkligen Plattencoordinaten der Bildpunkte p und p_r (Fig. 3), welche dem Originale und dem Reflexe zugehören, mit aller Schärfe gemessen, und zwar: x, y, x_r, y_r, wobei $x = x_r$ ist, so bestimmen sich aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{f}$$

das Azimut α der Verticalebene, in welcher sich P, P_r, p und p_r befinden, bezogen auf die Bilddistanz f, ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+f^2}} = \frac{y}{x} \sin \alpha = \frac{y}{f} \cos \alpha \\ \operatorname{tg} \beta_r &= \frac{y_r}{\sqrt{x^2+f^2}} = \frac{y_r}{x} \sin \alpha = \frac{y_r}{f} \cos \alpha \end{aligned}\right\},$$

welche beiden Gleichungen die Verticalwinkel der Projectionsstrahlen CP und CP_r geben.

Nach Einführung dieser Werte in die Gleichungen 1) gehen diese nach einfacher Reduction über in:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{x^2+f^2}}{y_r-y}\, 2h \\ H &= \frac{y}{y_r-y}\, 2h \end{aligned}\right\}, \qquad 2)$$

einfache Ausdrücke, die sich in verschiedener Weise auswerten lassen. Hat man eine große Anzahl von Punkten zu bestimmen, so wirkt wohl die Ermittlung auf mechanischem Wege mittels eines Rechenschiebers entlastend.

Bezeichnen wir mit ω das Azimut der Hauptverticalebene oder der Bilddistanz, welcher Winkel die Orientierung der Bildebene im Raume auf den astronomischen oder magnetischen Meridian oder auch eine angenommene fixe Richtung ausdrückt, so sind die Größen zur unzweideutigen Festlegung des Wolkenpunktes gegeben durch:

das Azimut $\omega+\alpha$,
die Distanz D,
die relative Höhe H,

bezogen auf den Horizont des Instrumentes. Wollte man die Höhe auf den Standpunkt reducieren, so wäre die Instrumenthöhe J noch in Rechnung zu bringen, also:

$$H_0 = H+J;$$

die absolute Höhe könnte durch Heranziehung der Meereshöhe des Standpunktes gewonnen werden.

b) Lösung auf graphischem Wege.

Unter dem Winkel ω wird durch den Punkt C zur fixen Richtung NS (astronomischer oder magnetischer Meridian oder eine andere gegebene Richtung) ein Strahl gezogen (Fig. 4), auf welchem die wahre Größe der Bildweite f aufgetragen wird; in dem so erhaltenen Punkte Ω zieht man eine Senkrechte TT, welche die Trace der verticalen Bildebene darstellt. Dadurch hat man das Gerippe für die Construction hergestellt.

Vom Hauptpunkte des Photogrammes Ω wird die Abscisse x in entsprechender Richtung aufgetragen; der erhaltene Punkt p', mit C verbunden, gibt einen Strahl, in welchem die Horizontalprojection P'' des Wolkenpunktes liegen muss.

Wird nun durch den Punkt p' eine Senkrechte auf Cp' gezogen, werden in entsprechendem Sinne die Ordinaten y und y_r aufgetragen, die so erhaltenen Punkte p und p_r mit C verbunden, so stellen Cp und Cp_r die umgelegten Visierstrahlen nach dem Originale und seinem Reflexe vor.

Zieht man nun im Abstande h in der Verjüngung eine Parallele zu Cp', so stellt diese Gerade QR die Trace der horizontalen spiegelnden Ebene auf die verticale Ebene von CPP_r dar.

Bestimmt man nun in Bezug auf QR den Reflex C_r des Projectionscentrums C, verbindet diesen mit dem Schnitte E von Cp_r mit QR, so schneidet diese Verbindungslinie in ihrer Verlängerung den Strahl Cp im Punkte (P), welcher den umgelegten Originalwolkenpunkt bezeichnet.

Die von (P) auf Cp' gefällte Senkrechte $(P)\,P''$ stellt d
Höhe H über dem Horizonte des Instrumentes dar; CP'' ist d

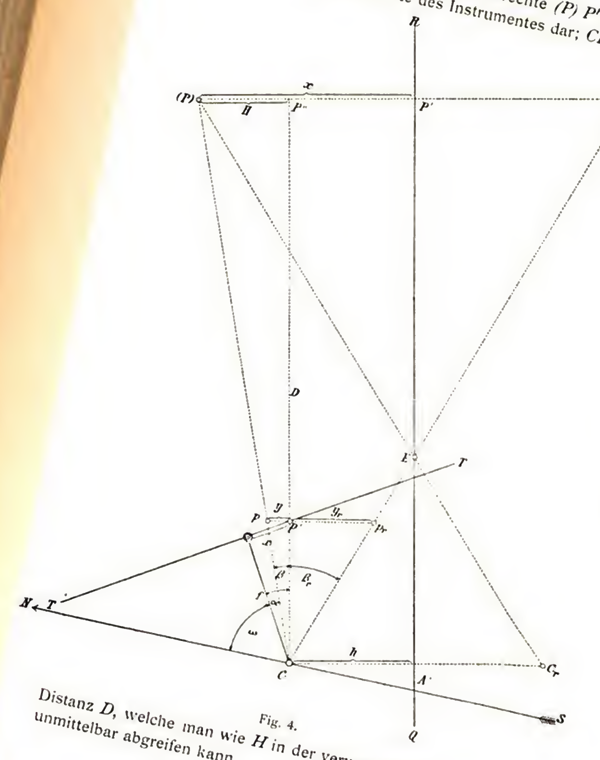


Fig. 4.

Distanz D, welche man wie H in der verwendeten Verjüngung unmittelbar abgreifen kann.

Eine zweite Construction für D und H lässt sich durchführen mit Zuhilfenahme der abgeleiteten Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{x^2+f^2}}{y_r-y}\,2h \\ H &= \frac{y}{y_r-y}\,2h \end{aligned}\right\},$$

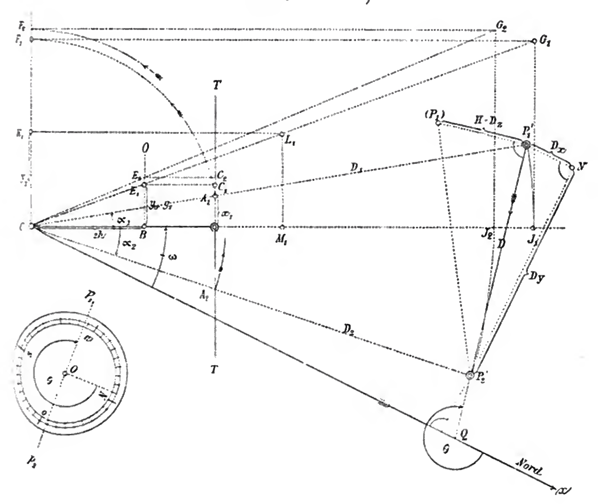


Fig. 5.

welche geometrisch ausgewertet werden, wobei die gesuchten Größen als die vierten geometrischen Proportionalen sich ergeben (Fig. 5).

Bei der Bestimmung von D ist der Gang der Construction der folgende: Die Abscisse x_1 wird von Ω in entsprechender Richtung aufgetragen: $\Omega A_1 = x_1$; mit CA_1 wird aus C ein Kreisbogen

beschrieben, bis er die Senkrechte von C im Punkte F_1 trifft; nun macht man $CB = 2h$, zieht durch B die Parallele BO zu TT und trägt auf derselben $BE_1 = y_{1,r} - y_1$ auf. Nun wird E_1 mit C verbunden, durch F_1 die Parallele zu $C\Omega$ gezogen, und man erhält G_1; wird $G_1J_1 \parallel CF_1$ gezogen und $CP_1' = CJ_1$ gemacht, so ergibt sich die horizontale Projection des Wolkenpunktes P_1'.

Es besteht nun die Proportion:

$$BE_1 : CB = J_1G_1 : CJ_1$$

oder

$$(y_{1,r} - y_1) : 2h = \sqrt{x_1^2 + f^2} : \xi_1,$$

woraus

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{x_1^2 + f^2}}{y_{1,r} - y_1} 2h = D_1$$

resultiert.

Bei Ausführung dieser Construction wird es nothwendig, die Differenz $(y_{1,r} - y_1)$ zu vervielfältigen, z. B. n-mal, hingegen $2h$ bedeutend zu verkleinern, z. B. m-mal, wodurch D_1 in der Verkleinerung $\frac{1}{m \cdot n}$ erhalten wird. Die Zahlen m und n sind so groß zu wählen, dass $\frac{D}{m \cdot n}$ noch auf die Zeichenfläche gelangt.

Die relative Höhe H_1 wird in ähnlicher Weise bestimmt. Es ist:

$$(y_{1,r} - y_1) : 2h = y_1 : H_1.$$

Für das erste Verhältnis der vorstehenden Proportion werden die bereits gezogenen Constructionslinien benützt: macht man weiters $CK_1 = L_1M_1 = y_1$, so wird $CM_1 = H_1$ die gesuchte relative Höhe.

Auf gleiche Art wird vorgegangen, wenn D_2 und H_2 für den Punkt P_2 ermittelt werden sollen.

Legt man nun unter dem Winkel ω zur Richtung der Bilddistanz in der Ebene des Horizontes eine Gerade Cx, so erhält man jene Richtung, an welche angebunden wurde. Wäre diese z. B. die Nord-Südlinie, so kann durch einen außerhalb der Figur gelegenen Punkt O eine Art Windrose gezeichnet werden, die gestattet, die Bewegungsrichtung der Wolke, respective

den Winkel θ durch das Ziehen einer Parallelen $p_1 p_2$ zu $P'_1 P'_2$ unmittelbar an der Theilung abzulesen, oder man legt durch einen der Punkte P_1 oder P_2, respective Q Parallele zur N—S-Linie und erhält unmittelbar die Bewegungsrichtung θ.

Wird $\overline{P'_1 P'_2}$ in zwei Componenten parallel zur x- und y-Richtung zerlegt und wird die Höhendifferenz $H = D_z$ der beiden Punkte P_1 und P_2 berücksichtigt, so ergeben sich unmittelbar die componentalen Wege des Wolkenpunktes in der Richtung des räumlichen Achsensystems; werden ferner die Zeitdifferenz $(t_2 - t_1)$ und die Reductionen m und n in der Zeichnung in Rechnung gezogen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{D_x}{m.n} &= \overline{P'_1 N} \\ \frac{D_y}{m.n} &= \overline{P'_2 N} \\ \frac{D_z}{m.n} &= \overline{P'_1 (P_1)} \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} v &= \frac{\overline{P'_2 (P_1)}}{t_2 - t_1}\, m.n \\ v_x &= \frac{\overline{P'_1 . N}}{t_2 - t_1}\, m.n \\ v_y &= \frac{\overline{P'_2 N}}{t_2 - t_1}\, m.n \\ v_z &= \frac{\overline{P'_1 (P_1)}}{t_2 - t_1}\, m.n \end{aligned}\right\}.$$

Das Wolkenproblem erscheint hiemit auch auf graphischem Wege gelöst.

c) Genauigkeit.

Auf den Photogrammen werden die Bildpunkte des Originales und des Reflexes durch rechtwinklige Coordinaten x, y bestimmt. Sind nun diese Coordinaten mit den mittleren Fehlern $\pm \Delta x$ und $\pm \Delta y$ behaftet und nehmen wir h und f als fehlerfrei an, so wird für

$$D = \frac{\sqrt{x^2 + f^2}}{y_r - y} = \frac{\sqrt{x^2 + f^2}}{\delta}\, 2h \qquad 1)$$

der mittlere Fehler sein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta D &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y_r}\right)^2 \Delta y_r^2} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \delta}\right)^2 \Delta \delta^2} \end{aligned}\right\}. \qquad 2)$$

Verwerten wir die zweite der vorstehenden Formeln für den mittleren Fehler und rechnen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x} &= \quad 2\frac{h}{\delta}\frac{x}{\sqrt{x^2+f^2}} \\ \frac{\partial D}{\partial \delta} &= -2\frac{h}{\delta}\frac{\sqrt{x^2+f^2}}{\delta} \end{aligned}\right\},$$

so ergibt sich:

$$\Delta D = \pm 2\frac{h}{\delta}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+f^2}\Delta x^2 + \frac{x^2+f^2}{\delta^2}\Delta\delta^2}. \tag{3}$$

Da nun für

$$\delta = y_r - y$$

zu setzen ist, so wird

$$\Delta\delta^2 = \Delta y_r^2 + \Delta y^2,$$

und wenn, wie es wahrscheinlich ist, $\Delta x = \Delta y = \Delta y_r$ gesetzt werden kann, so folgt:

$$\Delta\delta^2 = 2.\Delta x^2 \quad \text{oder} \quad \Delta x = \pm\frac{\Delta\delta}{\sqrt{2}}.$$

Führen wir dies ein, so hat man:

$$\Delta D = \pm\frac{2h}{\delta}\sqrt{\frac{x^2+f^2}{\delta^2}\left[1+\frac{x^2\delta^2}{2(x^2+f^2)^2}\right]}\Delta\delta. \tag{4}$$

Da aber der Quotient $\frac{x^2\delta^2}{2(x^2+f^2)^2}$ sehr klein ist, so kann er gegen 1 vernachlässigt werden, und es resultiert:

$$\Delta D = \pm 2\frac{h}{\delta}\frac{\sqrt{x^2+f^2}}{\delta}\Delta\delta = \pm D\frac{\Delta\delta}{\delta} \tag{I.}$$

als absoluter und

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta\delta}{\delta} \tag{II.}$$

als relativer Fehler der Distanz.

Die letzte Gleichung sagt: Der relative Fehler der Distanz ist gleich dem relativen Fehler der Ordinatendifferenz.

In analoger Weise wird die Bestimmung des mittleren Fehlers in der Höhe vorgenommen.

Die Höhe lautet:

$$H = \frac{y}{y_r - y} 2h = \frac{y}{\delta} 2h, \tag{5}$$

somit der mittlere Fehler, wenn h fehlerfrei vorausgesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} \Delta H &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y_r}\right)^2 \Delta y_r^2} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \delta}\right)^2 \Delta \delta^2} \end{aligned}\right\} . \tag{6}$$

Die partiellen Differentialquotienten sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{2h}{\delta} \\ \frac{\partial H}{\partial \delta} &= -\frac{2h}{\delta}\,\frac{y}{\delta} \end{aligned}\right\},$$

daher

$$\Delta H = \pm \frac{2h}{\delta} \sqrt{\Delta y^2 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \Delta \delta^2}. \tag{7}$$

Nach dem Vorhergehenden kann man setzen: $\Delta y = \frac{\Delta \delta}{\sqrt{2}}$, und der mittlere Fehler für H geht über in:

$$\Delta H = \pm \frac{2h}{\delta} \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]} \Delta \delta$$

oder auch

$$\Delta H = \pm \frac{2h}{\delta}\,\frac{y}{\delta} \sqrt{\left[1 + \frac{\delta^2}{2y^2}\right]} \Delta \delta \tag{8}$$

Da der Quotient $\frac{\delta^2}{2y^2}$ eine sehr kleine Größe ist, so kann man denselben vernachlässigen und erhält:

$$\Delta H = \pm \frac{2h}{\delta} \frac{y}{\delta} \Delta\delta.$$

Da nun $\frac{y}{\delta} 2h = H$ ist, so ergibt sich nach Einführung dieses Wertes als absoluter Fehler in der Höhe:

$$\Delta H = \pm \frac{2h}{\delta} \frac{y}{\delta} \Delta\delta = \pm H \frac{\Delta\delta}{\delta}, \qquad \text{III.}$$

woraus die gleiche Beziehung sich ergibt wie bei der Distanz:

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta\delta}{\delta}, \qquad \text{IV.}$$

wonach der relative Fehler der Höhe gleich ist dem relativen Fehler der Ordinatendifferenz.

Berücksichtigen wir den analogen Satz, der für den relativen Fehler der Distanz aufgestellt wurde, so resultiert die bemerkenswerte Beziehung:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta H}{H}. \qquad \text{V.}$$

Die gebräuchliche Darstellung des Fehlers in der Höhe pro Einheit der Distanz ist:

$$\frac{\Delta H}{D} = \frac{y}{\sqrt{x^2+f^2}} \frac{\Delta\delta}{\delta} = \operatorname{tg}\beta \frac{\Delta\delta}{\delta}. \qquad \text{VI.}$$

Werden die Gleichungen I. und III. nach Einführung von $\delta^2 = (x^2+f^2)\left(\frac{2h}{D}\right)^2$ umgeformt in:

$$\left.\begin{aligned} \Delta D &= \pm \frac{D^2}{2h} \frac{1}{\sqrt{x^2+f^2}} \Delta\delta \\ \Delta H &= \pm \frac{D^2}{2h} \frac{1}{\sqrt{x^2+f^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+f^2}} \Delta\delta = \\ &= \pm \frac{D^2}{2h} \frac{1}{\sqrt{x^2+f^2}} \operatorname{tg}\beta \Delta\delta \end{aligned}\right\}, \qquad \text{VII.}$$

so nehmen sie eine Gestalt an, die eine lehrreiche Discussion zulässt.

Sie zeigen nämlich, dass die absoluten Fehler in der Bestimmung der Distanz D und der Höhe H

1. dem mittleren Fehler in der Messung der Ordinatendifferenz $\Delta\delta$ direct proportional sind,

2. im quadratischen Verhältnisse mit der Distanz D zunehmen,

3. mit der wachsenden Horizonthöhe h abnehmen,

4. für Wolkenpunkte, deren Abstand von der Hauptverticalebene im Zunehmen begriffen ist, kleiner werden und

5. endlich der Höhenfehler auch mit dem Verticalwinkel β des Originales im geraden Verhältnisse steht.

Die Horizonthöhe h des photogrammetrischen Apparates über der spiegelnden Ebene bildet die eigentliche Basis für die Messung von D und H, und von ihrer Größe und Genauigkeit hängt in erster Linie die Güte in der Bestimmung der genannten Größen ab.

Es wäre nicht uninteressant, auf den Maximal- und Minimalfehler in der Distanz und Höhe einzugehen, doch wollen wir diese Betrachtung dem Leser überlassen.

2. Aufnahme bei geneigter Lage der Bildebene.

Befindet sich der Standpunkt des Instrumentes in bedeutender Höhe über dem Niveau der reflectierenden Flüssigkeit oder steht das Original sehr hoch über dem Horizonte des Standpunktes, so wird man genöthigt, die Bildebene zu neigen. Der Neigungswinkel φ der Bilddistanz, respective der Bildebene kann bei Phototheodoliten unmittelbar am Verticalkreise abgelesen werden.

In diesem Falle können das Azimut α und die Verticalwinkel β und β_r nach den folgenden, in der Photogrammetrie begründeten Formeln berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{x}{f\cos\varphi - y\sin\varphi} \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{f\sin\varphi + y\cos\varphi}{f\cos\varphi - y\sin\varphi}\cos\alpha \\ \operatorname{tg}\beta_r &= \frac{f\sin\varphi + y_r\cos\varphi}{f\cos\varphi - y_r\sin\varphi}\cos\alpha \end{aligned}\right\} .$$

Der Rechnungsvorgang zur Ermittlung der Distanz, Höhe, Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Wolke bleibt derselbe, wie er vorher entwickelt wurde; auch bei Bestimmung der Genauigkeit geht man in analoger Weise vor.

Zum Schlusse möge hervorgehoben werden, dass durch Verwendung einer Ebene als Aufnahmefläche, wie es bei den gebräuchlichen Phototheodolit-Constructionen der Fall ist, der Gesichtsfeldwinkel bei gegebener Brennweite des Objectives und bestimmtem Plattenformate, zumeist einem der Breite nach gestellten Rechtecke, gewöhnlich nicht groß wird.

Die Verticalwinkel, welche hier vornehmlich zur Verwertung kommen, können keine bedeutenden Beträge erreichen. Eine Vergrößerung des Bildfeldes in verticalem Sinne, wie es in vorliegendem Falle erwünscht ist, kann erreicht werden:

a) durch Verschiebung des Objectives in verticaler Richtung,

b) durch Hochstellung des Plattenrechteckes und

c) durch Änderung der Aufnahmefläche.

Ein Phototheodolit, dessen Aufnahmefläche cylindrisch wäre,[1] wobei die Erzeugenden des Cylinders horizontal verlaufen müssten, oder aber dessen Bildfläche sphärisch gestaltet sein würde,[2] ermöglichte die Aufnahme von Objecten und ihrer Reflexe mit bedeutend größeren Verticalwinkeln, wodurch der Bildfeldbereich bedeutend ausgedehnt werden könnte.

Anhang.

Die beigegebene Photographie stellt die Aufnahme einer Wolke und ihres Reflexes dar, ausgeführt vom Autor am 22. August 1901 am Teiche des Stadtparkes zu Leoben.

Die verwendete Plattensorte war Lumière's orthochromatische Platte, zwei Gelbscheiben, eine dunkle und die andere von mittlerer Intensität, wurden dem Objective vorgesetzt; die Aufnahme war eine Momentaufnahme.

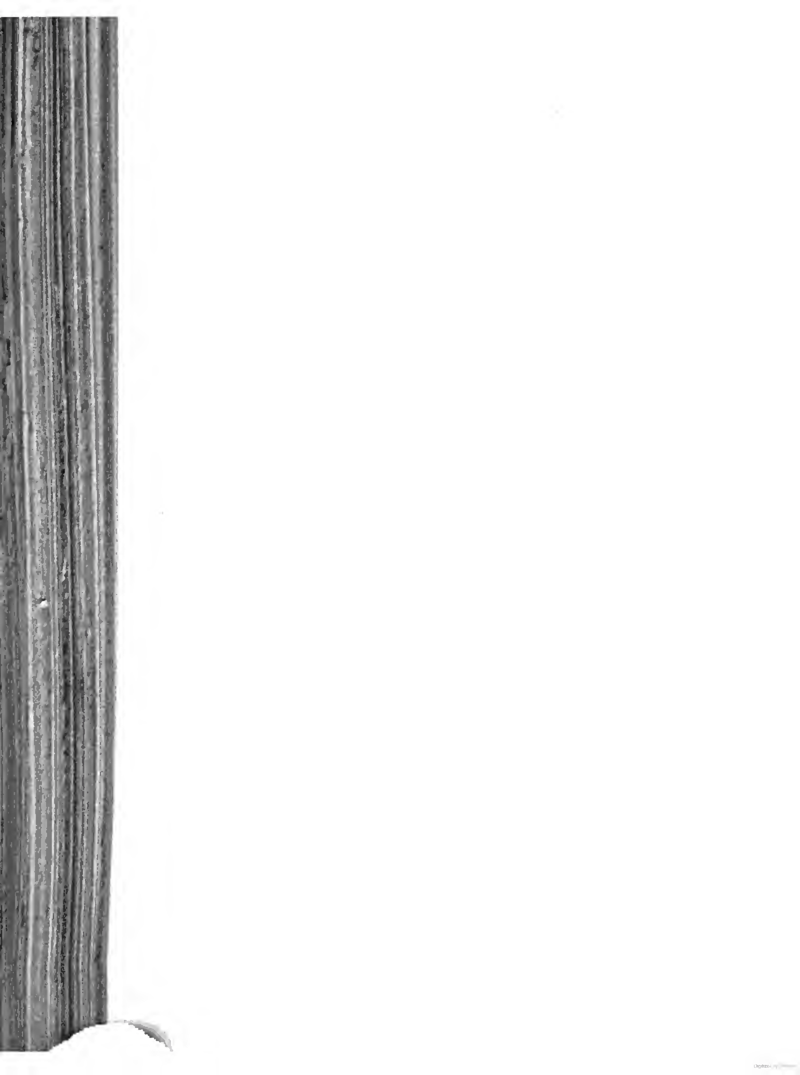
[1] Eine Modification des Moëssard'schen Panoramenapparates.

[2] Nach Art der Porro'schen Phototheodolite.

Photogrammetrische Aufnahme einer Wolke und ihres Reflexes zur Lösung des Wolkenproblems.

Aufnahme v. Prof. E. Doležal. Lichtdruck v. Max Jaffe, Wien.

Bildweite $f = 212 \cdot 20$ mm;
Azimut der Bilddistanz $\omega = 2^0\, 40'\, 0''$, Höhe des Instrumenthorizontes über der spiegelnden Ebene $h = 5 \cdot 025$ m,
Azimut des Wolkenpunktes $\omega + \alpha = 7^0\, 15'\, 40''$, $D = 1258 \cdot 5$ m, $H = 467$ m und
die mittleren Fehler: $\triangle D = \pm\, 62 \cdot 9$ m und $\triangle H = \pm\, 23 \cdot 4$ m.



Die perspectivischen Constanten, Horizont-, Verticallinie, sowie Hauptpunkt des Photogrammes sind hervorgehoben, das Bild P eines Raumpunktes und sein Reflex P_r sind markiert und die Bildordinaten x, y und y_r entsprechend ersichtlich gemacht.

Für diese Aufnahme war:

die Bildweite $f = 212 \cdot 20\, mm$,
Azimut der Bilddistanz $\omega = 2^\circ 40' 0''$

und die Höhe des Instrumenthorizontes über der spiegelnden Ebene

$$h = 5 \cdot 025\, m;$$

ferner wurden am Photogramme gemessen:

$$\left.\begin{aligned} x &= 17 \cdot 05\, mm \\ y &= 79 \cdot 00 \;\text{»} \\ y_r &= 80 \cdot 70 \;\text{»} \end{aligned}\right\},$$

behaftet mit einem mittleren Fehler:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta y_r = \pm 0 \cdot 06\, mm.$$

Rechnet man nach den abgeleiteten Formeln D und H, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} D &= 1258 \cdot 5\, m \\ H &= 467 \quad m \end{aligned}\right\},$$

welche die mittleren Fehler besitzen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta D &= \pm 62 \cdot 9\, m \\ \Delta H &= \pm 23 \cdot 4\, m \end{aligned}\right\};$$

das Azimut des Wolkenpunktes bestimmt sich mit

$$\omega + \alpha = 7^\circ 15' 40''.$$

Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Wolke konnten nicht abgeleitet werden, weil leider eine zweite Aufnahme derselben Wolke nicht ausgeführt wurde.

Eine einfache Methode zur directen Bestimmung von Dielektricitätsconstanten

von

Dr. Jean Billitzer.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Sendet man in einem heterogenen dielektrischen Medium einen Gleichstrom, oder besser noch (zur Vermeidung polarer Wirkungen) einen Wechselstrom durch zwei eingesenkte Drähte, so wird eine Scheidungskraft auf die verschiedenen Theile des Mediums in dem Sinne wirken, dass die Antheile mit höchster Dielektricitätsconstante zu den Orten höchsten Potentiales (also in die Nähe der Drähte) gezogen, die Antheile mit niederer Dielektricitätsconstante aber von da abgestoßen werden. Denn es ist ja die elektrische Energie eines Systems geladener Condensatoren

$$\frac{1}{2D}\Sigma eV,$$

wo D die Dielektricitätsconstante, e die Elektricitätsmenge, V das Potential bedeutet.

Weil nun aber die freie Energie einem Minimum zustrebt, ihre Abnahme aber der geleisteten Arbeit gleichkommt, wird das System über eine Arbeitsgröße

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{D_2}\right)\Sigma eV$$

zur Verschiebung der Antheile von der Dielektricitätsconstante D_1, respective D_2 im umgebenden Medium verfügen.

Diese Kraftwirkung kann man leicht demonstrieren, wenn man einen Körper von beliebiger Dielektricitätsconstante D_x in einer Flüssigkeit von der bekannten Dielektricitätsconstante D_1 suspendiert. Wird dann ein Wechselstrom durch zwei vertical und in Bezug auf den suspendierten Körper excentrisch eingeführte Drähte geschickt, so gibt uns der Sinn des Ausschlages schon Auskunft darüber, ob D_x größer oder kleiner ist wie D_1. Denn im ersten Falle wird der Körper zu den Drähten hingezogen, im zweiten aber von ihnen abgestoßen werden. Dementsprechend wird das Vorzeichen der Differenz

$$\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_x}$$

und hiermit der verursachten Bewegung positiv für

$$D_x > D_1,$$

negativ für

$$D_x < D_1,$$

endlich 0 für

$$D_x = D_1.$$

Diese Bezeichnung des Ausschlages durch sein Vorzeichen wollen wir im folgenden beibehalten.

Eine bequeme Methode, diese Erscheinung zur Messung von Dielektricitätsconstanten zu verwerten, besteht nun darin, dem Körper, den man untersuchen will, die Gestalt eines feinen Fadens oder Stäbchens oder die Form einer kleinen Kugel zu ertheilen, denselben an einem nicht zu kurzen Quarzfaden aufzuhängen und in ungeänderter Entfernung von zwei parallel und vertical eingeführten Platindrähten, Sinn und Ausmaß seiner Bewegung beim Einschalten von Wechselstrom successive in Flüssigkeiten von verschiedener (bekannter) Dielektricitätsconstante durch ein kleines Mikroskop zu beobachten. Alsdann wird man, stufenweise von kleinen zu großen Dielektricitätsconstanten der Flüssigkeit übergehend, erst eine Verminderung, dann eine Umkehr des Ausschlages beobachten

und mittels graphischer Interpolation den Umkehrpunkt und hiemit auch die Dielektricitätsconstante ziemlich genau bestimmen können.

Diese Methode praktisch auszuprobieren, habe ich die Bestimmung von vier Dielektricitätsconstanten auf die geschilderte Weise ausgeführt, deren Beschreibung ich im folgenden bringe.

Aus Fig. 1 ist die Wahl der sehr einfachen Versuchsanordnung ersichtlich.

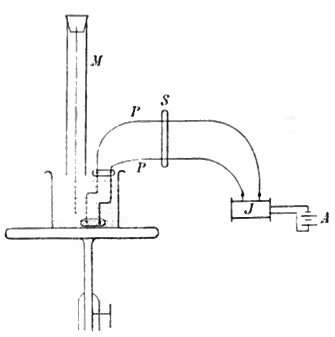


Fig. 1.

Ein kleines Inductorium *J*, das von zwei Accumulatoren *A* gespeist wurde, sandte seinen Wechselstrom durch zwei parallele Platindrähte *P*, welche durch isolierende Stützen starr miteinander verbunden waren. Unweit von ihnen tauchte der zu untersuchende Faden, der mittels einer Spur Collodium an einem Quarzfaden aufgehängt war (kleine Kugeln werden am besten angeschmolzen), ein Mantel schützte den Quarzfaden vor den Bewegungen der Luft. *M* und *S* waren in Stative geklemmt. das Becherglas mit der Flüssigkeit stand auf einem beweglichen Objecttische und konnte so mit verschiedenen Flüssigkeiten beschickt werden, ohne dass an *M* und *S* etwas zu

ändern war. Das Mikroskop stand senkrecht zur Ebene der Figur; ich benützte ein kleines Instrument mit Mikrometer-Ocular, wie solche zum Hankel'schen Elektroskope verwendet werden. Um Störungen durch Oberflächenwirkungen der Flüssigkeit zu vermeiden, gibt man den Drähten die gezeichnete Form; der zweite Draht kann eventuell fortbleiben. Wenn die Geschwindigkeit des Polwechsels groß genug gegen die der Eigenschwingung des Pendels ist, erhält man recht ruhige Ausschläge; am besten betreibt man das Inductorium mit einem Motorunterbrecher von circa 600 Unterbrechungen.

Anfangs bot sich die Schwierigkeit, gut isolierende Flüssigkeiten von recht verschiedener Dielektricitätsconstante und geringem Lösungsvermögen zu finden, um innerhalb größerer Intervalle mit den verschiedensten Körpern arbeiten zu können. Ich wählte den Ausweg zur Erreichung dieses Zweckes, verschiedene Gemische zweier Flüssigkeiten anzuwenden, deren eine eine möglichst hohe, die andere eine kleine Dielektricitätsconstante besaß. Nach zahlreichen Vorversuchen traf meine Wahl Gemische von Aceton und Hexan. Diese Flüssigkeiten sind in allen Verhältnissen mischbar und besitzen Dielektricitätsconstanten, die weit voneinander abstehen: Hexan 1·85, Aceton 20·44.

Zwar kommt dem Aceton kein allzugroßes Isolationsvermögen zu, doch verändert es, zu Hexan gemischt, die Dielektricitätsconstante so rasch, dass nur verhältnismäßig geringe Zusätze erforderlich waren.

Von allen Flüssigkeiten mit hoher Dielektricitätsconstante — und deren Zahl ist nicht allzu groß — erwies es sich für meinen Zweck am besten geeignet. Gut verwendbar für kleine *DK* sind auch Äthyläther-Benzolgemische. Alkohole sind in den meisten Fällen vom Versuche ausgeschlossen.

Versuche.

Glas.

Leicht schmelzbares Glas wurde zu sehr feinen Fäden ausgezogen und mittels einer Spur Collodium an den Quarzfaden befestigt. Die Beobachtungen waren:

Zusammensetzung der Flüssigkeit		DK der Flüssigkeit[1]	Ausschlag des Glasfadens
Hexan 1	Aceton 0.....	1·85	—10
» 9	» 1.....	3·46	—2 bis 3
» 6	» 1.....	4·2	+ 2
» 4	» 1.....	4·81	+ 5
» 3	» 1.....	5·9	+10
» 0	» 1.....	20·44	+22 bis 29
Äthylalkohol		26	circa +50

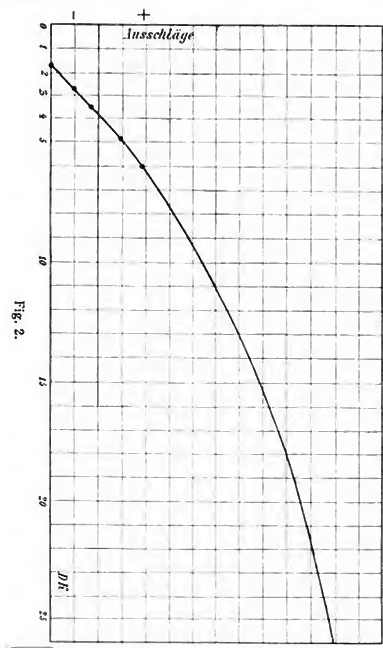


Fig. 2.

[1] Die *DK* wurden von Herrn Ehrenhaft nach der Nernst'schen Methode gemessen.

die, graphisch aufgetragen (Fig. 2), durch Interpolation

$$DK_{\text{Glas}} = 4$$

ergeben.

Nach der Kohlrausch'schen Condensatormethode war für die gleiche Glassorte $DK = 4 \cdot 1$ bestimmt worden.

Schwefel.

Einige Stücke reinen Schwefels wurden geschmolzen und erhitzt, bis die Schmelze streng flüssig geworden war. In diesem Zustande gelingt es leicht, feine Fäden vom Schwefel zu ziehen, die man am besten auf einer Glasplatte erstarren lässt. Die Beobachtungen waren hier:

Zusammensetzung der Flüssigkeit				DK der Flüssigkeit	Ausschlag des Schwefelstäbchens
Hexan	1	Aceton	0.....	1·85	— 2·5
»	9	»	1.....	3·46	— 1
»	6	»	1.....	4·2	+ 1·5
»	4	»	1.....	4·81	+ 3
»	3	»	1.....	5·9	+ 4
»	0	»	1.....	—	—

Man findet (Fig. 3):

$$DK_{\text{Schwefel}} = 3 \cdot 8.$$

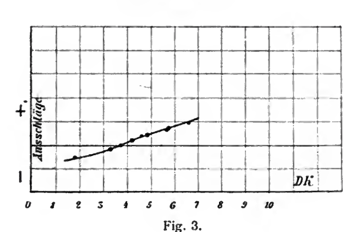


Fig. 3.

Siegellack.

Ein Tröpfchen geschmolzenen Siegellackes wurde an dem einen Ende des Quarzfadens zum Erstarren gebracht. Die Messung ergab:

Zusammensetzung der Flüssigkeit		DK der Flüssigkeit	Ausschlag der Siegellack-kugel
Hexan 1	Aceton 0.....	1·85	— 6
» 9	» 1.....	3·46	— 2
» 6	» 1.....	4·2	— 1
» 4	» 1.....	4·81	+ 1
» 3	» 1	5·9	+ 2·2
» 0	» 1.....	20·44	+12

Das Resultat ist (Fig. 4):

$$DK_{\text{Siegellack}} = 4 \cdot 5.$$

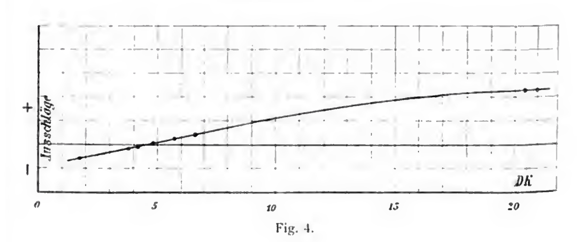


Fig. 4.

Seide.

Endlich wurde noch ein Fall geprüft, in welchem das Resultat durch eine kleine Extrapolation zu gewinnen war.

Zusammensetzung der Flüssigkeit				*DK* der Flüssigkeit	Ausschlag des Seidenfadens
Hexan	1	Aceton	0.....	1·85	+ 1
»	9	»	1.....	3·46	+ 7
»	6	»	1.....	4·2	+ 9
»	4	»	1.....	4·81	+11
»	3	»	1.....	5·9	+12

Man findet (Fig. 5):

$$DK_{\text{Seide}} = 1 \cdot 6.$$

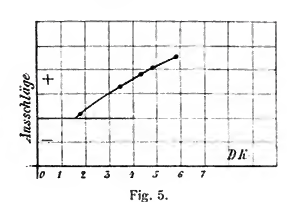


Fig. 5.

Die Ausschläge sind theilweise ziemlich groß und können in günstigen Fällen selbst mit freiem Auge beobachtet werden. Die Methode ist übrigens einer erheblichen Verfeinerung zugänglich, wenn man statt des Ausschlages eines Pendels die Drehung eines gegen die Ebene der Drähte unter 45° geneigten, im übrigen horizontal und excentrisch aufgehängten Stäbchens beobachten wollte. Die Ablesung könnte dann mit Spiegel. Fernrohr und Scala erfolgen und würde einen viel höheren Grad der Empfindlichkeit erreichen. Indes glaube ich kaum, dass sich die Ausarbeitung der Methode zu Präcisionsmessung eignen würde und dies schon aus dem Grunde nicht, weil man doch von Dielektricitätsconstanten ausgehen muss, die auf andere Weise bestimmt wurden. Im günstigsten Falle erhält man also Resultate, welche denen der gebräuchlichen Methoden an Genauigkeit gleichkommen. Eine Präcision wäre daher niemals absolut, sondern höchstens für das relative Verhältnis verschiedener Dielektricitätsconstanten zu erreichen.

Immerhin glaube ich, dass die Methode in Fällen, in denen es darauf ankommt, die Dielektricitätsconstante kleiner Substanzmengen mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen, vermöge der einfachen und bequemen Anordnung recht verwendbar sein wird.

Geht man nicht, wie wir es gethan haben, von bekannten Dielektricitätsconstanten von Flüssigkeiten aus, sondern aicht man sich eine Reihe fester Körperchen, wie Porzellan, Quarz, oder am besten wohl verschiedene Sorten von Glas (*DK* 4 bis 10) u. dgl., so kann man z. B. mit einem Satze derartig geaichter Glasfäden ebenso bequem die Dielektricitätsconstanten von Flüssigkeiten messen.

Nicht mischbare Flüssigkeiten lassen sich direct vergleichen, wenn man ein starr befestigtes, beiderseits offenes Glasröhrchen mit einem Tropfen der Untersuchungsflüssigkeit beschickt und in die Messflüssigkeit horizontal einsenkt.

Endlich kann man den untersuchten Körper in Form einer feinen Suspension in Anwendung bringen, deren Vertheilung und Wanderung unter dem Einflusse von Wechselströmen beobachtet wird.

Die Methode lässt also viele Abänderungen zu und ihre Verwendung wird sich je nach den Bedingungen, die man vorfindet, in der einen oder der anderen Form empfehlen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XIV. SITZUNG VOM 5. JUNI 1902.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXIII, Heft IV (April 1902).

Der Secretär, Hofrath V. v. Lang, verliest ein Schreiben der beiden Schwestern des verstorbenen wirklichen Mitgliedes der philosophisch-historischen Classe, Hofrathes Dr. Adolf Beer, Fräulein Katharina und Lina Beer in Wien, worin dieselben für die ihnen von Seiten der kaiserlichen Akademie bewiesene Theilnahme danken.

Der Chefgeologe der k. k. Geologischen Reichsanstalt, G. Geyer, besichtigte am 21. und 22. Mai die Aufschlüsse in den beiden Richtstollen des Bosruck-Tunnels der Pyhrnlinie und erstattete hierüber einen Bericht an die Tunnelcommission der kaiserl. Akademie.

Prof. Dr. Franz Tondera in Stanislau übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über den sympodialischen Bau des Stengels von Sicyos angulata L.«.

Hofrath Prof. H. Höfer in Leoben übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Erdöl-Studien«.

Ingenieur Ferdinand Capitaine in Wien übersendet eine Mittheilung zur Wahrung seiner Priorität mit dem Titel: »Notice provisoire concernant des electro-aimants volants ou flottants«.

Herr Felix Kaufler übersendet eine Arbeit, betitelt: »Über die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichtes durch Oberflächenkräfte«.

Dr. J. Billitzer und Dr. A. Coehn übersenden eine Arbeit, betitelt: »Elektrochemische Studien am Acetylen. II. Mittheilung: Anodische Depolarisation«.

Das c. M. Hofrath Prof. J. M. Pernter überreicht eine Abhandlung: »Neue Experimente mit Wirbelringen« von Gustav Suschnig in Graz.

Das w. M. Hofrath Prof. Julius Wiesner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Mikroskopische Untersuchung alter ostturkestanischer und anderer asiatischer Papiere nebst histologischen Beiträgen zur mikroskopischen Papieruntersuchung«.

Prof. P. Friedländer überreicht eine Arbeit, betitelt: »Über Condensationen von Amidobenzylalkoholen«.

Das w. M. Prof. V. Uhlig überreicht eine Arbeit von Dr. O. Abel in Wien mit dem Titel: »Die Ursache der Asymmetrie des Zahnwalschädels«.

Das w. M. Hofrath Sigm. Exner legt eine im Wiener Physiologischen Institute von stud. med. Otto Löw ausgeführte Untersuchung vor, betitelt: »Die Chemotaxis der Spermatozoen im weiblichen Genitaltract«.

Das w. M. Hofrath V. v. Lang legt eine Abhandlung vor, welche den Titel führt: »Krystallographisch-optische Bestimmungen«.

Dr. Fritz Hasenöhrl überreicht eine Arbeit mit dem Titel: »Über die Absorption elektrischer Wellen in einem Gas«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Eriksson M. Jakob: Sur l'origine et la propagation de la rouille des céréales par la semence; Paris, 1902. 8°.

Hippauf Hermann, Dr.: Die Rectification und Quadratur des Kreises. Mit vier lithographischen Tafeln; Breslau, 1902. 8°.

Middendorp H. W., Dr.: Die Beziehung zwischen Ursache, Wesen und Behandlung der Tuberkulose (Vortrag); Groningen, 1899. 4°.

XV. SITZUNG VOM 12. JUNI 1902.

Der Secretär, Hofrath V. v. Lang, legt eine Abhandlung vor von Dr. J. Nabl: »Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitte«.

Folgende versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität sind eingelangt:

1. Von gew. Realgymnasiallehrer Salomon Adler in Wien mit der Aufschrift: »Lastenführer«;
2. von stud. phil. Franz Megušar in Wien mit der Aufschrift: »Über das Geschlechtsorgan von *Hydrophilus piceus*«;
3. von Alois Poetzl in Arnsdorf mit der Aufschrift: »Phonophotograph«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Largaiolli V., Dr.: I pesci del Trentino, vol. II, con prefazione del Prof. Comm. E. H. Giglioli; Trento 1902. 8°.

Nansen, Fridtjof: The Norwegian North Polar Expedition 1893—1896. Scientific Results, vol. III. Christiania und London, 1902. 4°.

— Some Oceanographical Results of the Expedition with the »Michael Sars« headed by Dr. J. Hjort in the Summer of 1900. Preliminary Report. Christiania, 1901. 8°.

Pickering, W. H.; Is the Moon a dead Planet? 8°. (Reprinted from the Century Magazine for May 1902.)

XVI. SITZUNG VOM 19. JUNI 1902.

K. k. Bezirkshauptmann i. R. Adalbert Krčzmář in Prag übersendet eine Arbeit, betitelt: »Über das Alter der Alluvion und der sumerischen Städte und Ansiedlungen in Mesopotamien.«

Prof. Rudolf Andreasch an der k. k. technischen Hochschule in Graz übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit, betitelt: »Über Condensationsproducte der Rhodaninsäure und verwandter Körper mit Aldehyden« vom Assistenten an der k. k. technischen Hochschule in Graz Arthur Zipser.

Das w. M. Prof. G. Goldschmiedt übersendet zwei im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeiten von Dr. Otto Hönigschmid:

I. Über Hydrierung des Biphenylenoxydes und der isomeren Binaphtylenoxyde.«
II. »Zur Kenntnis der α- und β-Naphtylphenyläther und der α- und β-Naphtylphenole.«

Das w. M. Hofrath Sigmund Exner legt eine im Wiener physiologischen Institute ausgeführte Arbeit von Dr. Ferdinand Winkler vor, welche den Titel trägt: »Studien über die Beeinflussung der Hautgefäße durch thermische Reize«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung vor: »Über die Grundempfindungen im Young-Helmholtz'schen Farbensystem«.

Das c. M. Th. Fuchs legt drei Mittheilungen vor unter dem Titel:

I. »Über einige Störungen in den Tertiärbildungen des Wiener Beckens«.

II. »Über Anzeichen einer Erosionsepoche zwischen Leithakalk und sarmatischen Schichten«.

III. »Über eine neuartige Ausbildungsweise pontischer Ablagerungen in Niederösterreich«.

Prof. Friedrich Berwerth überreicht eine Arbeit, betitelt: »Der Meteoreisenzwilling von Mukerop, Bezirk Gibeon, Deutsch-Südwestafrika«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Pantocsek, Josef, Dr.: Die Bacillarien des Klebschiefers von Kertsch. St. Petersburg, 1902. 8°.

Neue Experimente mit Wirbelringen

von

Gustav Suschnig in Graz.

(Mit 13 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juni 1902.)

Die am Wetterschieß-Versuchsplatze in St. Katharein a. d. Lamming nunmehr über drei Jahre lang währenden Experimente haben in Bezug auf die Erscheinung der Wirbelringe, die durch Schüsse aus Wetterschießapparaten entstehen, eine solche Fülle des Interessanten geboten, dass ich mich veranlasst fühlte, Versuche nach einer verfeinerten Methode zu machen, um einige Eigenschaften der Wirbelringe näher kennen zu lernen, welche durch größere Energien entstehen als jene, die beim Tait'schen Rauchkasten erzeugt werden können.

Die Herren Hofrath Pernter und Dr. Trabert haben gelegentlich ihrer Untersuchungen über das Wetterschießen[1] die Verzögerungen der Geschwindigkeiten in verschiedenen Abständen unter 104 *m* Distanz gemessen, und diese Messungen wurden später durch mich auf Distanzen bis 325 *m* ausgedehnt Herr Prof. Czermak in Innsbruck beschrieb eine neue Beobachtungsmethode für Luftwirbelringe,[2] die Herren Dr. Vicentini und Pacher in Padua veröffentlichten Versuche mit »luftförmigen Projectilen« (Projettil, gazosi),[3] und Generalmajor Indra gab Studien über die Wirbelbewegungen heraus,[4] welch'

[1] Meteorologische Zeitschrift, Bd. 35, Nr. 9, 1901.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. CIX, Abth. IIa, Juli 1901.

[3] Atti del R. Istit. Veneto di scienze lett. ed arti, Bd. LIX, April 1900.

[4] Diese Sitzungsber., Bd. CX Abth. IIa, April 1901.

sämmtliche Arbeiten durch die Kathareiner Wetterschießexperimente veranlasst, beziehungsweise durch die Beobachtungen, welche die Herren beim Schießen aus Wetterschießapparaten gemacht haben, angeregt wurden.

Ich wollte nun untersuchen, 1. wie weit die Größe (der Durchmesser) von durch Schüssen mittels Schießpulvers und aus Schießtrichtern entstehenden Ringen von der Größe der Discontinuitäten, an welchen sie entstehen, abhängen; 2. ob es möglich ist, einen experimentellen Nachweis zu erbringen, dass die Ringe sich im Fluge nicht vergrößern, und endlich 3. ob es möglich ist, durch ein feineres Experimentalverfahren homogene Werte von Geschwindigkeitsverzögerungen im Fluge der Ringe in kleineren regelmäßigen Abständen zu erhalten.

Ich erhielt vom Director des physikalischen Institutes der Universität in Graz, Herrn Hofrath Pfaundler, die gütige Erlaubnis, diese Experimente in seinem Institute mit Benützung von dort verfüglichen Behelfen zu machen.

Ich construierte einen Schießapparat (Fig. 1), welcher aus einem eisernen Rahmengestelle besteht *(a)*, an dessen vier Ecken Stifte angeordnet sind, auf welche die Kopf- und die Bodenplatte der Schießtrichter aufgesteckt und verschraubt werden kann, damit jeder Trichter in constanter Achsenlage gelagert werden könne. Am rückwärtigen Ende des so gleichsam eingespannten Trichters ist am Rahmengestelle ein massives Holzlager *(b)* starr angebracht, in dessen Ausnehmung (deren cylindrische Achse genau in der Verlängerung der Trichterachse liegt) die Mörserchen (Pöller) *(d)*, die ihrerseits äußerlich ganz gleiche Cylinder darstellen, gelegt werden. Dadurch liegen die Pöllerachsen stets in gleicher Lage unter sich und in gleicher Lage wie die Trichterachsen.

Sämmtliche in Untersuchung gezogene Trichter sind 800 *mm* lang. Die verschieden großen Discontinuitäten, welche durch die vordere Trichteröffnung gebildet werden, haben folgende Kreisdurchmesser (Zähler vorderer, Nenner rückwärtiger Durchmesser): ${}^{30}/_{30}$ (Cylinder), ${}^{60}/_{30}$, ${}^{90}/_{30}$, ${}^{120}/_{30}$, ${}^{150}/_{30}$, ${}^{150}/_{25}$, ${}^{150}/_{40}$, ${}^{150}/_{50}$, ${}^{150}/_{60}$, ${}^{150}/_{80}$ (Kegelstutze), ${}^{150}/_{150}$ (Cylinder).

Die Pöllerchen sind aus massivem Messing, stellen Cylinder von ${}^{150}/_{30}$ äußerlich dar, sind aber verschieden ausgebohrt. Die

Bohrung ist bei allen cylindrisch und misst (Zähler — Bohrtiefe, Nenner — Bohrungsdurchmesser): $^{60}/_{8}$, $^{90}/_{8}$, $^{120}/_{8}$, $^{60}/_{10}$, $^{90}/_{10}$, $^{120}/_{10}$, $^{60}/_{12}$, $^{90}/_{12}$, $^{120}/_{12}$. Ich verwendete constante, genau

Fig. 1.

gewogene Ladungen von 1 g feinstem Jagdpulver und erreichte durch Verwendung von vielerlei Requisiten eine möglichst gleichartige Ladeart, deren Gleichartigkeit ich aus den ziemlich constanten Einzelnwerten, die ich bei den Geschwindigkeits-

messungen gewann, beurtheilte. Geschosse wurde auf ein in einen Messingrahmen gespanntes Drahtnetz *(c)*, welches, um gut sichtbare und verwertbare Wirbelringbilder zu bekommen, mit einer durch Fuchsin (Anilinroth) intensiv gefärbten Seifenemulsion, welche zur Erhöhung ihrer Beständigkeit mit etwas Glycerin gemengt war, bestrichen wurde.

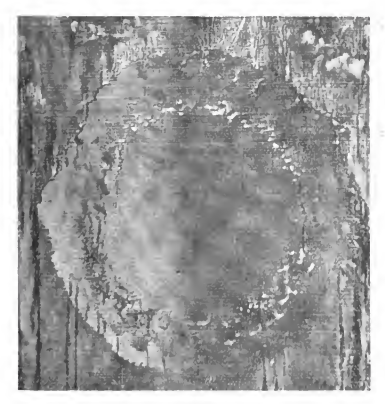


Fig. 2.

Beim Durchfahren eines Wirbelkörpers durch das Drahtnetz wurden die Seifenschaumtheilchen verschieden intensiv, je nach der Energie der wirbelnden Bewegungen in den einzelnen Theilen des Wirbelkörpers weggeschleudert, und es verblieb das Bild, wie Fig. 2 zeigt.

Um diese Bilder festhalten zu können, versuchte ich, nachdem mit der Photographie, der doch etwas zu langen Vorbereitungen wegen, während welcher die Flüssigkeitstheile am Drahtnetz vielfach zerrannen, Bilder zu erhalten nicht gelang, die Spuren des Ringabklatsches mittels weißem Filtrierpapier aufzusaugen und dann zu photographieren. Dies gelang ganz

gut; die Figuren 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 stellen einige wohlgelungene Bilder dar.

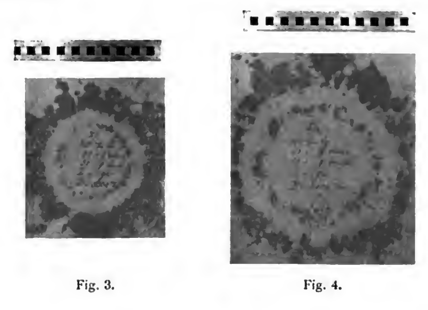


Fig. 3. Fig. 4.

Fig. 5.

Aus denselben ist zu entnehmen, dass die Größe der Ringe von der Größe der Discontinuität am vorderen Rande des

Trichters abhängt. Der an jedem Bilde ersichtliche Maßstab bedeutet Centimeter und gestattet die Feststellung der Größenverhältnisse in genügend genauer Weise.

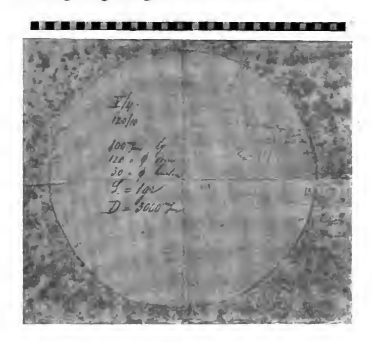


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

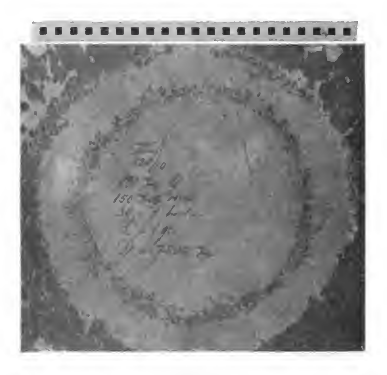


Fig. 9.

Die rückwärtigen Trichteröffnungen haben, wie aus diesen Bildern, sowie aus anderen, nicht so gut gelungenen Abklatschen hervorgeht, keinen Einfluss auf die Größe der Wirbelringe, ebenso auch nicht die verschiedenen Bohrungsdimensionen der Pöllerchen. Ob die Größe der Energie (Pulverladung) damit im Zusammenhange steht, habe ich nicht untersucht, da Zeitmangel mich daran hinderte.

Fig. 10.

Die Bilder Fig. 7, 8, 9 zeigen, dass die Ringe, wie es die Theorie für reibungslose Flüssigkeiten verlangt, sich im Fluge in wirklichen, mit Reibung behafteten Flüssigkeiten nicht vergrößern. Den Anreiz zu dieser Untersuchung erhielt ich durch die oftmals aufgetauchte Hypothese,[1] dass die Ringe sich im Verhältnisse des Öffnungswinkels des Kegelstutzes, aus welchem er geschossen wird, vergrößern.

[1] Siehe besonders Robertos »Teoria della grandine e degli spari«. C. Cassone, Casale, 1900.

Nun ist der experimentelle Nachweis erbracht, dass dies nicht der Fall ist.

Ein Einwand wegen der aus den Bildern ersichtlichen geringen Größenunterschiede wäre nicht stichhältig, weil diese ganz geringfügigen Unterschiede nur dadurch entstanden, dass der Ring infolge der immer herrschenden, wenn auch geringen Luftbewegung nicht regelmäßig fliegt und infolge dessen auch nicht mit der ganzen Ringebene das Netz durchfliegt und nebstdem, dass bei aller angewendeten Sorgfalt es ganz unmöglich ist, den gleichen Widerstand am Drahtnetze herzustellen. Das Auftragen der Seifenemulsion jedesmal genau herzustellen, ist nicht möglich, wenn auch hiezu stets das gleiche Individuum und das gleiche Präparat angewendet wurde.

Die Größe aber ist die gleiche, derart, dass die ganz kleinen Unterschiede, welche auftreten, evident nur von unüberwindlichen Versuchsfehlern herrühren und in ihrer Kleinheit selbst den Beweis erbringen, dass keine Vergrößerung, die von der Distanz abhängt, eintritt, was auch andere, minder gut gelungene Abklatsche zeigen.

In Tabelle I ist die Größe der Durchmesser von Wirbelringen aus Trichtern mit verschiedenen Öffnungen und in verschiedenen Distanzen ziffermäßig dargestellt.

Zum Zwecke der Geschwindigkeitsmessungen benützte ich einen Stimmgabelchronograph, bei welchem die Stimmgabel 256 Schwingungen in der Secunde macht.

Als Maß der Flugzeit, die der Wirbelring braucht, um den Raum zwischen der Trichtermündung und dem Drahtnetze zu durchfliegen, dienten die Schwingungswellen, welche mittels einer an einem Stimmgabelarme angebrachten Schreibfeder in einen berußten Glasstreifen eingeschrieben wurden.

Obwohl ich durch diese Publication meiner Experimente nur den Zweck verfolge, die Physiker auf das Verfahren, welches geeignet ist, viele Erscheinungen der wirbelnden Bewegungen zu untersuchen, aufmerksam zu machen, so wird es doch am Platze sein, eine kurze Beschreibung der angewendeten Mittel vorangehen zu lassen, weil deren Wahl eine monatelange Vorversuchsperiode erforderte, um halbwegs homogene und brauchbare Einzelwerte zu bekommen, während welcher Zeit alle jene

misslichen Umstände gradatim beseitigt wurden, welche dem Gelingen große Schwierigkeiten entgegengesetzt hatten.

Tabelle I.

Dimensionen von Wirbelring-Abklatschen.

Trichteröffnungs-durchmesser		Durchmesser der Wirbelringe auf Distanzen von		
hinten	vorne	3000	5000	7000
Millimeter		Millimeter		
		130		
		144		
30	30	138		
		194		
		210		
30	60	204		
		298		
		284		
30	90	288		
		340	352	344
		345	340	342
		344	342	
		334		
30	120	344		
		398	398	404
		388	382	390
30	150	390	380	380
		396	404	404
		398	404	404
40	150	412	404	404
		394	406	402
		398	394	394
50	150	396	394	402

Es handelte sich zunächst, solche Contacte herzustellen, dass größere, nicht bestimmbare Zeitfehler bei den Stromunterbrechungen unmöglich waren. Und da bot der Unterbrechungscontact am Abfeuerungspunkt die größte Schwierigkeit.

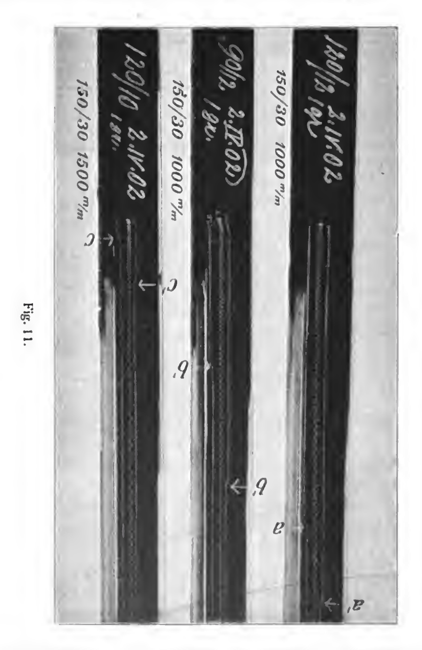


Fig. 11.

Schließlich wurde, wie in Fig. 1 ersichtlich, ein Aluminiumlöffel (1) gewählt, welcher einen Quecksilbercontact vermittelte.

Bei der Explosion wurde durch den Druck der beim Zündloche des Pöllers entweichenden Gase der Löffel in die Höhe

geschleudert, und der Contact war unterbrochen, wodurch die Feder des Elektromagnetes 2 in den berußten Glasstreifen die Abgangsmarken (siehe *a*, *b*, *c*, Fig. 11) einzeichnete.

Eine andere Methode, Contacte herzustellen, welche geringere Fehler verursacht haben würde, war wegen der durch die Entzündungsproducte des Schießpulvers am Löffel verursachten Incrustierungen von keinem Erfolge begleitet. Die Stellung des Löffels war stets regulierbar, damit der den Contact vermittelnde Platinstift immer nur die Oberfläche des Quecksilbers berühre.

Der Contact am Drahtnetze, welches, da es ganz metallisch ist, gut leitet, musste durch die mechanische Kraft auch der schwächsten Wirbelringe ausgelöst werden.

Sobald der Wirbelkörper durch das Drahtnetz fliegt, bringt er eine, wenn auch ganz geringe Erschütterung des Netzes hervor. Diese ausnützend, war im Centrum des Netzes ein Aluminiumplättchen (4) eingelöthet, zwischen welchem und einem am Arme eines Trägers leitend befestigten Messingscheibchen, ein Aluminiumstift eingeklemmt wurde; dieser Stift fiel bei der leisesten Erschütterung des Netzes herunter, und es wurde hiedurch der zweite Stromkreis unterbrochen. Die Folge war, dass der zweite Elektromagnet die Einzeichnung der Einfallsmarken auf die berußten Glasstreifen (siehe a', b', c', Fig. 11) vermittelte.

Die Anzahl der zwischen den Abgangs- und Einfallsmarken in den berußten Glasstreifen eingezeichneten Wellen (a—a', b—b', c—c') war das Zeitmaß für die Flugzeit der Wirbelringe in 256tel Secunden für die betreffende Distanz.

Nachstehende Tabelle (II) gibt die Durchschnittsflugzeiten, welche aus je fünf Schüssen gewonnen wurden, in Abständen von 0·5 zu 0·5 *m* an bis zur größten Distanz von 7·5 *m*, die von den Ringen aus dem Schießtrichter $^{150}/_{80}$ mit den verschiedenen Pöllerchen sicher und constant erreicht wurde.

Tabelle II.

Mittelwerte der Flugzeiten des Wirbelringes,

abgeleitet aus dem Verfahren im physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

Schießtrichter $800^{150}/_{30}$, Ladung 1 *g* Jagdpulver.

Pöller-dimensionen	Die Wirbelringe passierten die Distanzmarken in Millimetern Entfernung von der Mündung des Schießtrichters														
	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500
	in 250tel Secunden														
$^{60}/_{8}$	.	3·4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$^{90}/_{8}$	2·0	3·8	(16·0?)	(76·0?)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$^{120}/_{8}$	1·5	3·2	15·8	27·4	54·6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$^{60}/_{10}$	10·5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$^{90}/_{10}$	9·2	19·8?	35·5	48·6	60·1	77·2	90·2	113·8	137·4	155·2	182·0	203·0	253·0	288·0	323 0 ???
$^{120}/_{10}$	5·2	11·2	22·9	29·5	42·5	54·2	66·9	75·4	89·2	102·0	119·8	173·0	227·0	240·0	243·0 ???
$^{60}/_{12}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$^{90}/_{12}$	6·5	14·0	27·8	40·0	53·2	63·6	82·2	100·8	114·0	135·0	163·0	219·0	224·0	276·0	284·0 ??
$^{120}/_{12}$	3·6	11·8	21·0	28·2	46·0	53·0	66·4	79·6	94·5	104·4	128·0	165·0	186·0	228·0	226·0 ??

Mit Fragezeichen versehene Werte bedeuten oftmalige Versager ohne nachweisbare Ringbildung.

Die Punkte bedeuten, dass der Wirbelring die Scheibe nicht erreichte oder dass sich überhaupt kein Ring bildete.

Aus dieser Tabelle ergibt sich deutlich eine Verzögerung der Geschwindigkeit der Wirbelringe. Die Curven, welche die Zeiten wiedergeben, verlaufen bis zu 5 *m* Distanz ziemlich regelmäßig, darüber hinaus findet man aber bedeutende Störungen. Die Messungen auf dem großen Schießplatze in St. Katharein in Distanzen von 50 zu 50 *m* zeigten übrigens ein ganz ähnliches Verhalten. Bis zu 250 *m* erhielt man recht normale Geschwindigkeitsabnahmen, darüber hinaus und besonders bei und über 300 *m* (die äußersten Stationen waren 325 und 350 *m*) traten auffallende Unregelmäßigkeiten auf. Es ergibt sich hieraus, dass der Ring in der Nähe seiner Auflösung bisher unerforschten Störungen unterliegt. Sieht man von diesen äußersten Distanzen ab, so lassen sich die Werte der obigen Tabelle angenähert durch eine *e*-Potenz darstellen. Dasselbe Resultat ergaben auch die Schießversuche auf dem Schießplatze selbst. Man hätte hoffen und erwarten können, dass die Versuche im Cabinete, wo man in der Lage war, alle Vorsichtsmaßregeln mit großer Sorgfalt zu treffen, genauere Ergebnisse liefern würden als die auf dem Schießplatze. Leider ist das nicht der Fall gewesen. Man kann daher nur sagen, dass die Geschwindigkeiten des Fortschreitens der Wirbelringe sich angenähert durch eine *e*-Potenz darstellen lassen.

Mein ursprünglicher Plan war, das Verhältnis der Geschwindigkeiten zu den aufgewendeten Kräften zu untersuchen, wie es Prof. Czermak schon früher machte, aber meine Berufsgeschäfte hinderten mich, das gewiss physikalisch sehr wichtige, aber auch langwierige Verfahren fortzusetzen, und muss ich den Physikern überlassen, diese Untersuchungen weiter zu verfolgen.

Ehe ich schließe, will ich noch die Aufmerksamkeit auf eine Beobachtung lenken, welche ich infolge zufälligen Eintretens günstiger Umstände während meiner Schießversuche in St. Katharein im Februar d. J. machte.

Es betrifft die Wirkungen schief auf den Boden auffallender Wirbelringe, die aus den Spuren, welche von zwei in den von einer dicken Schneedecke bedeckten Erdboden einfallenden Ringe, bei ihrem durch Rückenwind bedingten Einfallen in die ebene Schneefläche hinterließen.

Fig. 12 und 13 zeigen die nach der Natur abgezeichneten Spuren und zeigen deutlich das Einströmen von Luft in den Wirbelkörper. Die in der Zeichnung licht schraffierten Stellen

Fig. 12.

zeigen die in der Schneefläche ersichtlich gewesenen Aufkräuselungen und nach vorne gerichteten wellenförmigen Aufhäufelungen zartester und umso zarterer Art, als die Linien

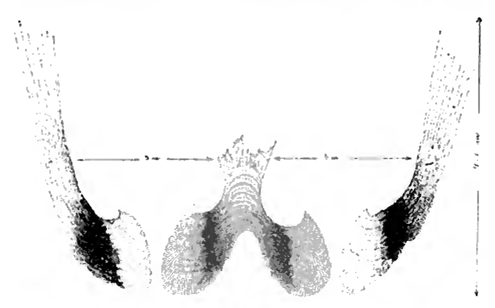


Fig. 13.

lichter gezeichnet erscheinen. Die dunkeln, fleckig dargestellten Stellen bedeuten unregelmäßige Zerbröckelungen oder vielmehr Aufwühlungen in der Schneedecke, welche an jenen

Stellen den Anschein hatten, als ob ein Huhn darin herumgewühlt hätte. Zwischen den aufgewühlten und den aufgekräuselten Stellen befinden sich in beiden Fällen die in der Zeichnung weiß gebliebenen Stellen. Dieselben betreffen solche Punkte, wo der Schnee keine Spur von der Einwirkung der wirbelnden Bewegungen zeigte.

Versuche, welche ich in Gegenwart der Herren Pernter und Trabert machte, um derlei Bilder auf das mit Seifenemulsion bestrichene, schief gegen die Trichterachse geneigte Drahtnetz zu erhalten, misslangen, offenbar weil das Netz dem Wirbelkörper das Durchfahren gestattet und demnach demselben nicht jenen Widerstand bietet, um die Einwirkungen der wirbelnden Bewegungen auf die Seifenschaumtheilchen zu zeigen.

Besser gelangten die Einwirkungen solcher in eine leicht geneigte, dicht mit Licopodium bestreute ebene Tischplatte einfallenden Ringe zur Anschauung. Da entstanden wohl nicht so schöne und deutliche Spuren wie in der Schneefläche, aber sie zeigten alle die analoge Structur und wiesen das Einströmen von Luft in den Wirbelkörper einwandfrei nach.

Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitte

von

Dr. **Josef Nabl.**

Aus dem physikalischen Cabinete der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juni 1902.)

Dem in der Überschrift genannten verwandte Probleme sind seitens zahlreicher Autoren zum Gegenstande theoretischer und experimenteller Studien gemacht worden. Ich erwähne die Untersuchungen Stefan's[1] über die Schwingungen aus mehreren Stücken zusammengesetzter Stäbe und Saiten, die Abhandlung Kirchhoff's[2] über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitte und aus der Literatur der jüngeren Vergangenheit eine Abhandlung von Radaković[3] über die Schwingungen von Saiten veränderlicher Dichte, welche in der Einleitung eine Literaturübersicht enthält.

Die folgenden Zeilen sollen demnach nicht den Anspruch auf die Aufmerksamkeit des Theoretikers erheben. Sie geben jedoch einerseits eine Vorstellung von dem Einflusse, welchen Inconstanz des Querschnittes auf die Ermittelung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern nach Chladni's Methode besitzt; anderseits lassen sich gewisse Specialfälle des in der

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. LV, Abth. II, April 1867 und Bd. LVII, Abth. II, März 1868.

[2] Gesammelte Abhandlungen, S. 339.

[3] Escherich und Weyr, Monatshefte für Mathematik und Physik, V. Jahrgang, Wien, 1894, S. 193.

Überschrift genannten Problems experimentell sehr einfach realisieren, wodurch eine Prüfung der Theorie durch den Versuch ermöglicht wird.

Es sei zunächst ein Stab vorausgesetzt, dessen Oberfläche irgendeine Rotationsfläche um die Längsachse des Stabes ist; diese letztere werde als X-Achse gewählt. Die Länge des ganzen Stabes sei l; der Querschnitt des Stabes im Abstande x von einem der Enden desselben möge mit q_x bezeichnet werden. Bezeichnet man dann mit u die Verrückung eines Punktes dieses Querschnittes und mit E die Elasticitätsconstante des Stabmaterials, so ist die auf die Fläche q_x wirkende Spannung gegeben durch:

$$S_x = Eq_x \frac{du}{dx}.$$

Geht man nun auf der X-Achse um das sehr kleine Stück α weiter, so wirkt auf den Querschnitt in $x+\alpha$ die Spannung:

$$S_{x+\alpha} = Eq_x \frac{du}{dx} + \left(Eq_x \frac{d^2u}{dx^2} + E\frac{dq_x}{dx}\frac{du}{dx}\right)\alpha.$$

Somit ist die bewegende Kraft, welche auf das Stabelement $q_x\alpha$ wirkt, gegeben durch:

$$S_{x+\alpha} - S_x = \left(Eq_x \frac{d^2u}{dx^2} + E\frac{dq_x}{dx}\frac{du}{dx}\right)\alpha.$$

Und wenn man die Dichte des Stabmaterials mit ρ bezeichnet, erhält man für das Stabelement die Bewegungsgleichung:

$$q_x\rho\alpha \frac{d^2u}{dt^2} = \left(Eq_x \frac{d^2u}{dx^2} + E\frac{dq_x}{dx}\frac{du}{dx}\right)\alpha,$$

beziehungsweise für u die folgende partielle Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{E}{\rho}\frac{1}{q_x}\frac{dq_x}{dx}\frac{du}{dx}. \qquad 1)$$

Die Behandlung dieses allgemeinen Falles bietet vom rein physikalischen Standpunkte wenig Interessantes, und ich will daher sogleich zu einem Specialfalle übergehen. Gegeben sei ein Stab von kreisförmigem Querschnitte, der von einem bis

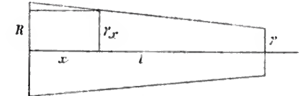


Fig. 1.

zum anderen Ende gleichmäßig konisch verläuft, also einen Kegelstutz bildet. R und r seien die Radien der beiden Grundflächen desselben, l seine Höhe. Es besitzt dann der im Abstande x vom linken, dickeren Stabende construierte Querschnitt den Radius:

$$r_x = R - x\frac{R-r}{l} = b - ax.$$

Es sind dann weiters in diesem Falle:

$$q_x = \pi(a^2x^2 - 2abx + b^2), \quad \frac{dq_x}{dx} = 2\pi(a^2x - ab),$$

$$\frac{1}{q_x}\frac{dq_x}{dx} = \frac{2a}{ax-b}.$$

Es geht demnach für diesen speciellen Fall die Gleichung I) über in:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{E}{\rho}\frac{2}{x-\frac{b}{a}}\frac{du}{dx}. \qquad \text{II)}$$

Ich will hier gleich bemerken, dass genau dieselbe Gleichung auch gilt, wenn es sich nicht um einen konischen Stab handelt, sondern um einen pyramidenstutzförmigen Stab von quadratischem Querschnitte (wobei dann R und r die halben Seiten der beiden quadratischen Grundflächen bedeuten), da $\frac{1}{q_x}\frac{dq_x}{dx}$ in beiden Fällen den gleichen Wert hat.

Wir versuchen zunächst dieser Gleichung zu genügen durch den Ansatz:

$$u = U(x) \cos \alpha t,$$

wobei $U(x)$ eine Function von x allein und $\alpha = \frac{2\pi}{T}$ ist, wo mit T die Schwingungsdauer bezeichnet wird.

Hieraus ergibt sich für $U(x)$ die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{2}{x - \frac{b}{a}} \frac{dU}{dx} + \frac{\alpha^2 \rho}{E} U = 0.$$

Oder wenn man $x - \frac{b}{a} = \xi$ und $\frac{\alpha^2 \rho}{E} = \beta$ setzt:

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{dU}{d\xi} + \beta^2 U = 0. \qquad \text{III)}$$

Die Integration dieser Gleichung erfolgt am einfachsten durch Reihen, deren Coefficienten sich nach der Methode der unbestimmten Coefficienten leicht finden lassen. Man erhält so die beiden Integrale:

$$U_1 = \quad 1 - \frac{\beta^2 \xi^2}{3!} + \frac{\beta^4 \xi^4}{5!} - \frac{\beta^6 \xi^6}{7!} + \dots = \frac{1}{\beta \xi} \sin (\beta \xi)$$

$$U_2 = \xi^{-1} \left(1 - \frac{\beta^2 \xi^2}{2!} + \frac{\beta^4 \xi^4}{4!} - \frac{\beta^6 \xi^6}{6!} + \dots \right) = \frac{1}{\xi} \cos (\beta \xi).$$

Es ist somit, wenn man auf die ursprüngliche Variable x zurückgeht, das allgemeine Integral der Gleichung III) gegeben durch:

$$U = \frac{C_1}{\beta \left(x - \frac{b}{a} \right)} \sin \left(\beta \left(x - \frac{b}{a} \right) \right) +$$

$$+ \frac{C_2}{\left(x - \frac{b}{a} \right)} \cos \left(\beta \left(x - \frac{b}{a} \right) \right). \qquad \text{IV)}$$

Die Werte der Constanten C_1 und C_2 hängen, abgesehen von der Anfangsintensität der Schwingungen, nur noch ab von den Grenzbedingungen an den beiden Endflächen des Stabes. Es mögen die beiden Stabenden frei sein; dann dürfen daselbst keine Spannungen auftreten, d. h. es muss für $x = 0$ und $x = l$

$$\frac{du}{dx} = 0$$

sein oder, da diesen Bedingungen unabhängig von der Zeit genügt werden muss:

$$\frac{dU}{dx} = 0.$$

Man erhält so, wenn man für b und a ihre ursprünglichen Werte und der Abkürzung halber $\beta \frac{Rl}{R-r} = \varphi$ und $\beta \frac{rl}{R-r} = \psi$ setzt, die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=0} = C_1 \left[\frac{(R-r)^2}{\beta R^2 l^2} \sin\varphi - \frac{R-r}{Rl} \cos\varphi\right] - \\ - C_2 \left[\frac{\beta(R-r)}{Rl} \sin\varphi + \frac{(R-r)^2}{R^2 l^2} \cos\varphi\right] = 0$$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=l} = C_1 \left[\frac{(R-r)^2}{\beta r^2 l^2} \sin\psi - \frac{R-r}{rl} \cos\psi\right] - \\ - C_2 \left[\frac{\beta(R-r)}{rl} \sin\psi + \frac{(R-r)^2}{r^2 l^2} \cos\psi\right] = 0. \qquad \text{V)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich zunächst C_1 und C_2 eliminieren; man erhält nach einer längeren Zwischenrechnung und unter Rücksicht auf $\varphi - \psi = \beta l$ als schließliche Eliminationsgleichung zur Bestimmung von β, beziehungsweise α:

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \frac{\beta l}{1 + \frac{Rr}{(R-r)^2} \beta^2 l^2}. \qquad \text{VI)}$$

Bei den dem Versuche unterzogenen Stäben war durchwegs $r = \frac{R}{2}$ gewählt; in diesem Falle lautet also die Gleichung VI), wenn man auch noch $l = 1$ setzt:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\beta}{1 + 2\beta^2}. \qquad \text{VII)}$$

Setzt man die Wurzeln der Gleichung VI) in eine der Gleichungen V) ein, so kann man das Verhältnis $\frac{C_2}{C_1}$ der Constanten berechnen. Für den Fall $r = \frac{R}{2}$, wo natürlich dann für β die Wurzeln der Gleichung VII) zu setzen sind, ergibt sich dieses Verhältnis etwa aus der zweiten der Gleichungen V) zu:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{1}{\beta} \sin \beta - \cos \beta}{\beta \sin \beta + \cos \beta}.$$

Die Wurzeln der Gleichung VII) findet man am einfachsten durch graphische Auflösung derselben. Zu diesem Zwecke

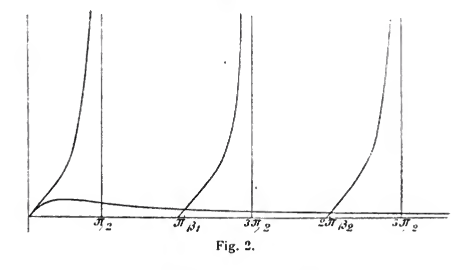


Fig. 2.

construiert man bekanntlich die Curven, welche der linken und der rechten Seite der Gleichung entsprechen und sucht die Abscissen der Schnittpunkte der beiden Curven; diese Abscissen sind dann Wurzeln der betreffenden Gleichung. Man hat somit

in unserem Falle die beiden Curven $y = \mathrm{tg}\,\beta$ und $y' = \frac{\beta}{1+2\beta^2}$ zu construieren. Fig. 2 gibt ein ungefähres Bild vom Verlaufe dieser beiden Curven.

Die Abscissen der aufeinanderfolgenden Schnittpunkte sind, wie man sieht, stets größer als die bezüglichen Werte der Reihe: $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, allein sie sind wegen der geringen Werte, die y' überhaupt zu erreichen vermag, schon vom Anfange an nur um Weniges größer als die betreffenden Glieder der genannten Reihe und rücken, je weiter man auf der β-Achse fortschreitet, umso näher an die bezüglichen Multipla von π heran, mit denen sie im unendlich fernen Punkte schließlich zusammenfallen.

Eine genaue Construction ergab für die ersten vier Wurzeln der Gleichung VII) die folgenden Näherungswerte:

$$\beta_1 = 3\cdot288.. \quad \beta_2 = 6\cdot360.. \quad \beta_3 = 9\cdot476.. \quad \beta_4 = 12\cdot607..$$

Nun ist, wenn mit N_n die Schwingungszahl eines Tones des konischen Stabes bezeichnet wird, allgemein:

$$\beta_n = \alpha_n \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{2\pi}{T_n}\sqrt{\frac{\rho}{E}} = 2\pi N_n \sqrt{\frac{\rho}{E}},$$

somit also:

$$N_n = \frac{\beta_n}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

worin für n der Reihe nach 1, 2, 3, ... zu setzen ist, wenn man den Grundton, beziehungsweise die aufeinanderfolgenden Obertöne des konischen Stabes zu erhalten wünscht. Die analogen Schwingungszahlen eines cylindrischen oder prismatischen Stabes von der Länge 1, der aus demselben Material besteht wie der konische, sind aber gegeben durch:

$$N'_n = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Es ist somit allgemein ein Ton des konischen Stabes gegeben durch die Formel:

$$N_n = \frac{\beta_n}{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\beta_n}{n\pi}\,\frac{n}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\beta_n}{n\pi} N'_n.$$

Nachdem nun stets $\beta_n > n\pi$ ist, so ist erstens jeder Ton des konischen Stabes höher als der entsprechende Ton des cylindrischen Stabes von gleicher Länge, zweitens aber nähert sich mit wachsendem n das Verhältnis $\frac{N_n}{N'_n}$ rasch der Einheit, da sich, wie wir gesehen haben, mit wachsendem n β_n schnell πn nähert. Für die ersten vier Werte dieses Verhältnisses ergab die Rechnung angenähert die Zahlen:

$$\frac{N_1}{N'_1} = 1{\cdot}046\,.\,. \quad \frac{N_2}{N'_2} = 1{\cdot}012\,.\,. \quad \frac{N_3}{N'_3} = 1{\cdot}005\,.\,. \quad \frac{N_4}{N'_4} = 1{\cdot}003\,.\,.$$

Die Schwingungszahlen der einzelnen Partialtöne stehen somit untereinander in dem Verhältnisse:

$$1{\cdot}046 : 2{\cdot}024 : 3{\cdot}015 : 4{\cdot}012,$$

sind also, wenigstens was die ersten Partialtöne anlangt, nicht mehr harmonisch wie bei einem cylindrischen Stabe, nähern sich aber ziemlich rasch der Reihe der harmonischen Obertöne.

Es erübrigt nun noch, die Lage der Knotenpunkte bei einem konisch zulaufenden Stabe festzustellen. Für die Knotenpunkte gilt unabhängig von der Zeit:

$$u = 0, \text{ beziehungsweise } U = 0.$$

Die Lage der Knotenpunkte ist somit, wenn man in IV) für $\frac{b}{a} = \frac{Rl}{R-r} = 2$ einführt, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{x-2}\left[\frac{C_1}{\beta}\sin(\beta(x-2)) + C_2\cos(\beta(x-2))\right] = 0,$$

wobei die Lösungen der Beschränkung $0 < x < 1$ unterliegen. Die Nullsetzung des ersten Factors gibt die zu verwerfende Lösung $x = \infty$; es erübrigt also noch, unter Berücksichtigung von VIII) die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\beta(x-2)) = -\beta\frac{C_2}{C_1} = \frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta\sin\beta + \cos\beta}.$$

Hierin sind nun der Reihe nach für β die Werte $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ einzusetzen und die hiezugehörigen Werte von x mit Berücksichtigung der obigen Beschränkung zu berechnen.

Die Rechnung ergibt für die Lage der Knotenpunkte der ersten drei Töne folgende angenäherten Werte, neben welche vergleichshalber die analogen Zahlen für einen cylindrischen Stab gleicher Länge gesetzt sind.

Konischer Stab			Cylindrischer Stab		
Grundton	erster Oberton	zweiter Oberton	Grundton	erster Oberton	zweiter Oberton
$x = 0 \cdot 433$	$x_1 = 0 \cdot 23$ $x_2 = 0 \cdot 73$	$x_1 = 0 \cdot 160$ $x_2 = 0 \cdot 492$ $x_3 = 0 \cdot 823$	$x = 0 \cdot 500$	$x_1 = 0 \cdot 250$ $x_2 = 0 \cdot 750$	$x_1 = 0 \cdot 166$ $x_2 = 0 \cdot 500$ $x_3 = 0 \cdot 833$

Es erscheinen somit die Knotenpunkte bei dem konischen Stabe sämmtlich gegen das dickere Ende zu verschoben, und es nimmt diese Verschiebung mit der zunehmenden Höhe der Obertöne fortwährend ab.

Die Prüfung der Theorie durch den Versuch wurde infolge der erheblichen Schwierigkeiten, die eine exacte Bestimmung der Schwingungszahlen so hoher und verhältnismäßig wenig voneinander verschiedener Töne wie der Obertöne eines konischen und eines cylindrischen Stabes bietet, auf die Ermittelung des Verhältnisses der Schwingungszahlen des Grundtones eines konischen und eines cylindrischen Stabes beschränkt.

Verwendet wurden im ganzen vier Stäbe, die alle aus dem gleichen Material — astfreies weiches Holz in der Richtung der Faser zugeschnitten — hergestellt waren. Die Länge eines jeden dieser Stäbe betrug 1 *m*. Zwei von ihnen waren prismatisch und hatten quadratischen Querschnitt von 1 cm^2, beziehungsweise $0 \cdot 25$ cm^2, die beiden anderen waren möglichst sorgfältig pyramidenstutzförmig zugeschnitten, und es besassen

ihre quadratischen Grundflächen einen Flächeninhalt von 4 cm^2 und 1 cm^2, beziehungsweise von 1 cm^2 und 0·25 cm^2. Die Stäbe wurden an der Stelle des Grundton-Knotenpunktes festgehalten und in der gewöhnlichen Weise mittels eines mit Kolophonium bestreuten Lappens zum Tönen gebracht. Zunächst ergab sich, dass nicht nur die beiden prismatischen Stäbe, sondern auch die beiden pyramidenstutzförmigen untereinander in der Höhe des Grundtones übereinstimmten. Dies folgt aber auch aus der Theorie, gemäß welcher nach Gleichung VI) bei gleicher Länge der Stäbe nur der Factor $\frac{Rr}{R-r}$ für die Tonhöhe entscheidend ist; dieser Factor hat aber für beide vorliegenden Pyramidenstutzen den Wert 2.

Die Bestimmung des Verhältnisses der Schwingungszahlen wurde zunächst mittels eines Monochords durchgeführt; allein wegen der sehr geringen Saitenlängen, die hiebei ins Spiel kamen,[1] und der Verschiedenheit im Klangcharakter der Stab- und Monochordtöne haftete diesen Bestimmungen eine große Unsicherheit an, die sich in der erheblichen Differenz mehrerer aufeinanderfolgender Bestimmungen kundgab. Es wurde auf diese Weise im Mittel gefunden:

$$\frac{N_1}{N_1'} = 1{\cdot}09.$$

Dieses Resultat bestätigt zwar qualitativ die Theorie, weicht aber denn doch erheblich von dem theoretisch geforderten Werte: 1·046 ab.

Ein viel befriedigenderes Ergebnis lieferte aber eine zweite Methode. Es wurde der eine der beiden prismatischen Stäbe solange verkürzt, bis sein Grundton die Höhe des Grundtones der pyramidenstutzförmigen Stäbe erreicht hatte. Diese Bestimmung konnte mit großer Genauigkeit ausgeführt werden, und es ergab sich, dass der prismatische Stab dann nur mehr die Länge von 94·5 cm hatte. Das Verhältnis der ursprünglichen

[1] Die Schwingungszahl des Grundtones der prismatischen Stäbe betrug 2416. Das Monochord war mit dünnem Stahldrahte bespannt, und zum Vergleiche wurde eine Stimmgabel von 1024 Schwingungen benützt.

Länge des Stabes (100 *cm*) zu seiner jetzigen ergibt aber das gesuchte Verhältnis der Schwingungszahlen, und dieses ergibt sich auf diese Weise zu

$$\frac{N_1}{N_1'} = 1 \cdot 058,$$

ein Wert, der auch quantitativ mit dem theoretisch geforderten befriedigend übereinstimmt.

Zum Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Privatdocenten Dr. A. Lampa sowohl für die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung, als auch für schätzenswerte Rathschläge während des Verlaufes derselben meinen freundschaftlichsten Dank auszusprechen.

Über die Grundempfindungen im Young-Helmholtz'schen Farbensystem

von

Prof. **Franz Exner,**

w. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1902.)

Bekanntlich genügt im Sinne der Young-Helmholtz'schen Theorie die Annahme dreier voneinander unabhängiger Farbenempfindungen zum Aufbau eines Systemes, das alle möglichen Farbenempfindungen umfasst; bezüglich der Wahl derselben ist man zunächst innerhalb weiter Grenzen unabhängig, es ist im voraus nicht einmal zu erwarten, dass sie alle der Reihe der Spectralfarben angehören, weder was den Farbenton, noch was die Sättigung anlangt, so dass es ganz wohl denkbar, ja fast gewiss ist, dass alle drei Grundempfindungen derart sind, dass sie in einem normalen Auge einzeln gar nie zustande kommen, uns also eigentlich unbekannt bleiben. Das hindert nicht, dass wir aus verschiedenen Erscheinungen auf den Farbenton und auch auf die Sättigung dieser Grundempfindungen im Vergleiche mit bekannten Farben, z. B. denen des Spectrums, einen Schluss ziehen können, und bei dem außerordentlichen Interesse, das die Kenntnis dieser einfachsten Farbenempfindungen besitzt, ist es natürlich, wenn man längst nach passenden Methoden zu ihrer Ermittlung gesucht hat. Gewisse Voraussetzungen waren dabei allerdings unvermeidlich, doch nur solche, an deren Richtigkeit kaum zu zweifeln ist, wie z. B. die Giltigkeit des Newton'schen Farbenmischungsgesetzes oder die Annahme, dass die Empfindung Weiß durch gleichzeitige Erregung der drei Grundempfindungen entsteht.

Schon Young hat die spectralen Farben Roth, Grün und Violett für die Grundempfindungen angesprochen; die Wahl von Spectralfarben war wohl das Nächstliegende mit Rücksicht auf die Bedingung, dass alle möglichen Farbentöne sich aus Mischung der drei gewählten herstellen lassen müssen, und ebenso war die Wahl der beiden Enden des Spectrums für zwei der gesuchten Größen und einer Farbe ziemlich in der Mitte derselben für die dritte eine naheliegende. Aber schon die Versuche Maxwell's zeigten, dass die getroffene Wahl keine nothwendige war und sich durch eine bessere ersetzen ließ: seine Experimentaluntersuchungen über Herstellung und Prüfung von Farbengleichungen ergaben ein günstigstes Resultat, wenn er als Grundempfindungen nebst Roth und Grün noch Blau, an Stelle von Young's Violett, annahm. Das war eine wichtige und, wie alle späteren Untersuchungen zeigten, voll gerechtfertigte Annahme; leider konnte auch bei Maxwell von einer einigermaßen befriedigenden Präcisierung der Grundempfindungen nicht die Rede sein; er verlegt dieselben ungefähr zu den Wellenlängen 630, 530 und 457 $\mu\mu$; es muss aber bemerkt werden, dass seine Versuche nur beweisen, dass die gewählten Grundempfindungen die wirklichen sein können, keineswegs aber, dass sie es sein müssen. Es ließen sich noch viele Combinationen angeben, von denen man dasselbe aussagen kann.

Welcher Art das an Stelle von Violett zu setzende Blau sei, geht aus späteren Untersuchungen von Sigm. Exner[1] hervor. Wäre das spectrale Violett eine der Grundempfindungen, so könnte sein Farbenton durch Ermüdung des Auges mit anderen Farben nicht verändert werden. Das trifft nicht zu; ermüdet man das Auge z. B. für Roth und blickt dann auf spectrales Violett, so erscheint dasselbe blau, und dadurch wird unzweideutig bewiesen, dass die Empfindung Violett sich aus den Empfindungen Blau und Roth zusammensetzt. Indem Sigm. Exner jene Stelle im blauen Theile des Spectrums aufsuchte, die ihren Farbenton durch Rothermüdung am wenigsten verändert, konnte er die Gegend zwischen den Linien *F* und *G*

---

[1] Pflüger's Archiv, Bd. 1 (1868).

als jene bezeichnen, die der einen Grundempfindung — ein Blauviolett — entspricht. In ähnlicher Weise konnte im grünen Theile des Spectrums die Partie zwischen den Fraunhofer'schen Linien *E* und *b* als jene erkannt werden, die ihren Farbenton bei Ermüdung des Auges mit den anderen Grundempfindungen am wenigsten verändert; er bezeichnet diesen Farbenton deshalb als die Grundempfindung Grün. Die gleiche Methode ergibt als Grundempfindung Roth das äußerste rothe Ende des Spectrums. Obgleich diese Methode einwandfrei zeigt, dass das Violett als Grundempfindung durch einen mehr nach Blau gelegenen Farbenton ersetzt werden muss, so gestattet sie doch keine genauere Bestimmung der beiden anderen; wie der Verlauf der später von König und Dieterici bestimmten Curven der Grundempfindungen zeigt, sind diese Versuche sehr complicierter Natur, es spielt dabei jedenfalls die Lage der Maxima dieser Curven auch eine Rolle. Auch musste die Stelle im Spectrum, welche der Grundempfindung Grün entspricht, sowohl bei Roth-, als bei Blauermüdung des Auges ihren Farbenton verändern, während vielleicht benachbarte Stellen davon weniger beeinflusst werden.

War durch diese Versuche nachgewiesen, dass das Violett als Grundempfindung durch Blau zu ersetzen ist, so haben das die späteren Untersuchungen von Bezold[1] und von Brücke[2] nur bestätigen können. Unabhängig voneinander sind diese beiden Forscher auf Grund der Young-Helmholtz'schen Theorie zu folgender Überlegung gekommen. Entstehen, z. B. im Spectrum, die meisten Farbentöne durch gleichzeitige, aber ungleich starke Erregung der drei Grundempfindungen, so muss ein solcher Farbenton sich bei Herabminderung der objectiven Helligkeit verändern und sich mehr und mehr dem Tone der stärksten in ihm vertretenen Grundempfindung nähern, da die schwächeren zunächst unter die Schwelle der Empfindung sinken. Es fehlt in der That nicht an zahllosen Erscheinungen, die das bestätigen; am deutlichsten kann man sich wohl davon überzeugen, wenn man die Helligkeit eines

[1] Pogg. Ann., Bd. 150 (1873).

[2] Diese Sitzungsber., Abth. III, Bd. 77 (1878).

Spectrums allmählich abnehmen lässt; es verschwinden dann die Übergänge zwischen Roth und Grün, zwischen Grün und Blau, sowie das Violett, und die drei den Grundempfindungen entsprechenden oder ihnen doch nahekommenden Farben nehmen schließlich das ganze Spectrum ein. Oft hat man am Regenbogen Gelegenheit, dieses Phänomen sehr schön zu beobachten, wenn einzelne Partien desselben besonders hell, andere dunkler erscheinen; in ersteren sieht man die Farben Gelb und Cyanblau deutlich, während sie in letzteren verschwinden. Dass Roth, etwa von der Farbe des äußersten Endes im Spectrum, Grün und ein etwas nach Violett ziehendes Blau den drei Grundempfindungen entsprechen, darüber lässt das Bezold-Brücke'sche Phänomen keinen Zweifel, dagegen gestattet es in dieser einfachen Form noch keine genauere Präcisierung derselben.

Erst die späteren, äußerst sorgfältigen Untersuchungen von König und Dieterici[1] haben zu exacten Bestimmungen geführt, doch muss gleich betont werden, dass das nach ihrer Methode nur unter Heranziehung einer neuen, später zu erwähnenden Hypothese möglich war. Sie giengen von der Herstellung von Farbengleichungen aus, indem sie, mit Benützung von Helmholtz's Farbenmischapparat, je eine Spectralfarbe aus zwei anderen von bekannter Wellenlänge und Intensität mischten. Dabei ist, wie bei Maxwell's Versuchen, die Wahl der Grundempfindungen zunächst willkürlich, d. h. man kann drei Farben des Spectrums als solche annehmen und mit den Farben beliebiger Wellenlänge durch ein System linearer Gleichungen verbinden.

Die durch diese Farben ausgelösten Empfindungen, von König als Elementarempfindungen bezeichnet, brauchen nun keineswegs die Grundempfindungen im Young-Helmholtz'schen Sinne zu sein, sie geben uns nur, in Verbindung mit den beobachteten Farbengleichungen, als directes Resultat der Messung eine jede Farbe des Spectrums als Function der drei gewählten Einheiten. Bezeichnen wir nach König mit R, G, V die drei gewählten Elementarfarben, das äußerste Roth, ein

[1] Berliner Akad. (1886) und Zeitschr. für Psych. und Phys., Bd. IV (1893).

mittleres Grün und das äußerste Violett, so wird jede andere Farbe des Spectrums sich aus diesen dreien mischen lassen, wenn man von ihnen passende Quantitäten wählt. Diese liefern eben die Farbengleichungen; trägt man nun über den Wellenlängen als Abscissen für jede Farbe diese Quantitäten als Ordinaten auf, so erhält man die König'schen Elementarempfindungscurven *R*, *G*, *V*. Um das thun zu können, ist es nothwendig, für die verschiedenen Empfindungen ein gemeinsames Maß zu haben; das hat natürlich physiologisch keinen Sinn, sondern ist nur eine rechnerische Aushilfe, die man am einfachsten erreicht, indem man die Flächeninhalte der drei Curven, wie es auch bei der später folgenden Figur geschehen ist, einander gleich setzt, d. h. die rein rechnerische Annahme macht, dass durch unzerlegtes weißes Licht die drei Elementarempfindungen gleich stark erregt werden.

Die drei König'schen Curven *R*, *G*, *V* sind somit lediglich der Ausdruck beobachteter Thatsachen; um von diesen auf die Natur der Grundempfindungen zu schließen, bedarf es noch specieller Annahmen, und da hat König zunächst nach dem Aussehen der beiden Enden des Spectrums, die bekanntlich auf ziemlich weite Strecken hin keine Änderung des Farbentones erkennen lassen, geschlossen, dass seine Elementarfarben *R* und *V*, d. h. das äußerste Roth und Violett, zugleich die entsprechenden Grundempfindungen sind. Als dritte ergibt sich dann aus dem Verlaufe der Curven *R*, *G*, *V* ein Grün, etwa von der Wellenlänge 502 $\mu\mu$. Die Annahme von *R* und *V* als Grundempfindungen ist ja gewiss naheliegend, bleibt aber doch völlig willkürlich und hat sich, wie König und Dieterici selbst gezeigt haben, als falsch erwiesen.

Die Untersuchung farbenblinder Systeme durch die genannten Forscher, insbesondere der roth- und grünblinden, und die Zeichnung der auf dieselben bezüglichen Curven hat nämlich das bemerkenswerte Resultat ergeben, dass bei den gewählten Grundempfindungen *R*, *G*, *V* das Curvensystem eines Dichromaten nicht aus dem eines Trichromaten durch Wegfall der einen Curve *R* oder *G* entstanden gedacht werden kann, wie es nach der Young-Helmholtz'schen Theorie zu erwarten gewesen wäre. König und Dieterici haben nun durch mühe-

volles Probieren versucht, unter Annahme anderer Grundempfindungen für die experimentell an Dichromaten und Trichromaten gewonnenen Farbengleichungen diese Discrepanz zum Verschwinden zu bringen. Das gelingt auch, wenn man die folgenden Grundempfindungen annimmt: ein Roth, außerhalb des Spectrums und etwa complementär zur Wellenlänge 490—500, ein Grün von etwa $\lambda = 505$ und ein Blau von etwa $\lambda = 470\ \mu\mu$. Bei dieser Annahme ergeben sich für die Dichromaten Curvensysteme, die mit großer Annäherung aus jenen der Trichromaten durch Wegfall der Curve für Roth oder Grün entstehen. König und Dieterici haben deshalb die obigen Werte als die den Grundempfindungen zukommenden angesehen; es muss aber nochmals betont werden, dass dieselben sich nicht unmittelbar experimentell ergeben, sondern nur unter der Voraussetzung, dass die Annahme richtig ist, wonach die Dichromaten sich von den normalen Trichromaten lediglich durch den Wegfall einer Empfindung unterscheiden; wäre, wie es z. B. bei den Monochromaten der Fall ist, der Verlauf der restierenden Curven bei Dichromaten in Wirklichkeit ein anderer als bei den Trichromaten, so wäre auch die getroffene Bestimmung der Grundempfindungen eine falsche.

Endlich hat auch Helmholtz[1] einen Versuch zur Bestimmung der drei Grundempfindungen gemacht, indem er durch eine Erweiterung des Fechner'schen psychophysischen Gesetzes die kleinsten Empfindungsunterschiede für Helligkeit, sowie für Farbentöne miteinander in Relation setzte. Leider ist das bisher vorliegende Beobachtungsmateriale nach seinem eigenen Urtheile noch nicht ausreichend, um daraus den Schluss auf die Art der Grundempfindungen mit einiger Sicherheit zu ziehen, doch ergeben sich unter Benützung der einschlägigen Messungen von König und von Brodhun als wahrscheinlichste Werte die folgenden: Für Roth das äußerste Ende des Spectrums, für Grün eine Partie desselben zwischen $\lambda = 540$ und $560\ \mu\mu$ und für Blau ein dem Ultramarin nahestehender Farbenton. Auch diese Bestimmungen sind keines-

[1] Zeitschr. für Psych. und Phys., Bd. II (1891) und III (1892); auch Physiolog. Optik, 2. Aufl., S. 456.

wegs voraussetzungslos; es sollte im Gegentheile die Richtigkeit der gemachten Erweiterung des Fechner'schen Gesetzes dadurch gezeigt werden, dass diese zu möglichen Werten der Grundempfindung führt.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass die Bestimmungen der Grundempfindungen noch lange nicht die für eine so wichtige Größe wünschenswerte Präcision haben; jene Methoden, die keine anderen Voraussetzungen machen als die Richtigkeit der Young-Helmholtz'schen Theorie, derzufolge drei voneinander unabhängige Grundempfindungscurven die Farbenempfindungen längs des Spectrums darstellen, sind keiner genügenden Genauigkeit fähig. Nur dass das Violett durch ein Blau zu ersetzen sei, lässt sich mit Sicherheit sagen; anderseits liegen den Methoden, die exactere Werte liefern, wie namentlich jener von König und Dieterici, Voraussetzungen zugrunde, denen man wohl eine gewisse Wahrscheinlichkeit nicht absprechen kann, die aber keineswegs einwandfrei sind.

Es schien mir deshalb wünschenswert, eine von solchen Voraussetzungen freie Methode in Anwendung zu bringen, die trotzdem einen größeren Grad von Genauigkeit verbürgt als die bisherigen, und dazu schien mir eine passende Ausnützung des Bezold-Brücke'schen Phänomens geeignet.

Nach den Untersuchungen von König und Dieterici kann es keinem Zweifel mehr unterliegen, dass die Grundempfindungscurven wenigstens im allgemeinen einen Verlauf zeigen müssen, wie er in der später folgenden Fig. 1 dargestellt ist; jedenfalls müssen dieselben eine Reihe von Durchschnittspunkten aufweisen, und gerade diese sind für die vorliegende Frage von entscheidender Wichtigkeit. Bezeichnen wir dieselben der Reihe nach vom rothen Ende angefangen mit a, b, c, d, so entspricht a der Complementärfarbe zum Grundblau, b gibt die Wellenlänge des Grundgrün, c die complementäre Farbe zum Grundroth und endlich d die Wellenlänge des Grundblau, alles Beziehungen, die aus der Construction der Figur sich von selbst ergeben. Wäre es nun möglich, die Lage dieser Durchschnittspunkte im Spectrum direct zu bestimmen, so wäre unsere Aufgabe ohne Zuhilfenahme weiterer Hypothesen gelöst. Das gelingt aber mit Hilfe des Bezold-Brücke'schen

Phänomens. Betrachten wir z. B. den Punkt *a*. Sein Farbenton wird, da die Roth- und Grünordinate gleichen Wert hat, die Blauempfindung aber ganz zurücktritt, von der objectiven Helligkeit innerhalb weiter Grenzen unabhängig sein; nicht so aber die Farbentöne der beiderseits anliegenden Wellenlängen. Die rothwärts anliegenden Wellenlängen werden bei Herabsetzung der Intensität, da zunächst die Grünempfindung unter die Schwelle sinkt, einen Stich ins Röthliche, verglichen mit der Farbe bei voller Intensität, erhalten, die grünwärts anliegenden Wellenlängen dagegen einen solchen ins Grüne.

Ähnlich verhält es sich mit dem Punkte *b*, der der Wellenlänge der Grundempfindung Grün entspricht; hier werden die beiderseits anliegenden Farben bei Herabminderung der Intensität sich gegen Gelb, respective Blau verändern und beim Punkte *d* gegen Grünblau, beziehungsweise violett. Auch der Punkt *c*, oder vielmehr seine Umgebung im Spectrum, zeigt eine entsprechende Veränderung, nur ist dieselbe nicht so auffallend und schwieriger zu beobachten, da hier alle drei Empfindungscurven nahe zusammenkommen, und zwar mit kleinen Ordinaten. Doch ist eine directe Bestimmung gerade dieses Punktes minder wichtig, da sich seine Lage, wenn die Punkte *b* und *d* bekannt sind, daraus schon angenähert ergibt.

Die experimentelle Anordnung zur Ermittlung der Lage dieser Punkte war die folgende: Mit Hilfe einer Bogenlampe und eines großen Concavgitters wurde ein Spectrum entworfen, dessen Ausdehnung im sichtbaren Theile die Länge eines Meters betrug und das, da das Gitter sich in der Rowland'schen Aufstellung befand, in Bezug auf Wellenlängen normal und der Spaltbreite entsprechend rein war. Es war ein Spectrum erster Ordnung, da die höheren Ordnungen wegen des theilweisen Übereinandergreifens zu den vorliegenden Versuchen nicht verwendet werden können. Auf dieses Spectrum wurde nun durch eine dichroskopische Lupe geblickt, zwischen welcher und dem Auge sich noch ein großer Nicol, um die Durchblicksrichtung drehbar, befand. Die durch dieselbe Spectralfarbe gleich hell erleuchteten Bilder der Lupe konnten somit durch Drehung des Nicol in ihrer Intensität beliebig variiert oder gleichgemacht werden. Betrachtet man nun eine Stelle des

Spectrums etwa in der Nähe des Punktes *a* und geht von gleicher Helligkeit beider Bilder aus, so wird man bei Drehung des Nicol bemerken, dass das dunkle Feld seinen Farbenton gegenüber dem hellen beiderseits von *a* im entgegengesetzten Sinne ändert, während an Orten des Spectrums zwischen zweien der fraglichen Punkte dieser Sinn ungeändert bleibt. Man kann so den zu findenden Punkt zwischen recht engen Grenzen einschließen und seine Wellenlänge unmittelbar an der Scala des Gitterspectrographen ablesen. Die absolute Helligkeit ist bei diesen Versuchen innerhalb weiter Grenzen ohne Einfluss, man muss mit derselben nur merklich von der Grenze, wo Blendung beginnt, entfernt bleiben, und ebenso darf man mit derselben nicht so weit herabgehen, dass die Erkennung des Farbentones des dunkleren Feldes die geringste Schwierigkeit bereitet.

Die Erscheinung der Farbenänderung ist in einem reinen Spectrum doch eine so auffallende, dass ein Beobachter, der gar nicht wusste, um was es sich handelt, bei der ersten Durchsuchung des Spectrums die drei Punkte *a*, *b* und *d* sofort bestimmte; der Punkt *c* allerdings kann aus den schon erwähnten Gründen leicht übersehen werden und ist auch bei Aufmerksamkeit schwierig zu bestimmen. Um sich vor Ermüdung der betroffenen Netzhautstellen, respective vor Nachbildern möglichst zu schützen, ist es vortheilhaft, während der Beobachtung durch Drehen des Nicol die beiden Felder abwechselnd zu erhellen.

In der folgenden Tabelle I theile ich die Resultate mit, die in Bezug auf die drei Punkte *a*, *b* und *d* theils von mir, theils von drei anderen Beobachtern mit durchwegs normalen trichromatischen Augen gewonnen wurden. Jede Messung wurde an verschiedenen Tagen im ganzen zehnmal wiederholt, die Wellenlängen sind in $\mu\mu$ angegeben.

Tabelle I.

Beobachter	a		b		d	
	Extreme Werte	Mittel	Extreme Werte	Mittel	Extreme Werte	Mittel
Prof. E.	572 580	576	500 508	503·5	466 477	472
Dr. H.......	574 580	578	503 511	506	473 478	475
Dr. M.	574 582	577	509 518	514	477 481	479
Dr. B.......	577 583	579	505 516	509	471 477	473·5

Man sieht aus diesen Zahlen zunächst, dass die Bestimmungen eine recht befriedigende Genauigkeit aufweisen; die Abweichung der Extremwerte vom Mittel beträgt durchschnittlich weniger als 4 μμ, im Maximum 6 μμ; letzterer Wert würde aber erst der zehnfachen Distanz der beiden Componenten der gelben Natriumlinie voneinander entsprechen.

Die Zahlen lassen ferner unzweifelhaft kleine Unterschiede im Farbensystem der vier Beobachter erkennen, die wohl auf das verschiedene Verhalten der Augenmedien, insbesondere der Absorption in der Macula lutea zurückzuführen sind. Die Mittelwerte der von den verschiedenen Beobachtern gefundenen Zahlen dürften das normale Auge gut charakterisieren, sie sind $a = 577$ μμ, $b = 508$ μμ und $d = 475$ μμ.

Die Wellenlängen der Punkte a und d in Fig. 1 müssen der Construction gemäß complementären Farben angehören, d. h. es ergibt sich aus den vorstehenden Messungen 475 μμ complementär zu 577 μμ. Nach Angaben in Helmholtz's Physiologischer Optik sind Complementärfarben von mehreren Beobachtern direct bestimmt worden, wobei sich als zu 577 complementär ergab bei:

Herrn Kries......... 474,
» Frey 473,
» König 472,
» Dieterici 474,

im Mittel 473·3, was vom obigen Werte nicht weit abweicht. Übrigens ist auch aus unseren Einzelmessungen zu ersehen, dass nicht für alle Beobachter genau dieselben Farbenpaare complementär sind.

Die Lage der drei Punkte *a*, *b*, *d* ist so unabhängig von jeder weiteren Voraussetzung bestimmt, und es fragt sich, wie dieselbe sich zu der von König und Dieterici aus den Farbengleichungen abgeleiteten verhält. Nach ihrer ersten Annahme, wonach äußerstes Roth und Violett, sowie ein mittleres Grün der Construction ihrer Elementarempfindungscurven zugrunde gelegt wurde, müsste der Punkt *a* sich bei 570—575 und *b* bei 502 befinden, während *d* ganz fehlen sollte, es können also die angenommenen Elementarempfindungen nicht den wirklichen Grundempfindungen entsprechen. Das haben auch König und Dieterici schon vermuthet, und zwar deshalb, weil die Roth- und Grüncurve der Trichromaten nicht mit jenen der Dichromaten (den sogenannten Warmcurven) übereinstimmten; wenn aber letztere aus ersteren lediglich durch Wegfall der Roth- oder Grüncurve entstehen, so müsste sich eine solche Übereinstimmung zeigen. König und Dieterici haben deshalb ihren Farbengleichungen andere Grundempfindungen untergelegt und die Wahl derselben so lange variiert, bis obige Übereinstimmung im Verlaufe der Curven für Di- und Trichromaten erreicht wurde. Die Curven zeigen dann alle vier Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, und zwar ist $a = 578$, $b = 505$, $c = 490-500$ und $d = 470$. Die Werte für *a*, *b* und *d* weichen von meinen direct bestimmten so wenig ab, dass man die von König und Dieterici gegebenen Grundempfindungscurven als fast ganz richtig ansehen kann. In Fig. 1 sind diese Curven so wiedergegeben, wie sie sich nach den von mir bestimmten Durchschnittspunkten als die wahrscheinlichsten darstellen; da die Lage dieser Punkte von denen König's nur so wenig abweicht, so ist es leicht, im Anschlusse an König's Curven, den Curvenzug mit genügender Genauigkeit richtig zu führen, da derselbe ja noch durch die Bedingung, dass die Flächen der drei Curven gleichen Inhalt haben müssen, bestimmt wird.

Was die Lage des Punktes *c* anlangt, so ergibt sich derselbe aus dem Gange der Curven in Fig. 1 mit ziemlicher

Sicherheit zu $c = 494$ μμ; er ist, wie schon erwähnt, schlecht zu beobachten, nur der Übergang des dunklen Feldes aus Grünblau in Blau lässt sich deutlich bemerken, an dieser Stelle ist man aber schon violettwärts von c. Drei Messungen ergaben für mein Auge Wellenlängen von 492—494, im Mittel 493 μμ, was aber, wie gesagt, wahrscheinlich schon etwas zu klein ist.

Da die von mir beobachteten Durchschnittspunkte so sehr gut mit jenen von König und Dieterici übereinstimmen, so scheint mir dadurch auch die von diesen gemachte Annahme über das Entstehen der Dichromasie durch Ausfall einer der

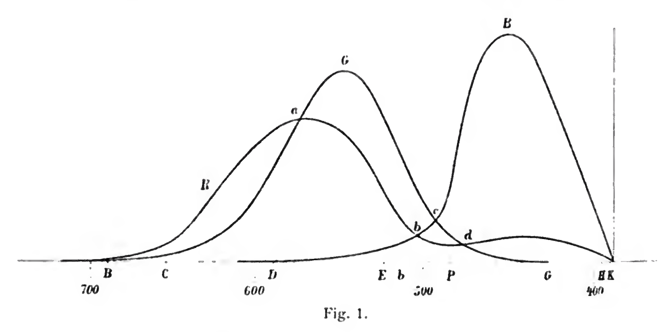


Fig. 1.

trichromatischen Empfindungen vollständig gerechtfertigt, eine Annahme, die ja bisher noch einer Begründung entbehrte.

Die Grundempfindungen, wie sie sich aus meinen Beobachtungen ergeben, sind somit:

Ein Roth, etwas außerhalb des sichtbaren Spectrums, also gegen Purpur zu gelegen und complementär zur Wellenlänge 494 μμ;

ein Grün von der Wellenlänge 508 μμ, das schon etwas gegen Blaugrün zu liegt;

ein Blau von der Wellenlänge 475 μμ, also sehr ähnlich dem Indigo.

Diese Farben lassen sich in Radde's internationaler Farbenscala angenähert angeben, und zwar entspricht dort dem Roth ziemlich gut Nr. 25, dem Grün eine Farbe zwischen

Nr. 15 und 16, näher an 15, und dem Blau eine Farbe in der Mitte zwischen Nr. 19 und Nr. 20.

Dass die Wellenlänge 494 ihr Complement schon im Ultraroth hat, folgt auch aus den früher schon erwähnten Messungen anderer Autoren an complementären Farbenpaaren. Als Complement zum äußersten sichtbaren Roth fanden

Herr	Kries	492 $\mu\mu$,
»	Frey........	485 »
»	König	496 »
»	Dieterici ...	494 »

im Mittel also 492 $\mu\mu$, so dass das Complement zu 494, also die Grundempfindung Roth, in der That schon jenseits des sichtbaren Spectrums liegen muss. Übrigens haben die vorstehenden Zahlen der Complementärfarben keinen Anspruch auf große Genauigkeit, da der Farbenton im äußersten Roth des Spectrums sich kaum merklich ändert und für die meisten Beobachter bis etwa $\lambda = 610$ hin constant bleibt. Auch kann man von dem Farbentone der Grundempfindung Roth, natürlich im ungesättigten Zustande, durch Mischfarben leicht eine Anschauung gewinnen; es ist ein Roth ähnlich dem Carmin, nur mehr nach Purpur gehend, etwa wie es sehr dunkle Rosen zeigen.

Die hier bestimmten Grundempfindungen weichen von den Resultaten der früher erwähnten Untersuchungen Helmholtz's im Roth und Blau nicht sehr ab, dagegen stimmen die Wellenlängen für das Grün durchaus nicht überein; statt eines Blaugrün ist es bei Helmholtz ein Gelbgrün. Es dürfte das wohl von dem Mangel an genügend scharfen Beobachtungsdaten, auf den Helmholtz selbst aufmerksam gemacht hat, herrühren.

Da es für viele Berechnungen wünschenswert ist, die Ordinaten der Grundempfindungscurven genauer zu kennen, als man sie aus einem Diagramm ablesen kann, so gebe ich dieselben in der folgenden Tabelle II in denselben willkürlichen Einheiten wieder, die auch König und Dieterici ihren Tafeln zugrunde gelegt haben. Da meine Curven von den ihrigen nur auf kurze Strecken abweichen, so bleiben viele Zahlen ungeändert. Da, wo ich die König'schen Zahlen durch eigene ersetzt habe, sind diese durch Einklammern kenntlich gemacht.

Tabelle II.

λ	*R*	*G*	*B*
720	0·03	0·01	0
700	0·12	0·02	0
685	0·24	0·04	0
670	0·55	0·10	0
660	1·05	0·23	0
650	1·74	0·42	0
640	2·85	0·78	0
630	4·11	1·23	0
620	5·33	1·93	0
610	6·71	3·08	0·01
600	7·21	4·45	0·02
590	(8·00)	(6·05)	0·03
580	(8·37)	(7·75)	0·05
577	(8·41)	(8·41)	0·07
570	(8·41)	9·75	0·10
560	(8·12)	11·10	0·20
550	(7·55)	11·38	0·31
540	6·85	10·90	0·53
530	5·55	(9·50)	0·75
520	(3·54)	(7·50)	1·10
510	(1·82)	(5·18)	1·55
508	(1·65)	(4·80)	1·65
500	(1·20)	(3·36)	(2·10)
490	(1·00)	(2·18)	(3·80)
480	(1·05)	(1·30)	8·30
475	(1·05)	(1·05)	10·47
470	(1·20)	(0·80)	11·90
460	(1·35)	(0·40)	(13·35)
450	(1·35)	0·25	(13·70)
440	(1·30)	(0·02)	13·20
433	(1·25)	(0)	(11·80)
430	1·15	0	11·20
420	0·90	0	8·60
410	0·60	0	5·60
400	0·29	0	2·76
390	0	0	0

Das Verhältnis der Grundempfindungen zu den Spectralfarben wird wohl am deutlichsten, wenn man sich letztere in einem Farbendreiecke nach der üblichen Weise einträgt, in dessen Eckpunkten man sich die drei Grundempfindungen angebracht denkt. In Fig. 2 ist dies nach den Ordinaten der vorstehenden Tabelle für den Fall eines gleichseitigen Farbendreieckes geschehen, und in Tabelle III finden sich die den einzelnen Wellenlängen entsprechenden Coordinaten x und y verzeichnet, wobei die Seitenlänge des Dreieckes gleich 50 und der Rothpunkt als Coordinatenanfangspunkt gesetzt ist.

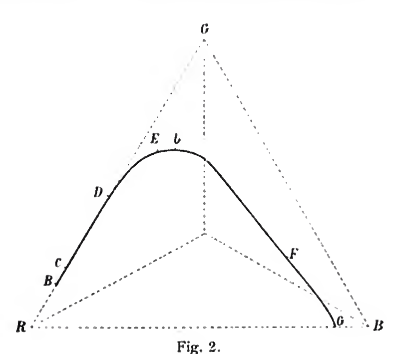


Fig. 2.

Tabelle III.

λ	x	y
720 } 685 }	3·8	6·5
660	4·5	7·8
640	5·4	9·3
620	6·7	11·5
600	9·6	16·5
580	12·3	20·9
560	14·8	24·7

λ	x	y
550	15·6	25·6
540	16·4	25·8
530	17·2	26·1
520	20·0	26·7
510	24·2	26·2
508	25·0	25·6
500	28·4	21·8
490	35·0	13·5
480	42·0	5·4
475	43·7	3·6
470	44·2	2·4
460	44·6	1·2
450	45·1	0·7
440	45·5	0·5

Es zeigen demnach, wie bekannt, nur die rothen und gelben Töne eine bedeutende Sättigung, während die blauen und noch mehr die grünen weit von der Sättigung entfernt sind.

Von besonderem Interesse wäre natürlich, insbesondere mit Rücksicht auf Hering's Theorie, die Untersuchung dichromatischer Farbensysteme, um durch directe Messung festzustellen, ob der Verlauf ihrer Empfindungscurven wirklich der gleiche ist wie der der entsprechenden in trichromatischen Systemen, obgleich mir ein Zweifel daran nach der Übereinstimmung meiner Messungen mit denen von König und Dieterici kaum mehr zu bestehen scheint. An Stelle der für Trichromaten charakteristischen Punkte *a*, *b*, *c*, *d* müsste der Rothblinde nur den Punkt *c*, der Grünblinde nur *b* und der Blaublinde *a* und *d* haben, wobei diese Stellen des Spectrums den Betreffenden als weiß, als sogenannte neutrale Stellen, erscheinen müssten.

Ich habe leider nur einen einzigen Fall, den eines grünblinden, zu untersuchen Gelegenheit gehabt; das Resultat der Messung stand mit obigem allerdings in Einklang. Dr. H., der

Besitzer dieses grünblinden Systems, konnte mit Hilfe der dichroskopischen Lupe in der ganzen Ausdehnung des Spectrums nur einen einzigen Punkt finden, bei dem ein deutlicher Farbenunterschied zwischen hellem und dunklem Feld zu bemerken war. Dieser Punkt lag in der Nähe von $\lambda = 506\ \mu\mu$; etwas blauwärts davon gieng der Ton des dunkleren Feldes sofort ins Bläuliche, während rothwärts davon ein Unterschied in der Nuance von hell und dunkel nicht mit Bestimmtheit erkannt werden konnte, sondern der Unterschied beider Felder lediglich auf die Intensität zurückgeführt wurde. Der fragliche Punkt war zugleich jene Stelle im Spectrum, die Dr. H. als weiß bezeichnete. Ein directes Einstellen auf diesen Weißpunkt ergab in drei Fällen die Wellenlängen 504, 508, 507, im Mittel also 506·3, ein Wert, der sehr wenig von 508, dem Mittel für Trichromaten, abweicht und innerhalb der Abweichungen der einzelnen untersuchten trichromatischen Systeme voneinander liegt.

Für Rothblinde müsste der neutrale Punkt etwa bei 494 $\mu\mu$ liegen, was von dem Werte für Grünblinde nicht sehr weit abliegt und bei einigermaßen starken individuellen Verschiedenheiten und nicht genügend scharfer Messung leicht zu einer Verwechslung Veranlassung geben kann. Es ist vielleicht darin begründet, dass König[1] bei seinen früheren Untersuchungen roth- und grünblinder Systeme keinen wesentlichen Unterschied in der Lage der neutralen Zone gefunden hat. Er gibt dieselbe für beide zwischen 492 und 505 $\mu\mu$ an, wobei noch je nach den Intensitäten Verschiebungen um 6 bis 7 $\mu\mu$ vorkommen sollen, so dass das fragliche Intervall die beiden Punkte *b* und *c* umfasst. Brodhun,[2] selbst grünblind, hat später zwischen Roth- und Grünblinden mit Hilfe des Leukoskops einen Unterschied in der Art constatiert, dass die warme Curve der Rothblinden weiter gegen Blau liegt als die der Grünblinden, d. h. dass der Punkt *c* weiter gegen Blau liegen muss als der Punkt *b*, wie es auch bei Trichromaten der Fall ist. Endlich hat auch Peddie[3] einen Fall von Blaublindheit

[1] Wied. Ann., Bd. 22 (1884).
[2] Wied. Ann., Bd. 34 (1888).
[3] Nature, Bd. 51 (1895).

mitgetheilt, bei dem sich ein neutraler Punkt in der Nähe der Linie *D* zeigte; eine genauere Bestimmung scheint leider nicht angegeben, doch dürfte dieser Punkt mit unserem Punkte *a* zu identificieren sein. Darüber, ob im Falle von Blaublindheit auch zwei neutrale Zonen, entsprechend *a* und *d*, beobachtet wurden, ist mir nichts bekannt.

Endlich möchte ich noch eine Untersuchung von Vöste[1] erwähnen, die jedenfalls mit der Frage nach der Art der Grundempfindungen im Zusammenhange steht. Vöste sucht jene Punkte im Spectrum auf, die bei längerer Fixierung ihren Farbenton nicht ändern, und findet drei solcher Punkte bei 560, 496 und 465 μμ. Könnte man annehmen, dass die Ermüdung für alle Grundempfindungen bei gleicher Ordinate dieselbe ist, so müssten die Durchschnittspunkte *a*, *b*, *c*, *d* durch Fixierung zwar ihre Sättigung, nicht aber ihren Ton ändern; der Punkt *c* würde auch in diesem Falle leicht zu übersehen sein. Ob die drei von Vöste beobachteten Punkte mit *a*, *b* und *d* zu identificieren sind, lässt sich nicht sagen. Sie liegen alle 10 bis 16 μμ weiter gegen Blau als diese, was wohl die verschiedensten Ursachen haben kann. Würden durch Ermüdung alle Ordinaten um den gleichen Procentsatz vermindert, so würde nirgends im Spectrum eine Farbenänderung zu bemerken sein.

Die Methode, welche ich auf Grund des Bezold-Brücke'schen Phänomens angewendet habe, hat gegenüber der von König und Dieterici den großen Nachtheil, dass sie nur die Durchschnittspunkte der Curven liefert, über deren übrigen Verlauf aber nichts weiter aussagt; allein da dieser im großen und ganzen durch die Untersuchungen der Genannten bekannt ist, so hat das nicht viel zu sagen, da in jedem Falle, wenn individuelle Durchschnittspunkte bestimmt werden, sich die Curven danach mit genügender Genauigkeit ausziehen lassen. Dagegen scheint mir diese Methode zwei wesentliche Vorzüge zu besitzen: erstens ist sie unabhängig von jeder Voraussetzung außer der der Young-Helmholtz'schen Theorie zugrundeliegenden, dass drei voneinander unabhängige Empfindungscurven coexistieren, und zweitens gestattet sie ein verhältnismäßig leichtes und

[1] Zeitschr. für Psych. u. Phys., Bd. 18 (1898).

rasches Experimentieren im Gegensatze zu den mühevollen und zeitraubenden Untersuchungen nach König's Methode; sie wird daher, wie ich glaube, sich besonders zur Untersuchung individueller Farbensysteme, insbesondere bei Farbenblinden, eignen.

Noch muss ich erwähnen, dass nach den Untersuchungen von Preyer,[1] König[2] u. A. der neutrale Punkt bei Roth- und Grünblinden seine Lage im Spectrum etwas verändert, indem er bei steigender Intensität gegen Violett zu rückt. Das ist aber nur möglich, wenn das Verhältnis der beiden Grundempfindungen von der absoluten Intensität abhängt, und das müsste sich wohl auch bei Trichromaten geltend machen; in der That schien mir eine Verschiebung der Punkte *a, b, d* in meinen Versuchen bei extremen Intensitäten einzutreten. Da aber König und Dieterici für das Verhältnis der Ordinaten der Empfindungscurven bei mittlerer Intensität eine weitgehende Constanz nachwiesen, so wird man auch, wenn man sehr helle und sehr lichtschwache Spectren ausschließt, von diesem Umstande genügend frei sein. Ich war bemüht, bei meinen Versuchen eine solche mittlere Helligkeit einzuhalten, für welche die Versuche von König und Dieterici gelten, es beziehen sich somit die ermittelten Grundempfindungen auf Farbentöne, wie sie den angegebenen Wellenlängen in einem mittelstarken Spectrum zukommen.

Schließlich möchte ich noch, nur zur Illustration des großen Vortheiles, den ein weit ausgedehntes und dabei doch reines Spectrum für derartige Untersuchungen bietet, eine einzelne Beobachtungsreihe anführen, die ich mit meinem Auge über die Farbenempfindlichkeit längs des Spectrums ausgeführt habe. Gegen das horizontale Spectrum wurden zwei kleine, total reflectierende Prismen vertical übereinander so aufgestellt, dass sie Licht von gleicher Wellenlänge parallel zum Spectrum auf ein drittes total reflectierendes Prisma warfen, von welchem es durch eine Lupe ins Auge gelangte. Man sieht so zwei

[1] Pflüger's Arch., Bd. 25 (1881).
[2] Wied. Ann., Bd. 22 (1884).

gleichgefärbte Felder übereinander. Nun ist das eine kleine Prisma fix, das andere längs des Spectrums an einer Scala verschiebbar, und man kann so, von gleicher Farbe der beiden Felder ausgehend, dasselbe so lange verschieben, bis ein deutlicher Unterschied im Farbentone bemerkbar wird. Bezeichnet λ in diesem Falle die Mittellage zwischen beiden Prismen und Δ die Differenz ihrer Stellungen in $\mu\mu$, so ergaben sich die folgenden Werte:

Tabelle IV.

λ	Δ	λ	Δ
648·5	13·0	541	4·8
643	9·9	533	6·3
637	7·8	526	6·6
630·5	7·3	518	8·1 ?
625	4·3	513	4·3
618·5	2·7 ?	506·5	2·7
611·0	3·2	500	2·0
604·5	2·3	493	1·2
597	1·7	486	0·8
591	1·2	479	1·1
584	1·0	471	1·7
577·5	1·0	464	2·7
570·5	1·2	457	1·7
563	2·0	451	1·5
555·5	3·1	444	1·2
548	4·0		

Die Werte dieser Tabelle sind in Fig. 3 durch eine Curve dargestellt; vergleicht man dieselbe mit den von anderen Beobachtern gewonnenen, z.B. mit jenen von König und Dieterici,[1] so ergibt sich eine sehr befriedigende Übereinstimmung, wenn

[1] Wied. Ann., Bd. 22 (1884).

man bedenkt, dass die hier gegebenen Werte auf einer vereinzelten Messung beruhen; zwei Punkte fallen ganz aus der Curve heraus infolge irgendeines Beobachtungsfehlers. Dass

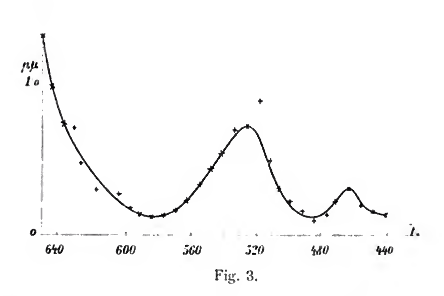


Fig. 3.

die Empfindlichkeit im äußersten Violett wieder steigt, habe ich zuerst für einen Fehler gehalten, da aber die Curven von König sowohl als von Dieterici dasselbe Verhalten zeigen, so dürfte die Beobachtung auf Richtigkeit beruhen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XVII. SITZUNG VOM 3. JULI 1902.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXIII, Heft V (Mai 1902).

Der Siebenbürgische Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt übersendet eine Einladung zu der am 24. und 25. August 1902 stattfindenden Feier seines fünfzigjährigen Bestandes.

Das w. M. Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Alfred Kirpal »Über Cinchomeronsäure und deren Ester«.

Derselbe übersendet ferner drei im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität ausgeführte Arbeiten, und zwar:

I. »Über Nitrile der Pyridinreihe«, von Dr. Hans Meyer.

II. »Über Aminopyridincarbonsäuren«, von Dr. Hans Meyer.

III. »Zur Kenntnis der Condensationsproducte von Naphtaldehydsäure mit Ketonen«, von Dr. Josef Zink.

Das c. M. Prof. Wilh. Wirtinger in Innsbruck übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale«.

Das c. M. Prof. Hans Molisch übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von Herrn Victor Kindermann ausgeführte Arbeit: »Über die auffallende Widerstandskraft der Schließzellen gegen schädliche Einflüsse«.

Stud. phil. Victor Weiss in Leipnik übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Über eine gewisse projective Beziehung von vier Strahlenbüscheln I. Ordnung«.

Hofrath Dr. J. M. Eder in Wien übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Spectralanalytische Studien über photographischen Dreifarbendruck«.

Director Leo Brenner in Lussin piccolo übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Jupiter-Beobachtungen auf der Manora-Sternwarte 1898 bis 1901«.

Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (21. Fortsetzung).

Versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität haben eingesendet:

1. stud. phil. Franz Megušar in Wien mit der Aufschrift: »Geschlechtsorgane von Hydrophilus piceus und Dytiscus marginalis«.
2. Dr. J. Klimont in Wien mit der Aufschrift: »Beitrag zur Kenntnis der Pflanzenfette«.

Dr. Anton Lampa in Wien übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Zur Moleculartheorie anisotroper Dielektrica. Mit einer experimentellen Bestimmung der Dielektricitätsconstante einer gespannten Kautschukplatte senkrecht zur Spannungsrichtung«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung vor: »Zur Charakteristik der schönen und hässlichen Farben«.

Das w. M. Hofrath Ad. Lieben überreicht zwei Arbeiten aus seinem Laboratorium:

I. Über die Einwirkung von Wasser auf Dibromide und Dichloride der Olefine«, von W. Fröbe und A. Hochstetter.

II. »Über eine Synthese alkylierter Pentamethylendiamine und alkylierter Piperidine aus β-Glycolen« (I. Mittheilung), von Adolf Franke und Moriz Kohn.

Ferner überreicht Hofrath Ad. Lieben eine Abhandlung: »Studien über Ammonsalze«, von Dr. Richard Reik.

Das w. M. Hofrath C. Toldt überreicht eine Arbeit von Dr. S. v. Schumacher, betitelt: »Die Herznerven der Säugethiere und des Menschen«.

Das w. M. Prof. K. Grobben überreicht das von der k. und k. Hof- und Universitätsbuchhandlung Alfred Hölder in Wien der kaiserlichen Akademie geschenkweise überlassene 1. Heft des XIV. Bandes der »Arbeiten aus den zoologischen Instituten der Universität Wien und der zoologischen Station in Triest«.

Das w. M. Prof. R. v. Wettstein überreicht eine Abhandlung von Frau Emma Lampa, betitelt: »Untersuchungen an einigen Lebermoosen«.

Das w. M. Prof. F. Becke überreicht eine vorläufige Mittheilung von Prof. C. Doelter in Graz über die chemische Zusammensetzung einiger Ganggesteine vom Monzoni.

Prof. Dr. Gustav Jäger überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Zur Theorie des photographischen Processes«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Albert I^er^, Prince souverain de Monaco: Résultats des Campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht, Fascic. XXI. Monaco, 1902. 4°.

Expédition antarctique belge: Résultats du voyage du S. J. Belgica en 1897—1898—1899. Botanique, Astronomie, Meteorologie. Anvers 1901—1902. 4°.

— Note relative aux rapports scientifiques. Anvers 1902. 4°.

Sorel E.: La grande industrie chimique minérale. Paris, 1902. 8°.

XVIII. SITZUNG VOM 10. JULI 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 110, Abth. I, Heft VIII bis X (October bis December 1901); Abth. II b, Heft X (December 1901).

Der Vorsitzende, Prof. E. Suess, macht Mittheilung von dem Verluste, welchen die kaiserl. Akademie durch das am 10. Juli l. J. in Innsbruck erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes der philos.-histor. Classe, Hofrathes Dr. Julius Ficker Ritter von Feldhaus, emerit. Professors der Geschichte, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Dr. Heinrich Josef in Wien spricht den Dank für die ihm bewilligte Subvention für entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen aus.

Hofrath Dr. J. M. Eder in Wien übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »System der Sensitometrie photographischer Platten« (IV. Abhandlung).

Das w. M. Hofrath Zd. H. Skraup in Graz übersendet zwei im chemischen Institute in Graz durchgeführte Untersuchungen:

I. »Über einen abnormalen Verlauf der Michael'schen Condensation«, von Dr. Josef Svoboda.

II. »Über Methylglucoside des Milchzuckers«, von phil. cand. Rudolf Ditmar.

Das w. M. Hofrath Zd. H. Skraup in Graz übersendet ferner »Laboratoriumsnotizen« für die Sitzungsberichte,

welche die Beschreibung 1. einer sehr vereinfachten Vorlage für Vacuumdestillationen und 2. eines Eisenkernes für Glaser'sche Verbrennungsöfen enthalten.

Das w. M. Prof. Guido Goldschmiedt übersendet drei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag, und zwar:

I. »Zur Kenntnis des Idryls (Fluoranthen) und der Fluorenoncarbonsäure (1)«, von Guido Goldschmiedt.
II. »Über die Umwandlung von Hydrazonen in Oxime«, von Dr. Hugo Ludwig Fulda.
III. »Über Condensation von Fluoren mit Benzoylchlorid«, von Dr. M. Fortner.

Das c. M. Prof. R. Hoernes in Graz übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »*Chondrodonta (Ostrea) Joannae* Choffat in den Schiosischichten von Görz, Istrien, Dalmatien und der Hercegovina«.

Das c. M. Hofrath A. Bauer übersendet eine Arbeit von Dr. Julius Zellner aus dem Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz, betitelt: »Über das fette Öl von *Sambucus racemosa*«.

Hofrath Bauer übersendet ferner eine im Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit: »Über die Alkylierung des Anthragallols«, von Friedrich Böck.

Endlich übersendet Hofrath Bauer eine im Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit von Hugo Hermann, betitelt: »Zur Kenntnis des Lariciresinols«.

Hofrath Bauer in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beschreibung der Darstellung eines Körpers, welcher ausgezeichnete katalysierende Eigenschaften besitzt«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt folgende Abhandlungen vor:

I. »Messungen der Elektricitätszerstreuung in freier Luft«, von J. Elster und H. Geitel.

II. »Über die magnetischen Wirkungen einer rotierenden elektrisierten Kugel«, von A. Szarvassi.

III. »Über die Gleichung der Sättigungscurve und die durch dieselbe bestimmte maximale Arbeit«, von P. Ritter.

IV. »Über das Wärmeleitungsvermögen des Kesselsteins und anderer die Kesselflächen verunreinigenden Materialien«, von Ing. W. Ernst.

V. »Über longitudinale Schwingungen von Stäben, welche aus parallel zur Längsaxe zusammengesetzten Stäben bestehen«, von O. Waldstein.

VI. »Über colloidale Metalle«, von F. Ehrenhaft.

Das w. M. Hofrath Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit »Über die Einwirkung von Wasser auf das Pentamethylenbromid«, von Dr. A. Hochstetter.

Ferner überreicht Hofrath Lieben eine Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium: »Über die Nitrosierung des Phloroglucinmonomethyläthers« von J. Pollak und G. Gans.

Das w. M. Hofrath J. Wiesner überreicht eine Abhandlung betitelt: »Studien über den Einfluss der Schwerkraft auf die Richtung der Planzenorgane«.

Das w. M. Prof. K. Grobben legt eine Abhandlung von Dr. Franz Werner in Wien vor, welche den Titel führt: »Die Reptilien- und Amphibienfauna von Kleinasien«.

Das w. M. Hofrath E. Weiß überreicht eine Abhandlung von Hofrath G. v. Niessl in Brünn mit dem Titel: »Bahnbestimmung der großen Feuerkugel vom 3. October 1901«.

Prof. Dr. Rudolf Wegscheider überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Untersuchungen über die Veresterung unsymmetrischer zwei- und mehrbasischer Säuren. IX. Abhandlung: Über die Veresterung von Sulfosäuren und Sulfocarbonsäuren«, von Rud. Wegscheider und Margarethe Furcht.

Dr. Karl Toldt jun. legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Entwickelung und Structur des menschlichen Jochbeines«.

Custos Dr. L. v. Lorenz legt eine von ihm gemeinsam mit C. E. Hellmayr durchgeführte Bearbeitung von zwei Collectionen südarabischer Vögel vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erményi, Phil. Dr.: Dr. Josef Petzval's Leben und wissenschaftliche Verdienste. Mit 7 Bildern. Halle, 1902. 8°.

Kölliker, A.: Über die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel und Reptilien. Leipzig, 1902. 8°.

Reichs-Marineamt in Berlin: Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf zwanzig Stationen an der westafrikanischen Küste von Rio del Rey (Kamerun-Gebiet) bis Capstadt, ausgeführt von M. Loesch. Berlin, 1902. 4°.

System der Sensitometrie photographischer Platten

(IV. Abhandlung)

von

J. M. Eder in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1902.)

Directe Schwärzung gefärbter Bromsilber- und Chlorsilberschichten im Sonnenspectrum.

Die directen photographischen Schwärzungsvorgänge von mit Farbstoffen sensibilisierten Bromsilberschichten gewinnen durch ihre Verwendung für photometrische Zwecke (Andresen,[1] Wingen,[2] Ruzicka[3]) erhöhte Bedeutung. Deshalb unterzog ich die Farbenempfindlichkeit verschiedener Bromsilber- und Chlorsilberpapiere einer neuerlichen genauen Untersuchung mittels eines großen Spectrographen, worüber ich in der »Wiener klinischen Wochenschrift« (1902)[4] berichtet habe, weil diese photometrischen Processe mittels lichtempfindlicher Papiere gegenwärtig besonders von Ärzten und Hygienikern cultiviert werden, aber die photochemische Grundlage dieser Lichtmessmethoden noch nicht genügend bekannt ist.

Bei diesem Anlasse versuchte ich auch den directen Schwärzungsvorgang von farbensensibilisierten Bromsilber-

---

[1] Photogr. Corresp., 1898, S. 504, und 1902, S. 394.

[2] Wingen, Photogr. Corresp., 1902, S. 394.

[3] Ruzicka, Wiener klinische Wochenschrift, 1902, S. 687; auch Phot Corr. 1902, S. 507,

[4] Eder, Verwendung gelbempfindlicher photographischer Papiere für photometrische Bestimmung der Helligkeit von Arbeitsplätzen in Schulzimmern und Arbeitsräumen (Wiener klinische Wochenschrift, Juli 1902, ferner Phot. Corr. 1902, S. 507).

gelatineplatten, wie sie sonst im Negativprocess mit Hervorrufung verwendet werden. Ich setzte eine solche Erythrosinbadeplatte oder Schattera's Erythrosinplatte bei weit geöffnetem Spalt des Glas-Spectrographen durch mehrere Minuten bis mehrere Stunden dem Sonnenspectrum aus. Es trat bald die directe Schwärzung ein, und zwar ist der Gesammtverlauf der Schwärzungscurve im Spectrum überraschend ähnlich jenem der Schwärzungscurve der kurz belichteten und normal entwickelten Platte.[1] Es tritt das bekannte Erythrosinmaximum im Gelbgrün auf (bei λ 558), die schwache Wirkung erstreckt sich über *D* bis ins Orange (bis circa λ 612); das direct erhaltene Schwärzungsband bei längerer Belichtung reicht von λ 578 bis 540, liegt also fast an derselben Stelle wie das Erythrosinmaximum im Negativ-Entwickelungsprocess:[2] es tritt in beiden Fällen dasselbe Minimum im Blaugrün auf, und auch das Maximum der Eigenempfindlichkeit der Bromsilbergelatine erscheint in beiden Fällen zwischen *F* und *G* im Blau. Eine Lumière'sche panchromatische Platte gab bei der directen Schwärzung eine photographische Wirkung über Grün bis ins Orangeroth (bis über die Linie *C*), trotzdem sie kaum merklich gefärbt ist; dabei ergibt sich eine Analogie des Verlaufes der directen photographischen Schwärzung im Spectrum mit der Entstehung des latenten und entwickelten negativen Bildes insoferne, als in beiden Fällen die Lichtwirkung zuerst im Blau und Violett und erst später im Grün bis Orange (mit zwei Maxima) auftritt, während bei Erythrosinplatten die Lichtwirkung in beiden Fällen im Gelbgrün dominiert. Analog verhalten sich Wollschwarz-Bromsilbergelatineplatten (sie schwärzen sich aber nur sehr langsam im Gelb und Roth des Spectrums).

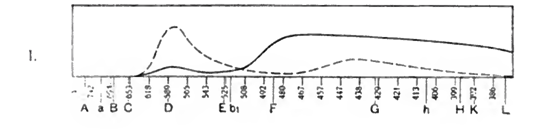
---

[1] Vergl. Eder, System der Sensitometrie photographischer Platten. III. Abhandl. Diese Sitzungsber., Bd. CX, Abth. IIa, October 1901, S. 1118.

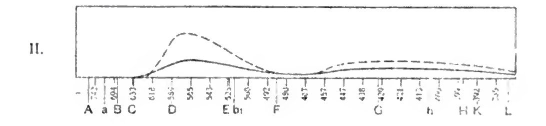
[2] Ob die kleine Differenz gegenüber meinem Befunde beim Entwickelungsprocess der Erythrosinplatten (Maximum bei λ 565 bis 560; Verbreitung von λ 570 bis 548; siehe diese Sitzungsber., 1901, Bd. CX, Abth. IIa und October 1901) auf die unsichere Ablesung der Mitte der ziemlich breiten Schwärzungsbänder zurückzuführen oder in der Natur des photochemischen Processes liegt, lässt sich derzeit nicht entscheiden.

Tränkt man eine Bromsilbergelatineplatte[1] mit Andresen's Gemisch von Rhodamin *B* und Natriumnitrit, so erleidet eine solche Platte im Blau und Violett des Sonnenspectrums zuerst eine starke Schwärzung und erst später schwärzt sich die Schichte langsam im Gelb, während das mit überschüssigem Silbernitrat gefällte und dann gewaschene, mit Rhodamin ganz ebenso gefärbte Bromsilber (Andresen's Rhodamin-Bromsilberpapier) die dominierende Empfindlichkeit im Spectralgelb

I.



II.



I. Die gestrichelte Curve zeigt die directe Schwärzung von Andresen's Rhodamin-Bromsilberpapier im Sonnenspectrum, die voll ausgezogene Curve entspricht der directen Schwärzung einer mit Rhodamin gefärbten Bromsilbergelatineplatte.

II. Gestrichelte Curve: Entwickeltes latentes Lichtbild auf Rhodamin-Bromsilbercollodion mit überschüssigem Silbernitrat. — Voll ausgezogene Curve: Directe Schwärzung einer ebensolchen Bromsilberschichte im Sonnenspectrum.

nächst der Linie *D* besitzt;[2] dieses verschiedene Verhalten beider Arten von Bromsilber ist wohl zum Theile auf das im letzteren Falle vorhandene Silbernitrat zurückzuführen. Übrigens sind obige Rhodamin-Bromsilbergelatineplatten nicht nur im

---

[1] Hiebei ist bekanntlich Bromsilber mit überschüssigem Bromkalium gefällt und dann gewaschen.

[2] Vergl. meine oben citierte Abhandlung in der »Wiener klinischen Wochenschrift«, Juli 1902.

Schwärzungs-, sondern auch beim Entwickelungsprocess im Vergleiche zu Erythrosinplatten nur wenig gelbgrünempfindlich bei überwiegender Blauempfindlichkeit.

Die voll ausgezogene Curve II zeigt die Wirkung des Sonnenspectrums auf eine solche von mir selbst mit Rhodamin[1] *B* getränkte Bromsilbergelatineplatte beim directen Schwärzungsprocess nach sehr langer Belichtung; sie deckt sich mit der Schwärzungscurve beim Entwickeln des kurz belichteten latenten Lichtbildes einer ebensolchen Rhodamin-Bromsilbergelatineplatte. Die gestrichelte Curve stellt den Verlauf der directen photographischen Schwärzung auf Andresen's Bromsilberpapier nach dem Färben mit derselben Rhodaminsorte dar.

Angeregt durch diese Beobachtung machte ich einen Gegenversuch mit Entwickelungsbildern auf Bromsilbercollodion mit demselben Rhodamin *B* und überschüssigem Silbernitrat (100 cm^3 von Albert's Bromsilbercollodion, 10 cm^3 alkoholische Rhodamin-*B*-Lösung 1:500; Übergießen von Glasplatten; Baden in Silbernitratlösung 1 : 500; Belichten; Entwickeln mit alkalischem Glycinentwickler). Es zeigte sich auch beim Entwickeln des kurzbelichteten Rhodamin-Bromsilbercollodions ebenso wie beim directen photographischen Schwärzungsprocess ein großes Empfindlichkeitsmaximum im Gelb nächst der Linie *D* (genauer bei circa λ 576), welches die Blauempfindlichkeit überwog, und auch hier trat analoger Verlauf der sichtbaren photographischen Schwärzung und Entstehung des unsichtbaren entwickelungsfähigen Lichtbildes auf. Das Bromsilbercollodion mit Rhodamin schwärzt sich bald, so dass ich die directe Schwärzungscurve ebensogut wie die Schwärzungscurve des entwickelten latenten Bildes ermitteln konnte. Dabei ist zu bemerken, dass ein und dieselbe Probe Rhodamin *B* auch auf Andresen's Bromsilberpapier, sowie auf analog bereitetem Chlorsilberpapier (beide mit überschüssigem

[1] Das von mir verwendete Rhodamin war weniger blaustichig als das zu Andresen's Original-Rhodaminpapier von diesem selbst benützte; mein Rhodamin gab Maxima von etwas geringerer Wellenlänge. — Ein Bad von 100 cm^3 Wasser, 5 cm^3 Rhodaminlösung in Alkohol (1 : 500) und 1 bis 2 cm^3 Ammoniak ertheilt den Bromsilbergelatineplatten eine sich ähnlich verhaltende Farbensensibilisierung.

Silbernitrat präpariert), sowie auf Bromsilber-Gelatine-, wie Collodionplatten das Sensibilisierungsmaximum im Gelb annähernd an derselben Stelle aufwiesen, nämlich bei ungefähr λ 580 bis 576; bei anderen etwas blaustichigen Proben von Rhodamin *B* lag bei diesen Schichten das Maximum der Farbensensibilisierung im Sonnenspectrum bei λ 589 bis 587, also etwas näher gegen Orange.

Dies erweitert die von mir (diese Sitzungsber., 1901, Bd. CX, Abth. IIa) aufgestellte Regel auch für die directen photographischen Schwärzungsvorgänge, so dass man sagen kann, die durch Eosinfarbstoffe bewirkten Sensibilisierungsmaxima liegen sowohl für photographische directe Schwärzung, als für Entwickelungsbilder beim Bromsilber und Chlorsilber[1] annähernd an derselben Stelle, mitunter sind sie gegeneinander bis circa sechs Milliontelmillimeter von Lichtwellenlängen verschoben.

Für Bromsilbergelatine fand ich dasselbe Verhalten bei Cyanin (in starker Concentration), Formylviolett, Cyclamin und Chinolinroth, während Alizarinblaubisulfit der Regel nicht zu folgen scheint.

Schattera's rothempfindliche Platten, welche schmutzigblass violettgrau gefärbt sind (indulin- oder nigrosinartiger Sensibilisator?) werden im Sonnenspectrum nicht grauschwarz, sondern ziemlich hell grünlich (Folge des Jodsilbergehaltes in der Bromsilbergelatine? oder der Art des Farbstoffes?), und zwar bald in den blauen und violetten Spectralbezirken, aber kaum merklich in den rothen Bezirken, für welche sie doch gute Entwickelungsbilder geben. Diese abnormen Nuancen der Verfärbung der Schichte im Lichte scheinen ein Charakteristikon mancher Platten oder Sensibilisatorarten zu sein.

Für den Fall, dass im Spectrum überhaupt deutliche Schwärzung farbensensibilisierter Bromsilbergelatineplatten (was bei den meisten orthochromatischen Platten der Fall ist) auftreten, scheint nach meinen Versuchen die für viele Farbstoffe zutreffende Regel zu gelten: Die mit Farbstoffen

[1] Vergl. meine Mittheilung über gelbempfindliche Chlorsilberpapiere (Wiener klinische Wochenschrift, Juli 1902; Phot. Corr. 1902, S. 507).

sensibilisierten verschiedenen Bromsilber- oder Chlorsilberschichten verhalten sich gegen das Sonnenspectrum sowohl in Bezug auf den Entwickelungs-, als den directen Schwärzungsprocess analog; die Sensibilisierungszonen erleiden in beiden Fällen in annähernd derselben Region des Spectrums ihre Veränderung und weisen analoge Maximal- und Minimalwirkung auf. In gewissen Stadien der Belichtung, respective Entwickelung laufen beide Arten von Schwärzungscurven annähernd parallel.

Die Schwärzung mittels Hervorrufer kann aber zu weit größerer Intensität und Deckkraft gebracht werden als die directe photographische Schwärzung, dann kreuzen sich die beiderlei Schwärzungscurven mitunter; jedenfalls kommen sehr verschieden starke Anfangswirkungen zur Geltung. Die directe photographische Schwärzung braucht selbstverständlich viel stärkere Belichtung.[1]

Diese auffallende Analogie des Verhaltens orthochromatischer farbensensibilisierter Bromsilbergelatine gegenüber dem Spectrum sowohl beim Entstehen des latenten, entwickelten Lichtbildes, als beim directen photographischen Schwärzungsprocess scheint charakteristisch für gewisse Arten von Farbstoffen zu sein.

---

[1] Bei Erythrosinplatten ist eine 10.000 bis 20.000fache längere Belichtung zur Erzeugung eines sehr mäßig gedunkelten Bildes erforderlich als zur Erzeugung eines latenten entwicklungsfähigen Bildes; letzteres ist überdies nach dem Entwickeln und Fixieren sehr kräftig, ersteres verschwindet beim Fixieren bis auf eine schwache Bildspur.

Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale

von

Wilhelm Wirtinger in Innsbruck,

c. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1902.)

Am Schlusse seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe bemerkt Riemann (ges. Werke, II. Aufl., S. 83), dass sich von den 48 Darstellungen einer hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale diejenigen 24 ineinander durch lineare Transformationen der Integrationsvariablen überführen lassen, welche durch Vertauschung einer geraden Anzahl von Exponenten auseinander hervorgehen, dass jedoch die übrigen Gleichungen zu ihrer Bestätigung durch Methoden der Integralrechnung die Transformation vielfacher Integrale erfordern.

Auf diesem Wege ist eine Bestätigung des Ergebnisses meines Wissens noch nicht ausgeführt worden. F. Klein schlägt in seinen autographierten Vorlesungen über die hypergeometrische Function (1893/94) vor, die beiden conformen Abbildungen zu vergleichen, welche durch das unbestimmte Integral vermittelt werden, und Schellenberg bemerkt in seiner Dissertation,[1] dass er auf dem von Riemann angedeuteten Weg nicht zum Ziele gelangt sei.

Eine in der Theorie der Euler'schen Integrale viel verwendete Formel leistet jedoch ohne Schwierigkeit das Verlangte.

[1] Göttingen, 1892.

Eine naheliegende Schreibweise des hypergeometrischen Integrals liefert ferner unmittelbar den Satz,[1] dass jedes solche Integral mit Hilfe der elliptischen Modulfunction $k^2(\tau)$ als eindeutige Function von τ dargestellt werden kann. Das Ergebnis scheint durchsichtiger als die von E. Papperitz[2] auf Grund der Differentialgleichungen gegebenen Reihenentwickelungen.

I.

Wir betrachten das Integral

1) $$J(\alpha,\beta,\gamma,x)=\int_0^\infty z^\alpha(1+z)^\beta(1+zx)^\gamma dz \qquad (\alpha+\beta+\gamma+\delta+2=0)$$

und setzen dabei fürs erste voraus, dass der reelle Theil von $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ zwischen 0 und -1 gelegen sei. Die Variable x sei fürs erste ebenfalls auf reelle positive Werte zwischen 0 und 1 beschränkt. Die Potenz u^w werde definiert durch $e^{w l u}$, wo der Logarithmus für reelle positive Werte reell genommen wird.

Man hat dann die bekannten Formeln:

2) $$(1+z)^\beta=\frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int_0^\infty e^{-(1+z)u_1}u_1^{-\beta-1}du_1$$
$$(1+zx)^\gamma=\frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int_0^\infty e^{-(1+zx)u_2}u_2^{-\gamma-1}du_2.$$

Substituiert man die Ausdrücke aus 2) in 1), so erhält man für J ein dreimaliges Integral

3) $$J(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{1}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\gamma)}\int_0^\infty dz z^\alpha\int_0^\infty du_1\int_0^\infty du_2\, e^{-(u_1+u_2)-z(u_1+xu_2)}u_1^{-\beta-1}u_2^{-\gamma-1}.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen kann man das Integral als dreifaches auffassen und wegen der absoluten Convergenz die Integrationsordnung vertauschen, also die Integration nach z zuerst ausführen. Man erhält

$$4)\qquad J(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\gamma)}\int_0^{\infty} du_1 \int_0^{\infty} du_2\, e^{-(u_1+u_2)}(u_1+xu_2)^{-\alpha-1}u_1^{-\beta-1}u_2^{-\gamma-1}.$$

Setzt man hier $u_2 = vu_1$, so kann man auch die Integration nach u_1 ausführen und erhält

$$5)\qquad J = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\gamma)}\int_0^{\infty} v^{-\gamma-1}(1+v)^{-\delta-1}(1+vx)^{-\alpha-1}dv.$$

Mit Zuziehung der Formel $\sin\pi z\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi$ kann man auch schreiben

$$6)\qquad J(\alpha,\beta,\gamma,x) = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\delta+1)\sin\pi\beta\sin\pi\gamma\,\pi^{-2}J(-\gamma-1,-\delta-1,-\alpha-1,x).$$

Da das Integral $J(\alpha,\beta,\gamma,x)$ einen Zweig einer hypergeometrischen Function darstellt, so ist damit die von Riemann verlangte Transformation geleistet. Um sich jetzt noch von den Beschränkungen in Bezug auf die $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ und x frei zu machen, hat man nur nöthig, in bekannter Weise zu Doppelumlaufintegralen überzugehen.

[1] F. Klein, Math. Ann., 14.
[2] Math. Ann., 34 (1889).

Durch die Substitutionen

$$-z = \frac{w-a}{w-d} \cdot \frac{b-d}{b-a} \qquad x^{-1} = \frac{c-a}{c-d} \cdot \frac{b-d}{b-a} = \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{d-b}{d-c}$$

$$-v = \frac{w-c}{w-b} \cdot \frac{d-b}{d-c}$$

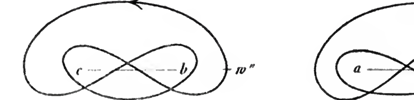
und Übergang zu Doppelumläufen in 6), und zwar rechts um $d, a,$ links um $b, c,$ erhält man die Gleichung:

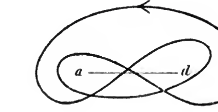
$$(d-b)^{\alpha+1}(d-a)^{\beta+1}(a-b)^{\gamma+\delta-1}(a-c)^{-\gamma}\int_{(a,\,d)}(w-a)^{\alpha}(w-b)^{\beta}(w-c)^{\gamma}(w-d)^{\delta}\,dw =$$

$$= \pi^{-2}\sin\alpha\pi\sin\delta\pi\, e^{i\pi(\alpha-\beta)}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\delta+1)(d-b)^{-\gamma}(d-c)^{\gamma-\delta-1}(b-c)^{\delta-\alpha+1}(a-c)^{\alpha+1}\,.$$

7) $$\cdot\int_{(c,\,b)}(w-a)^{-\alpha-1}(w-b)^{-\beta-1}(w-c)^{-\gamma-1}(w-d)^{-\delta-1}\,dw,$$

wobei die Doppelumläufe so fixiert sind, dass für reelle a, b, c, d und $c<b<a<d$ der in den Figuren angegebene Verlauf und Sinn angenommen ist.





Dabei sollen die einzelnen Potenzen unter dem Integralzeichen in w' ihren Hauptwert haben, dagegen in w'' ihre Werte aus w' durch Überführung von w' in w'' durch Werte mit positivem imaginären Theil hervorgehen. Für andere als reelle Werte der a, b, c, d bleibt dann die obige Formel richtig, wenn die entsprechende Figur durch stetige Umformung aus der obigen hergeleitet wird und dabei die Potenzen mit den sich hiebei ergebenden Werten genommen werden.

Die Formel 6), beziehungsweise 7) leistet dann in der That die verlangte Transformation eines hypergeometrischen Integrals mit den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in ein solches mit den Exponenten $-\alpha-1, -\beta-1, -\gamma-1, -\delta-1$, und darauf kommt es bei der Andeutung Riemann's allein an, wie in den citierten Schriften von Schellenberg und Klein auseinandergesetzt ist.

II.

In sehr einfacher Weise lässt sich auch die hypergeometrische Function als eindeutige Function der durch $x = k^2(\tau)$ definierten elliptischen Modulfunction darstellen, wo τ das Periodenverhältnis und k^2, wie üblich, den zugehörigen Legendre'schen Modul bedeutet. Setzen wir

8) $$P(x) = \int_0^1 z^\alpha (1-z)^\beta (1-xz)^\gamma dz$$

und schreiben

9) $$P(x) = \int_0^1 z^{\alpha+\frac{1}{2}} (1-z)^{\beta+\frac{1}{2}} (1-xz)^{\gamma+\frac{1}{2}} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}}.$$

Wir führen nun die Variable

10) $$v = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}}$$

ein, sowie die zu diesem elliptischen Integral gehörigen Perioden

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}}$$

11) $$iK' = \frac{1}{2}\int_1^{x^{-1}} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}}, \quad \tau = \frac{iK'}{K}, \quad q = e^{\pi i \tau}$$

und setzen

$$u = \frac{v}{2K}.$$

Wird dann, wie in der Theorie der elliptischen Functionen üblich, gesetzt

$$Q = \prod_{1}^{\infty} (1 - q^{2\nu})$$

$$\vartheta_{00}(u) = Q \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + q^{2\nu-1} e^{2\pi i u})(1 + q^{2\nu-1} e^{-2\pi i u})$$

12) $$\vartheta_{01}(u) = Q \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{2\nu-1} e^{2\pi i u})(1 - q^{2\nu-1} e^{-2\pi i u})$$

$$\vartheta_{10}(u) = q^{\frac{1}{4}} Q (e^{\pi i u} + e^{-\pi i u}) \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + q^{2\nu} e^{2\pi i u})(1 + q^{2\nu} e^{-2\pi i u})$$

$$\vartheta_{11}(u) = -i q^{\frac{1}{4}} Q (e^{-\pi i u} - e^{\pi i u}) \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{2\nu} e^{2\pi i u})(1 - q^{2\nu} e^{-2\pi i u}),$$

dann ist in bekannter Weise

$$\sqrt{z} = x^{-\frac{1}{4}} \frac{\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{01}(u)}, \quad \sqrt{1-z} = (1 - x^{-1})^{-\frac{1}{4}} \frac{\vartheta_{01}(u)}{\vartheta_{10}(u)},$$

13) $$\sqrt{1 - xz} = (1 - x)^{\frac{1}{4}} \frac{\vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{01}(u)}.$$

Damit wird

14) $$P(x) = 4 x^{\frac{\beta-\alpha-1}{2}} (1-x)^{\frac{\gamma-\beta}{2}} K \int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta_{11}^{2\alpha+1}(u) \vartheta_{10}^{2\beta+1}(u) \vartheta_{00}^{2\gamma+1}(u) \vartheta_{01}^{2\delta+1}(u) . du$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 2 = 0).$$

Zwar hat das Integral rechts nur so lange unmittelbare Bedeutung, als die reellen Theile von $2\alpha + 1$ und $2\beta + 1$ größer als -1 sind. Aber man kann ja sofort in der u-Ebene zu einem Doppelumlauf um die Punkte 0, $1/2$ übergehen, so dass dieser keinen anderen Nullpunkt einer der Thetafunctionen einschließt. Ist nun $|q| < a < 1$, wo a eine positive Zahl bedeutet, so kann

man den Doppelumlauf so wählen, dass längs derselben $|q^n e^{\pm 2\pi i u}| < 1$. Man hat zu diesem Zwecke nur die Strecke $0, \frac{1}{2}$ mit einem genügend schmalen Streifen zu umgeben, so dass im Inneren desselben ebenfalls $|q e^{\pm 2\pi i u}| < 1$ ist. Innerhalb dieses Streifens sind dann die Potenzen der Factoren von der Gestalt $(1 \pm q^n e^{\pm 2\pi i u})$ durchaus eindeutige Functionen von q, und es können daher diese — und wegen der gleichmäßigen Convergenz — auch die unendlichen Producte dieser Factoren nach ganzen positiven Potenzen von q entwickelt werden, sind also eindeutige Functionen von q. Die Ausführung des Doppelumlaufintegrals liefert also in der That

$$15)\qquad P(x) = 4x^{\frac{\beta-\alpha-1}{2}}(1-x)^{\frac{\gamma-\beta}{2}}q^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}K.2\Psi(q),$$

wo $\Psi(q)$ eine für $q < 1$ convergente Potenzreihe ergibt.

Die Formel 14) liefert bei linearer Transformation der Thetafunction und bei Vermehrung von u um Halbperioden die bekannten Beziehnungen und Formeln zwischen hypergeometrischen Integralen.

Man kann auch aus 14) die Reihenentwickelung von $\Psi(q)$ direct herleiten, doch sind die Rechnungen complicierter als die von Papperitz angestellten. Die Formel 14) selbst, welche in bemerkenswert einfacher Weise die Abhängigkeit des $P(x)$ von τ vor Augen führt, ist nicht nur unmittelbar für die Theorie der hypergeometrischen Function verwendbar, sondern auch einer sehr interessanten Verallgemeinerung fähig, über welche ich nächstens berichten werde.

Zur Charakteristik der schönen und hässlichen Farben

von

Prof. **Franz Exner**,

w. M. k. Akad.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1902.)

Die Frage, ob es schöne und hässliche Farben gibt, das heißt solche, die ohne Rücksicht auf irgendeinen Nebenzweck vom Auge als mehr oder minder angenehm empfunden werden, ist eine sehr alte; im folgenden soll der Versuch gemacht werden, einer Beantwortung derselben näher zu kommen. Dabei wird es sich um zwei Dinge handeln: vor allem zu entscheiden, ob eine Beantwortung möglich und wenn ja, zu untersuchen, auf welchen physikalischen und physiologischen Ursachen der Unterschied in der Farbenwirkung auf das Auge beruht.

Die erste Frage, ob es überhaupt vom Auge bevorzugte Farben gibt, kann wohl nur auf statistischem Wege entschieden werden, und dazu bieten sich zwei Möglichkeiten; zunächst ist zu bedenken, dass eine derartige Statistik sich im Laufe der Zeit wohl von selbst auf allen jenen Gebieten ausbilden muss, wo es, wie in der Malerei, Teppichindustrie, Emailtechnik etc., auf für das Auge angenehme Farbenwirkungen ankommt. Wenn man die Entwickelung der Malerei und namentlich der genannten Industrien auf Jahrhunderte zurückverfolgt, so kann es kaum zweifelhaft bleiben, dass gewisse Farben, wie Roth, Grün und Blau, immer im Vordergrunde stehen und dass, was mir besonders bemerkenswert erscheint,

innerhalb dieser Farben nur gewisse Nuancen mit großer Hartnäckigkeit festgehalten werden. Es lässt das wohl vermuthen, dass die Technik im Laufe der Zeit die Erfahrung gemacht hat, nicht alle Nuancen einer Farbe seien dem Auge gleich angenehm, sondern gewisse besonders bevorzugt. Dass wirklich dieses Moment maßgebend ist und nicht etwa die Auswahl der Färbemittel, scheint mir kaum zu bezweifeln, da die Übereinstimmung der Farben sich auf so verschiedenen Gebieten, wie z. B. der Textil- und Emailtechnik, findet, wo doch die Färbemittel ganz verschiedene sind.

Eine im Laufe der Zeit von selbst vor sich gegangene Auswahl der schönen Farbentöne scheint mir daraus zu folgen, namentlich wenn man die Producte aus, künstlerisch genommen, guten Zeiten mit jenen aus schlechten Zeiten vergleicht. Nichtsdestoweniger schien es mir wünschenswert, auch den directen Weg der Statistik zu betreten, da mir nicht bekannt ist, dass derartige Versuche schon unternommen wurden. Ich stellte zu diesem Zwecke mit Hilfe färbiger Papiere eine möglichst vollständige Reihe von Farbentönen her, was allerdings nur mangelhaft gelingt, namentlich in Bezug auf die Sättigung der Farben, sich aber doch als genügend herausstellte. Diese Papiere theilte ich in fünf Gruppen: Roth, Gelb, Grün, Blau und Violett, in der Weise, dass jede Gruppe auch noch die Übergänge zu den beiden benachbarten enthielt. Die Aufgabe war nun, innerhalb jeder Gruppe diejenigen Farbentöne zu bezeichnen, die, ohne Rücksicht auf irgendeine praktische Verwendung, für das Auge die angenehmste oder mindest angenehme Empfindung erweckten. Dabei war es natürlich gestattet und bei der Ähnlichkeit vieler Farbentöne auch geboten, mehrere derselben als zu der einen oder anderen Kategorie gehörend zu bezeichnen.

Ich ließ diese Auswahl von mehr als 200 Individuen unabhängig voneinander vornehmen, und dabei zeigte sich bald, dass in allen fünf Farbengruppen dieselben Nuancen mit zum Theile sehr großer Übereinstimmung als angenehm oder unangenehm empfunden wurden. Wurden die Resultate, zu denen die 200 Beobachter gelangten, in drei willkürliche Gruppen — nach der fortlaufenden Reihe der Beobachtung — getheilt, so zeigten auch diese Gruppen von circa je 70 Wahlen unter-

einander in Bezug auf die gewählten Farben vollständige Übereinstimmung, was wohl zeigt, dass dieselben keinem Zufalle zuzuschreiben sind und dass etwaige Abnormitäten in den Augen einzelner Beobachter nicht ins Gewicht fallen. Inwieweit dabei etwa gemeinsame äußere Wirkungen, wie z. B. die Mode, von Einfluss sind, lässt sich freilich schwer abschätzen, das könnte wohl nur durch Wiederholung der Versuche zu anderen Zeiten oder in anderen Ländern ermittelt werden. Die gewonnenen Resultate können vorläufig auch nur für die gegebenen Verhältnisse als giltig angesehen werden.

Einen Überblick über die Resultate dieser Statistik gibt die folgende Tabelle I, in welcher bei jeder Farbengruppe die Anzahl *A* der Farbentöne, aus welchen gewählt wurde, sowie das Mittel *M* der Stimmen angegeben ist, das auf eine Farbe bei willkürlicher Vertheilung der Stimmen entfallen wäre; unter Schön und Hässlich sind die Stimmenzahlen angegeben, mit welchen die betreffende Farbe als solche bezeichnet wurde, unter Nr. die fortlaufenden Nummern, mit welchen diese in das weiter unten folgende Farbendreieck eingezeichnet sind. Endlich sind noch zur ungefähren Orientierung über die Art der gewählten Farben unter *R* diejenigen Nummern von Radde's internationaler Farbenscala eingetragen, die mit den untersuchten Farben übereinstimmen; auf die Sättigung ist dabei keine Rücksicht genommen, aber auch abgesehen davon ist eine befriedigende Identificierung oft nicht möglich.

Trotz der durch persönlichen Geschmack, Eigenthümlichkeiten der Augen und sonstigen Zufälligkeiten bei einer derartigen Wahl natürlichen Zersplitterung der Stimmen zeigt die Tabelle I doch so entschiedene Majoritäten in beiden Richtungen, dass an einer Bevorzugung gewisser Farbentöne durch das Auge innerhalb jeder Gruppe nicht gezweifelt werden kann. Die Frage ist nun: Wodurch zeichnen sich die bevorzugten Farben aus? Da kann es aber kaum zweifelhaft sein, dass wir die Ursachen in den physiologischen Wirkungen der Farben im Auge zu suchen haben, und das wird durch eine Reihe subjectiver Beobachtungen, die ich seit vielen Jahren in dieser Richtung angestellt habe, sowie durch eine Anzahl längst bekannter, sehr auffallender Thatsachen bestätigt. Von

letzteren erwähne ich namentlich die alte Erfahrung, dass farbenreiche Gemälde, bunte Teppiche oder dergleichen im allgemeinen in ihrer Farbenwirkung wesentlich gewinnen, wenn sie nicht in greller Beleuchtung, sondern bei gedämpftem Licht, wie es etwa in Wohnräumen herrscht, betrachtet werden, dass überhaupt nur die coloristisch besten Werke eine wirklich grelle Beleuchtung ertragen, während minderwertige bei schwacher Beleuchtung immerhin noch gelten mögen. Dabei ist zu bemerken, dass bei ersteren die Farben ihren Ton mit der Intensität der Beleuchtung nicht oder nahezu nicht verändern.

Tabelle I.

Gruppe	Nr.	Schön	Hässlich	*R*
Roth	1	132		25, 26
$A = 14$	2		101	fehlt
$M = 26$	3		73	1
Gelb	4	114		7
$A = 9$	5		101	2
$M = 39$	6		76	4
	7		46	10
Grün	8	49		14—15
$A = 14$	9	42		15—16
$M = 27$	10		56	16—17
	11		52	fehlt
	12		47	12—13
Blau	13	86		19—20
$A = 8$	14	64		20
$M = 44$	15		127	17—18
Violett	16	191		21
$A = 7$	17		91	22—23
$M = 43$	18		89	22—23

Ferner gehört hieher ein Kunstgriff, dessen sich Landschaftsmaler häufig bedienen: die Landschaft in einem schwarzen Spiegel oder durch ein schwarzes Glas zu betrachten. Auch hier bringt die Herabsetzung der hohen Lichtintensität im Freien eine Veränderung der Farbentöne in dem Sinne hervor, dass sie dem Auge angenehmer erscheinen. Betrachtet man durch ein schwarzes, sonst farbloses Glas etwa den Abendhimmel oder ein hell beleuchtetes farbenreiches Bild, so wird man sofort eine Veränderung in der Farbenwirkung bemerken, die bei genauerer Untersuchung sich als ein Verschwinden vieler, dem Auge unangenehmer Mischfarben herausstellt.

Diese und zahlreiche ähnliche Erfahrungen weisen aber deutlich die Richtung, in welcher eine Erklärung für die Existenz schöner und hässlicher Farben zu suchen sei. Wenn die Farbentöne von der Intensität der Beleuchtung abhängen, so hat man es da offenbar in erster Linie mit dem Bezold-Brücke'schen Phänomen zu thun. Bezold[1] und Brücke[2] haben gezeigt, dass von einem Nebeneinander beliebiger Farbentöne, z. B. im Spectrum, bei allmählich herabgesetzter Intensität schließlich nur jene übrig bleiben, welche den physiologischen Grundempfindungen im Sinne der Young-Helmholtz'schen Theorie entsprechen. Sind diese schon früher vorhanden, so bleiben sie ungeändert, während alle Zwischenfarben sich mehr oder weniger dem Tone der benachbarten Grundempfindung annähern. Da nun gleichzeitig die Erfahrung lehrt, dass diese bei verminderter Intensität auftretenden Farbentöne im allgemeinen schöner sind als die von derselben objectiven Farbe bei hoher Intensität ausgelösten, so liegt die Vermuthung nahe, dass das Auge vor allem jene Farben als schön empfindet, die einer der drei Grundempfindungen möglichst nahe kommen, also, im Sinne der Young-Helmholtz'schen Theorie, einen möglichst einheitlichen Reiz auslösen. Da diese Grundempfindungen nach allen bisherigen Messungen im Roth, Grün und Blau gelegen sind, so stimmt damit auch die schon erwähnte Erfahrung, dass diese drei Farben in allen Techniken die Grundlage des Colorits bilden.

[1] Pogg. Ann., Bd. 150 (1873).

[2] Diese Sitzungsber., III. Abth., Bd. 77 (1878).

Damit ist jedoch noch nicht viel gesagt, da jede dieser Farben eine große Gruppe von Nuancen umfasst; es wird sich vielmehr noch darum handeln, zu constatieren, ob wirklich innerhalb jeder Gruppe die den Grundempfindungen am nächsten kommenden Farbentöne auch als die schönsten empfunden werden. An der Hand der früher angeführten Farbenstatistik ist das nun möglich.

Vor allem ist dazu die Kenntnis der drei Grundempfindungen erforderlich; da mir die bisherigen Bestimmungen derselben theils für den vorliegenden Zweck nicht genau genug, theils nicht frei von willkürlichen Hypothesen schienen, so habe ich in einer vorausgegangenen Arbeit[1] dieselben nach einer neuen Methode wiederholt. Das Ergebnis derselben war folgendes: Die Grundempfindung Roth liegt etwas außerhalb des Spectrums, also gegen Purpur zu, und ist complementär zur Wellenlänge 494 $\mu\mu$; die Grundempfindung Grün coincidiert mit dem Grün der Wellenlänge 508 $\mu\mu$, die dritte endlich mit dem Blau von der Wellenlänge 475 $\mu\mu$, das eigentlich schon einen Übergang nach Violett darstellt. Soweit man diese Farben durch Radde's internationale Farbenscala darstellen kann, würden sie der Reihe nach den Nummern 25—26, aber näher an 25, dann 15—16, aber viel näher an 15 wie an 16, und endlich 19—20 entsprechen.

Weiter ist es nothwendig, für eine jede zu untersuchende Farbe durch directe Messung den Antheil zu bestimmen, der bei ihrem Zustandekommen einer jeden der drei Grundempfindungen zukommt. Das geschah in der folgenden Weise: Die zu untersuchende Farbe wurde auf einem weißen Papier (Seidenpapier) angebracht und beide mit elektrischem Bogenlicht hell beleuchtet, so zwar, dass der helle Fleck die Farbe und das Weiß gleichmäßig umfasste. Ein Bild der so gebildeten halb weißen, halb färbigen Fläche wurde dann durch ein photographisches Objectiv auf die Spalten des König'schen Spectrophotometers geworfen, mit dem dann in bekannter Weise das Intensitätsverhältnis des farbigen zum weißen Lichte für eine jede Wellenlänge bestimmt werden konnte. Dabei war es

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CXI, (1902).

nothwendig, mit Rücksicht auf die Erhaltung eines gleichen Beleuchtungsverhältnisses während der Messung, trotz Regulierens der Lampe die Drehaxe des Spectrometers horizontal zu legen. Hat man so für irgendeine Farbe für genügend viele Wellenlängen das Intensitätsverhältnis zum weißen Lichte festgelegt, so kann man mit Hilfe der in meiner früher erwähnten Arbeit gegebenen Ordinaten der Empfindungscurven im weißen Lichte leicht jene für die betreffende Farbe ableiten und erhält so die drei Grundempfindungscurven für diese. Eine planimetrische Ausmessung derselben ergibt dann den Antheil jeder der drei Grundempfindungen an der Gesammtempfindung. Bei den folgenden Zahlenangaben ist die übliche Annahme — die für das Resultat übrigens gleichgiltig ist und nur eine graphische Darstellung ermöglichen soll — dass im Weiß jede der drei Grundempfindungen mit 33·3% betheiligt ist, beibehalten.

Ich gebe zunächst die Resultate der Ausmessung jener in Tabelle I aufgeführten 18 Farben, die als entschieden schön oder hässlich innerhalb jeder Farbengruppe bezeichnet wurden, indem ich unter Beibehaltung der früher gebrauchten Nummern einer jeden in Zahlen die Procente beifüge, mit welchen die Grundempfindungen R, G und B an der Gesammtempfindung theilnehmen.

Man sieht aus den Zahlen in Tabelle II zunächst, dass die Farben der Papiere, mit Ausnahme etwa der gelben, sehr ungesättigt sind, ein Umstand, durch den die Genauigkeit der Messung leider herabgedrückt wird. Dass dieselbe trotzdem eine genügende ist, konnte aus mehrfachen Controlmessungen ersehen werden; so wurden z. B. für ein bestimmtes Grün in zwei verschiedenen Messungen die Werte erhalten: $R = 33 \cdot 9$, $G = 38 \cdot 7$, $B = 27 \cdot 4$ und $R = 33 \cdot 9$, $G = 38 \cdot 8$, $B = 27 \cdot 3$. Stimmen die Werte auch nicht immer so gut überein, so können die Zahlen doch als auf einige Zehntel Procente genau angesehen werden.

Entspricht eine Farbe einer der drei Grundempfindungen, so drückt sich das in den Zahlen dadurch aus, dass die Procente für die beiden anderen Grundempfindungen gleich groß sein müssen. Je mehr sie sich dieser Gleichheit nähern, desto näher liegt die Farbe auch einer Grundempfindung.

Tabelle II.

Nr.	Roth Schön	Roth Hässlich	Nr.	Gelb Schön	Gelb Hässlich	Nr.	Grün Schön	Grün Hässlich	Nr.	Blau Schön	Blau Hässlich	Nr.	Violett Schön	Violett Hässlich
1	*R*—45·2 *G*—27·0 *B*—27·8		4	*R*—44·5 *G*—44·9 *B*—10·6		8	*R*—32·5 *G*—43·0 *B*—24·5		13	*R*—24·1 *G*—23·8 *B*—52·1		16	*R*—25·3 *G*—24·0 *B*—50·7	
2		*R*—35·1 *G*—21·8 *B*—43·8	5		*R*—50·1 *G*—37·7 *B*—12·2	9	*R*—28·6 *G*—37·4 *B*—34·0		14	*R*—22·8 *G*—22·4 *B*—54·8		17		*R*—24·1 *G*—17·2 *B*—58·7
3		*R*—56·0 *G*—36·1 *B*—7·9	6		*R*—43·8 *G*—39·5 *B*—16·7	10		*R*—29·6 *G*—33·3 *B*—37·1	15		*R*—17·8 *G*—22·2 *B*—60·0	18		*R*—30·4 *G*—23·2 *B*—46·4
			7		*R*—41·8 *G*—43·9 *B*—14·3	11		*R*—25·6 *G*—34·7 *B*—39·7						
						12		*R*—39·2 *G*—42·5 *B*—18·3						

Geht man daraufhin die Zahlen der Tabelle II durch, so findet man die als schön bezeichnete Farbe im Roth fast identisch mit der Grundempfindung Roth, da ihre Grün- und Blauwerte sich nur sehr wenig voneinander unterscheiden; die Nummern 2 und 3 dagegen liegen von der Grundempfindung weit ab, ersteres gegen Blau, letzteres gegen Gelb. Am besten sieht man das aus Fig. 1, wo alle Farben mit ihren Nummern in gewöhnlicher

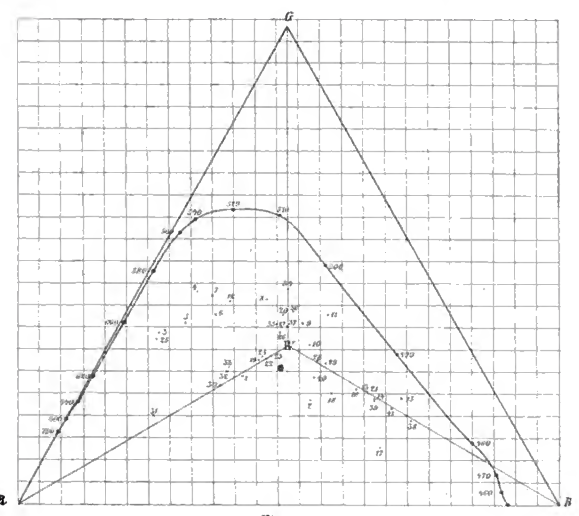


Fig. 1.

Weise in ein Farbendreieck eingetragen sind. Das Gelb wurde, obwohl ihm keine Grundempfindung entspricht, bei der statistischen Untersuchung doch als eigene Gruppe behandelt, und auch hier zeigt sich ein gewisser Zusammenhang mit der Vertheilung der Procente: Nr. 4, als schönstes Gelb, enthält fast ganz gleich viel *R* und *G*, ist also complementär zu *B*, während die hässlichen Nuancen davon entweder nach Roth oder nach Grün abweichen. Im Grün liegen die beiden als

schön bezeichneten Farben beiderseits nahe an der Grundempfindung, während die übrigen wieder weit davon nach Gelb oder Blau abliegen. Leider waren unter den untersuchten Papieren durchaus nicht alle Nuancen des Grün vertreten, die Nummern 8 und 9 waren aber von allen diejenigen, die der Grundempfindung am nächsten kamen. Es fehlte z. B. das in coloristischer Beziehung so ausgezeichnete Schweinfurthergrün, dessen nachträgliche Messung die Werte

$$R - 30\cdot 4$$
$$G - 39\cdot 8$$
$$B - 29\cdot 8$$

ergab, das somit der Grundempfindung noch näher kommt als eine der übrigen Nuancen. Die Gruppen Blau und Violett bilden eigentlich ein zusammengehöriges Ganzes, da die Grundempfindung Blau ziemlich die Grenze zwischen beiden bildet. Auch das geht aus Tabelle II hervor. Das schönste Blau und das schönste Violett, die Nummern 13, 14 und 16, sind fast dieselben Farben und fallen sehr nahe mit der Grundempfindung Blau zusammen, während die übrigen wieder weit davon nach Grün und Roth hin abliegen.

Es bestätigen somit die durch directe Statistik gewonnenen Resultate die ausgesprochene Vermuthung, dass ein Farbenton dem Auge umso angenehmer erscheint, je näher er einer Grundempfindung kommt. Nicht ohne Interesse scheint mir auch die Beobachtung am Gelb; hier tritt die eine Grundempfindung, Blau, sehr zurück und die verschiedenen Nuancen des Gelb verdanken ihre Entstehung in erster Linie dem verschiedenen Verhältnisse von R und G. Die Statistik zeigt nun ganz entschieden, dass jene Nuance dem Auge die angenehmste ist, bei welcher R und G mit gleicher Intensität vertreten sind, also wie im weißen Lichte sich verhalten. Es ist das natürlich das Complement zu B. Ein Gleiches gilt aber nicht für die anderen Complemente zu den Grundempfindungen; sowohl das zu R, als das zu G werden als unschön empfunden, da aber hier die dritte Grundempfindung immer noch eine wesentliche Rolle mitspielt, so bilden sie auch nicht wie das Gelb eine eigene Farbengruppe.

Es schien mir wichtig, auch noch Objecte jener natürlichen Statistik zu untersuchen, die sich im Laufe der Zeit auf coloristischem Gebiete von selbst herausgebildet haben muss, und dazu wählte ich zunächst die Farben der orientalischen Teppiche; da hat man gewiss durch lange Erfahrung gelernt, jene Farben vorzugsweise zu benützen, die dem Auge angenehm sind. Dass auch hier Roth, Grün und Blau die Hauptvertreter sind, ist bekannt, aber welche Nuancen davon besonders vorkommen, musste erst durch Messung festgestellt werden, was allerdings wesentlich durch die fast stereotype Wiederkehr derselben Nuancen erleichtert wird.

Eine directe Messung von Teppichen ist wegen der Structur derselben nicht gut möglich; ich ließ zunächst nach alten orientalischen Teppichen das Roth, Grün und Blau in Aquarellfarben copieren und unterzog diese Copien einer Messung. Die Farben waren folgende:

	Roth		Grün		Blau
Nr. 19	R—40·0 G—30·4 B—29·6	Nr. 20	R—31·1 G—39·0 B—29·9	Nr. 21	R—23·6 G—23·9 B—52·5

Unter den beigesetzten Nummern sind dieselben wieder in das Farbendreieck eingetragen; man sieht, dass sie fast genau mit den Grundempfindungen zusammenfallen, namentlich das Grün kommt derselben viel näher als irgendeines der früher untersuchten Papiere. Um noch eine größere Auswahl zur Verfügung zu haben, untersuchte ich noch eine Reihe jener bekannten vorzüglichen Teppichreproductionen, die vor einiger Zeit als separates Werk[1] erschienen sind. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle III in der bisherigen Weise wiedergegeben, wobei sich die Nummern wieder auf die betreffenden Punkte im Farbendreiecke und die Angaben der Tafeln sich auf das citierte Werk beziehen.

[1] »Orientalische Teppiche«, herausgegeben vom k. k. Handelsministerium, Wien, 1892.

Tabelle III.

	Roth		Grün		Blau
Nr. 22. Taf. 85. Alt-orientalisch.	R—38·1 G—31·5 B—30·4	Nr. 26. Taf. 80. Polenteppich.	R—33·4 G—36·6 B—30·0	Nr. 28. Taf. 39. Anatolisch.	R—29·3 G—30·1 B—40·6
Nr. 23. Taf. 70. Persisch, beste Zeit.	R—37·8 G—31·1 B—31·1	Nr. 27. Taf. 85. Alt-orientalisch.	R—32·5 G—37·0 B—30·5	Nr. 29. Taf. 2. Alt-Pers.	R—28·2 G—29·8 B—42·0
Nr. 24. Taf. 2. Alt-Pers.	R—38·9 G—31·0 B—30·1				
Nr. 25. Taf. 7. Chinesisch.	R—49·0 G—34·3 B—16·7				

Man sieht, dass auch hier die geäußerte Vermuthung sich bestätigt und die Farben sehr nahe, einzelne genau, mit den Grundempfindungen zusammenfallen; eine Ausnahme macht Nr. 25, es ist aber auch bekannt, dass sich die chinesischen Teppiche von den übrigen durch grelle Farben in sehr unvortheilhafter Weise unterscheiden. Speciell das Roth Nr. 25 ist ein nach Zinnober gehendes Carmin, und ich habe es absichtlich gemessen, um den großen Unterschied gegen die übrigen Teppiche, der in die Augen springend ist, quantitativ zu bestimmen. Ich füge noch bei, dass das Roth des persischen und indischen Teppiches Taf. 82 und Taf. 84 genau mit Nr. 23, also auch mit der Grundempfindung Roth, übereinstimmt, sowie das Gelb eines anatolischen Teppiches, Taf. 8, genau mit dem als schönstes bezeichneten Gelb Nr. 4 der Tabelle II.

Dass die in der Teppichindustrie zur Zeit ihrer Blüte verwendeten Farbentöne nicht einfach die durch die Färbemittel direct gegebenen waren, sondern dass man sich bemühte, ganz bestimmte herzustellen, geht aus dem Gebrauche von Mischungen hervor. Für Blau wurde fast ausschließlich Indigo verwendet, also eine Farbe, die in Bezug auf die Grundempfindung Blau etwas nach Grün liegt; um das, natürlich unbewusst, zu corrigieren, unterfärbten z. B. die Perser vorher mit Krapp, wodurch die Farbe mehr gegen Roth gezogen, also der Grundempfindung genähert wurde. Ähnlich verhielt es sich mit dem Roth selbst, wozu in der Regel Krapp (Alizarin) und in früherer Zeit Cochenille verwendet wurde. Besondere Schwierigkeiten scheint das Grün bereitet zu haben; zumeist wird es durch eine Mischung von Curcuma und Indigo gewonnen, allein das gibt ein Grün ähnlich dem der Vegetation, das in Bezug auf die Grundempfindung Grün weit gegen Gelb zu liegt. Ihm entspricht etwa das Grün von Nr. 26, einem der sogenannten Polenteppiche, die schon aus einer schlechten Zeit stammen; in Persien wurden dagegen Kupfersalze zur Herstellung des Grün verwendet, das Sulfat und Acetat, deren Farbe ja einen entschiedenen Stich ins Blau hat und der Grundempfindung wesentlich näher kommt. Auch zur Herstellung grüner Papiere, und auf ein schönes Grün wird im Orient besonderes Gewicht gelegt, bedienten sich die Araber des Grünspans,[1] indem sie die Farbe als die der keimenden Saat, im Gegensatze zum Grün der gewöhnlichen Vegetation, bezeichneten, womit wohl gleichfalls auf den mehr bläulichen als gelblichen Ton hingewiesen wird.

Haben somit die Beobachtungen an den Producten der Teppichindustrie die aufgestellte Hypothese bestätigt, so trifft dies vielleicht noch deutlicher auf einem anderen Gebiete, dem der Edelsteine, zu. Die Wertschätzung der Steine ist freilich nicht nur von deren Farbe abhängig; beschränken wir uns aber auf gefärbte Steine, so werden wir auch hier, ähnlich wie bei den Teppichfarben, auf durch langjährige Übung festgelegte

[1] J. Karabacek, Neue Quellen zur Papiergeschichte. Mitth. Papyrus Erzh. Rainer, Bd. 4 (1888).

Nuancen stoßen, und da fällt zunächst wieder die Trias Roth, Grün, Blau, repräsentiert durch Rubin, Smaragd und Saphir, als die vorherrschende auf. Dass hier auch die Härte und die damit verbundene hohe Politur eine gewisse Rolle spielt, ist sicher, aber diese kann im Vergleiche zu der der Farbe doch nur eine untergeordnete sein, das geht schon aus dem Umstande hervor, dass sowohl bei Rubin wie Saphir eine kleine Abweichung der Färbung von der normalen nach der einen oder anderen Richtung den Wert fast vollständig herabsetzt. Welche Farbennuance aber die geschätzteste ist, das zu bestimmen war mir durch das liebenswürdige Entgegenkommen der Direction des k. k. Naturhistorischen Hofmuseums in Wien ermöglicht, wofür ich auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank ausspreche. Es wurden mir aus der Sammlung dieses Museums einige prachtvolle Ringsteine zur Untersuchung überlassen, nämlich ein Rubin (Kat. Nr. 55), ein Smaragd (Kat. Nr. 113), ein Saphir (Kat. Nr. 37) und ein Spinell (Kat. Nr. 87). Die ersten drei, obzwar nicht groß, repräsentierten einen hohen Wert, da sie seinerzeit eben wegen ihrer tadellosen Farbe als typisch angekauft wurden, und man kann demnach ihre Farbentöne wohl dem allgemeinen Geschmacke nach als schön bezeichnen. Ihre Untersuchung wurde in derselben Weise ausgeführt wie die der Papiere, indem das Bild der hell beleuchteten, weiß hinterlegten Steine auf den einen Spalt des Spectrophotometers geworfen wurde. Der Rubin wurde auch einmal, mit Goldfolie unterlegt, gemessen, um den Einfluss dieser Manipulation festzustellen. Die Resultate der Messungen an diesen Steinen, sowie an einigen anderen minderwertigen sind in der Tabelle IV wiedergegeben. Die beigesetzten Nummern beziehen sich wieder auf das Farbendreieck.

Tabelle IV.

	Roth		Grün		Blau
Nr. 30. Rubin. Hof-museum.	*R*—50·6 *G*—24·7 *B*—24·7	Nr. 34. Smaragd. Hof-museum.	*R*—27·1 *G*—45·3 *B*—27·6	Nr. 38. Saphir. Hof-museum.	*R*—18·6 *G*—18·1 *B*—63·3
Nr. 31. Derselbe mit Gold unterlegt.	*R*—66·1 *G*—18·6 *B*—15·3	Nr. 35. Smaragd. Minder-wertig.	*R*—33·6 *G*—37·4 *B*—29·0	Nr. 39. Saphir. trüb.	*R*—22·8 *G*—22·3 *B*—54·9
Nr. 32. Spinell. Hof-museum.	*R*—47·4 *G*—27·8 *B*—24·8	Nr. 36. Smaragd. Minder-wertig.	*R*—29·1 *G*—40·1 *B*—30·8	Nr. 40. Amethyst.	*R*—31·9 *G*—26·8 *B*—41·3
Nr. 33. Almandin.	*R*—47·0 *G*—28·2 *B*—24·7	Nr. 37. Malachit.	*R*—31·2 *G*—37·1 *B*—31·7		

Diesen Zahlen ist Folgendes zu entnehmen: Der schöne Rubin Nr. 30 hat eine Farbe (im reflectierten Lichte), die genau mit der Grundempfindung Roth zusammenfällt; eine Goldfolie verändert dieselbe, wie zu erwarten, gegen Roth hin, steigert dabei aber wesentlich die Sättigung. Eine solche Folie würde sich also bei einem Rubin mit etwas bläulichem Tone empfehlen. Der Spinell Nr. 32 und Almandin Nr. 33, mit einer Farbe, die an Schönheit gewiss nicht die des Rubin erreicht, liegen gegen diesen rothwärts und stimmen mit manchen der an Teppichen gemessenen Rothnuancen überein. Der schöne Smaragd Nr. 34 liegt sehr nahe der Grundempfindung Grün, seine Roth- und Blauwerte unterscheiden sich nur um 0·5%; die minderwertigen Smaragde Nr. 35 und 36 dagegen liegen von der Grundempfindung beiderseits merklich ab. Der Malachit endlich,

der ja so vielfach coloristisch verwendet wird, unterscheidet sich wenig vom schönen Smaragd, nur seine Sättigung steht gegen diesen zurück. Auch der Saphir Nr. 38 stimmt fast vollständig mit der zugehörigen Grundempfindung, während der trübere Nr. 39 wieder an Sättigung dagegen zurückbleibt, ohne eine wesentlich andere Farbe aufzuweisen. Der Amethyst endlich liegt von der Grundempfindung bedeutend gegen Roth zu.

Da die Farben der Edelsteine, so viel mir bekannt, bisher noch nicht genauer gemessen wurden und mir einige so ausgezeichnete Exemplare zur Verfügung standen, so gebe ich im folgenden deren Spectralcurven wieder, obzwar diese mit dem hier behandelten Gegenstande in keinem directen Zusammenhange stehen. Die Zahlen der Tabelle V haben die folgende Bedeutung: Ist i_λ die Intensität des vom Steine reflectierten Lichtes von der Wellenlänge λ und I_λ die entsprechende Intensität in Bezug auf eine weiße Fläche — beide mit weißem Lichte beleuchtet —, so sind die Quotienten $\frac{i_\lambda}{I_\lambda}$ die Zahlen, die den λ der Tabelle beigesetzt und in den Figuren als Ordinaten aufgetragen sind; für eine weiße Fläche selbst wären also alle Zahlen gleich 1 und die Curve eine zur Abscissenaxe parallele Gerade. Die den Zahlen zugrunde liegende Einheit ist eine willkürliche, von der Stellung des Steines gegen das einfallende Licht abhängige, aber innerhalb einer jeden Messungsreihe natürlich constant. Es sind diese Zahlen nichts anderes als die Tangentenquadrate der Drehungswinkel des Ocularnicols bei Einstellung auf Intensitätsgleichheit.

Tabelle V.

λ	Rubin Nr. 30	Smaragd Nr. 34	Saphir Nr. 38
680 $\mu\mu$	0·75	0·08	0·032
660	0·58	0·05	0·026
640	0·38	0·04	0·026
620	0·14	0·036	0·026

λ	Rubin Nr. 30	Smaragd Nr. 34	Saphir Nr. 38
600 μμ	0·06	0·036	0·028
578	0·02	0·05	0·028
550	0·01	0·17	0·028
520	0·01	0·66	0·044
500	0·03	1·04	0·073
490	0·09	0·85	0·090
475	0·13	0·41	0·132
450	0·03	0·068	0·171
433	0	0·014	0·198
420	0	0	0·210

In den folgenden Figuren 2, 3 und 4 sind diese Spectralcurven dargestellt; sie zeigen einen recht regelmäßigen und charakteristischen Verlauf.

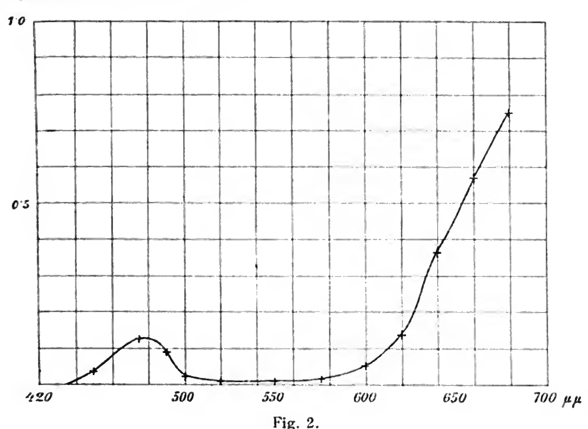


Fig. 2.

Schließlich möchte ich noch einige vereinzelte Messungen anführen, die ich gelegentlich zu machen in der Lage war; so

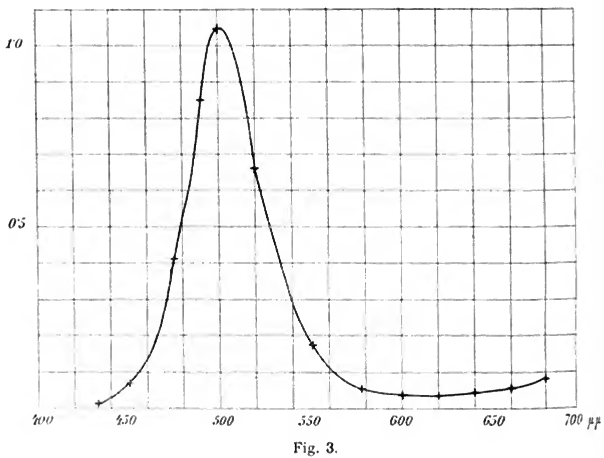

1·0
0·5
400
450
500
550
600
650
700 μμ

Fig. 3.

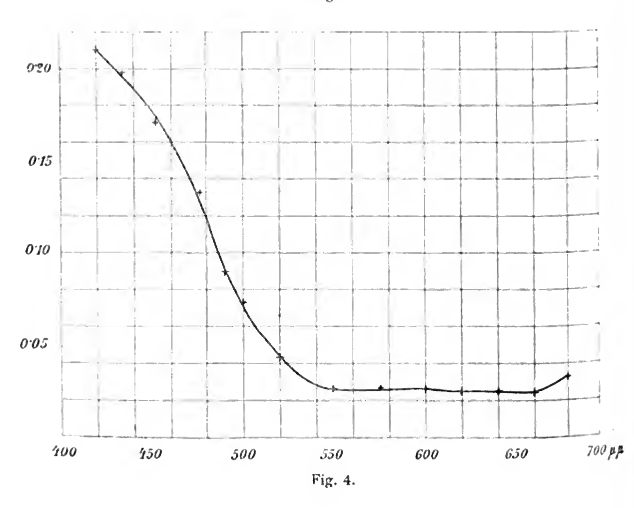

0·20
0·15
0·10
0·05
400
450
500
550
600
650
700 μμ

Fig. 4.

z. B. an altem japanesischem Email. Auch hier sind es wieder die Farben Roth, Grün und Blau, die zumeist wiederkehren, und zwar in ziemlich stereotypen Nuancen. Das Blau habe ich direct untersuchen können und folgende Zahlen erhalten: $R = 23 \cdot 9$, $G = 23 \cdot 1$, $B = 53 \cdot 0$. Die Farbe ist demnach recht gesättigt und weicht von der Grundempfindung Blau nur um ein geringes gegen Roth hin ab. Das rothe und grüne Email konnte ich nur mit Hilfe der Radde'schen Farbenscala bestimmen, die Töne waren mit den früher unter Nr. 19 und Nr. 20 angeführten fast identisch, liegen also gleichfalls den betreffenden Grundempfindungen sehr nahe.

Nicht ohne Interesse schien mir eine Untersuchung des Himmelblau, von dem schon Helmholtz gelegentlich sagt, dass es nicht so rein blau sei, als man gewöhnlich annimmt, sondern etwas gegen Violett hin zieht. Ich ließ dasselbe an einem besonders klaren Frühlingstage (14. März 1902, 11^h a.) durch Totalreflexion auf den einen Spalt des Spectrometers fallen, während der zweite mit weißem Lichte beleuchtet wurde. Die Spectralcurve, mit derselben Bedeutung der Ordinaten wie bei der Messung der Steine, ist in der folgenden Fig. 5 gezeichnet. Die Werte waren:

λ	
680 $\mu\mu$	0·024
660	0·030
640	0·035
620	0·039
600	0·040
577	0·051
550	0·065
520	0·077
500	0·098
490	0·116
475	0·140
450	0·238
433	0·265
420	0·333

Daraus berechnen sich für die einzelnen Grundempfindungen die Antheile in Procenten:

R—20·6
G—20·3
B—59·1

Die Farbe ist demnach gesättigter, als man erwarten möchte, und fällt fast genau mit der Grundempfindung Blau, also mit der Farbe des Saphirs zusammen. Im Farbendreieck ist sie unter Nr. 41 eingetragen.

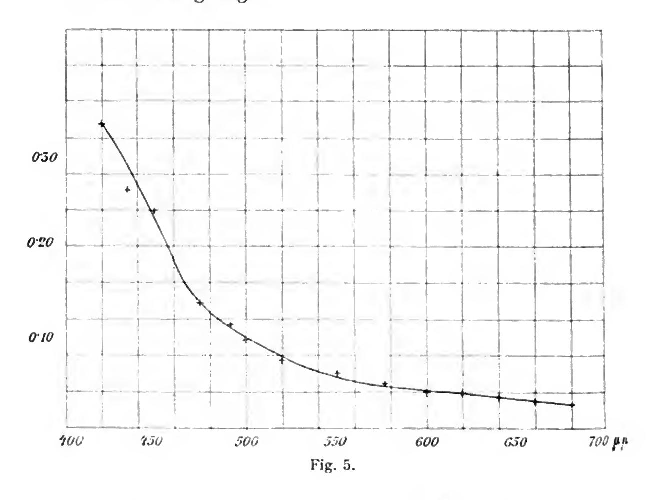


Fig. 5.

Endlich sei noch einer vereinzelten Messung an einem berühmten Gemälde, der Rafael'schen Madonna im Wiener Hofmuseum, Erwähnung gethan; eine directe Messung ist da natürlich ausgeschlossen, doch kann man z. B. das Roth des Gewandes mit Radde's Farbenscala gut festlegen. Eine nachherige Messung an dieser ergab vollständige Gleichheit des Rafael'schen Roth mit jenem Nr. 23 auf einem persischen Teppich aus bester Zeit; dieses Roth ist aber zugleich die Grundempfindung.

Die ursprünglich gestellte Frage, ob es schöne und hässliche Farben gibt, scheint mir durch die vorliegende Untersuchung bejaht zu sein; sowohl die Erfahrungen auf dem Gebiete der Kunstindustrie, wie die specielle Statistik zeigen klar, dass innerhalb jeder Farbengruppe gewisse Nuancen vom Auge gegenüber den anderen bevorzugt werden. Die weitere Frage, wodurch diese Farben charakterisiert sind, halte ich auch nach dem Vorstehenden für genügend sicher beantwortet. Innerhalb der Gruppen Roth, Grün, Blau sind diejenigen Farben die schönsten, die den betreffenden Grundempfindungen am nächsten kommen; je weiter sie davon abliegen, desto unangenehmer wirken sie auf das Auge. Da jede Farbenempfindung, gemäß der Young-Helmholtz'schen Theorie, die ja der ganzen Betrachtung zugrunde liegt, durch gleichzeitige Erregung der drei Grundempfindungen R, G, B zustande kommt, so würde das besagen, dass es für die Angenehmheit der Empfindung auf das Verhältnis der Erregungen R, G, B ankommt: Herrscht eine von diesen vor, z. B. R (bei allen rothen Farben), so kommt es auf das Verhältnis von G und B an. Sind diese einander gleich, so ist die Farbe unter allen Roth die schönste, dann ist sie eben die Grundempfindung Roth, nur ungesättigt, d. h. mit Weiß gemischt. Sind aber G und B ungleich, dann wird außer R auch noch G oder B erregt, die Farbe weicht von der Grundempfindung gegen Grün oder Blau hin ab und erscheint weniger schön. Gesättigte Farben sind immer schöner als ungesättigte; auch das spricht dafür, dass die vorzugsweise Erregung einer einzigen Grundempfindung dem Auge angenehm ist.

Eine besondere Stellung nimmt die Farbengruppe Gelb ein; die Wellenlängen, welche diese erregen, wirken auf die Blauempfindung fast gar nicht ein, so dass diese der Roth- und Grünerregung gegenüber ganz in den Hintergrund tritt. Bei allen Nuancen des Gelb kommt es also fast ausschließlich auf das Verhältnis von R und G an, und die Erfahrung lehrt, dass jenes Gelb das schönste ist, bei welchem R und G einander gleich sind, also die Complementärfarbe zu B. Sowie eine der beiden Erregungen die andere überwiegt, entstehen die dem Auge weniger angenehmen Töne Rothgelb oder Grüngelb.

Von großem Interesse wäre eine Untersuchung der Frage, welche Farbenzusammenstellungen dem Auge angenehm sind oder nicht, doch spielt hier die absolute Intensität eine wesentliche Rolle, und das dürfte einer Beantwortung dieser Frage die größten Schwierigkeiten bereiten. Schon Helmholtz bemerkt gelegentlich, dass die großen Maler der eben wegen ihres Colorites berühmten venezianischen Schule mit Vorliebe die Farbenzusammenstellung Roth, Grün und Blauviolett benützten, also den Grundempfindungen entsprechend; es scheint mir mehr als wahrscheinlich, dass die Grundempfindungen nicht nur für den Anblick der einzelnen Farbe, sondern auch für die Wirkung von Farbenzusammenstellungen maßgebend sind, doch lagern sich hier noch eine Reihe physiologischer Wirkungen übereinander, ich erwähne nur die des Contrastes, so dass das Phänomen jedenfalls ein sehr compliciertes wird.

Über das Wärmeleitvermögen des Kesselsteines und anderer die Kesselflächen verunreinigenden Materialien

von

Ingenieur **W. E. Ernst.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1902.)

Ist der durch die Wand eines Dampfkessels gehende Wärmestrom, gemessen durch die pro Zeiteinheit verdampfte Wassermenge, bekannt, so lässt sich die Temperatur der der Feuerstelle zugekehrten Kesselwand aus den Wärmeleitfähigkeiten der die Kesselwandung bildenden Materialien berechnen. Besteht die Kesselwand nur aus Metall, so wird beim Wärmedurchgange die mittlere Temperatur der Kesselplatte nur um wenige Grade über die Siedetemperatur des Kesselwassers steigen. Anders wird es sein, wenn sich auf die Innenfläche der Kesselwand Schichten von schlecht leitenden Materialien (Kesselstein, Schlamm, Fette etc.) ansetzen. Es genügen dann verhältnismäßig sehr geringe Schichten dieser Materialien, um die Temperatur der Metallwand des Kessels so zu steigern, dass ihre Festigkeit nicht mehr genügt, den Druck des Dampfes auszuhalten.

Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob das in der Praxis oft beobachtete Ausbeulen und Durchbrennen von Feueplatten durch die Annahme von solchen schlecht leitenden Schichten hinreichend erklärt werden kann, ist es nothwendig, wenigstens ungefähre Werte des Wärmeleitvermögens dieser Schichten zu kennen. Da bisher derartige Messungen nicht vorliegen, habe ich es unternommen, eine Anzahl von Kesselstein-

sorten verschiedener Provenienz, Schmieröle, Theere, Anstrichmittel auf ihre Wärmeleitfähigkeit zu untersuchen.

Im folgenden möge kurz die verwendete Methode und die erhaltenen Resultate angegeben werden. Eine kurze Rechnung am Schlusse wird zeigen, dass diese Materialien die Wärme wirklich so schlecht leiten, dass die Mehrzahl der Ausbeulungen an Dampfkesseln aus den Verunreinigungen der inneren Kesselfläche erklärt werden können.

1. Versuchsanordnung.

Zur Verwendung gelangte die Methode, die Christiansen[1] zuerst angegeben hat, um das relative Leitungsvermögen verschiedener Körper zu bestimmen. Die »Leitungssäule« bestand aus drei Kupferplatten von je 7·0 *cm* Durchmesser und 1·5 *cm* Höhe, zwischen denen die Platten der Substanzen lagen, deren Wärmeleitvermögen miteinander verglichen werden sollten. Die untersuchten Glas- und Kesselsteinplatten hatten einen Durchmesser im Mittel von 7·5 *cm*.

Als Vergleichssubstanz wurde eine Glassorte gewählt, deren Wärmeleitfähigkeit von O. Paalhorn[2] bestimmt worden ist. Es waren mir drei Platten der von ihm mit Nr. 6 bezeichneten Glassorte $\left(\text{Wärmeleitvermögen} = 0\cdot00227 \frac{g}{cm\ \text{sec}}\right)$ von der Firma Schott & Genossen in Jena in liebenswürdiger Weise überlassen worden, wofür ich auch hier meinen besten Dank ausspreche.

Dass das von mir benützte Glas wirklich die angegebene Leitfähigkeit besaß, davon überzeugte ich mich, indem ich die relative Leitfähigkeit des Wassers in Bezug auf das Glas bestimmte.

Unter Zugrundelegung des obigen Wertes ergab sich $0\cdot00104 \frac{g}{cm\ \text{sec}}$ als Wärmeleitfähigkeit für Wasser, ein Wert, der zufällig genau mit dem von Winkelmann gefundenen Werte übereinstimmt.

---

[1] Christiansen, Wied. Ann., XIV, S. 23 (1881).

[2] O. Paalhorn, Über die Wärmeleitung verschieden zusammengesetzter Gläser. Diss. Jena, 1894.

Die Temperaturen der Kupferplatten wurden an drei in ganze Grade getheilten Thermometern abgelesen. Sie wurden mit einem Normalthermometer verglichen. An den Temperaturangaben sind bereits alle Correcturen, auch die für den herausragenden Faden, angebracht.

Die untere Kupferplatte I wurde durch fließendes Wasser gekühlt; auf der obersten Kupferplatte III stand ein Blechgefäß, durch das Wasserdampf geleitet wurde.

Da die Oberfläche der Kesselsteinplatten infolge der Porosität des Steines nicht vollkommen glatt war, wurde auch die Oberfläche der Glasplatten matt geschliffen.

Um guten Contact zwischen den zu untersuchenden Platten und den Kupferplatten herzustellen, wurden Glycerin, Wasser und Quecksilber als Zwischenmittel verwendet.

Eine Reihe von Vorversuchen sollte entscheiden, welche von den verschiedenen Correctionen[1] (schädlichen Raum, seitlichen Wärmeverlust etc.) bei der von mir angestrebten Genauigkeit von einigen Procenten anzubringen sind. Es wurden zu dem Zwecke zwei verschieden dicke Glasplatten derselben Sorte miteinander verglichen.

Im folgenden bezeichnen t_1, t_2, t_3 die Temperaturen der Kupferplatten I, II, III; die eine Glasplatte B hatte die Dicke $d_1 = 0\cdot226\,cm$, die andere C die Dicke $d_2 = 0\cdot470\,cm$.

Wenn kein Übergangswiderstand zwischen den Glas- und Kupferplatten und kein seitlicher Wärmeverlust vorhanden wäre, müsste $\frac{t_1-t_2}{d_1} = \frac{t_2-t_3}{d_2}$ sein, oder das Verhältnis der Temperaturdifferenz müsste dem Dickenverhältnisse der Platten gleich sein. Es ergab sich nun aus einer Reihe von zehn Versuchen $\frac{t_1-t_2}{t_2-t_3} = 1\cdot95 \pm 0\cdot011$, während $\frac{d_2}{d_1} = 2\cdot08$ ist; es lässt sich also diese Differenz nicht durch Versuchsfehler erklären. Berücksichtigt man jedoch den Einfluss des Zwischenmittels, im oberen Falle Glycerin, so findet man aus der Gleichung

$$\frac{d_2+x}{d_1+x} = 1\cdot95, \quad x = 0\cdot031\,cm,$$

[1] Siehe Christiansen oder Paalhorn, l. c.

wobei $x = 2\varepsilon \frac{k_g}{k_m}$, ε die Dicke dieser Schichte des Zwischenmittels, k_g das Leitvermögen des Glases und k_m das des Mittels ist. Das von mir verwendete Glycerin hat eine Leitfähigkeit von 0·00054. Es ergibt sich für unseren Fall eine Schichtdicke des Glycerins von $\varepsilon_1 = 0 \cdot 0037$ *cm*, ein Wert der durchaus plausibel ist; durch directe Messung mit dem Sphärometer ergaben sich Schichtdicken von derselben Größenordnung.

Der seitliche Wärmeverlust der mittleren Kupferplatte ergab sich aus den Versuchen zu $^1/_{94}$ des gesammten Wärmestromes, während der theoretisch berechnete $^1/_{83}$ beträgt; er kann also für den beabsichtigten Zweck vernachlässigt werden; noch bedeutend geringer ist der seitliche Wärmeverlust der untersuchten Platten. Ebenso kann, wie eine einfache Rechnung zeigt, das Wärmegefälle in den Kupferplatten vernachlässigt werden. Bei der Bestimmung des Wärmeleitvermögens des Kesselsteines musste sich der Übergangswiderstand etwas stärker bemerkbar machen, da die Oberfläche des Steines infolge seiner Porosität rauher war, als die der Glasplatten. Es ergab sich aus einer Reihe von zehn Versuchen diese Schichtdicke im Mittel zu $\varepsilon_2 = 0 \cdot 0085$ *cm*.

Die endgiltigen Versuche wurden nun in folgender Weise angestellt. Die zu untersuchende Platte (Wärmeleitvermögen k) wurde zwischen die Kupferplatten I und II gelegt; die mittlere Temperatur für das Wärmeleitvermögen war demnach $\frac{t_1 - t_2}{2}$ und lag bei den Untersuchungen in der Nähe von 30° C. Als Zwischenmittel wurde bei Kesselstein durchwegs Wasser gewählt, womit auch die Steine durchtränkt waren, um einen dem natürlichen möglichst ähnlichen Zustand zu erzielen. Zwischen Kupferplatte II und III lag die Glasplatte B in Glycerin eingebettet. Das Leitvermögen der zu untersuchenden Substanz ist dann $k = k_g \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{d'}{d'_g}$, wobei d' und d'_g die wegen des Zwischenmittels corrigierten Dicken der Substanz und der Glasplatte sind. Es ist $d' = d + 2\varepsilon_2 \frac{k}{k_m}$ und $d'_g = d_g + 2\varepsilon_1 \frac{k_g}{k_m}$. Für ε_1 und ε_2 wurden die oben angeführten Werte benützt. Für k

wurde ein angenäherter Wert, der sich aus den Messungen ohne Correction ergibt, eingesetzt, für k_m bei Wasser der Wert 0·00104, bei Glycerin der Wert 0·00054.

Die untersuchten Flüssigkeiten wurden ebenfalls zwischen den Kupferplatten I und II untersucht, wobei die Platte II auf drei kleinen Glasplättchen von 0·104 *cm* Dicke ruhte.

2. Resultate.

Zur Untersuchung gelangten zehn verschiedene Sorten von Kesselstein, die in der folgenden Tabelle von I bis X bezeichnet sind, ferner Cylinderschmieröle, Holztheer, Steinkohlentheer und ein »Antirost- und Kesselsteinmittel«, Substanzen, die in der Praxis theils durch die Wiederverwendung der Condenswässer aus den Dampfmaschinencylindern in die Kessel gelangen, theils zum Anstreichen der Innenseite der Dampfkessel verwendet werden. Die Werte in Colonne 3 der folgenden Tabelle sind so gewonnen worden, dass einmal die trockene Kesselsteinplatte und einmal die vollkommen mit Wasser durchtränkte Platte gewogen wurde. Die Zahlen geben an, welcher Bruchtheil des Volumens der jeweiligen Kesselsteinplatte mit Luft erfüllt ist. Colonne 4 enthält die Dicke der untersuchten Platte. Colonne 9 das Verhältnis der Dicke der Schichte und des Glases, bezüglich der Übergangswiderstände corrigiert; die Werte der Colonne 10 geben die Leitvermögen in absolutem Maße und ergeben sich durch Multiplication der Werte in Colonne 8 und 9 mit 0·00227, das ist das Leitvermögen der verwendeten Vergleichsplatte.

Um ein Bild zu geben, welchen Einfluss eine Schichte der betreffenden Substanz auf die Erhitzung der Dampfkesselwände ausübt, ist in Colonne 11 die Temperatur ausgerechnet, die die innere Kesselwandoberfläche bei einer Kesselsteinschichte von 2 *mm* Dicke, beziehungsweise bei einer Schichtendicke der Flüssigkeiten von 0·2 *mm* annähme, wenn 200 *kg* Wasser pro Quadratmeter Heizfläche und Stunde bei 10 Atmosphären absoluter Dampfspannung verdampft werden. Die angenommene Verdampfung ist ein Wert, der bei manchen Kesseltypen, wenigstens an gewissen Theilen des Kessels, noch beträchtlich überschritten wird. Colonne 12 gibt die

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Substanz	Dichte	Porosität	Schichtdicke in Centimetern	t_1	t_2	t_3	$\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}$	$\frac{d'}{dg'}$	k	t	Δt
Kesselstein I	2·24	0·089	0·391	19·4	55·3	87·2	0·889	1·75	0·00353	387	208
» II	1·27	0·410	0·303	19·0	50·6	82·2	1·00	1·38	0·00313	414	235
» III	2·35	0·114	0·497	19·3	49·4	81·8	1·08	2·29	0·00561	310	131
» IV	2·31	0·085	0·264	21·7	41·5	80·3	1·96	1·37	0·00608	300	121
» V	1·68	0·056	0·547	18·6	50·1	84·2	1·08	2·52	0·00618	298	119
» VI	1·95	0·100	0·249	20·2	41·8	79·9	1·76	1·26	0·00503	325	146
» VII	2·20	0·068	0·365	20·4	41·5	78·8	1·77	1·85	0·00743	278	99
» VIII	2·14	0·022	0·343	21·2	40·5	77·3	1·91	1·77	0·00767	275	96
» IX	1·66	0·117	0·134	28·7	39·7	76·3	3·33	0·82	0·00619	298	119
» X	2·34	0·095	0·217	22·4	36·6	75·4	2·73	1·24	0·00768	275	96
Cylinderschmieröl I	—	—	0·104	14·4	72·2	90·4	0·315	0·405	0·000290	432	253
» II	—	—	»	15·8	72·3	91·2	0·335	»	0·000308	418	239
Consistentes Fett	—	—	»	14·1	74·1	90·9	0·280	»	0·000257	465	286
Steinkohlentheer	—	—	»	16·3	73·1	91·3	0·320	»	0·000294	429	250
Holztheer	—	—	»	14·8	69·6	88·9	0·352	»	0·000324	406	227
»Antirost und Kesselsteinmittel«	—	—	»	13·5	73·6	90·1	0·275	»	0·000253	469	290

Differenz der Temperatur der inneren Kesselwand und der des Kesselwassers in Graden Celsius an.

Aus den Werten der nebenstehenden Tabelle folgt zunächst, dass die Größe der Leitfähigkeit der Kesselsteine verschieden ist. Ich vermuthe, dass diese Differenzen entweder auf die verschiedene chemische Zusammensetzung der Steine oder auf ihre verschiedene Struktur bei gleicher Porosität zurückzuführen sind.

Das untersuchte Cylinderschmieröl I (Mineralöl) hat seinen Flammpunkt bei 295° C., seinen Zündpunkt bei 330° C. und eine nach der Engler'schen Methode bestimmte Zähflüssigkeit bei 50° C. von 39·9. Der Flammpunkt des Cylinderschmieröles II (Mineralöl) liegt zwischen 310 und 330° C., der Zündpunkt zwischen 335 und 350° C. und seine Zähflüssigkeit bei 50° C. zwischen 42·8 und 47·0. Das consistente Schmierfett hat seinen Flammpunkt bei 155° C., seinen Zündpunkt bei 193° und seinen Schmelzpunkt bei 82° C. Die Anstrichmasse unter der Bezeichnung »Antirost- und Kesselsteinmittel« besteht aus Rückständen der Petroleumdestillation und Paraffinerzeugung.

Die Werte für die verschiedenen Öle und Anstrichmittel können bei der schlechten Definition dieser Substanzen nur zur Feststellung der Größenordnung der Werte der Leitfähigkeit dienen.

Um nachzuweisen, dass die Leitfähigkeit des Kesselsteins bei den im Kessel vorkommenden Temperaturen bis zu 200° nicht wesentlich von den Werten bei 30° abweicht, wurde mit einer Steinsorte eine Versuchsreihe bei höherer Temperatur angestellt. Die Steinplatte hatte bei einer mittleren Temperatur von 110° C. einen um circa 15% kleineren Wert der Leitfähigkeit. Wenn auch diese letzte Bestimmung keine besondere Genauigkeit hat, so zeigt sie doch, dass die Größenordnung der Leitfähigkeit nicht geändert wird.

Was schließlich die praktische Bedeutung der Zahlen anbelangt, so lehren die Colonnen 11 und 12 zur Genüge, dass die eingangs aufgestellten Behauptungen über den schädlichen Einfluss der Kesselverunreinigungen vollauf berechtigt erscheinen.

Zum Schlusse spreche ich Herrn Prof. Dr. Franz Exner meinen besten Dank dafür aus, dass er mir die Mittel seines Institutes für die vorstehende Untersuchung zur Verfügung stellte.

Über longitudinale Schwingungen von Stäben, welche aus parallel zur Längsaxe zusammengesetzten Stücken bestehen

von

Otto Waldstein.

Aus dem physikalischen Institute der Universität Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

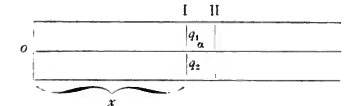
(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1902.)

Stefan hat Stäbe, welche aus Stücken bestehen, die senkrecht zur Längsaxe der Stäbe aneinandergefügt sind, untersucht[1] und dabei die gute Übereinstimmung des Experimentes mit der von ihm entwickelten Theorie gefunden. Die Aufgabe, welche ich zu behandeln unternommen habe, ist in theoretischer Hinsicht weitaus einfacher, wenn man voraussetzt, dass bei einem Stabe, welcher aus zwei oder mehreren parallel zur Längsaxe aneinandergefügten Stücken besteht, im Falle der Longitudinalerregung Querschwingungen entweder überhaupt nicht auftreten oder doch so geringfügig sind, dass sie vernachlässigt werden können. In diesem Falle ergibt sich die Formel für die Schwingungen des zusammengesetzten Stabes in einfacher Weise bestimmt durch die specifischen Gewichte und Elasticitätscoefficienten der Materialien, aus welchen die einzelnen Stücke bestehen.

---

[1] J. Stefan, Über Longitudinalschwingungen an elastischen Stäben. Diese Sitzungsberichte, Bd. LV, II. Abth., Aprilheft 1867. — J. Stefan, Die Anwendung der Schwingungen zusammengesetzter Stäbe zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. Diese Sitzungsberichte, Bd. LVII, II. Abth., Jahrg. 1868.

Wir setzen einen Stab voraus, welcher aus zwei parallelepipedischen Stäben besteht, die in ihrer Zusammensetzung



wieder ein Parallelepiped ergeben. Die Trennungsfläche sei eine Ebene und parallel den Seitenflächen des zusammengesetzten Stabes. Die Elasticitätscoefficienten der beiden Materiale seien E_1 und E_2, ihre Dichten ρ_1 und ρ_2. Betrachten wir einen Querschnitt des Stabes I an der Stelle x. Die Spannung, welche auf diesen Querschnitt wirkt, wird unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt bei der longitudinalen Verschiebung eben bleibt, gleich sein der Summe der auf die Theilquerschnitte q_1 und q_2 wirkenden Spannungen. Das heißt also, wenn wir die Verschiebung mit u bezeichnen, wird die Spannung

$$S_x = (E_1 q_1 + E_2 q_2) \frac{\partial u}{\partial x},$$

an der Stelle $x+\alpha$ ist demnach die Spannung

$$S_{x+\alpha} = S_x + \alpha \frac{\partial S_x}{\partial x},$$

also weiter die Gesammtspannung, welche das Volumelement $(q_1+q_2)\alpha$ bewegt, gleich

$$S_{x+\alpha} - S_x = \alpha \frac{\partial S_x}{\partial x} = \alpha (E_1 q_1 + E_2 q_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

die Masse des Volumelementes multipliciert mit seiner Beschleunigung ist gleich

$$\alpha (\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Wir erhalten somit für die longitudinalen Schwingungen des zusammengesetzten Stabes die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2}{E_1 q_1 + E_2 q_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

was wir der Abkürzung wegen schreiben wollen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{R}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung für einen einfachen Stab mit der Dichte R und dem Elasticitätscoefficienten E. Der Grundton eines solchen an beiden Enden freien Stabes hat bekanntlich die Schwingungszahl

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{R}}.$$

Führen wir wieder für E und R seine Werte ein, so erhalten wir den Grundton unseres zusammengesetzten Stabes

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E_1 q_1 + E_2 q_2}{\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2}}.$$

Die Größen E_1 und E_2 können nun durch die Schwingungszahlen der Grundtöne gleich langer, an beiden Enden freier Stäbe aus den beiden Materialien dargestellt werden.

Die Schwingungszahlen derselben werden sein

$$n_1 = \frac{2}{2l}\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad n_2 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}.$$

Substituieren wir nun die aus diesen Gleichungen folgenden Werte von E_1 und E_2 in den Ausdruck für N, so erhält man

$$N^2 = \frac{q_1 \rho_1 n_1^2 + q_2 \rho_2 n_2^2}{q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2}. \qquad \text{I)}$$

Man sieht ohneweiters, dass für einen Stab, der aus mehreren Stücken parallel zur Längsaxe zusammengesetzt ist, die Schwingungszahl

$$N^2 = \frac{\Sigma q \rho n^2}{\Sigma q \rho} \text{ ist.}$$

Die experimentelle Prüfung wurde mit verschiedenen Stäben vorgenommen, die aus Fichten- und Birnenholz

zusammengesetzt waren.[1] Das erstere hatte die Dichte $\rho' = 0 \cdot 39$, das zweite die Dichte $\rho'' = 0 \cdot 61$. Der erste der untersuchten Stäbe bestand aus zwei Stücken von gleichem Querschnitt. In diesem einfachen Falle reduciert sich die Gleichung I) auf die einfachere Formel

$$N^2 = \frac{\rho_1 n_1^2 + \rho_2 n_2^2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

$\rho_1 + \rho_2$ ist zufälligerweise in unserem Falle gleich 1.

Die Beobachtungen erfolgten mittels eines Monochords, auf welchem eine Stahlseite aufgezogen war. Der Steg des benützten Monochords ist mit einem Nonius verbunden, so dass die Ablesung der Saitenlänge auf $^1/_{10}$ Theilstrich der Längeneintheilung erfolgen konnte. Um den Absolutwert der Tonhöhe der Stäbe zu erfahren, wurde jedesmal auch die einem Tone von 1024 Schwingungen (König'sche Stimmgabel) entsprechende Saitenlänge festgestellt. In der folgenden Tabelle sind die Beobachtungen eingetragen. Um sich vor Selbsttäuschungen zu bewahren, wurde die Spannung der Monochordsaite bei jeder Versuchsreihe geändert.

Stimmgabel $n = 1024$	Stab aus Fichtenholz		Stab aus Birnholz		Zusammengesetzter Stab	
l	l_1	n_1	l_2	n_2	L	N
128·1	49·7	2639	82·2	1595	61·2	2143
149·9	58·2	2637	97·1	1618	72·3	2123
177·4	68·6	2648	114·4	1588	85·0	2137
199·0	77·1	2643	128·0	1592	95·0	2145
195·4	76·1	2629	127·4	1570	93·1	2148
197·0	75·8	2662	127·0	1589	94·2	2141
141·6	55·1	2631	90·4	1604	69·3	2092
Mittel . . .	—	2641	—	1593	—	2132

[1] Die Stäbe waren möglichst sorgfältig gehobelt und gut aneinander geleimt; sie hatten insgesammt die Länge von 1 *m*.

Es ergibt sich also die Tonhöhe des Stabes aus Fichtenholz zu 2641 Schwingungen pro Secunde, jene des Birnholzstabes zu 1593. Verwendet man diese Werte gemäß der obigen Formel zur Berechnung der Schwingungszahl des zusammengesetzten Stabes, so erhält man für denselben $N = 2070$, während der beobachtete Wert gemäß der obigen Tabelle 2132 ist. Diese beiden Zahlen stehen in hinreichend guter Übereinstimmung zueinander und sprechen daher für die Anwendbarkeit der eingangs angedeuteten approximativen Theorie.

Ich habe ferner zwei andere Stäbe untersucht, die aus denselben Materialien bestanden. Bei dem einen verhielten sich die Querschnitte des Fichtenholzstabes zum Birnholzstabe wie 2 : 1, bei dem anderen wie 1 : 2.

Für den ersteren ergab sich aus fünf Beobachtungen bei ein und derselben Saitenspannung eine Saitenlänge von 80·1 (Stimmgabel 1024, die Saitenlänge 169·8), für den anderen, ebenfalls aus fünf Beobachtungen, die Saitenlänge 92·5. Diesen Saitenlängen entsprechen die Tonhöhen von 2171, respective 1879 Schwingungen pro Secunde. Die Berechnung liefert für den ersteren dieser beiden Stäbe

$$N' = \sqrt{\frac{2 . 0 \cdot 39 . 2641^2 + 1 \cdot 0 \cdot 61 . 1593^2}{2 . 0 \cdot 39 + 1 . 0 \cdot 61}} = 2242,$$

für den anderen

$$N'' = \sqrt{\frac{1 . 0 \cdot 39 . 2641^2 + 2 . 0 \cdot 61 . 1503^2}{1 . 0 \cdot 39 + 2 . 0 \cdot 61}} = 1900.$$

Man sieht, dass auch für diese beiden Stäbe die Theorie mit dem Experiment in befriedigendem Einklang steht.

Ich bemerke endlich, dass ich zu den im Vorstehenden geschilderten Versuchen durch die Untersuchung[1] von Dr. Nabl: »Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitt« angeregt worden bin.

[1] Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Jahrg. 1902 Nr. XV.

Über die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichtes durch Oberflächenkräfte

von

Felix Kaufler.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juni 1902.)

Nachdem wiederholt Versuche unternommen worden sind, die Gesetze des osmotischen Druckes auf solche Fälle anzuwenden, wo die betrachteten Körper eine Zellstructur besitzen, schien es mir von Interesse, rechnerisch zu verfolgen, inwieweit dies zulässig ist, und ob nicht in diesem Falle die Form der Oberfläche einen wesentlichen Einfluss ausübt.

Dass eine Verschiebung des Gleichgewichtes zwischen zwei Phasen durch Oberflächenkräfte stattfinden kann, ist von Gibbs[1] begründet worden; experimentelle Belege sind hiefür von Ostwald,[2] sowie von Hulett[3] durch den Nachweis der Beeinflussung der Löslichkeit durch die Korngröße erbracht worden.

In der vorliegenden Betrachtung werden die Formeln für die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichtes und für die Veränderung des Vertheilungssatzes abgeleitet.

Da vorderhand für die entwickelten Sätze nur qualitative Belege beigebracht werden können, sind die Ableitungen nur in erster Annäherung durchgeführt.

[1] Gibbs, Thermodynamische Studien.

[2] Zeitschr. physik. Chemie, 34 (1900), 414.

[3] Zeitschr. physik. Chemie, 37 (1901), 385.

I. Das osmotische Gleichgewicht an gekrümmten Trennungsflächen.

An einer ebenen Trennungsfläche sind zwei Lösungen im gleichen Lösungsmittel im Gleichgewichte, wenn sie in der Volumeinheit gleichviel Molecüle des gelösten Körpers enthalten (Isotonie). Es soll nun der Fall untersucht werden, dass sie mit gekrümmten Flächen aneinandergrenzen.

1. Ableitung.

Die Ableitung der bezüglichen Formel beruht auf der Abhängigkeit der Dampfspannung von der Form der Oberfläche und lehnt sich an den von Thomson[1] hiefür gegebenen Beweis an.

In einem geschlossenen Gefäße befinde sich eine Flüssigkeit, über derselben ihr Dampf.

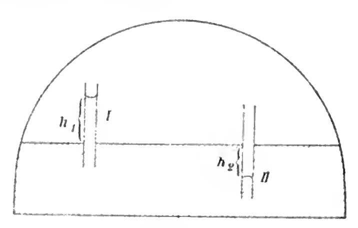


Fig. 1.

Wir bezeichnen mit:

s das specifische Gewicht der Flüssigkeit,
s_1 das specifische Gewicht des Dampfes.
M das Moleculargewicht der Flüssigkeit im dampfförmigen Zustande,
ϑ die Dampftension (in $g.cm$),
σ die Oberflächenspannung (in $g.cm$),
T die Versuchstemperatur, auf welche alle Größen bezogen sind.

[1] Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1870.

In die Flüssigkeit tauchen zwei Röhren,

I sei benetzbar, II unbenetzbar,

$$\left.\begin{array}{rl} \rho_1, \rho_2 & \text{Hauptkrümmungsradien} \\ h_1 & \text{Steighöhe} \end{array}\right\} \text{in } I,$$

$$\left.\begin{array}{rl} \rho_3, \rho_4 & \text{Hauptkrümmungsradien} \\ h_2 & \text{Depression} \end{array}\right\} \text{in } II.$$

Nach der bekannten Formel von Laplace ist

$$h_1 = \frac{\sigma}{s}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right) \qquad h_2 = \frac{\sigma}{s}\left(\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right).$$

Zwischen dem concaven Meniscus I und dem convexen Meniscus II kann nur dann Gleichgewicht herrschen, wenn die Dampftension über II gleich ist jener über I, vermehrt um das Gewicht der Dampfsäule von der Höhe h_1+h_2, da sonst im einen oder im anderen Sinne eine Destillation eintreten müsste.

Wenn wir die Tension über I mit ϑ_1, jene über II mit ϑ_2 bezeichnen, so ist

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = (h_1+h_2)s_1;$$

nun ist

$\vartheta v = RT$ (Gleichung für ein Mol des Dampfes),

$v = \dfrac{RT}{\vartheta}$ Volumen eines Mols,

$\dfrac{v}{M} = \dfrac{RT}{\vartheta M}$ Volumen eines Grammes,

$\dfrac{\vartheta M}{RT} =$ Gewicht eines Cubikcentimeters $=$ specifisches Gewicht $= s_1$,

$$h_1+h_2 = \frac{\sigma}{s}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right),$$

somit

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s}\,\frac{\vartheta . M}{RT}. \qquad (1)$$

Dies ist aber der Ausdruck für die Tensionsdifferenz zwischen concaven und convexen Flächen mit den Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2, beziehungsweise ρ_3 und ρ_4. Sind

die Flächen verschiebbar, wie z. B. in Capillarröhren, so resultiert eine Niveaudifferenz.

Sind sie aber nicht verschiebbar, etwa an einer starren Membran, so muss vom convexen zum concaven Theile eine Destillation eintreten, die, sobald es sich um Lösungen handelt, zu einem Gleichgewichte führt. Aus dem Innenraume einer Zelle muss also so lange Lösungsmittel nach außen treten, bis die eingetretene Concentrationszunahme eine Tensionsabnahme hervorgerufen hat, die den Überdruck infolge der Oberflächenkrümmung gerade compensiert, also gleich ist

$$\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s}\,\frac{\vartheta M}{RT}.$$

Die relative Tensionsabnahme

$$\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta}=\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s}\,\frac{M}{RT}.$$

Es sei nun

n die Zahl der Molecüle des gelösten Körpers, m das Moleculargewicht des gelösten Körpers, q die Gesammtmenge des gelösten Körpers — im Außenraume in der Volumeinheit.

Δn und Δq der Zuwachs, welchen n und q im Innenraume durch die Concentrationsänderung erfahren,

N die Zahl der Molecüle des Lösungsmittels, M das Moleculargewicht des Lösungsmittels, Q die Gesammtmenge des Lösungsmittels — in der Volumeinheit.

Um aus der Tensionsabnahme die Concentrationsdifferenz zu berechnen, benützen wir die bekannte Formel $\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta}=\frac{n}{N}$, die hier, wo es sich um Vergleich zweier Lösungen handelt, die Form annimmt:

$$\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta}=\frac{\Delta n}{N},$$

somit

$$\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s}\,\frac{M}{RT}=\frac{\Delta n}{N} \qquad (2)$$

$$\frac{\Delta nm}{NM}=\frac{\Delta q}{Q}=\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s}\cdot\frac{m}{RT}.$$

Wenn wir das Verhältnis der Gewichtsmengen des gelösten Körpers und des Lösungsmittels als Concentration C bezeichnen, so gibt $\frac{\Delta q}{Q}$ den Concentrationsüberschuss ΔC innerhalb der convexen Fläche an, somit

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s} \cdot \frac{m}{RT}. \qquad (3)$$

Für den Fall, dass die Oberflächen Theile von Kugelflächen sind, wird

$$\rho_1 = \rho_2 \qquad \rho_3 = \rho_4$$

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_3}\right)\frac{2\sigma}{s} \cdot \frac{m}{RT}. \qquad (4)$$

2. Beweis.

Wir betrachten einen kugelförmigen Tropfen vom Radius ρ_1, der in der Entfernung ρ_3 von einer Hohlkugel umgeben ist.

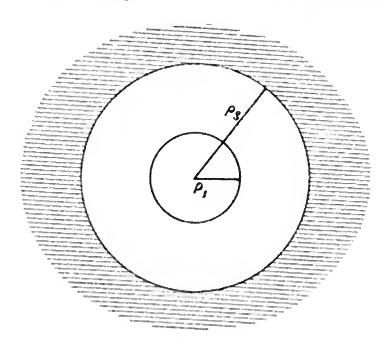


Fig. 2.

Der Tropfen enthalte die Lösung, im schraffierten Außenraume sei ebenfalls Lösung enthalten.

Würden beide Räume reines Lösungsmittel enthalten, so würde bekanntlich der ganze Tropfen in die umgebende Masse überdestillieren.

Unter den angegebenen Bedingungen stellt sich jedoch ein Gleichgewicht her, für das die Bedingungen folgendermaßen abgeleitet werden können.

Beim Gleichgewichte ist die Arbeit für eine virtuelle Verschiebung gleich Null, somit wird dann Gleichgewicht herrschen, wenn bei einer Veränderung im System die Arbeit der Oberflächenspannung entgegengesetzt gleich ist der osmotischen Arbeit.

Wenn sich das System derart verschiebt, dass der Radius des Tropfens durch Verdunstung um $d\rho_1$ abnimmt und sich dieselbe Flüssigkeitsmenge an der äußeren Schale condensiert, deren Radius dadurch um $d\rho_3$ abnimmt, so ergibt sich durch Gleichsetzung der verdunsteten mit der condensierten Menge die Relation

$$-4\pi\rho_1^2 d\rho_1 = -4\pi\rho_3^2 d\rho_3$$

$$d\rho_3 = d\rho_1 \frac{\rho_1^2}{\rho_3^2}.$$

Die Oberfläche des Systems ist $4\pi(\rho_1^2+\rho_3^2)$; ihre Änderung bei der betrachteten Verschiebung

$$-8\pi(\rho_1 d\rho_1 + \rho_3 d\rho_3) = -8\pi d\rho_1 \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^2}{\rho_3}\right);$$

hiebei ist die Arbeit der Oberflächenspannung

$$8\pi\sigma d\rho_1 \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^2}{\rho_3}\right).$$

Wenn p_1 der osmotische Druck im Tropfen, p jener im Außenraum ist, so ist die osmotische Arbeit bei der untersuchten Verschiebung nach der Formel pdv wie folgt zu berechnen:

$$dv = \text{überführtes Flüssigkeitsvolumen} = -4\pi\rho_1^2 d\rho_1.$$

Beim Entziehen dieser Menge Lösungsmittel aus dem Tropfen wird die Arbeit geleistet:

$$p_1 4\pi\rho_1^2 d\rho_1.$$

Beim Übergange dieser Menge in den Außenraum wird die Arbeit geleistet:

$$-p\,4\pi\rho_1^2 d\rho_1.$$

Somit ist die osmotische Arbeit gleich $(p_1-p)4\pi\rho_1^2 d\rho_1$. Für das Gleichgewicht gilt

$$(p_1-p)4\pi\rho_1^2 d\rho_1 = 8\pi\sigma d\rho_1\left(\rho_1+\frac{\rho_1^2}{\rho_3}\right)$$

$$p_1-p = 2\sigma\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}\right). \qquad (5)$$

Wir haben hiemit den osmotischen Überdruck im Tropfen ermittelt und müssen hieraus den Überschuss der Concentration im Tropfen gegenüber dem Außenraume berechnen.

$pv = RT$ ....für ein Mol des gelösten Körpers,

$pv = \frac{RT}{m}$ ......für $1\,g$ des gelösten Körpers,

$$p_1-p = \frac{RT}{m}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v}\right) = \frac{RTs}{m}\left(\frac{1}{v_1 s}-\frac{1}{vs}\right). \qquad (6)$$

$v_1 s$ ist die Gewichtsmenge Flüssigkeit, in der $1\,g$ gelöster Körper im Tropfen gelöst ist;

vs die entsprechende Größe für den Außenraum.

Nach der früher gewählten Ausdrucksweise ist somit

$$\frac{1}{v_1 s} = C_1 \qquad \frac{1}{vs} = C \qquad \frac{1}{v_1 s}-\frac{1}{vs} = \Delta C$$

$$2\sigma\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}\right) = \frac{RTs}{m}\cdot\Delta C \qquad \text{(Gleichung 5, 6)}$$

$$\Delta C = \frac{2\sigma}{s}\cdot\frac{m}{RT}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}\right),$$

also derselbe Wert wie im ersten Beweis (Gleichung 3).

Die Form des Vertheilungssatzes für den Fall, dass die Medien durch gekrümmte Flächen getrennt sind.

Für das Gleichgewicht in einem Medium an gekrümmten Trennungsflächen wurde als Überconcentration im convexen Theile gefunden

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s} \cdot \frac{m}{RT}.$$

Um die entsprechende Formel für die Vertheilung eines gelösten Körpers zwischen zwei verschiedenen Medien abzuleiten, betrachten wir folgendes System, wobei wir annehmen, dass der gelöste Körper sich in beiden Medien im gleichen Molecularzustande befinde.

IV | III | II | I

Es enthalte:

Raum I das erste Medium mit den Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 (convex),

Raum II das erste Medium mit ebener Oberfläche,

Raum III das zweite Medium mit ebener Oberfläche,

Raum IV das zweite Medium mit den Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 (concav).

In allen Medien sei ein Körper mit dem Moleculargewichte m gelöst, und es bestehe Gleichgewicht zwischen je zwei angrenzenden Phasen. Dann muss auch Gleichgewicht zwischen zwei beliebigen Phasen bestehen. Die Concentrationen seien C_1, C_2, C_3, C_4, in den entsprechenden Räumen.

Nun ist

$\frac{C_2}{C_3} = k$ (Vertheilungscoefficient des gelösten Körpers zwischen den beiden Medien im üblichen Sinne),

$$C_1 = C_2 + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\sigma_1}{s_1}\frac{m}{RT}$$

$$C_4 = C_3 - \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\sigma_2}{s_2}\frac{m}{RT}$$

$$\frac{C_2}{C_3} = k = \frac{C_1 - \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\sigma_1}{s_1}\frac{m}{RT}}{C_4 + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\sigma_2}{s_2}\frac{m}{RT}}$$

$$kC_4 + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\sigma_2}{s_2}\,\frac{m}{RT}\cdot k = C_1 - \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\sigma_1}{s_1}\,\frac{m}{RT}$$

$$C_1 = k\,.\,C_4 + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{m}{RT}\left(\frac{\sigma_1}{s_1} + k\frac{\sigma_2}{s_2}\right).$$

Ohne Berücksichtigung der Oberflächenspannung würde sich $C_1 = kC_4$ berechnen; der Concentrationsüberschuss im convexen Medium beträgt somit

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{m}{RT}\left(\frac{\sigma_1}{s_1} + k\frac{\sigma_2}{s_2}\right). \qquad (7)$$

Es sei nun der Betrag der Überconcentration für ein praktisch vorkommendes Beispiel approximativ berechnet, nämlich für den Fall, dass Baumwolle in die Lösung eines Farbstoffes vom Moleculargewichte 600 gelegt wird.

Die Cellulosezelle ist ein annähernd gerader Schlauch; der äußere Durchmesser beträgt etwa 20 μ, der innere etwa 4 μ. Es handelt sich also um das osmotische Gleichgewicht zwischen diesen beiden Cylinderflächen.

Wir haben nach Formel (2)

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4}\right)\frac{\sigma}{s}\cdot\frac{m}{RT}$$

$$\rho_1 = 0\cdot0002\,cm \qquad \frac{1}{\rho_1} = 5000 \qquad \frac{1}{\rho_2} = 0$$

$$\rho_3 = 0\cdot0010\,cm \qquad \frac{1}{\rho_3} = 1000 \qquad \frac{1}{\rho_4} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma = 0\cdot082\,g.cm\\ s = 1\end{array}\right\}\text{ für Wasser} \qquad \begin{array}{l}m = 600\\ T = 293^\circ \qquad R = 84600\end{array}$$

Hieraus berechnet sich ΔC mit 0·012, d. h. die Flüssigkeit im Inneren der Cellulosemembran enthält im Liter um 12 *g* Farbstoff mehr als das Bad; in den Canälen, welche die Wandungen durchsetzen und noch enger sind, wird eine noch stärkere Überconcentration eintreten. Allerdings ist anzunehmen, dass sich diese Überconcentration nicht vollständig

einstellen wird, weil durch die genannten Canäle ein mechanischer Transport von Flüssigkeit eintreten kann, worauf auch bei der Betrachtung des Abziehens des Farbstoffes von der Faser Rücksicht genommen werden muss. Immerhin ist aber klar, dass die Lösung im Inneren der Zelle viel concentrierter ist als außerhalb; die Folge davon kann sein, dass, selbst wenn das Bad noch nicht gesättigt ist, im Inneren der Baumwollzelle die Löslichkeit überschritten wird und sich der Farbstoff ausscheidet; damit wird die Erscheinung erklärt, dass selbst ziemlich concentrierte Farbbäder nahezu vollständig ausgezogen werden.

Für den Fall, dass man einen Färbevorgang nach der Witt'schen Theorie betrachtet, d. h. den Farbstoff als gelösten Körper zwischen den beiden Medien: Bad und Faser vertheilt auffasst, kommt nach (7) als Ausdruck für die Überconcentration auf der Faser die Formel in Betracht

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{m}{RT}\,\frac{\sigma_1}{s_1} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{m}{RT}\,k\,\frac{\sigma_2}{s_2};$$

hievon ist der erste Theil halb so groß, als sich die Überconcentration im gleichen Medium (2) ergibt; der zweite Theil ist jedenfalls positiv, jedoch fehlen zu seiner Auswertung die Anhaltspunkte.

Man kann somit auch im Falle der Färbung von Wolle oder Seide nicht von einem bestimmten Theilungsverhältnisse im üblichen Sinne sprechen.

Hieraus wird klar, warum die vielen mühevollen Versuche,[1] das Theilungsverhältnis zwischen Bad und Faser zu bestimmen, nie zur Aufstellung einer plausiblen Formel geführt haben. Auch den hier abgeleiteten Ausdrücken kommt wegen der unregelmäßigen Gestalt des Fasermaterials nur eine qualitative Bedeutung zu; in dieser Hinsicht stehen sie mit den Beobachtungen in guter Übereinstimmung, besonders mit jenen, die beim Färben der Baumwolle mit Tetrazofarben gemacht wurden.

---

[1] Walker und Appleyard, Journ. Chem. Soc., 1896, 69, 1334. — Georgievics, Mitth. des k. k. Technol. Gew.-Museums, 1898, 8, 362 u. a. m.

Falls zwischen Farbstoff und Faser eine chemische Reaction stattfindet, bewirkt die größere Concentration auf der Faser eine entsprechende Verschiebung des Reactionsgleichgewichtes in der Richtung, dass eine größere Menge der chemischen Verbindung entsteht, als dem Massenwirkungsgesetze ohne Berücksichtigung der Überconcentration entspricht.

Eine weitere Consequenz der vorliegenden Betrachtung wäre, dass im Inneren einer pflanzlichen oder thierischen Zelle eine höhere Concentration herrscht als in der Umgebung, derart, dass die Überconcentration umso größer wird, je kleiner die Zelle ist.

Es wäre nicht ausgeschlossen, dass die hier behandelten Concentrationsänderungen einen Beitrag zur Erklärung der Adsorption, vielleicht auch der Katalyse durch fein vertheilte Körper liefern.

Messungen der Elektricitätszerstreuung in der freien Luft

von

J. Elster und **H. Geitel.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1902.)

Seit December 1898 haben wir theils an unserem Wohnorte Wolfenbüttel, theils auf Reisen unter verschiedenen klimatischen und örtlichen Verhältnissen zahlreiche Messungen des Betrages der Elektricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre ausgeführt. Wie sich im Laufe dieser Untersuchungen auf Grund der erhaltenen Resultate der Gedanke entwickelte, dass die Elektricitätszerstreuung geradeso wie die übrigen Arten der Elektricitätsbewegung in Gasen auf das Vorhandensein freier Ionen in der Luft zurückzuführen sei, ist an anderen Orten auseinandergesetzt.[1]

1.

Wir möchten nun im folgenden eine planmäßige Bearbeitung des gesammten Beobachtungsmaterials geben, in der wir vor allem das Regelmäßige in dem Verlaufe der zu untersuchenden Erscheinung, insbesondere ihre Abhängigkeit von meteorologischen Bedingungen festzustellen beabsichtigen. Da indessen eine in sich folgerichtige Darstellung der Ergebnisse uns nur

[1] Vergl. darüber: J. Elster und H. Geitel, Phys. Zeitschrift, 1, S. 245 (1900) und H. Geitel: »Über die Anwendung der Lehre von den Gasionen auf die Erscheinungen der atmosphärischen Elektricität. Braunschweig, 1901.

mittels der Ionentheorie der Elektricitätszerstreuung durchführbar erscheint, so werden wir diese überall heranziehen, wo sie den inneren Zusammenhang der Thatsachen hervortreten lässt.

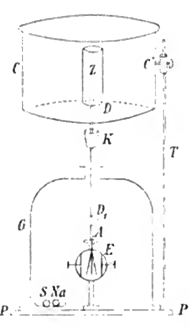
Zur Beschäftigung mit diesen Dingen wurden wir veranlasst durch die Arbeiten von Linss, der zuerst die Nothwendigkeit hervorgehoben hat, bei der Erforschung der atmosphärischen Elektricität neben den Messungen des elektrischen Potentialgefälles über der Erdoberfläche auch solche der Elektricitätszerstreuung in der freien Luft vorzunehmen und der selbst die ersten zusammenhängenden Beobachtungsreihen dieser Art mitgetheilt hat.[1]

Wir würden die Untersuchungen schon früher aufgenommen haben, wenn wir im Besitze einer uns befriedigenden Methode gewesen wären. Das Verfahren, dessen sich Linss bediente und das uns nicht völlig einwandfrei erschien, war folgendes: Ein sorgfältig isolierter, elektrisch geladener Versuchskörper wurde eine bestimmte Zeit lang der freien Luft ausgesetzt. Sein Potential zu Anfang der Expositionszeit war gemessen, eine zweite Bestimmung des verbliebenen Restes erfolgte am Schlusse. Dann wurde in gleicher Weise der Verlust an Spannung bestimmt, den derselbe Körper innerhalb eines kleinen Luftvolumens, nämlich in dem Gehäuse des zu den Messungen verwendeten Sinuselektrometers erlitt. Dürfte man den letzteren Verlust, der stets bedeutend kleiner als der in freier Luft beobachtete war, allein einem constanten Abflusse über den isolierenden Träger des Versuchskörpers zuschreiben, so ließe sich der wahre Verlust an die Luft berechnen. Indessen ist der Verdacht berechtigt, dass das Isolationsvermögen des Trägers, auch bei bester Wahl des Materials, im allgemeinen geringer in der freien Luft als in dem geschützten Raume des Elektrometergehäuses sein wird, ganz abgesehen davon, dass auch in dem letzteren eine Elektricitätsabgabe an die Luft stattfinden muss.

Es schien uns durchaus nothwendig, diesen Elektricitätsabfluss über den Isolator, an dem der Versuchskörper befestigt

[1] Linss, Meteorol. Zeitschr., 4, S. 355 (1887).

ist, stets unter Controle zu haben. Wir erreichten dies zuerst mit der folgenden Einrichtung, aus der dann der später von uns ausschließlich benutzte Zerstreuungsapparat hervorgegangen ist.



Ein Exner'sches Elektroskop E mit zurückgezogenen Schutzbacken war in der Mitte einer eben geschliffenen Eisenplatte PP aufgestellt und von einer oben tubulierten Glasglocke G überdeckt, deren unterer Rand, mit Vaseline bestrichen, luftdicht anschließend auf der Grundplatte ruhte. Die zum Einklemmen von Drähten bestimmte Schraube am Kopfe A des Elektroskops war entfernt, an ihrer Stelle konnte ein durch den Tubus eingeführter steifer Messingdraht mit seinem einen Ende D_1 eingeschraubt werden, während das andere bei D den cylindrischen Zerstreuungskörper Z aus Zinkblech trug. Der Draht DD_1 gieng dann frei durch die Mitte des Tubus hindurch. Unter der Glocke war neben dem Elektroskop ein Schälchen S aufgestellt, das einige Stücke in Scheiben zerschnittenen metallischen Natriums enthielt. Durch einen längs des Drahtes DD_1 verschiebbaren Gummistopfen K blieb der Tubus verschlossen, solange der Apparat nicht benutzt wurde. Es bildete sich so unter der Einwirkung des Natriums eine trockene Atmosphäre heraus, innerhalb welcher das Exner'sche Elektroskop das Maximum der erreichbaren Isolationsfähigkeit erhielt. Zum Schutze des Zerstreuungskörpers gegen äußere elektrostatische Einwirkungen, die durch die Schwankungen des elektrischen Feldes der Erde bei Beobachtungen im Freien verursacht werden, sowie gegen Änderungen seiner Capacität bei Annäherung von Leitern und schließlich zur Abhaltung der directen Sonnenstrahlen, starker Windstöße und fallender Niederschläge diente der oben mit einem Deckel verschlossene Cylinder CC_1 aus Zinkblech, der von einem mit der Grundplatte fest verbundenen Eisenstabe T getragen wurde. Sämmtliche Theile des Apparates, die aus Zink verfertigt waren, erhielten einen

Überzug von aufgeklebtem Seidenpapier, um Fehler durch photoelektrische Wirkungen auszuschließen, die ja am Zink schon bei schwachem Tageslichte merklich werden.

Der Tubus der Glasglocke war innen mit Stanniol überzogen und durch einen Streifen desselben Materials mit der Grundplatte und durch diese mit der Erde leitend verbunden.

Die Messung der Elektricitätszerstreuung mittels des Apparates geschah in folgender Weise: Nachdem der Gummistopfen K aus dem Tubus herausgezogen und bis zu einer bestimmten Stelle an dem Drahte DD_1 emporgeschoben war, wurde durch vorübergehendes Anlegen des einen Poles einer Zambonischen Säule dem aus Elektroskop, Zerstreuungskörper und Verbindungsdraht gebildeten Systeme ein gewisses Potential ertheilt, dessen Betrag in Volt, an dem geaichten Elektroskope abgelesen, mit V_0 bezeichnet werden möge. Nach einer gemessenen Zeit von t Minuten sei dieses infolge des Elektricitätsverlustes vom Zerstreuungskörper aus (mit Einschluss des Drahtes DD_1), sowie des Abflusses im Elektroskope auf den Betrag V gesunken. Nach erfolgter Ablesung wird durch Abschrauben des Verbindungsdrahtes bei D_1 das Elektroskop von dem Zerstreuungskörper getrennt und nun allein mittels eines durch den Tubus geführten isolierten Zuleitungsdrahtes, der sofort wieder entfernt wird, auf das Potential V_0' geladen. Nach weiteren t Minuten möge diese Spannung auf den Betrag V' zurückgegangen sein.

Setzt man die Giltigkeit des Coulomb'schen Zerstreuungsgesetzes voraus, d. h. dass der Elektricitätsverlust in gleichen Zeiten dem Potential des Versuchskörpers proportional ist und vernachlässigt man die durch die Bewegungen der Elektroskopblättchen verursachten Änderungen der Capacität des Instrumentes, so lässt sich, wie an dem weiter unten angeführten Orte gezeigt ist, aus den Beobachtungsdaten im Verein mit den bekannten Capacitäten des Elektroskopes allein (C') und des aus Elektroskop, Verbindungsdraht und Zerstreuungskörper bestehenden Systemes (C) die Elektricitätsmenge berechnen, die der Zerstreuungskörper einschließlich des Verbindungsdrahtes beim Potential 1 in der Zeiteinheit verliert. Drückt man diesen Verlust als Bruchtheil der Anfangsladung aus, so ergibt er sich als

$$a = \frac{1}{t\left(1 - \frac{C'}{C}\right)} \left\{ \log \frac{V_0}{V} - \frac{C'}{C} \log \frac{V'_0}{V'} \right\}.$$

Das Instrument in der beschriebenen Form hat etwa ein halbes Jahr lang zu den täglichen Messungen der Elektricitätszerstreuung im Freien gedient; es wurde dann durch die mehrfach von uns beschriebene leicht transportable Vorrichtung ersetzt, bei der die einzige isolierende Stütze, die sowohl die Elektroskopblättchen wie den Zerstreuungskörper trägt, in das Innere des Elektroskopgehäuses verlegt ist.[1]

Da wir anfangs den Vorgang der Elektricitätszerstreuung entsprechend der allgemein angenommenen Vorstellung als ein Entweichen der freien Elektricität von der Oberfläche des Zerstreuungskörpers in die Luft hinein auffassten und nicht im Sinne der Ionentheorie als eine Aufnahme entgegengesetzt geladener Ionen aus der Luft, so musste ein Einfluss der Beschaffenheit jener Oberfläche auf die Größe der Zerstreuung als sehr wahrscheinlich vorausgesetzt werden. Indessen gelang es nicht, sofern nur die photoelektrischen Wirkungen ausgeschlossen wurden, unzweideutige Unterschiede zu erhalten, mochte der Zerstreuungskörper von metallischer Oberfläche oder mit Papier belegt, trocken oder befeuchtet, erwärmt oder von der Temperatur der Umgebung sein. Die Erwärmung erreichten wir dadurch, dass wir geschmolzenes Natriumacetat, das ja beim Erstarren lange Zeit hindurch eine constante Temperatur beibehält, in das Innere des Zerstreuungskörpers einführten.

Wenn somit der Betrag des Elektricitätsverlustes im wesentlichen von der Natur der elektrisierten Oberfläche unabhängig war, so durften die mittels des Apparates nach der angegebenen Formel erhaltenen Zahlen für die Zerstreuung

[1] Der Apparat ist von uns beschrieben: Phys. Zeitschrift, 1, S. 11 (1899) und Terrestrial Magnetism and atm. Electricity, 4, p. 213 (1899). Die Dimensionen der wesentlichen Theile des Apparates, der von Günther und Tegetmeyer in Braunschweig verfertigt wird, sind diese: 1. Zerstreuungskörper. Höhe: 10 *cm*; Durchmesser: 4·8 *cm*. 2. Schutzcylinder. Höhe: 13·8 *cm*; Durchmesser 18 *cm*.

der positiven und negativen Elektricität (a_+ und a_-) als eine Art von Maß für die Eigenschaft der Luft, elektrische Ladungen fortzuleiten, angesehen werden.

Indessen haben spätere Erfahrungen gelehrt, dass es in strenger Weise nicht erlaubt ist, jene Zahlen auch auf den Elasticitätsverlust eines in einem anders dimensionierten Schutzcylinder oder gar frei der Luft ausgesetzten Leiters zu übertragen.

Aus einem nach der Ionentheorie leicht verständlichen Grunde gilt nämlich das Coulomb'sche Zerstreuungsgesetz, auf dem die Ableitung der Formel für den »Zerstreuungscoefficienten« a beruht, für abgeschlossene Luftvolumina nicht mehr. Anstatt dem Potential des Versuchskörpers proportional zu sein, sind, sofern dies Potential hoch genug ist, den sogenannten Sättigungsstrom hervorzurufen, die verlorenen Elektricitätsmengen in gleichen Zeiten constant.[1] In gewisser Weise macht sich diese Eigenthümlichkeit abgegrenzter Luftquanta schon in dem durch den Schutzcylinder nur theilweise eingeschlossenen Raume bemerklich, sie bewirkt, dass die nach der Formel berechneten Zerstreuungscoefficienten umso größer werden, je kleiner die Anfangsladung gewählt ist.[2] Die an zwei verschiedenen Apparaten bestimmten Zahlenreihen sind daher nur dann als gleichwertig anzusehen, wenn der Zerstreuungsraum in beiden gleiche Größe und Form hat und wenn der Bereich der Empfindlichkeit der Elektroskope so nahe zusammenfällt, dass man von gleichen Anfangspotentialen ausgehen kann.

Das naheliegende Auskunftsmittel, den Schutzcylinder wegzulassen, kann nur dann empfohlen werden, wenn der Apparat vollständig gegen das elektrische Feld der Erde geschützt ist, was im allgemeinen bei Beobachtungen im Freien nicht leicht zu erreichen sein dürfte. Man befindet sich eben in einer Zwangslage, und es muss von dem Orte

[1] H. Geitel, Phys. Zeitschrift, 2, S. 116 (1900) und C. T. R. Wilson, Cambridge Phil. Soc. Nov. 1900 und Proc. Roy. Soc., 68, p. 151 (1901).

[2] H. Ebert, Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, VI, S. 101 (1901).

der Aufstellung des Apparates abhängen, ob man den Schutzcylinder anwendet oder nicht. Wir haben uns durchweg für seine Anwendung entschieden, da die Messungen dadurch von äußeren Einflüssen unabhängiger werden, obgleich die so gefundenen Zerstreuungscoefficienten — mit den auf unbeschränkten Luftzutritt bezogenen verglichen — sicher zu klein ausfallen.

Ein weiterer störender Einfluss des Schutzcylinders muss noch erwähnt werden, der, wie es scheint, eng mit dem Zerstreuungsvorgange zusammenhängt und erst durch die radioactiven Eigenschaften der Luft verständlich wird. Es ist uns mehrfach aufgefallen, dass ein neuer, soeben aus der Werkstatt des Mechanikers hervorgegangener Apparat kleinere Werte der Zerstreuung anzeigt, als nachdem er wochenlang täglich zu den Messungen gedient hat. Wird er dann längere Zeit in einer Kiste verpackt gehalten, so erscheint seine Empfindlichkeit wiederum auf den alten Betrag herabgesetzt. Es ist durchaus wahrscheinlich, dass diese Erscheinung in einer durch die Luft auf der Innenfläche des Schutzcylinders oder auf dem Zerstreuungskörper inducierten Radioactivität begründet liegt. Da jeder mit negativer Ladung der Luft ausgesetzte Körper eine solche inducierte Radioactivität erhält, so wird, wenn der Zerstreuungskörper positiv geladen ist, die Innenseite des Schutzcylinders, wenn er negativ geladen ist, seine Oberfläche selbst sich mit einer activen Schicht überziehen. Obgleich deren Strahlungsvermögen, also auch ihre ionisierende Wirkung auf die Luft, in der Zeit rasch abklingt, erscheint es doch nicht unmöglich, dass bei fortgesetztem Gebrauche des Apparates eine zwar schwache, aber über mehrere Stunden, vielleicht auch ein bis zwei Tage andauernde Activierung der elektrisierten Flächen sich herausbildet. Dass die gedachte Wirkung unter günstigen Bedingungen sehr merklich werden kann, hat sich nach Beobachtungen in Höhlen gezeigt. Ist der Apparat in der gut leitenden Höhlenluft zu Zerstreuungsmessungen benutzt worden, so gibt er unmittelbar darauf auch im Freien zu große Beträge des Zerstreuungscoefficienten an. Vermuthlich ist diese »steigende Empfindlichkeit« der Zerstreuungsapparate auch von anderen Beobachtern bemerkt worden; auf

die Möglichkeit einer solchen Fehlerquelle ist schon früher von uns hingewiesen.[1]

2.

Wir wenden uns nun zu dem Beobachtungsmateriale selbst, und zwar zunächst zu dem in Wolfenbüttel von einem von uns (Geitel) gesammelten. Der Termin der Ablesungen lag stets um Mittag in der Zeit zwischen 11^h a. bis 3^h p. Da die Zerstreuung sowohl für positive, wie für negative Ladungen gemessen und für jedes Vorzeichen eine gesonderte Bestimmung der Correction (des Verlustes über die isolierende Stütze) ausgeführt wurde, die dieselbe Zeit (15′) wie die Messung selbst beanspruchte, so waren, wenn man die Zeit zum Laden des Elektroskopes und Einstellen auf eine passende Anfangsdivergenz mit einrechnet, für jede vollständige Beobachtung etwa $1^1/_2$ Stunden erforderlich. Der Apparat war dabei stets an demselben Platze, vor einem Fenster an der Ostseite des Hauses gegen einen Rasenplatz hin 6 *m* über dem Erdboden aufgestellt, ohne Schutz gegen Nord-, Ost- und Südostwind, vor den anderen Windrichtungen einigermaßen durch das Haus gedeckt. Nur bei besonders stürmischem Winde mussten hin und wieder die Beobachtungen unterbleiben, wenn die Elektroskopblättchen keine sichere Einstellung zeigten oder gar gegen die Schutzbacken getrieben wurden. Regenfall bildete kein Hindernis, wenn nicht gerade starke elektrische Entladungen eintraten, die trotz des Schutzdaches die Blättchen in Bewegung setzten; dagegen wurden bei Schneetreiben die Messungen unterbrochen, nachdem einmal durch in das Gehäuse des Elektroskopes geblasenen Schnee die Isolation zerstört und eine Reparatur des Instrumentes dadurch nöthig geworden war. Durch vorübergehende Behinderungen, sowie Abwesenheit auf Reisen wurden kleinere oder größere Lücken in den Beobachtungsreihen verursacht, insbesondere fällt der Monat Juli aus dem letzteren Grunde vollständig aus.

Da es uns nicht möglich war, neben den Beobachtungen der Elektricitätszerstreuung auch noch solche derjenigen meteoro-

[1] Phys. Zeitschrift, 2, S. 592 (1901).

logischen Elemente auszuführen, die vielleicht Einfluss auf jene haben könnten, so übernahmen wir die auf die Terminstunde von 2^h p. fallenden Werte der letzteren aus den Veröffentlichungen der meteorologischen Station erster Ordnung in Braunschweig, die etwa in 12 *km* Entfernung von unserer Wohnung liegt. Wir entnahmen so die Temperatur, die absolute und relative Feuchtigkeit, die Windrichtung und die Windstärke. Eine Angabe über den Grad der Bewölkung fügten wir nach eigener Wahrnehmung bei, ebenso eine Schätzung der Luftklarheit. Zu diesem Zwecke bestimmten wir, wie schon früher bei unseren Messungen der Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung,[1] die Sichtbarkeit verschieden entfernter Objecte und bezeichneten mit D_0 den geringsten Grad des Dunstgehaltes, also die größte Klarheit der Atmosphäre, bei der an einem in 15 *km* Entfernung gelegenen Höhenzuge mit freiem Auge deutlich Einzelheiten (Umrisse von Bäumen, Einschnitte des Terrains) wahrgenommen werden konnten. Die Marke D_1 wurde notiert, wenn jener Höhenzug zwar noch sichtbar, aber verschleiert erschien, D_2, wenn er verschwunden, aber ein in 2·5 *km* Entfernung gelegener Kirchthurm noch deutlich erkennbar war, D_3, wenn auch dieser bedeckt war, aber der von Wolfenbüttel (0·65 *km*) noch sichtbar blieb. Die »Dunstmarken« D_4, D_5, D_6 bezeichnen in ähnlicher Stufenfolge verschiedene weitere Grade der Nebeldichtigkeit; die letztere Marke entspricht einer Undurchsichtigkeit der Luft schon auf eine Schichtdicke von etwa 40 *m*.

Während die Angaben der Braunschweiger Station über Temperatur, absolute und relative Feuchtigkeit der Luft auch für Wolfenbüttel im wesentlichen zutreffen werden, gilt dies nur in sehr beschränktem Maße für die Windstärke. Immerhin können die hiefür übernommenen Zahlen als eine, wenn auch rohe Schätzung der Luftbewegung auch für unseren Beobachtungsort betrachtet werden.

In der Regel wurden zu jeder Zerstreuungsmessung die erwähnten Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse der Atmosphäre hinzugefügt, doch kamen vereinzelte

---

[1] Diese Sitzungsberiche, 101, Abth. IIa., S. 734, 1892.

Fälle vor, in denen die eine oder andere dieser Angaben nicht mit Sicherheit festzustellen war. So ist z. B. oft bei local begrenzten Niederschlagsfällen ein Urtheil über die Transparenz der Atmosphäre unmöglich, da auch bei größter Klarheit der Luft die entfernteren Objecte durch Regenschleier verdeckt sein können. In solchem Falle wurde die betreffende Zerstreuungsmessung nur in Bezug auf diejenigen meteorologischen Elemente verwertet, für welche brauchbare Simultanbeobachtungen vorlagen.

3.

Wir führen zunächst die mit der ursprünglichen Form des Instrumentes erhaltenen Ergebnisse von denen getrennt auf, die mit dem leicht transportablen Apparate gewonnen sind. Es liegen von jenen insgesammt 161 Doppelmessungen (für positive und negative Ladungen) vor, die sich auf die Zeit vom 19. December 1898 bis zum 10. Juni 1899 vertheilen.

Wir bezeichnen mit a_+ den oben definierten »Zerstreuungscoefficienten« (d. h. den Elektricitätsverlust pro Minute in Procenten der ursprünglich auf dem Versuchskörper vorhandenen Elektricitätsmenge bei constant gedachtem Potentiale) für positive, mit a_- den für negative Elektrisierung, mit a das Mittel aus beiden, mit q das Verhältnis $a_- : a_+$. Alsdann ergibt sich als Gesammtmittel aus den 161 Messungspaaren:

$$a_+ = 1 \cdot 26\% \qquad a_- = 1 \cdot 34\% \qquad a = 1 \cdot 30\%$$

$$\frac{a_-}{a_+} = q = 1 \cdot 06.$$

Wir stellen nun die Elektricitätszerstreuung, und zwar den Mittelwert a aus den Coefficienten für positive und negative Ladungen mit dem Gange der übrigen gleichzeitig bestimmten meteorologischen Elemente zusammen.

I.

Elektricitätszerstreuung und Lufttemperatur.

(Apparat 1.)

Temperaturintervall (° C.)	Anzahl der Beob-achtungen	Zerstreuungs-coefficient *a*
−5 — 0·0	14	1·12
0·1 — 5·0	35	1·00
5·1 — 10·0	40	1·22
10·1 — 15·0	32	1·45
15·1 — 20·0	15	1·72
20·1 — 30·0	8	1·28

II.

Elektricitätszerstreuung und Dampfdruck.

(Apparat 1.)

Dampfdruckintervall (*mm* Hg)	Mittlerer Dampfdruck (*mm* Hg)	Anzahl der Beob-achtungen	Zerstreuungs-coefficient *a*
0·0 — 4·0	3·10	32	1·28
4·1 — 6·0	5·04	42	1·27
6·1 — 8·0	6·74	47	1·30
8·1 — 10·0	9·16	12	1·44
10·1 — 13·0	11·04	5	1·03

III.

Elektricitätszerstreuung und relative Feuchtigkeit.

(Apparat 1.)

Intervall der relativen Feuchtigkeit	Anzahl der Beob-achtungen	Zerstreuungs-coefficient *a*
0 — 50%	34	1·62
51 — 75	58	1·26
76 — 100	42	1·02

IV.

Elektricitätszerstreuung und Lufttrübung.

(Apparat 1.)

Trübung der Luft	Anzahl der Beob- achtungen	Zerstreuungs- coefficient a
D_0	27	1·85
D_1	81	1·30
D_2	26	0·90
D_3-D_4	5	0·79
D_5-D_6	3	0·50

V.

Elektricitätszerstreuung und Windrichtung.

(Apparat 1.)

Windrichtung	Anzahl der Beob- achtungen	Zerstreuungs- coefficient a
N	12	1·96
NE	11	1·67
E	7	1·04
SE	10	0·93
S	5	1·07
SW	46	1·22
W	32	1·19
NW	15	1·47

Zur Darstellung des gleichzeitigen Verlaufes der Elektricitätszerstreuung und der Stärke der Luftbewegung wählen wir diejenige Windrichtung aus, die die stärksten Abstufungen der Geschwindigkeit darbietet. Es sind dies die West- und Südwestwinde.

Man erhält so folgende Tabelle:

VI.

Elektricitätszerstreuung und Windstärke, nur W und SW berücksichtigt.

(Apparat 1.)

Windstärke	Anzahl der Beob-achtungen	Zerstreuungs-coefficient *a*
1	1	1·21
2	5	0·63
3	14	1·17
4	19	1·12
5	22	1·27
6	13	1·41
7	2	1·49
8	2	1·21

Die Beobachtungen mittels des zweiten, leichter transportierbaren Apparates erstrecken sich über die Zeit vom 12. Juni 1899 bis zum 13. Mai 1900, ihre Zahl beträgt 259. Als Mittelwerte der Zerstreuungscoefficienten finden sich, in der gleichen Bezeichnungsart wie oben:

$$a_{+} = 1{\cdot}33 \qquad a_{-} = 1{\cdot}37 \qquad a = 1{\cdot}35$$

$$\frac{a_{-}}{a_{+}} = q = 1{\cdot}03.$$

Analog zu den vorigen Tabellen ergeben sich die folgenden:

I'.

Elektricitätszerstreuung und Lufttemperatur.

(Apparat 2.)

Temperaturintervall ° C.	Anzahl der Beob-achtungen	Zerstreuungs-coefficient *a*
−10·0— 5·0	13	1·12
− 5·1 − 0·0	17	1·28
0·1 − 5·0	48	1·36
5·1—10·0	49	1·44
10·1—15·0	52	1·31
15·1—20·0	38	1·45
20·1—25·0	21	1·34
25·1—30·0	11	1·09

II'.

Elektricitätszerstreuung und Dampfdruck.

(Apparat 2.)

Dampfdruckintervall *mm* Hg	Mittlerer Dampfdruck	Anzahl der Beobachtungen	Zerstreuungscoefficient *a*
0·0— 2·0	1·8	7	1·17
2·1— 3·0	2·3	14	1·19
3·1— 4·0	3·5	33	1·49
4·1— 5·0	4·6	31	1·27
5·1— 6·0	5·5	33	1·42
6·1— 7·0	6·6	28	1·28
7·1— 8·0	7·5	22	1·29
8·1— 9·0	8·6	16	1·38
9·1—10·0	9·5	26	1·39
10·1—11·0	10·5	19	1·39
11·1—12·0	12·0	9	1·26
12·1—15·0	15·0	5	1·15

III'.

Elektricitätszerstreuung und relative Feuchtigkeit.

(Apparat 2.)

Intervall der relativen Feuchtigkeit	Anzahl der Beobachtungen	Zerstreuungscoefficient *a*
0— 50%	37	1·43
51— 75	108	1·40
76—100	104	1·22

IV'.

Elektricitätszerstreuung und Lufttrübung.

(Apparat 2.)

Trübung der Luft	Anzahl der Beobachtungen	Zerstreuungscoefficient *a*
D_0	30	1·62
D_1	119	1·37
D_2	58	1·14
D_3—D_4	17	0·96

Stärkere Lufttrübungen als der Marke D_4 entsprechend, kamen am Apparate 2 nicht zur Beobachtung.

V'.

Elektricitätszerstreuung und Windrichtung.

(Apparat 2.)

Windrichtung	Anzahl der Beob-achtungen	Zerstreuungs-coefficient *a*
N	17	1·83
NE	22	1·47
E	18	1·15
SE	26	1·00
S	16	1·24
SW	83	1·33
W	38	1·37
NW	16	1·45

VI'.

Elektricitätszerstreuung und Windstärke, nur W und SW berücksichtigt.

(Apparat 2.)

Windstäkre	Anzahl der Beob-achtungen	Zerstreuungs-coefficient *a*
1	2	1·07
2	20	1·27
3	18	1·35
4	24	1·31
5	30	1·33
6	21	1·45
7	2	1·83
8	4	1·45

Die beiden Apparate, deren Angaben im vorigen getrennt behandelt sind, waren hinsichtlich der Dimensionen des Zerstreuungskörpers und des von dem Schutzcylinder eingeschlossenen Raumes nahe gleich gebaut. Dass auch die Capacitäten der Elektroskope nicht erheblich verschieden sein

konnten, gieng aus gleichzeitigen Messungen hervor, bei denen die gefundenen Beträge der Zerstreuungscoefficienten innerhalb der — für Apparat I infolge der unsicheren Ablesung durch die Wand der Glasglocke hindurch allerdings nicht gerade engen — Fehlergrenzen zusammenfielen. Dieselbe Übereinstimmung zeigt sich auch in den oben angeführten Gesammtmitteln aller Beobachtungen, so dass es erlaubt scheint, die Unterscheidung der Apparate bei der Darstellung des jährlichen Verlaufes der Zerstreuung fallen zu lassen. Man wird so zu der folgenden Übersicht geführt:

VII.

Jährlicher Verlauf des mittleren Zerstreuungscoefficienten.

(Jahresmittel aus 420 Beobachtungen $a = 1 \cdot 33\,^0/_0$).

Monat	Anzahl der Beobachtungen	Mittlere Zerstreuung in Procenten	Abweichung vom Mittel $1 \cdot 33\,^0/_0$
Januar	63	1·12	—0·21
Februar	58	1·25	—0·08
März	51	1·45	+0·12
April	32	1·55	+0·22
Mai	35	1·51	+0·18
Juni	19	1·43	+0·10
Juli	—	—	—
August	30	1·35	+0·02
September	30	1·35	+0·02
October	30	1·24	—0·09
November	30	1·30	—0·03
December	43	1·35	+0·02

4.

Wir wenden uns nun zu der Discussion der Ergebnisse.

Der mittlere Betrag des Zerstreuungscoefficienten ($1 \cdot 30\,^0/_0$ für Apparat I, $1 \cdot 35\,^0/_0$ für Apparat II) entspricht etwa dem

schon von Linss für Darmstadt angegebenen Werte. Man wird daher annehmen dürfen, dass in Deutschland (mit Ausschluss der Seeküsten und der Gebirge) der am Zerstreuungsapparat gemessene Elektricitätsverlust in der Minute im Durchschnitte $1^1/_8{}^0/_0$ beträgt. Freilich ist dabei, wie schon bemerkt, zu beachten, dass ein vollkommen frei exponierter Körper im allgemeinen einen stärkeren Verlust erfahren wird, der aber aus den angeführten Gründen in einwandfreier Weise weit schwieriger zu bestimmen sein würde.

Die an beiden Apparaten übereinstimmend hervortretende größere mittlere Zerstreuung für negative als für positive Ladungen ist nicht zufällig. Dieselbe Erscheinung zeigt sich bekanntlich in viel auffallenderer Weise auf Bergspitzen, eine Reihe besonders charakteristischer Messungen der Art wird im folgenden noch mitgetheilt werden. Man kann sie als durch einen Überschuss freier positiver Ionen in der Luft bedingt auffassen. Ob aber dieser Überschuss ein allgemein verbreiteter Zustand der Luft ist (etwa das aus der Theorie zu folgernde Complement der negativen Erdladung) oder nur local durch die Wirkung des Erdfeldes in der Nähe des Zerstreuungsapparates hervorgerufen wird, kann von vornherein nicht entschieden werden.[1] Indem das Schutzdach bei normaler Luftelektricität sich im Freien von selbst negativ ladet, wirkt es auch bei gleichem Gehalte der Luft an Ionen beiderlei Art durch Beschleunigung der positiven und Abstoßung der negativen in der Weise, dass es in der Luft in der Nähe des Zerstreuungsapparates ein Überwiegen der positiven Ionen, also eine Vermehrung des Zerstreuungscoefficienten für negative Elektricität herbeiführt. Es würde demnach in dem die Einheit übersteigenden Werte des Verhältnisses $\frac{a_-}{a_+} = q$ vielleicht nur zum Ausdrucke kommen, dass der Apparat nicht vollständig dem Einflusse des Erdfeldes entzogen gewesen ist.

Aus den beiden Tabellen (I und I′), in denen die Zerstreuung mit der Temperatur zusammengestellt ist, lässt sich

[1] Hiezu wären Messungen mittels des von Herrn Ebert construierten Aspirationsapparates erforderlich. H. Ebert, Phys. Zeitschrift, II, S. 662 (1901).

entnehmen, dass in mittleren Temperaturen die Zerstreuung durchschnittlich größer als in den Extremen ist. Schließt man die höchsten Wärmegrade von über 20° C. aus, so stellt sich eine ziemlich deutliche Zunahme mit der Temperatur heraus. Man könnte vermuthen, dass eine bestimmte Gesetzmäßigkeit dieser Art im allgemeinen bestände, aber vielleicht durch andere, mächtigere Einflüsse verdeckt wäre. Nun ist, wie im folgenden näher gezeigt werden wird und aus Tabelle IV und IV′ hervorgeht, der Factor, der die Zerstreuung am stärksten verändert, die Lufttrübung. Um diese zu eliminieren, stellen wir die Zerstreuung mit der Temperatur nur für solche Tage zusammen, an denen der höchste Grad der Luftklarheit (D_0) notiert wurde.

VIII.

Abhängigkeit des Zerstreuungscoefficienten von der Temperatur an dunstfreien Tagen.

Mittlere Temperatur ° C.	Anzahl der Beobachtungen	Mittlerer Zerstreuungs-coefficient a
0·9	7	1·83
7·2	11	2·15
12·7	16	1·64
17·8	12	1·63
22·4	7	1·54

Man sieht, dass jetzt der höchsten Temperatur die kleinste Zerstreuung entspricht, während das Maximum zwischen 7° und 8° C. liegt, ein Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Temperatur der Luft, wie er für eingeschlossene staubfreie und ruhende Mengen wohl als bestehend vorausgesetzt werden darf,[1] in der freien Atmosphäre also nicht erkennbar ist.

Es möge hinzugefügt werden, dass die Kleinheit der Zerstreuung bei hoher Sommertemperatur sich schon an den

[1] Insofern bei genügend hoher Temperatur die Leitfähigkeit der Luft sehr beträchtlich werden wird.

Einzelmessungen mit nicht geringerer Deutlichkeit verräth, wie bei starker, allerdings meist mit Nebelbildung verbundener Winterkälte.

In noch höherem Maße als der Temperatur wird man von vornherein geneigt sein, dem Feuchtigkeitsgehalte der Luft einen bestimmenden Einfluss auf die elektrische Zerstreuung beizumessen, und zwar eine Zunahme der Leitfähigkeit der Luft mit wachsendem Wassergehalte vorauszusetzen. Aber auch hier ist eine bestimmte Beziehung nicht erkennbar, und im Widerspruche zu jener Voraussetzung zeigt sich übereinstimmend an beiden Apparaten, dass dem höchsten Dampfdrucke der niedrigste Mittelwert des Zerstreuungscoefficienten zugehört. Am deutlichsten tritt die Regellosigkeit des Verlaufes in der Tabelle II′ hervor, die das größte Beobachtungsmaterial umfasst.

Dass mit steigendem Wasserdampfgehalte der Luft die Elektricitätszerstreuung zunehme, ist von vielen Seiten, besonders nachdrücklich von Coulomb, behauptet worden. Aber wie die Beobachtungen in der freien Atmosphäre einen solchen Zusammenhang nicht erkennen lassen, so wird in gleicher Weise die Zerstreuung in abgeschlossenen Lufträumen durch die Anwesenheit von Wasserdampf nicht merklich beeinflusst.[1] Unsere Erfahrungen stimmen in diesem Falle mit den älteren von Warburg[2] überein. Auch Linss (l. c.) bemerkt schon, dass die Zerstreuung beim Eintritte regnerischen Wetters meist geringer als vorher gefunden wird.

Es scheint uns nur die Annahme zu bleiben, dass die zu der gegentheiligen Erfahrung geführten Physiker trotz aller Vorsicht durch den Elektricitätsverlust über die mehr oder weniger hygroskopischen Isolatoren getäuscht worden sind.

Gleichfalls widerspricht den verbreiteten Anschauungen der Inhalt der Tabellen III und III′, in denen nicht der absolute Gehalt der Luft an Wasserdampf, sondern ihre Entfernung von dem Sättigungszustande als unabhängige Veränderliche zugrunde gelegt ist. Hier zeigt sich mit übereinstimmender Regelmäßigkeit eine Abnahme der Zerstreuung mit wach-

[1] J. Elster und H. Geitel, Phys. Zeitschrift, 2, S. 560 (1901).

[2] Warburg, Pogg. Ann., 146, S. 578 (1872).

sender relativer Feuchtigkeit, die Leitfähigkeit der freien Luft ist durchschnittlich umso größer, je weiter diese vom Sättigungspunkte entfernt ist. Dasselbe Resultat ist inzwischen schon von einem von uns auf Grund einer besonders instructiven Reihe von Beobachtungen in Spitzbergen bekannt gegeben[1] und von Herrn Pocchettino in Conegliano bestätigt worden.[2] Was die Deutung der Erscheinung anlangt, so kann man daran denken, dass die Ionen der Gase als Ansatzkerne bei der Condensation des Wasserdampfes wirken. Nimmt man nun an, dass schon vor der eigentlichen sichtbaren Nebelbildung die Ionen durch Anlagern von Wassermolecülen belastet werden, so ist die Verminderung ihrer Geschwindigkeit und daher die Abnahme des Leitvermögens der Luft mit wachsender relativer Feuchtigkeit wohl verständlich.

Es ist möglich, dass der Vorgang in solcher Weise zu deuten ist, vorderhand ist es wichtiger, auf den Zusammenhang hinzuweisen, in dem die Erscheinung mit der allgemein bei Fallwinden (Föhn, Bora) beobachteten Zunahme der Elektricitätszerstreuung steht.[3] Hiernach scheint Luft, die sich in absteigender Bewegung befindet, eine abnorm große Leitfähigkeit zu haben. Es kann diese Eigenschaft in der soeben angedeuteten Weise mit der Entfernung der Luft von ihrem Sättigungspunkte zusammenhängen, aber auch darauf zurückzuführen sein, dass sie höheren ionenreicheren Schichten der Atmosphäre entstammt. Hohe Zerstreuungscoefficienten, verbunden mit relativer Trockenheit, würden demnach auf absteigende Luftströme hinweisen. Es wäre wichtig, experimentell festzustellen, ob nicht schon allein eine Druckzunahme, d. h. ein im Wachsen begriffener Druck, eine Vermehrung der Leitfähigkeit über die normale in einem Gase hervorrufen kann.

Die Tabellen IV und IV′ lassen die schon erwähnte Thatsache in schlagender Weise erkennen, die sich sehr bald nach

---

[1] J. Elster, Phys. Zeitschrift, 2, S. 116 (1900).

[2] Pocchettino, Rend. della R. Acc. dei Lincei, 10, p. 104 (1901).

[3] Vgl. P. Czermak, Phys. Zeitschr., 3, S. 185 (1902) und F. Exner, Bericht über die Thätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie. (Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen.) Phys. Zeitschrift, 4, S. 91—92 (1902).

Beginn der regelmäßigen Messungen herausstellte, nämlich die Abhängigkeit der Zerstreuung von der Transparenz der Atmosphäre.

Je durchsichtiger die Luft, desto besser leitend ist sie im allgemeinen. Ob die Trübung der Atmosphäre vom Wassernebel, von Rauch oder Staub herrührt, ist von nebensächlicher Bedeutung; auffallend kleine Zerstreuungscoefficienten beobachtet man daher sowohl in dichtem Nebel, wie auch bei dem in Norddeutschland zuweilen über große Flächengebiete ausgebreiteten Moorrauche, in gleicher Weise auch in der mit Kohlenstaub beladenen Luft großer Städte. Vielleicht sind einige Beispiele von Interesse. Am 13. März 1899 fand sich bei dichtem Nebel (es wurde D_5 bis D_6 notiert) um 10^h a. der Zerstreuungscoefficient $a_+ = 0 \cdot 36\,^0/_0$. Um Mittag, bei inzwischen erfolgter Aufhellung, stieg der Betrag auf $0 \cdot 72\,^0/_0$. Am 6. Juni 1899 herrschte um Mittag (zur normalen Beobachtungszeit) ganz schwacher Moorrauch, der die Fernsicht gerade zu beeinträchtigen begann (Dunstmarke: D_1 bis D_2). Der Zerstreuungscoefficient a_+ war $1 \cdot 3\,^0/_0$. Im Laufe des Nachmittags nahm die Stärke des Rauches soweit zu, dass die Trübung der Luft mit D_3 geschätzt wurde. Dabei war a_+ auf $0 \cdot 45\,^0/_0$ gesunken.

Beobachtet man auf hohen Bergen bei solcher Wetterlage, dass in schneller Folge Nebel und Aufklärung einander ablösen, so tritt dieser Parallelismus zwischen dem Gange der Zerstreuung und der Lufttransparenz so deutlich hervor, dass er nothwendig bemerkt werden muss. Besonders groß wird die Amplitude der Schwankungen des Coefficienten a_- (für negative Ladungen), da auf Berggipfeln infolge der schon hervorgehobenen Einwirkung des Erdfeldes auf die freien Ionen der Atmosphäre die Zerstreuung für negative Elektricität viel größer ist als im Tieflande. So war auf dem Säntisgipfel am 12. Juli 1899 um 4^h p. der Zerstreuungscoefficient a_- bei klarer Luft, aber in der Nähe dichter Cumuli, gleich $5 \cdot 7\,^0/_0$, vier Minuten darauf, als der Berg von den Wolken bedeckt war, fand sich $a_- = 0 \cdot 99\,^0/_0$.

Übrigens lässt sich diese Verminderung der Zerstreuung durch in der Luft verbreiteten Staub oder Wassernebel, wie wir an anderem Orte gezeigt haben, mit voller Sicherheit auch

in kleinen Räumen künstlich hervorbringen.[1] Dieser Einfluss des Staubgehaltes der Luft auf ihr Leitvermögen kann in der Weise gedeutet werden, dass die freien Ionen der Luft, sobald sie den Staubkörnchen nahe genug kommen, von diesen elektrostatisch angezogen werden. An Stelle der leicht beweglichen Gasionen treten daher geladene oder auch neutrale, relativ viel bedeutendere Massen, die im Vergleiche mit jenen als fast unbeweglich betrachtet werden müssen.

Die Zusammenstellung der Zerstreuungscoefficienten mit der gleichzeitig beobachteten Richtung des Windes (Tabelle V und V') lässt ebenfalls für beide Apparate übereinstimmend eine Gesetzmäßigkeit erkennen. Hiernach fällt das Maximum mit Nordwind zusammen, das Minimum mit Südost. (Bei Apparat II ist die Abstufung der Zwischenwerte vollkommen, Apparat I zeigt eine geringe Anomalie, indem die Reihenfolge der im übrigen nahe beieinander liegenden Beträge der Zerstreuungscoefficienten für SW und W sich umkehrt.) Es liegt nahe, das Ergebnis in der Weise aufzufassen, dass die Luftströmungen mit nördlicher Componente reine Luft von der See mit sich führen, deren größere Leitfähigkeit sich noch bis nach Mitteldeutschland hinein bemerklich macht. Thatsächlich ist auch bei Nordwind die Lufttrübung durchschnittlich am geringsten.

Indessen darf ein Bedenken gegen diese Deutung nicht verschwiegen bleiben. Unser Beobachtungsort liegt an der Nordgrenze der Stadt Wolfenbüttel, so dass alle Luftströme, mit Ausnahme der aus dem Norden kommenden, erst über Theile der Stadt hinweg den Apparat erreichen. Leicht können sie hiebei Rauch und Staub aufnehmen und dadurch an Leitfähigkeit verlieren. Zu Zweifeln dieser Art werden Beobachtungen der Elektricitätszerstreuung in der Nähe von Städten immer Veranlassung geben.[2]

Man könnte weiter vermuthen, dass etwa nur die nicht völlig freie Aufstellung des Apparates, der Schutz, den das Haus gegen westliche Winde gewährte, in den Tabellen V zum

[1] J. Elster und H. v. Geitel, Drude's Ann., 2, S. 425 (1900).

[2] Herr K. v. Wesendonck findet in Berlin die Elektricitätszerstreuung im allgemeinen bei W und SW größer. Naturw. Rundschau, XVII, S. 304 (1902).

Ausdrucke gelangte. Ein gewisser Einfluss der Deckung gegen den Wind ist wohl nicht in Abrede zu stellen, doch kann er unmöglich ausschlaggebend sein, da die kleinsten Zerstreuungen gerade bei E und SE, also bei völlig ungeschützter Lage des Apparates, gemessen sind.

Zu den Tabellen VI und VI′, die die Zerstreuung mit der Stärke des Windes zusammenstellen, sind eben mit Rücksicht auf die hervorgetretene Abhängigkeit von der Windrichtung nur die Tage mit westlicher oder südwestlicher Luftströmung ausgewählt, für die, wie schon bemerkt, das Beobachtungsmaterial am reichsten ausgefallen ist. Man erkennt, dass die Ventilation des Zerstreuungsraumes nicht von so bestimmendem Einflusse auf den Elektricitätsverlust ist, als man wohl voraussetzen möchte. Wenn auch im ganzen eine gewisse Zunahme der Zerstreuungscoefficienten mit wachsender Windgeschwindigkeit auftritt, so zeigen doch beide Apparate übereinstimmend einen Rückgang bei der Stärke 8. Auf Grund der durch die Ionentheorie gegebenen Vorstellungen lässt sich diese Anomalie verstehen. Eine mäßige Luftbewegung wird dem geladenen Zerstreuungskörper eine größere Ionenzahl zuführen, als ihn in ruhender Luft trifft, bei höherer Geschwindigkeit, die derjenigen der Ionen im Felde des Körpers vergleichbar wird oder sie übertrifft, kann dagegen eine Hemmung der Entladung eintreten, indem die Ionen zum Theile vorübergeblasen werden, ohne den Körper zu erreichen. Schon Matteucci fand, dass die Elektricitätszerstreuung in einem starken Luftstrome geringer als in ruhender Luft werden kann.[1]

Wir sehen nun von der Vergleichung mit dem Verlaufe anderer meteorologischer Elemente ab und behandeln schließlich allein die Veränderlichkeit des Zerstreuungscoefficienten in der Zeit. Man hat hier die tägliche und jährliche Variation zu unterscheiden.

Die erstere zeigt an Tagen mit constantem Wettercharakter mit leidlicher Regelmäßigkeit das Maximum in der Nähe der

[1] Die sehr interessanten Untersuchungen von Matteucci finden sich in Ann. de physique et de chimie, 28 (1850).

Mittagsstunden, entsprechend der dann gewöhnlich erreichten größten Transparenz der Luft.

Die jährliche Schwankung ist in Tabelle VII gegeben. Das Maximum liegt im April, auch der Mai zeichnet sich noch durch einen hohen Betrag der Zerstreuung aus, das Minimum fällt in den Januar. Es muss indessen bemerkt werden, dass die Mittelwerte für die einzelnen Monate aus Einzelmessungen gebildet sind, die von diesen Mitteln sehr beträchtlich abweichen. Abnorm starke Zerstreuungen (nahe an $3^0/_0$), sowie sehr kleine (unter $1^0/_0$) können in jedem Monate vorkommen, je nachdem böiges Wetter aus N oder NW herrscht oder Nebelbildung eintritt.

Das Maximum in der Zeit vom April bis gegen den Mai erklärt sich aus der relativen Häufigkeit jener Böen um diese Jahreszeit, ebenso das Minimum im Januar durch das Vorherrschen nebliger Tage während der winterlichen Luftdruckmaxima. Im ganzen genommen ist die Elektricitätszerstreuung im Frühjahr und Sommer daher höher als im Herbst und Winter gefunden worden, übereinstimmend mit den früheren Ergebnissen von Linss.

Das Wesentliche der gesammten Resultate aus den Wolfenbütteler Messungen fassen wir wie folgt zusammen:

1. Die in Wolfenbüttel an einem mit Schutzdach versehenen Zerstreuungsapparat der gebräuchlichen Dimensionen im Freien gemessenen Zerstreuungscoefficienten für positive und negative Ladungen betragen im Mittel $1^1/_3{}^0/_0$.

2. Die Zerstreuung für negative Elektricität ist durchschnittlich etwas größer als die für positive. (Wahrscheinlich nur Wirkung des Erdfeldes.)

3. Eine Abhängigkeit der Zerstreuung von der Lufttemperatur ist nicht nachweisbar.

4. Ebenso ist eine Beziehung zur absoluten Feuchtigkeit nicht zu erkennen.

5. Dagegen ist die Zerstreuung im Mittel umso höher, je weiter die Luft von ihrem Sättigungspunkte entfernt ist.

6. Den stärksten Einfluss übt die Trübung der Luft aus, die Zerstreuung nimmt ab mit wachsendem Gehalte der Luft an Nebel, Rauch und Staub.

7. Die größten Beträge der Zerstreuung wurden im Mittel bei Winden mit nördlicher Componente beobachtet.

8. Mit wachsender Windstärke nimmt die Zerstreuung im allgemeinen zu, doch sind bei eigentlichem Sturm verhältnismäßig niedrige Zahlen gefunden. Böen aus N oder NW pflegen hohe Zerstreuungen mitzubringen.

9. An Tagen von constantem Wettercharakter tritt das Maximum der Zerstreuung meist in der Nähe des Mittags auf.

10. Die jährliche Periode (für das Intervall von Ende 1898 bis 1900) zeigte das Maximum im April, das Minimum im Januar.

5.

Außer den soeben dargestellten regelmäßigen Stationsbeobachtungen in Wolfenbüttel haben wir auch Messungen an anderen Orten ausgeführt. So hielten wir uns im Sommer 1899 zu dem Zwecke, die Elektricitätszerstreuung im Hochgebirge zu untersuchen, längere Zeit am Fuße und auf dem Gipfel des Säntis, sowie in der Umgebung von Zermatt auf. Ein weiteres Material hat der eine von uns (Elster) auf zwei Reisen zusammengebracht, die er im Jahre 1900 kurz hintereinander nach Italien und Nordafrika, sowie nach Norwegen und Spitzbergen unternahm. Nach Beendigung dieser Reisen wurden die Angaben des verwandten Instrumentes (Apparat III) mit denen des von Geitel zu den Stationsbeobachtungen in Wolfenbüttel benutzten Apparates II verglichen. Die in den folgenden Tabellen mitgetheilten Werte der Zerstreuungscoefficienten sind mittels des sich aus diesem Vergleiche ergebenden Reductionsfactors auf ein einheitliches Maß (Angaben des Apparates II) zurückgeführt. Im Verlaufe des Winters 1900—1901 wurde die Calibrierung des Apparates III mehrfach nachgeprüft und dadurch einige Ungleichmäßigkeiten beseitigt; geringe Differenzen der unten mitgetheilten Zahlen gegen früher publicierte (Physikal. Zeitschrift, II, S. 113 bis 116) finden hierin ihre Erklärung.

Obgleich alle diese Messungen auf Reisen, wie es in der Natur der Sache liegt, für ein und denselben Ort sich nur über eine verhältnismäßig kurze Zeit erstrecken, so lassen sie doch manche bemerkenswerte Erscheinung hervortreten.

Wir geben umstehend auch hier die Resultate zunächst in tabellarischer Form und beginnen mit den Beobachtungen auf Bergen, indem wir jedesmal die Controlmessungen an tiefer gelegenen benachbarten Stationen hinzufügen.

Man entnimmt der Tabelle, dass die Elektricitätszerstreuung auf den hoch gelegenen, nicht eigentlichen Gipfelstationen (Meglisalpe, Zermatt, Riffelhaus, Maloja) im allgemeinen die auf den tieferen (Wolfenbüttel, Weißbad, Lugano) übertrifft, auch in Capri und Catania ist sie im wesentlichen höher. Ferner tritt aufs deutlichste der polare Unterschied der Entladung in exponierten Lagen hervor; die größten Beträge von q sind ausnahmslos auf Bergspitzen beobachtet (Säntisgipfel, Gorner Grat, Monte Genoroso, Monte Solaro, Piz Languard).

Schon bei der Discussion der Wolfenbütteler Beobachtungen war angegeben, dass die polaren Unterschiede vielleicht allein auf eine Wirkung des Erdfeldes zurückzuführen seien. Für Bergspitzen trifft diese Auffassung sicher zu. Sehr instructiv ist in dieser Beziehung eine Beobachtung auf dem Piz Languard, die in die Tabelle nicht aufgenommen wurde, aus der hervorgeht, dass bei genügendem Schutze gegen das Erdfeld der Betrag von q sich auch dort der Einheit nähert.

Während nämlich im Freien (vergl. Tabelle) gefunden war:

$$a_+ = 1\cdot3 \qquad a_- = 14\cdot3 \qquad q = 11\cdot2,$$

ergab sich im Inneren der auf dem Gipfel errichteten Glasveranda bei geöffneten Fenstern:

$$a_+ = 2\cdot6 \qquad a_- = 4\cdot7 \qquad q = 1\cdot8$$

und nach Schließung der Fenster:

$$a_+ = 1\cdot6 \qquad a_- = 1\cdot8 \qquad q = 1\cdot1.$$

Auffallend klein sind die für die Zerstreuung im April 1900 auf dem Monte Generoso in 1700 *m* Seehöhe ermittelten Zahlen. Vielleicht liegt der Grund hiefür in dem Vorhandensein einer Schicht feinen Dunstes, aus dem sich am Beobachtungstage nur die höchsten Gipfel der Walliser Alpen erhoben. Es ist aber auch sehr wohl möglich, dass bei dem ganz windstillen, sonnigen Wetter aufsteigende Luftströme dem Apparate Luft

IX.

Elektricitätszerstreuung in verschiedenen Meereshöhen.

Zeit der Beobachtung	Ort	Meereshöhe	a_+	a_-	q	n	Bemerkungen
Dec. 1898 bis Mai 1900	Wolfenbüttel	80 *m*	1·30	1·36	1·05	420	
11./VI. 1899	Brocken im Harz	1140	1·40	2·60	1·85	3	
5./VII. bis 9./VII. 1899	Weißbad unter dem Säntis	800 *m*	1·22	1·31	1·07	13	Witterung wechselnd, nur zum Theil klar
10./VII. 1899	Meglisalpe unter dem Säntis	1480	2·96	2·97	1·00	5	Wechselnde Bewölkung und Graupelböen
11./VII. bis 13./VII. 1899	Säntis	2005	1·15	6·86	5·97	18	Morgens wolkenlos, nachmittags gewitterig
18./VII. bis 21./VII. 1899	Zermatt	1620 *m*	4·19	3·92	0·94	6	Wolkenlos
20./VII. 1899	Gorner Grat (Gipfel)	3140	0·48	6·65	14·95	2	Wolkenlos; lebhafter Wind
20./VII. 1899	Gorner Grat (etwas tiefer)	3100	0·98	5·36	5·47	2	Wolkenlos; Standort vor Wind geschützt
20./VII. 1899	Station Gorner Grat	3000	2·68	7·01	2·61	2	Wolkenlos; Standort vor Wind geschützt
20./VII. 1899	Riffelhaus	2600	4·42	6·82	1·54	2	Wolkenlos; Standort vor Wind geschützt

21./VII. 1899	Theodulpass	3000	1·01	3·91	3·87	2	Wolkenlos. Messung auf dem oberen Theodulgletscher
13./IV. 1900	Lugano	280 *m*	0·96	0·76	0·79	2	Wolkenlos, Dunst
13./IV. 1900	Monte Salvatore	909	0·44	1·86	4·23	4	Wolkenlos, Dunst
14./IV. 1900	Lugano	280 *m*	0·71	0·70	0·99	2	Wolkenlos; starker Dunst
15./IV. 1900	Monte Generoso	1700	0·22	3·13	14·2	4	Wolkenlos; starker Dunst
1./V. 1900	Capri	ca. 100 *m*	4·89	4·86	0·99	3	Wolkenlos; starker Dunst, sehr heiß
1./V. 1900	Monte Solaro	585	0·48	6·39	13·3	3	Wolkenlos; starker Dunst, sehr heiß
11./V.	Catania	ca. 50 *m*	2·92	3·50	1·20	2	Auf der Plattform des R. Osservatorio. Wolkenlos. Wind
12./V.	Casa inglese am Ätna	2900	3·10	6·97	2·25	4	Anfangs heiter; später bewölkt
17./VI.	Lugano	280 *m*	2·20	1·82	0·83	18	Wolkenlos; sehr heiß
21./VI.	Maloja Kulm	1811	6·48	8·33	1·28	13	Nach stürmischer Nacht beginnende Ausheiterung
22./VI.	Piz Languard	3220	1·28	14·27	11·15	8	Anfangs wolkenlos; später gewitterig

aus der Niederung zuführten oder dass in so früher Jahreszeit, wenn die Witterung nicht Föhncharakter hat, die Elektricitätszerstreuung mit der Erhebung über den Meeresspiegel überhaupt langsamer zunimmt als im Sommer. Auch bei Ballonfahrten[1] hat man inzwischen mehrfach in 1400 bis 2000 *m* Höhe Werte von etwa gleich niedriger Größenordnung beobachtet.

Wir stellen nun auf S. 975, Tab. X, die Mittelwerte für jene Orte in tabellarischer Übersicht zusammen, an denen Beobachtungsreihen über mehrere aufeinanderfolgende Tage ausgedehnt wurden.

Zu diesen Messungen ist im einzelnen Folgendes zu bemerken:

In Lugano war der in einem Garten aufgestellte Apparat im wesentlichen der Einwirkung des elektrischen Feldes der Erde entzogen; demzufolge tritt im Mittel ein Unterschied zwischen a_+ und a_- nicht hervor; dagegen liegen diese Werte entsprechend der größeren Transparenz der Gebirgsluft höher als in Mitteldeutschland. Am 18. Juni 1900 setzte gegen Abend Nordföhn ein, was eine sprungweise Steigerung der Leitfähigkeit von 2·2 auf 5·2% bewirkte.[2]

Auch in Capri stand der Apparat an einem elektrisch geschützten Orte; auch hier ist a_+ von a_- im Mittel kaum verschieden. Auffallend ist der hohe Mittelwert von 4% und die Höhe der (bei Sirocco auftretenden) Maxima, die 6% überschreiten können.

In Tromsö wurden die Beobachtungen auf einer oberhalb der Stadt gelegenen Wiese in ganz freier Lage angestellt. Der Himmel war meist stark bewölkt, die Transparenz der Luft dabei jedoch mehrfach außerordentlich groß. Die Werte der a liegen über doppelt so hoch wie in Wolfenbüttel, und die Maxima erreichen bei böigem Regenwetter nahe 6%. Trotz der exponierten Aufstellung des Apparates ist q durchschnittlich nur wenig von 1 verschieden.

[1] Vergl. H. Ebert, Weitere Messungen der elektrischen Zerstreuung in großen Höhen. Sitzungsber. der königl. bayr. Akad. der Wissenschaften, Bd. 31 (1901), Heft 1, S. 46 ff.

[2] Vergl. Czermack, l. c.

X.

Ort		Beobachtet von	Beobachtet bis	Mittelwerte a_+	Mittelwerte a_-	Maximalwerte a_+	Maximalwerte a_-	q	Anzahl der Beob-achtungen n	Mittlere Tem-peratur ° C.	Mittlere relative Feuch-tigkeit	Bemerkungen
Lugano		12./IV. und 17./VI. 1900	16./IV. und 18./VI. 1900	1·87	1·87	3·20	4·16	1·00	34	16·2	60%	
Capri		23./IV. 1900	2./V. 1900	4·22	4·44	6·19	6·36	1·05	92	15·4	68%	
Tromsö		30./VI. und 12./VIII. 1900	1./VII. und 13./VIII. 1900	3·02	3·38	3·97	4·21	1·11	23	9·3	72%	Während einer Regenböe beobachtet: $a_+ = 5 \cdot 73$ $a_- = 6 \cdot 02$
Spitzbergen	an Land	5./VIII. 1900	10./VIII. 1900	3·76	5·86	5·56	6·20	1·55	20	7·5	86%	
Spitzbergen	an Land und auf dem Meere			2·88	4·62	6·03	10·20	1·60	56	5·6	84%	
Nordfriesische Insel Juist		8./VII. 1901	29./VII. 1901	1·17	1·54	3·75	4·70	1·32	120	20·2	80%	

XI. Elektricitätszerstreuung

Datum	Ort	Grad nördliche Breite	Mittelwerte a_+	Mittelwerte a_-	$\frac{a_+ + a_-}{2}$	$\frac{a_-}{a_+} = q$
5./VIII.	Westküste Spitzbergens, a. d. Dampfer 1h p.	78°45′	1·75	3·25	2·50	1·2
»	Virgohafen, an Land 9—11h p.	79	3·43	6·60	5·01	1·9
6./VIII.	Virgohafen, an Land 1h p.	79	3·80	5·06	4·43	1·3
»	Felsenriff im Virgohafen 6h p.	79	2·19	3·70	2·95	1·7
7./VIII.	Nordwestcap Spitzbergens; auf einer schmalen Straße zwischen Inseln 1h p.	79 50	6·03	7·86	6·95	1·3
»	Vor Cap Treurenberg, a. d. Dampfer 7—11h a.	80 10	1·27	3·48	2·38	2·7
9./VIII.	Icefjord, a. d. Dampfer 5h p.	78 15	1·72	3·56	4·23	2·1
»	Adventbay, an Land 8—10 p.	78 15	4·06	5·70	4·88	1·4
10./VIII.	Südcap Spitzbergens, a. d. Dampfer 1h p.	76 26	3·00	4·33	3·67	1·4
»	Südcap Spitzbergens, etwas südlicher, a. d. Dampfer. 5h p.	76	1·56	2·64	2·10	1·7

in Spitzbergen. 1900.

Maxima a_+	Maxima a_-	Anzahl n	$t°$ C.	Relative Feuchtigkeit in Procenten	Dampfdruck	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
1·80	3·70	4	6·8	90%	6·6	—	Halb bedeckt, windstill
3 81	6·40	7	6·3	93	6·3	—	Etwas Cirri, sonst wolkenlos
4 72	5·28	7	8·9	73	6·2	+ 49	Etwas Cirri, sonst wolkenlos
3·22	4·44	6	6·2	84	6·0	+119	Etwas Cirri, sonst wolkenlos
6·03	10·20	4	11·2	68	6·8	—	Bedeckt, doch kein Regen. Windstill
2·50	4·90	9	4·1	92	5·6	—	Bedeckt, windstill. Dampfer im Packeis verankert
2·07	3·83	8	4·9	86	5·6	+100	Nach dichtem Bodennebel plötzlich Ausheiterung
5·56	6·20	6	7·3	77	5·8	92	Im S regnende Wolkenmassen. 10¼ p. Platzregen
—	—	2	2·1	90	4·8	94	Trübe, doch kein Regen
—	—	2	2·0	90	4·8	—	Dampfer im Packeis verankert. Trübe, kein Regen

Die Beobachtungen in Spitzbergen wurden theils auf dem Dampfer, theils an Land ausgeführt. Die Beobachtungen an Land einerseits und auf dem freien Meere anderseits lieferten ihrer Größe nach sehr verschiedene Werte der a. Durchgehends war die Elektricitätszerstreuung auf dem im Eise verankerten Dampfer kleiner, das Verhältnis der Entladungsgeschwindigkeiten q dagegen größer als an Land und erreichte unter dem 80. Grade nördlicher Breite den durchschnittlichen Wert 2·7. Auf den schmalen Wasserstraßen, welche das Inselgewirr von Nordwest-Spitzbergen durchziehen, war die Elektricitätszerstreuung nicht wesentlich von der an Land verschieden. Am 7. August wurde in einer solchen bei still liegendem Dampfer der höchste Wert für a_{-}, nämlich $10^{0}/_{0}$, beobachtet, der bislang im Meeresniveau gefunden wurde.

Bei dem Interesse, das Zerstreuungsmessungen in den arktischen Gebieten gewähren dürften, haben wir in der vorstehenden Tabelle die gesammten in Spitzbergen gewonnenen Werte der a, geordnet nach ihrer zeitlichen Folge, unter gleichzeitiger Angabe einiger orientierender meteorologischer Daten, zusammengestellt.

Neben der Höhe der Zerstreuungscoefficienten fällt die Größe der Verhältniszahl q auf: die Zerstreuung für negative Ladungen erfolgt ausnahmslos schneller als die für positive. Da Unterschiede in diesem Maße, wie oben gezeigt, sonst nur in dem starken Erdfelde oberhalb von Bergspitzen, niemals indessen über einer Ebene beobachtet sind, so lag es nahe, sie auch hier auf die Wirkung eines besonders hohen Potentialgefälles zurückzuführen. Nun ergaben aber die directen Messungen, dass das Potentialgefälle im allgemeinen nicht besonders hoch war, sondern etwa um $100 \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ schwankte.[1] Entweder hat man daher anzunehmen, dass zu jener Zeit die Luft über Spitzbergen einen wirklichen Überschuss positiver Ionen über die negativen enthielt oder dass die positiven Ionen beweglich genug waren, um durch das verhältnismäßig schwache Feld der

[1] Vergl. J. Elster, Messungen des elektrischen Potentialgefälles auf Spitzbergen und Juist. Terr. Magn. März 1902, S. 9.

Erde merklich gegen den Zerstreuungsapparat hin beschleunigt zu werden. In der That haben Versuche in der gut leitenden Luft von Kellern gezeigt, dass hier schon viel geringere Kräfte als in freier Luft genügen, um polare Verschiedenheiten hervorzurufen. Es wird also die Wirkung des Erdfeldes ebenfalls umso deutlicher hervortreten, je besser leitend die Luft an sich ist. Es ist klar, dass die Unterschiede in den Zerstreuungscoefficienten noch deutlicher werden mussten, sobald man den Zerstreuungskörper ohne Schutzcylinder dem vollen Einflusse des Erdfeldes aussetzte. So fand sich auf dem flachen Strande der Adventbay ohne Schutzcylinder:

$$a_{-} = 17 \cdot 4\% \qquad a_{+} = 5 \cdot 3\% \qquad q = 3 \cdot 3.$$

Die über einen Zeitraum von etwa drei Wochen ausgedehnten Beobachtungen auf der nordfriesischen Insel Juist (Tab. X.) sollten im wesentlichen zur Entscheidung der Frage dienen, ob die Nähe des Meeres an sich eine Erhöhung der Leitfähigkeit der Luft bedingt. Im Juli 1901 war dies offenbar durchschnittlich nicht der Fall; doch ist zu bemerken, dass während der genannten Zeit Landwinde die vorherrschenden waren. An den wenigen Tagen mit steiler Seebrise wurden Zerstreuungscoefficienten erhalten, welche die im Binnenlande bislang beobachteten Maxima um etwa 1% übertrafen.

In der letzten Tabelle XII, die unten folgt, sind die Zerstreuungscoefficienten für solche Orte verzeichnet, an denen nur eine geringe Zahl von Beobachtungen angestellt wurde.

Hier möchten wir nur einige wenige Punkte noch hervorheben.

Zunächst die Beobachtung in Hellarmö, einem kleinen, im Sulitelma-Gebiet liegenden Dorfe, in dessen Nähe an den Thalwänden große Wasserfälle niedergehen.

Es ist dies der einzige Ort, an welchem auf der Nordlandsreise das Verhältnis q kleiner als 1 gefunden wurde, entsprechend einem durch das zerspritzende Wasser erzeugten Überschusse freier negativer Ionen in der Luft des Thales. Diese Beobachtung bestätigt unsere früheren,[1] bei Zermatt in

[1] Terr. Magn., l. c. L. 213.

XII.

Datum	Ort	Standort	a_+	a_-	n	Bemerkungen
7./V.1900	Palermo	Via Lincoln	0·34	0·51	2	Wolkenlos
7./V.	Palermo	R. Osservatorio, auf dem flachen Dache	2·18	1·01	2	Wolkenlos
11./V.	Catania	R. Osservatorio, auf einer hochgelegenen Gallerie	2·94	3·50	3	Wolkenlos
16./V.	Taormina	Im Garten des Hotels Naumachia	1·09	1·96	3	Halb bedeckt
24./V.	Oase Biskra	Balkon des Hotels Victoria	2·81	2·22	4	Wolkenlos, windstill
27./V.	Algier	Balkon des Hotels de la Poste inmitten der Stadt	0·65	0·70	2	Wolkenlos, windstill
28./V.	Mustapha supérieur bei Algier	Rasenplatz der Villa Rose	1·15	1·94	10	Wolkenlos, lebhafte Seebrise
29./V.	Algier	Balkon des Hotels de la Poste	0·88	0·50	2	Wolkenlos, windstill
4./VI.	Cannes (Riviera)	Balkon des Hotels de Genève, unweit des Strandes	1·27	—	3	Beginnende Ausheiterung, windstill
6./VI.	Cannes (Riviera)	Balkon des Hotels de Genève, unweit des Strandes	0·85	1·78	18	Bis 5^h p. wolkenlos, dann Cirri, lebhafte Brandung
14./VII.	Blankenburg a. Harz	Regenstein bei Bl. a. H.	0·49	0·74	2	Wolkenlos, lebhafter Wind
28./VIII.	Bodö	Im Hafen, auf stillliegendem Dampfer	3·33	3·27	2	Bedeckt, windstill
2./VIII.	Hammerfest	Auf dem Plateau oberhalb der Stadt	1·30	1·47	2	Heiter, fast windstill
14./VIII.	Risöhavn auf Andö	Im Hafen, auf stillliegendem Dampfer	2·46	2·51	2	Fast wolkenlos, windstill
16./VIII.	Sjönstaa (Sulitelma-Gebiet)	Auf einer Wiese dicht beim Orte	2·54	2·19	5	Heiter, lebhafter Wind
16./VIII.	Hellarmö (Sulitelma-Gebiet)	Auf einer Wiese dicht beim Orte	4·81	3·31	3	Wolkenlos, windstill. Große Wasserfälle in der Nähe
23./VIII.	Saltjöbaden bei Stockholm	Am Strande, ganz im Freien	1·82	2·39	6	Wolkenlos, fast windstill
27./VIII.	Klampenborg bei Kopenhagen	Am Strande	1·45	1·95	6	Wolkenlos, fast windstill

der Nähe von Wasserfällen ausgeführten Messungen. Dasselbe Resultat fand auch G. Rachmanow[1] bei einem Wasserfalle in der Nähe von Jalta.

Ferner tritt deutlich hervor, dass innerhalb großer Städte die Werte der Zerstreuungscoefficienten auf $^1/_2$ bis $^1/_3$ ihres Betrages gegenüber solchen Punkten herabsinken, die im benachbarten Gelände oder so hoch über der Stadt liegen, dass sie in eine bereits wesentlich staubreinere Luftschicht hineinragen. Man vergleiche z. B. die in Palermo, Via Lincoln, ermittelten Zahlen mit den auf der Gallerie des hochgelegenen Observatoriums erhaltenen und ebenso die in Algier mit den im Gelände (in Mustapha supérieur) gewonnenen.

---

[1] G. Rachmanow, Terr. Magn., 6, S. 122 (1901).

Zur Moleculartheorie anisotroper Dielektrica.

Mit einer experimentellen Bestimmung der Dielektricitätsconstante einer gespannten Kautschukplatte senkrecht zur Spannungsrichtung

von

Dr. **Anton Lampa.**

Aus dem I. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1902.)

Ich habe in zwei Abhandlungen (diese Sitzungsberichte, Bd. CIV, Abth. IIa, Juli und December 1895) die Clausius'sche Theorie der Dielektrica verallgemeinert unter der Annahme regelmäßiger Vertheilung der leitenden Partikel (Molekel), welchen als einfachste nach drei Richtungen verschiedene Form ellipsoidische Gestalt zugeschrieben wurde. Offenbar kann man sich ein doppelbrechendes Medium auch aus Kugeln aufgebaut denken, welche nach den drei Hauptrichtungen verschieden dicht angeordnet sind. In den folgenden Zeilen soll zunächst die Theorie für ein derartiges Medium durchgeführt und dann mit einer experimentellen Bestimmung der Dielektricitätsconstante gespannten Kautschuks verglichen werden. Es soll also die Annahme gemacht werden, dass die leitenden Partikeln des Dielektricums gleich große Kugeln vom Radius ρ seien, derart angeordnet, dass von denselben in drei zueinander senkrechten Richtungen, respective a, b, c auf die Längeneinheit kommen. Es sei $a > b > c$. Das Coordinatensystem sei parallel diesen Hauptrichtungen, die X-Axe $\parallel a$-Linie, die Y-Axe $\parallel b$-Linie, die Z-Axe $\parallel c$-Linie. Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunktes einer leitenden Kugel mit x, y, z, die Coordinaten eines Oberflächenpunktes dieser Kugel mit $x+\xi$, $y+\eta$,

$z+\zeta$. Ein außerhalb der Kugel liegender Punkt habe die Coordinaten x', y', z'. Seine Entfernung vom Kugelmittelpunkte sei r, von dem betrachteten Oberflächenpunkte r_1. Dann ist zunächst unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Ich nehme nun bei jenem Oberflächenpunkte ein Flächenelement do und bezeichne die auf demselben befindliche Elektricitätsmenge mit hdo; ist das Potential der Kugel u und sein Wert in dem betrachteten äußeren Punkte u', so ist

$$u' = \int \frac{h\,do}{r_1} = \frac{1}{r}\int h\,do + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\int \xi h\,do + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\int \eta h\,do + \\ + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\int \zeta h\,do,$$

wobei die Integrationen über die gesammte Kugelfläche zu erstrecken sind. Das Integral $\int h\,do$ stellt die Gesammtladung der Kugel dar; da dieselbe nur von Influenz herrührt, ist sie Null, so dass

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\int \xi h\,do + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\int \eta h\,do + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\int \zeta h\,do. \qquad 1)$$

Die Integrale in diesem Ausdrucke repräsentieren die elektrischen Momente der Kugel. Diese Integrale sind leicht zu bestimmen unter der bei der Kleinheit der Kugeln zulässigen Annahme, dass das Feld in ihrer Umgebung homogen ist.

Nun schneiden wir aus unserem Dielektricum ein Volumelement $d\tau$ heraus, und es entsteht zunächst die Aufgabe, das Potential dieses Volumelementes zu bestimmen. Bei isotropen Medien wird einfach das Potential u' einer leitenden Kugel mit der Anzahl derselben im Volumelement multipliciert; die

Integration über das ganze Dielektricum liefert dann das Potential des polarisierten Dielektricums. In dieser Weise darf hier nicht verfahren werden, da dadurch der anisotrope Charakter des Mediums nicht zur Berücksichtigung käme. Eine einfache Überlegung zeigt den Weg, der hier einzuschlagen ist. Die inducierende elektrische Kraft K habe die Componenten X, Y, Z. Die Dichte h erscheint dann als Superposition dreier Dichten h_x, h_y, h_z, welche von den Kraftcomponenten X, Y, Z herrühren. Bei einem isotropen Dielektricum sind nach den drei Richtungen gleich viel Kugeln vorhanden, die Dichten h_x, h_y, h_z sind daher in gleicher Weise an der Bildung des Potentials des Volumelementes betheiligt. Wollen wir in unserem Falle dieses Potential auch durch Multiplication des Potentials einer Kugel mit der Zahl der im Volumelement enthaltenen gewinnen, so müssen wir diese Dichten h_x, h_y, h_z entsprechend der anisotropen Vertheilung der Kugeln in Rechnung stellen, d. h. wir werden gewissermaßen das anisotrope Medium durch ein isotropes ersetzen, bei dem die Polarisation der einzelnen Kugel jedoch eine andere, und zwar so gewählt ist, dass die Multiplication mit der Zahl der Kugeln der vorausgesetzten Anisotropie entspricht. Dies ist auf folgendem Wege zu erzielen. Auf der X-Axe liegen a Kugeln auf der Längeneinheit. Hätten wir ein isotropes Medium mit dieser Vertheilung, so wäre die Summe der h_x in dem Volumelement $d\tau$: $H_x = a^3 h_x . d\tau$, auf die einzelne Kugel würde die Dichte $\frac{H_x}{a^3 d\tau} = h_x$ entfallen; hier haben wir aber in dem Volumelement bloß $abc . d\tau$ Kugeln, auf die einzelne entfällt daher die Dichte $\frac{H_x}{N d\tau} = \frac{a^3}{N} h_x$, worin $N = abc$ ist. In gleicher Weise ist bezüglich der beiden anderen Richtungen vorzugehen, und man hat demnach

$$h = \frac{a^3}{N} h_x + \frac{b^3}{N} h_y + \frac{c^3}{N} h_z \qquad 2)$$

zu setzen, um der Anisotropie Rechnung zu tragen. Demnach wird das Potential des Volumelementes $= u' N d\tau$, worin für h sein in 2) dargestellter Wert einzusetzen ist. Man erhält so den Ausdruck

$$\left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \int (a^3 h_x + b^3 h_y + c^3 h_z) \xi \, do \right.$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \int (a^3 h_x + b^3 h_y + c^3 h_z) \eta \, do$$

$$\left. + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \int (a^3 h_x + b^3 h_y + c^3 h_z) \zeta \, do \right\} d\tau. \qquad 3)$$

Nun ist für eine Kugel im homogenen Felde bekanntlich

$$h_x = \frac{3}{4\pi} X \frac{\xi}{\rho}, \quad h_y = \frac{3}{4\pi} Y \frac{\eta}{\rho}, \quad h_z = \frac{3}{4\pi} Z \frac{\zeta}{\rho};$$

diese Werte in 3) eingesetzt, geben für das Potential des Volumelementes den Ausdruck:

$$\frac{3}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[X a^3 \int \xi^2 \, do + Y b^3 \int \xi \eta \, do + Z c^3 \int \xi \zeta \, do \right] \right.$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \left[X a^3 \int \eta \xi \, do + Y b^3 \int \eta^2 \, do + Z c^3 \int \eta \zeta \, do \right]$$

$$\left. + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \left[X a^3 \int \zeta \xi \, do + Y b^3 \int \zeta \eta \, do + Z c^3 \int \zeta^2 \, do \right] \right\} d\tau.$$

Führt man Polarcoordinaten ein, so findet man leicht

$$\int \xi^2 do = \int \eta^2 do = \int \zeta^2 do = \frac{4\pi}{3} \rho^4,$$

während sich der Wert der übrigen Integrale gleich Null ergibt. Man erhält also schließlich für das Potential des Volumelementes den Ausdruck

$$\left[\rho^3 a^3 X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \rho^3 b^3 Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \rho^3 c^3 Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau.$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \rho^3 a^3 X &= \alpha \\ \rho^3 b^3 Y &= \beta \\ \rho^3 c^3 Z &= \gamma \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

so wird das Potential des Volumelementes

$$\left[\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau$$

und das des ganzen polarisierten Dielektricums

$$U' = \int \left[\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau. \tag{5}$$

Die weitere Aufgabe besteht nun zunächst in der Bestimmung der Kräfte X, Y, Z. Dieselben rühren zum Theile von einem äußeren Potential her, das mit V bezeichnet werden soll. Ein Theil der Kräfte wird daher durch $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ dargestellt sein. Der zweite Theil dieser Kräfte rührt von dem polarisierten Dielektricum selbst her. Gleichung 5) stellt das Potential desselben im Punkte x', y', z' dar. Hier handelt es sich nun um dessen Wert im Punkte x, y, z. Um ihn zu erhalten, vertauschen wir in 5) die accentuierten und unaccentuierten Coordinaten untereinander, indem wir dem Volumelement $d\tau$ die Coordinaten x', y', z' und dem Punkte, für welchen das Potential bestimmt werden soll, die Coordinaten x, y, z zuschreiben. Wir erhalten so das gesuchte Potential (α, β, γ haben im ganzen Dielektricum dieselben Werte)

$$U = \int \left[\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right] d\tau.$$

Nun geben aber $-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}$ noch nicht die gesuchten Theile der Kraftcomponenten, denn wenn die Kraft gesucht wird, welche ein leitendes Körperchen erleidet, muss von der Kraft des gesammten Dielektricums offenbar diejenige abgezogen werden, welche das Körperchen selbst ausübt. **Clausius** findet für dieselbe unter der Voraussetzung gleichmäßiger Anordnung der Kugeln

$$\| X\text{-Axe den Wert } \frac{4\pi}{3}\alpha'$$

$$\| Y\text{-Axe den Wert } \frac{4\pi}{3}\beta'$$

$$\| Z\text{-Axe den Wert } \frac{4\pi}{3}\gamma'.$$

Darin bedeuten α', β', γ' die Werte $\rho^3 NX, \rho^3 NY, \rho^3 NZ$. Da das Körperchen, dessen Kraftcomponenten gesucht werden, in beiden Fällen eine Kugel ist, können wir die Clausius'schen Werte benützen, nur müssen wir statt α', β', γ' unsere Werte α, β, γ einführen. Es waren aber $\alpha = \rho^3 a^3 X$, $\beta = \rho^3 b^3 Y$, $\gamma = \rho^3 c^3 Z$; es sind also $\alpha' = \frac{N}{a^3}\alpha$, $\beta' = \frac{N}{b^3}\beta$, $\gamma' = \frac{N}{c^3}\gamma$, und es erscheinen die von dem Dielektricum herrührenden Antheile der polarisierenden Kräfte darstellbar durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial U_1}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4\pi}{3}\frac{N}{a^3}\alpha \\ -\frac{\partial U_1}{\partial y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{4\pi}{3}\frac{N}{b^3}\beta \\ -\frac{\partial U_1}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{4\pi}{3}\frac{N}{c^3}\gamma \end{aligned}\right\}.$$

Hiemit ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{\partial(U+V)}{\partial x} + \frac{4\pi}{3}\frac{N}{a^3}\alpha \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial y} = -\frac{\partial(U+V)}{\partial y} + \frac{4\pi}{3}\frac{N}{b^3}\beta \\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{\partial(U+V)}{\partial z} + \frac{4\pi}{3}\frac{N}{c^3}\gamma \end{aligned}\right\}.$$

Combiniert man hiemit die Gleichungen 4), so folgt:

$$\alpha = -\frac{1}{\frac{1}{\rho^3 a^3} - \frac{4\pi}{3}\frac{N}{a^3}} \cdot \frac{\partial(U+V)}{\partial x}$$

$$\beta = -\frac{1}{\frac{1}{\rho^3 b^3} - \frac{4\pi}{3}\frac{N}{b^3}} \cdot \frac{\partial(U+V)}{\partial y}$$

$$\gamma = -\frac{1}{\frac{1}{\rho^3 c^3} - \frac{4\pi}{3}\frac{N}{c^3}} \cdot \frac{\partial(U+V)}{\partial z}.$$

Nun ist $\frac{4\pi}{3}\rho^3$ das Volum einer Kugel; dieses multipliciert mit N, gibt die Größe des in der Volumeinheit von den Kugeln eingenommenen Raumes. Diese Größe $\frac{4\pi}{3}\rho^3.N$ bezeichnet man als Raumerfüllung; setzen wir sie $= g$, so können wir schreiben:

$$\alpha = -\frac{\rho^3 a^3}{1-g} \cdot \frac{\partial(U+V)}{\partial x}$$

$$\beta = -\frac{\rho^3 b^3}{1-g} \cdot \frac{\partial(U+V)}{\partial y}$$

$$\gamma = -\frac{\rho^3 c^3}{1-g} \cdot \frac{\partial(U+V)}{\partial z}$$

Setzen wir noch der Kürze wegen

$$\frac{\rho^3 a^3}{1-g} = E_1, \quad \frac{\rho^3 b^3}{1-g} = E_2, \quad \frac{\rho^3 c^3}{1-g} = E_3, \tag{6}$$

so erhalten wir für das Potential des Dielektricums den Ausdruck

$$U' = -\int E_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau - \int E_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau -$$

$$-\int E_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau. \tag{7}$$

Diese Gleichung stimmt vollständig überein mit derjenigen, welche ich in der ersten der beiden genannten Abhandlungen unter Voraussetzung ellipsoidischer Molekel abgeleitet habe. Ich kann daher bezüglich der Anwendung der Gleichung 7) auf einen Plattencondensator, welche zu dem Zusammenhange zwischen den Größen E_1, E_2, E_3 und den Dielektricitätsconstanten nach den drei Hauptrichtungen führt, auf diese Abhandlung verweisen. Es ergab sich dort für die Hauptdielektricitätsconstanten (parallel den Richtungen, in welchen a, b, c Kugeln auf die Längeneinheit kommen):

$$\left.\begin{aligned} D_a &= 1+4\pi E_1 \\ D_b &= 1+4\pi E_2 \\ D_c &= 1+4\pi E_3 \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen 6):

$$\left.\begin{aligned} \frac{D_a-1}{4\pi} &= \frac{\rho^3 a^3}{1-g} \\ \frac{D_b-1}{4\pi} &= \frac{\rho^3 b^3}{1-g} \\ \frac{D_c-1}{4\pi} &= \frac{\rho^3 c^3}{1-g} \end{aligned}\right\}. \qquad 9)$$

Hieraus findet man zunächst das Verhältnis der Vertheilungszahlen:

$$\frac{a}{c} = \nu = \sqrt[3]{\frac{D_a-1}{D_c-1}} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} = \sigma = \sqrt[3]{\frac{D_b-1}{D_c-1}},$$

und durch Multiplication der Gleichungen unter Berücksichtigung, dass $\frac{4\pi}{3}\rho^3 abc = \frac{4\pi}{3}\rho^3 N = g$ ist, die Raumerfüllung bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{g}{1-g} = \frac{1}{3}\sqrt{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)},$$

also

$$g = \frac{\sqrt{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}{3+\sqrt{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}. \qquad 10)$$

Die entsprechende Formel unter Zugrundelegung ellipsoidischer Partikel lautete

$$g = \frac{J\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}{1+J\sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}.$$

Darin ist

$$J = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1-\lambda^2 u^2)^{1/2}(1-\lambda'^2 u^2)^{1/2}}$$

und $\lambda^2 = \frac{p^2-q^3}{p^2}$, $\lambda'^2 = \frac{p^2-r^2}{p^2}$, wenn p, q, r die Halbaxen der ellipsoidischen Partikel sind. (Für Kugeln ist $p = q = r$ und $J = \frac{1}{3}$.) Man sieht aus dem Vergleiche der beiden Formeln, dass die Werte der Raumerfüllung, welche gemäß den beiden Hypothesen aus den Hauptdielektricitätsconstanten abgeleitet werden können, verschieden sind. Kann man also die Substanz im amorphen Zustande untersuchen, so hätte man die Möglichkeit, durch Vergleich des auf diesem Wege experimentell bestimmten Wertes der Raumerfüllung mit den aus der Untersuchung der anisotropen sich ergebenden zu entscheiden, welche der beiden Hypothesen für diese Substanz geeigneter ist.

Die weitere Verfolgung der Theorie, wie ich sie in der zweiten der eingangs genannten Arbeiten ausgeführt habe, ist überflüssig. Auch hier wird man für die Dielektricitätsconstante nach einer beliebigen Richtung r, welche mit den Hauptrichtungen a, b, c die Winkel (a, r), (b, r), (c, r) einschließt, den Ausdruck erhalten:

$$D_r = D_a \cos^2(a, r) + D_b \cos^2(b, r) + D_c \cos^2(c, r).$$

Die hier durchgeführte Hypothese ist offenbar die naturgemäßere, sobald es sich um Substanzen handelt, die aus

ihrem natürlichen isotropen Zustande durch Deformation in den anisotropen überführt wurden. Hier bietet sich nun die Möglichkeit zu einer experimentellen Prüfung der abgeleiteten Formeln. Ich habe dieselbe an einer Platte von vulcanisiertem Kautschuk — sie war ein Rechteck von 30 *cm* Länge und 12 *cm* Breite — vorgenommen; über das Resultat dieses Versuches soll noch berichtet werden.

Ich zeichnete auf die Platte ein Quadrat von 50 *mm* Seitenlänge. Nach mehreren Dehnungen (‖ der längeren Seite der Platte) blieb eine Deformation zurück. Das Quadrat war in ein Rechteck übergegangen, dessen Seiten 51·4, respective 49·5 *mm* maßen. Die Dicke der Platte betrug in diesem Zustande 2·15 *mm*. Hierauf wurde die Platte auf ihre Dielektricitätsconstante geprüft. Dieselbe werde als dem ungespannten Zustande entsprechend mit D_u bezeichnet. Dann wurde die Platte gedehnt. Das Rechteck verlängerte eine Seite von 51·4 auf 61·5 *mm* und verkürzte die andere von 49·5 auf 46 *mm*, blieb aber, dank dem Umstande, dass es in der Mitte der gedehnten Platte gezeichnet war, geradlinig begrenzt. Die Dicke nahm dabei ab und wurde gleich 2 *mm*. Die Dickenmessung erfolgte in dem zweiten Falle bloß mit einer Schublehre (im ungespannten Zustande mit dem Sphärometer zwischen zwei Glasplatten), doch ist diese Messung eigentlich ganz entbehrlich, da man ja aus der Verkürzung der einen Rechteckseite auf die Verringerung der Dicke schließen kann. In der That ist die gerechnete Dicke $x = 2\cdot15 \cdot \frac{46}{49\cdot5} = 2$. Das aus diesen Daten gerechnete Verhältnis der Quercontraction zur Längsdilatation μ stimmt gut mit älteren Versuchen von Röntgen.[1] Es ist $\mu = \frac{1}{2} - \frac{v}{2\varepsilon}$, wenn v die relative Volumänderung, ε die relative Längsdehnung bezeichnet. Aus den obigen Zahlen findet man $\mu = 0\cdot413$, während Röntgen 0·37—0·64 als Grenzwerte gefunden hat. Die Dielektricitätsconstante der gespannten Platte senkrecht zur Spannungsrichtung werde mit D_g bezeichnet.

---

[1] Pogg. Ann., 159, S. 601 (1876).

Die Messung der Dielektricitätsconstante geschah mit dem Nernst'schen Apparat. Verwendet wurde ein Condensator, dessen Platten bloß einen Durchmesser von 35·6 *mm* hatten, damit nur der homogen deformierte Theil der Kautschukplatte zur Untersuchung käme. Als Vergleichsdielektricum diente chemisch reines Benzol, welches bei der Temperatur von 19·3° C., welche es bei der Messung hatte, die Dielektricitätsconstante 2·2871 hat.[1] Bezeichnet man die mit der Glasplatte des einen der beiden Condensatoren des Apparates vorzunehmende Verschiebung, die nothwendig ist, um das Telephon zum Schweigen zu bringen, mit s, wenn der Messcondensator kein Dielektricum enthält, ferner mit s_0 jene, wenn er in Benzol taucht, endlich mit S jene, wenn sich das Dielektricum zwischen seinen Platten befindet, so ist, wenn noch die Dielektricitätsconstante des Benzols mit D_0 bezeichnet wird, die gesuchte Dielektricitätsconstante

$$D = (D_0 - 1)\frac{S - s}{s_0 - s} + 1.$$ [2]

In unserem Falle erhalten wir nicht direct die Dielektricitätsconstanten des Kautschuks, weil er den Raum zwischen den Platten nicht ganz ausfüllt. Durch eine leichte Umrechnung erhält man die gesuchten Werte.

Die Plattendistanz betrug bei allen Messungen 3·2 *mm*. Ferner fand ich als Mittel von fünf Versuchsreihen, die untereinander sehr wenig abwichen:[3]

die Verschiebung für Luft	$s =$	4·1 *mm*,
» » » Benzol	$s_0 =$	10
» » » ungespannten Kautschuk	$s_u =$	6·85
» » » gespannten Kautschuk	$s_g =$	7·1

[1] Turner, Über die Dielektricitätsconstanten reiner Flüssigkeiten. Göttinger Dissertation. Leipzig, Engelmann, 1900. — Ich bin Herrn stud. Ehrenhaft für die Überlassung des Benzols zu Dank verpflichtet.

[2] Nernst, Methode zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten. Z. f. phys. Chemie, 14, S. 639 (1894).

[3] Bei den Messungen wurde der Messcondensator an beide Condensatoren abwechselnd angeschaltet. Die folgenden Zahlen betragen die Hälfte der so gewonnenen.

Hieraus folgen gemäß der obigen Formel eine Constante D'_u, wenn der Kautschuk zwischen den Condensatorplatten ungespannt war, und eine Constante D'_g, wenn er gespannt war, und zwar ergibt sich:

$$D'_u = 1 \cdot 6,$$
$$D'_g = 1 \cdot 655.$$

Hieraus sind nun die Dielektricitätsconstanten selbst zu berechnen. Bei der Berechnung von D' ist so vorgegangen, als ob der Raum zwischen den Condensatorplatten ganz mit einem Dielektricum von der Dielektricitätsconstante D' ausgefüllt wäre, d. h. also, wenn wir die Fläche einer Platte mit F, den Plattenabstand mit m bezeichnen, als ob seine Capacität

$$C = \frac{F}{4\pi \frac{m}{D'}}$$

wäre. Hat die dielektrische Platte die Dicke n und die Dielektricitätsconstante D, so ist die Capacität des Condensators gegeben durch

$$C = \frac{F}{4\pi \left(m - n + \frac{n}{D}\right)}.$$

Diese Capacitäten sind dieselben, wir erhalten daher für die Berechnung der gesuchten Dielektricitätsconstanten D_u und D_g aus D'_u und D'_g die Formeln

$$\frac{m}{D'_u} = m - n_u + \frac{n_u}{D_u} \quad \text{und} \quad \frac{m}{D'_g} = m - n_g + \frac{n_g}{D_g}.$$

Es ist $m = 3 \cdot 2\, mm$, $n_u = 2 \cdot 15\, mm$, $n_g = 2\, mm$. Somit folgt:

$$D_u = \mathbf{2 \cdot 263}$$
$$D_g = \mathbf{2 \cdot 727}.$$

Die Änderung der Dielektricitätsconstante durch die Spannung ist also eine recht beträchtliche. Es erübrigt nun noch, dieses experimentelle Resultat mit dem theoretischen zu vergleichen.

Die Dielektricitätsconstante des gespannten Kautschuks senkrecht zur Spannungsrichtung (unser D_g) werde jetzt mit D_a bezeichnet. Dann ist gemäß 9)

$$\frac{D_a-1}{4\pi} = \frac{\rho^3 a^3}{1-g},$$

wenn a die Zahl der Kugeln auf die Längeneinheit in dieser Richtung bedeutet. Für den ungespannten Kautschuk gilt

$$\frac{D-1}{4\pi} = \frac{\rho^3 N^3}{1-g'};$$

darin ist N die Zahl der Kugeln auf die Längeneinheit, g' die Raumerfüllung des ungespannten Kautschuks. Diese beiden Gleichungen ergeben:

$$\frac{D_a-1}{D-1} = \left(\frac{a}{N}\right)^3 \frac{1-g'}{1-g}.$$

Die Größen rechter Hand sind nun leicht zu bestimmen. Im ungespannten Kautschuk kommen N Kugeln auf die Längeneinheit, auf die Dicke der Platte demgemäß 2·15 N Kugeln, im gespannten a, auf die Dicke der Platte daher $2a$ Kugeln. Da die Gesammtzahl der auf die Dicke der Platte kommenden Kugeln in beiden Fällen dieselbe ist, folgt

$$2a = 2{\cdot}15\, N,$$

$$\frac{a}{N} = \frac{2{\cdot}15}{2} = 1{\cdot}075,$$

$$\left(\frac{a}{N}\right)^3 = 1{\cdot}4223.$$

Ferner verhalten sich die Raumerfüllung g' im ungespannten Kautschuk zu jener im gespannten g umgekehrt wie die Volumina v' und v ein und derselben Masse des Kautschuks, also, wenn wir die Masse des durch das Rechteck bestimmten Parallelepipeds zugrunde legen:

$$\frac{g'}{g} = \frac{v}{v'} \quad \text{oder} \quad g = \frac{v'}{v} g'.$$

Es ist nun $\frac{v'}{v} = \frac{51 \cdot 4 \times 49 \cdot 5 \times 2 \cdot 15}{61 \cdot 5 \times 46 \times 2} = 0 \cdot 96681$. Die Raumerfüllung des ungespannten Kautschuks g' kann nun gemäß der Clausius'schen Formel durch seine Dielektricitätsconstante ausgedrückt werden. Es ist

$$g' = \frac{D-1}{D+2} = \frac{2 \cdot 263-1}{2 \cdot 263+2} = 0 \cdot 2963.$$

Hieraus folgt $g = 0 \cdot 2865$ und

$$\frac{1-g'}{1-g} = \frac{0 \cdot 7037}{0 \cdot 7135} = 0 \cdot 9864,$$

also

$$\frac{D_a-1}{D-1} = 1 \cdot 4223 \times 0 \cdot 9864 = 1 \cdot 383.$$

Da $D = 2 \cdot 263$ war, folgt hieraus weiter

$$D_a = 1 + 1 \cdot 263 \times 1 \cdot 383 = 2 \cdot 747.$$

Wir erhalten also nach unserer Theorie für die Dielektricitätsconstante senkrecht zur Spannungsrichtung den Wert **2·747**, welcher mit dem beobachteten **2·727** in ausgezeichneter Übereinstimmung steht. Ich gedenke die Versuche an Platten von Paragummi fortzuführen, mit der Absicht, correspondierende Bestimmungen des Brechungsquotienten vorzunehmen.

Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Dehnen oder Tordieren von Drähten

von

Dr. **A. Wassmuth,**

o. Professor an der Universität in Graz.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. April 1902.)

I.

Wird ein Metalldraht gedehnt, so kühlt er sich etwas ab; er erwärmt sich, wenn der dehnende Zug vermindert wird und der Draht sich zusammenzieht. Mit der experimentellen Bestimmung dieser Temperaturänderungen haben sich nach Joule besonders Edlund,[1] Haga[2] und Wassmuth[3] beschäftigt und hiebei auch den Nachweis der Übereinstimmung der Versuche mit der von Thomson aus der mechanischen Wärmetheorie abgeleiteten Formel erbracht. Haga verfuhr dabei so, dass er um den zu dehnenden Hauptdraht einen sehr dünnen Draht eines anderen Metalles wickelte und das so entstandene Thermoelement mit einem hoch astasierten Galvanometer verband; die Stelle der Umwickelung musste dabei, um die mittlere Temperaturänderung des ganzen Drahtes zu erhalten, wiederholt gewechselt werden.

Wassmuth zerschnitt den zu dehnenden Draht in mehrere gleich lange Stücke, brachte an jedes Stück ein Thermoelement

---

[1] Pogg. Ann., 126.

[2] Wied. Ann., 15.

[3] Diese Sitzungsber., 97, 1888.

an und verband die Drahtstücke durch feste Holzprismen zu einer nun unschwer zu dehnenden Drahtvorrichtung; die Thermoelemente waren durch feinere Drähte verbunden und hintereinandergeschaltet und lieferten gewiss die mittlere Temperatur. Die Wirkung war nun auch beträchtlich höher wie bei einem Elemente; so stieg unter Anwendung von 10 Thermoelementen statt eines der Ausschlag nahe auf das Fünffache.

Ein kleines Kohlrausch-Hartmann'sches Galvanometer gab schon unastasiert einige Centimeter als Ablenkung. Auch zur quantitativen Bestimmung, respective zur Ermittelung des mechanischen Wärmeäquivalents zeigte sich diese »Drahtvorrichtung« geeignet, ja es gelang Wassmuth sogar, den Einfluss der Magnetisierung solcher Stäbe auf diese Temperaturänderungen ϑ mit Sicherheit festzustellen. So erhielt derselbe für ϑ:

Unmagnetisch	0·1126° C.	
Magnetisiert.................	0·1148° C.	0·1139° C.
Entgegengesetzt magnetisiert ..	0·1170° C.	0·1159° C.
Wiederum unmagnetisch......	0·1125° C.,	

so dass ϑ durch das Magnetisieren von 0·1126 auf 0·1154, d. i. um $2^1/_2{}^0/_0$ erhöht wurde.

So klein demnach diese Änderungen der Temperaturen ϑ waren, so ließen sie sich doch, wie man sieht, mit Sicherheit nachweisen.

Diese Erfolge mit der erwähnten »Drahtvorrichtung« veranlassten Prof. A. Naumann, einen handlichen Dehnungsapparat herzustellen, der auch zu Demonstrationsversuchen dienen sollte. Die Drahtvorrichtung wurde im wesentlichen beibehalten, doch wurde statt der bisherigen horizontalen Lage derselben die verticale Aufstellung, und zwar in Form von zwei parallelen Zweigen gewählt (Fig. 1). An jedem der sechs gleich langen Stahldrähte (von 1·5 *mm* Dicke) wurden Thermoelemente (aus Constantan und Eisen) gelöthet, die durch feine Drähte verbunden, hintereinandergeschaltet waren; die Enden der Stahldrähte wurden umgebogen und fest durch Stäbe aus hartem Holze verbunden. Die zwei Zweige (von je 3 Elementen)

wurden parallel zu einander in einem starkgebauten Holzrahmen derart untergebracht, dass die beiden oberen Enden an zwei außen am Rahmen stehenden Flügelschrauben festgemacht wurden, während die beiden unteren Enden mit dem Querbalken eines eisernen Winkelhebels verbunden wurden. Deckeln

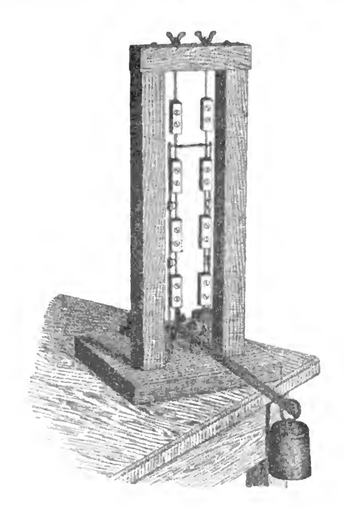


Fig. 1 (Vorderansicht).

aus Pappe, leicht wegnehmbar, schützten die beiden Zweige vor Luftströmungen.

Wurde nun ein Gewicht ($^1/_2$ *kg* oder 1 *kg*) außen an dem Winkelhebel weiter weg verschoben, so wurden beide Zweige gedehnt und der auftretende, in seiner Stärke bald verschwindende Thermostrom machte sich an einem eingeschaltenen Galvanometer von kleinem Widerstande sofort bemerkbar.

Vor Beginn des Versuches wurden die drei Thermoelemente des einen Zweiges gegen die drei Thermoelemente des zweiten Zweiges geschaltet und die Flügelschrauben oben so lange angezogen, respective gelüftet, bis beim Dehnen kein

Strom hindurchgieng; man konnte dann annehmen, dass in dieser Stellung der Flügelschrauben beide Zweige gleich stark gespannt waren. Erst hierauf wurden die sechs Thermoelemente hintereinander geschaltet und mittels eines Commutators mit dem Galvanometer verbunden.

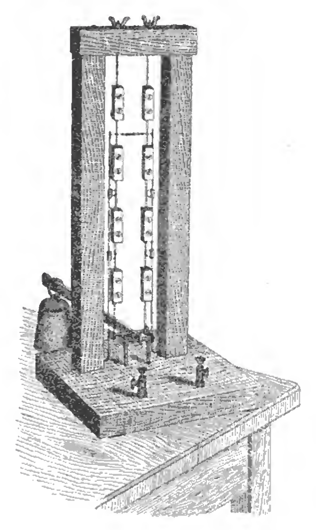


Fig. 1 (Rückansicht).

War das dehnende Gewicht P verschoben worden, so wurden der erste Ausschlag A, dann die ersten, zweiten, dritten... Distanzen der Umkehrpunkte, d. i. die Größen $x_1 - x_2$, $x_3 - x_2$, $x_3 - x_4$, $x_5 - x_4$ beobachtet; beim Zusammenziehen ergaben sich davon nicht viel verschiedene Ausschläge: Z, $x_1 - x_2$ etc. Außer dem Dämpfungsverhältnisse k, der Schwingungsdauer T der Galvanometernadel musste auch der Widerstand r der ganzen Leitung ermittelt werden; es geschah dies mit Hilfe eines kleinen, seitlich geschalteten Magnetinductors, indem unter Anwendung der Multiplicationsmethode

die Bögen verglichen wurden, wie sie den Widerständen r und $r+2$ Ohm entsprachen.

Schließlich war noch eine Constante E, d. i. jene Ablenkung zu bestimmen, die der Temperaturdifferenz von 1° (an einer Löthstelle) und dem Widerstande von 1 Ohm entsprach. Zu dem Ende wurde ein den übrigen genau gleiches Thermoelement mit seiner einen Löthstelle in schmelzendes Eis gebracht, während die übrigen Stellen die Temperatur der Luft hatten. Bei diesen Versuchen musste auch die Schwingungsdauer T noch einmal bestimmt werden, da bei einer etwaigen Änderung eine Reduction — die E sind den T^2 proportional — nöthig war. So fand sich z. B. für $T = 4 \cdot 07''$ bei einer Temperatursdifferenz von $18 \cdot 4°$ und einem Gesammtwiderstande von $100+2 \cdot 4$ Ohm ein Ausschlag von $294 \cdot 0$ *mm*, so dass

$$E = \frac{294 \cdot 0 \times 102 \cdot 4}{18 \cdot 4} = 1634$$

und

$$6E = 9804$$

wird.

An der Hand der von Edlund, Haga und Onnes gegebenen strengen Formeln lassen sich dann, wenn noch eine gewisse, stets sehr kleine Abkühlungsconstante h experimentell ermittelt wird, die Resultate zur Berechnung der erzielten Temperaturänderung ϑ gewinnen.

Mit Rücksicht auf den vorliegenden Apparat, wo schon ein dickerer ($d = 1 \cdot 5$ *mm*) Stahldraht zur Anwendung kam, kann man, falls nicht die größte Genauigkeit verlangt wird, folgende einfache, aus den allgemeinen Gleichungen durch Reihenentwickelungen abgeleitete Regeln verwenden. Man rechne zuerst die stets gegen 1 kleine Größe $z = hT$ als Mittel aus:

$$z = \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{k}\,\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} - 1\right],$$

$$-z = \frac{1}{k^3}\left[\frac{1}{k}\,\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} - 1\right], \qquad 1)$$

$$z = \frac{1}{k^4}\left[\frac{1}{k}\,\frac{x_3 - x_4}{x_5 - x_4} - 1\right];$$

bestimme dann mit dem so erhaltenen z die Größe X_0 aus:

$$X_0 = \frac{k}{1+k} \frac{x_1 - x_2}{1+z\left(k^2 - \frac{k}{1+k}\right)}, \tag{2}$$

ziehe X_0 vom ersten Ausschlage A, respective Z ab, so dass also:

$$X = A - X_0 \tag{3}$$

wird, und erhält die Temperaturänderung ϑ aus:

$$\vartheta = \frac{X.r}{(1-z).6E}, \tag{4}$$

wo also r den Gesammtwiderstand und E die oben erwähnte Constante bedeutet.

So findet z. B. Haga (26. September 1880) für

$$h = \frac{z}{T} = 0 \cdot 0114,$$

während die obige Formel 1a) für

$$k = 2 \cdot 39, \quad T = 6 \cdot 44, \quad x_1 - x_2 = 32 \cdot 7, \quad x_3 - x_2 = 9 \cdot 4$$

den Wert:

$$h = 0 \cdot 0124$$

ergibt.

Desgleichen ergaben Beobachtungen Haga's vom 30. September 1880 als Mittel

$$h = 0 \cdot 0127,$$

während die Gleichung 1a) für

$$k = 2 \cdot 44, \quad T = 6 \cdot 55, \quad x_2 - x_1 = 22 \cdot 4, \quad x_2 - x_3 = 6 \cdot 0$$

den Wert

$$h = 0 \cdot 0136$$

liefert.

Die Brauchbarkeit der Formeln 2) und 4) wird sich weiter unten erweisen.

Von den mit dem obigen Apparate ausgeführten Versuchen mögen zuerst einige mehr qualitative erwähnt werden, bei

denen die verschobenen Gewichte $^1/_2\,kg$ und $1\,kg$ waren und sich demnach die Temperaturänderungen nahe wie 1 zu 2 verhalten sollten. Es wurde (10. December 1901) beobachtet:

	Erster Ausschlag	Erste	zweite	dritte	vierte
		Distanz der Umkehrpunkte, d. i.			
		x_1-x_2	x_3-x_2	x_3-x_4	x_5-x_4
Dehnen durch Verschieben von $^1/_2\,kg$	$A=$ 91·1	74·9	45·5	44·8	23·5
Zusammenziehen durch Verschieben von $^1/_2\,kg$ . . .	$Z=$ 93·2	72·2	46·8	42·7	—
Dehnen durch Verschieben von $1\,kg$	$A=$ 176·2	147·2	89·2	88·2	47·6
Zusammenziehen durch Verschieben von $1\,kg$	$Z=$ 193·9	159·0	93·5	92·2	47·8

Man findet hieraus im ersten Falle für $z = 0\cdot131$ als Mittel von $0\cdot126$, $0\cdot101$ und $0\cdot135$ und sieht, dass der Quotient $\frac{x_1-x_2}{x_3-x_2} = 1\cdot646$ im ersten und $1\cdot648$ im zweiten Falle ist, weshalb dasselbe z auch hier gilt. Mit $k = 1\cdot335$ ergibt sich nach Gleichung 2):

$$X_0 = \frac{k}{1+k}\,\frac{x_1-x_2}{1+z\left(k^2-\frac{k}{1+k}\right)} = 0\cdot572\times\frac{x_1-x_2}{1\cdot1583} =$$
$$= 0\cdot4935\times(x_1-x_2),$$

d. h. es ist sehr nahe:

$$X_0 = \frac{1}{2}(x_1-x_2).$$

Demnach sollte die Abkühlung im ersten Falle proportional sein der Zahl:

$$91\cdot1-\frac{1}{2}\,74\cdot9 = 53\cdot6$$

und die Erwärmung dabei proportional:

$$93\cdot 2 - \frac{1}{2}\, 72\cdot 2 = 57\cdot 1,$$

also die Temperaturänderung im Mittel proportional der Zahl **55·35** sein. Für den zweiten Fall wären die entsprechenden Zahlen

$$176\cdot 2 - \frac{1}{2}\, 147\cdot 2 = 102\cdot 6$$

und

$$193\cdot 9 - \frac{1}{2}\, 159\cdot 0 = 114\cdot 4,$$

d. i. im Mittel 108·5 sein. Die Zahlen 108·5 und 55·35 verhalten sich wie 1·96 zu 1, also nahe wie 2 zu 1.

Eine andere Beobachtung vom 17. März 1902 lieferte mit $k = 1\cdot 265$, $T = 4\cdot 07$ die Werte bei der Dehnung:

$$A = 54\cdot 1 \mid x_1 - x_2 = 46\cdot 9 \mid x_3 - x_2 = 32\cdot 0 \mid x_3 - x_4 = 30\cdot 9 \mid$$
$$x_5 - x_4 = 19\cdot 4 \mid z = 0\cdot 0973$$

und ergaben die strengen Formeln für X_0 die Zahlen 24·6 und 26·4, d. i. im Mittel 25·5, während die angenäherte Formel 2) den Wert $X_0 = 25\cdot 9$ erbringt.

Wird, um gleichförmig vorzugehen, dieser letztere Wert genommen, also

$$X = 54\cdot 1 - 25\cdot 9 = 28\cdot 2$$

gesetzt, so erhält man für die Abkühlung ϑ, mit $r = 2\cdot 41$, den Wert:

$$\vartheta_1 = \frac{Xr}{(1-z).6E} = \frac{28\cdot 2 \times 2\cdot 41}{0\cdot 9027 \times 9804} = 0\cdot 00767°.$$

Die Werte beim Zusammenziehen waren:

$$Z = 52\cdot 7,\ x_1 - x_2 = 40\cdot 7,\ x_3 - x_2 = 28\cdot 1,\ x_3 - x_4 = 26\cdot 5;$$

sie lieferten

$$z = 0\cdot 0872, \qquad X_0 = 20\cdot 9$$

und

$$\vartheta_2 = \frac{31\cdot 8 \times 2\cdot 41}{0\cdot 9128 \times 9804} = 0\cdot 00856,$$

so dass für ϑ ein Mittelwert $\vartheta = 0\cdot 00812°$ resultiert.

Dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit der von Thomson gegebenen Formel:

$$\vartheta = \frac{t\alpha P}{WcA}, \tag{5}$$

worin t die absolute Temperatur $= 290°$, $\alpha = 0\cdot00001156$ den linearen Ausdehnungscoefficienten, $c = 0\cdot118$ die specifische Wärme, $A = 425\,kgm$ das mechanische Wärmeäquivalent, $W = 0\cdot0138\,kg$ das Gewicht eines Meters und $P = \frac{5}{3}\,kg$ die Spannungszunahme für jeden einzelnen der beiden parallelen Drähte beim Dehnen bedeutet. Die Ausrechnung ergibt:

$$\vartheta = 0\cdot00808°,$$

also nur eine geringe Abweichung von dem beobachteten Werte.

In einem anderen Falle (29. März 1902) waren für

$$r = 2\cdot673, \quad T = 4\cdot2, \quad k = 1\cdot28:$$

	Erste Ausschläge	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	$x_3 - x_4$	$x_5 - x_4$	ϑ	Mittel
Bei der Verschiebung von $^1/_2$ *kg*	$A = 55\cdot0$	51·3	34·7	32·6	19·8	0·00808	$\vartheta_I = 0\cdot00840$
	$Z = 51\cdot1$	37·8	25·5	25·0	15·8	0·00872	
Bei der Verschiebung von 1 *kg*	$A = 101\cdot5$	87·4	60·1	59·0	36·0	0·01566	$\vartheta_{II} = 0\cdot01603$
	$Z = 99\cdot5$	79·7	53·2	51·1	31·4	0·01640	

und es ist wirklich:

$$\frac{1}{2}\vartheta_{II} = 0\cdot00802$$

nicht viel verschieden von $\vartheta_I = 0\cdot00840$ und dem berechneten $\vartheta = 0\cdot00808°$.

Alle diese Daten bekunden, dass die obige Form des Dehnungsapparates brauchbare Resultate liefert.

II.

Nicht allein bei der Dehnung, sondern auch bei der Torsion von Metalldrähten tritt eine Abkühlung ein. So hat schon 1878 W. Thomson darauf hingewiesen, dass ein tordierter Draht bei weiterer Torsion um den Winkel dw sich um einen genau berechenbaren Betrag abkühlen müsse. Ist nämlich Fdw die bei der Torsion um dw aufgewandte Arbeit, t die absolute Temperatur, A das mechanische Wärmeäquivalent, so ist die bei dieser Torsion um dw absorbierte Wärme dH

$$dH = -\frac{t}{A}\frac{dF}{dt_w}dw, \tag{6}$$

wenn der Index w, wie gebräuchlich, andeuten soll, dass bei der Differentiation nach t der Winkel w als constant anzusehen ist. Nun ist bekanntlich:

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\pi}{2}\frac{r^4}{l}w, \tag{7}$$

wenn $\frac{E}{2(1+\mu)}$ den Torsionsmodul, l die Länge und r den Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes des Drahtes vorstellt. Für Metalldrähte nimmt der Torsionsmodul und mit ihm das rückwirkende Torsionsmoment F mit steigender Temperatur ab, d. h. es ist $\frac{dF}{dt_w}$ negativ, H positiv oder die Torsion ist wirklich mit einer Abkühlung verbunden. Sieht man von den sehr kleinen Änderungen des l und r mit der Temperatur ab und nennt $\frac{n}{10^4}$ die relative Abnahme des Torsionsmoduls bei einer Temperaturerhöhung um 1°, so wird:

$$\frac{1}{F}\,\frac{dF}{dt_w} = -\frac{n}{10^4}. \qquad 8)$$

Durch Benützung dieses Ausdruckes und eine nachträgliche Integration erhält man, wie ich 1889[1] zeigte, für die Abkühlung ϑ eines Drahtes (vom kreisförmigen Querschnitte) von der specifischen Wärme c, dem Gewichte $\frac{m}{l}$ der Längeneinheit, wenn der Torsionswinkel von w_0 auf w_1 gebracht wird, den Wert

$$A\left(\frac{m}{l}\right)c\vartheta = t\,.\,\frac{n}{10^4}\,\frac{E}{2(1+\mu)}\,.\,\frac{\pi}{2}r^4\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{w_1^2-w_0^2}{l^2}. \qquad 9)$$

Diese (dimensionsgleiche) Formel lehrt nicht allein die Unabhängigkeit des ϑ von l, sondern zeigt vor allem, welch bedeutenden Einfluss die Dicke $2r$ des Drahtes auf ϑ ausübt: die Abkühlung — und entsprechend auch die Erwärmung bei der Detorsion — wächst eben, gleiche Torsionen vorausgesetzt, in gleicher Weise wie der Querschnitt des Drahtes. Nun wird durch das Anlöthen eines Thermoelementes an einen dünnen Draht der Querschnitt desselben wesentlich geändert, weshalb es sich empfiehlt, dickere Stäbe zu tordieren.

Es gelang mir (l. c. S. 1402 etc.), die Abkühlung bei der Torsion, respective Erwärmung bei der Detorsion sicher nachzuweisen und die gute Übereinstimmung der Beobachtung (0·00191°) mit der Rechnung (0·00195°) zu zeigen. So wurden z. B. sechs Drahtstücke aus Stahl durch kurze, feste Holzstücke zu einer einzigen, horizontal aufgestellten Drahtverbindung vereinigt, an jedes dieser Stahlstücke ein Thermoelement sorgfältigst gelöthet, alle sechs Thermoelemente unter sich und mit einem Galvanometer verbunden und dann, unter Beachtung verschiedener Schutzmaßregeln, die beiden Torsionen w_0 und w_1 vorgenommen; die stets sehr kleinen Ausschläge wurden mit denen bei der Dehnung verglichen und so die allerdings sehr kleinen Temperaturänderungen bestimmt.

---

[1] Wassmuth, Über die bei der Torsion und Detorsion von Metalldrähten auftretenden Temperaturänderungen. Diese Sitzungsberichte, Bd. 98; IIa, 1898.

Prof. A. Naumann hat den erwähnten Apparat in zweckmäßiger Weise abgeändert (siehe Fig. 2). Drei Stahlstücke der gleichen Sorte wie oben (I) wurden in einer Ebene vertical und parallel zu einander so aufgestellt, dass ihre oberen Enden in Ruhe verblieben, während die unteren Enden gleichzeitig durch Verschieben einer mit ihnen durch drei Querstücke verbundenen Holzleiste um gleiche Beträge tordiert wurden. Die Enden der Stahlstücke wurden zu dem Ende umgebogen, zwischen die Backen von harten Holzstücken gebracht und kräftigst verschraubt. Alle drei Drähte wurden in der Ebene eines starken

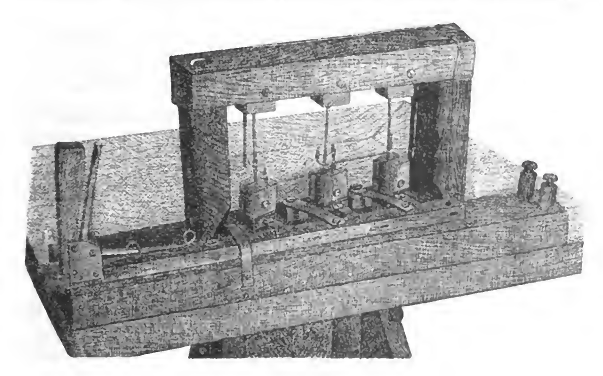


Fig. 2.

Holzrahmens so untergebracht, dass die oberen Enden fest mit dem obersten Querstück des Rahmens verschraubt waren während die unteren Enden durch starke, rechtwinkelig angebrachte Messingstreifen mit der schon erwähnten Holzleiste in Verbindung standen. Diese Leiste, mit Hilfe einer seitlichen Handhabe verschiebbar, hatte überdies ihre eigene Führung und trug an einem Winkelhebel einen Sporn, um zwei ganz bestimmte Torsionen, respective Detorsionen herstellen zu können. Die Länge der zu tordierenden Stahlstücke (von der Dicke 1·5 *mm*) betrug 7·5 *mm*; jedes Stahlstück trug (ungefähr 1 *cm* unter seiner Mitte) ein Thermoelement; alle drei Thermo-

elemente waren hintereinander und schließlich mit dem Galvanometer verbunden. Ein Kasten aus Pappe und Watta schützten vor Luftströmungen.

Wie man sieht, gewährt diese Anordnung, abgesehen von ihrer Handlichkeit, den Vortheil, dass man sicher ist, dass jeder Draht gleiche Torsionen ausführt, während die frühere, von mir angegebene Drahtverbindung nur einen gewissen mittleren Wert ergab.

Infolge der Empfindlichkeit des Galvanometers war es möglich, mehrere Distanzen von Umkehrpunkten verfolgen und Beobachtung und Rechnung noch schärfer mit einander vergleichen zu können; im übrigen wurden, da es sich auch hier um allmählich verlöschende Thermoströme handelte, die obigen Regeln 1) und 2) beibehalten; ebenso wurden das Dämpfungsverhältnis k, die Schwingungsdauer (sie heiße jetzt) τ, der Widerstand r mittels eines Magnetoinductors durch Beobachtung bestimmt und aus den ersten Ausschlägen T, respective D (d. i. Torsion, respective Detorsion) und den Distanzen der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$, $x_3 - x_2$ etc. die Größen z, X_0, $X = T - X_0$, respective $X = D - X_0$, und schließlich die Temperaturänderung $\vartheta = \frac{Xr}{(1-z)3E}$, wo E die gewisse thermoelektrische Constante ist, ermittelt. Die obige Formel 9) gab das »berechnete« Resultat.

Zur Verhütung einer permanenten Torsion wurden nun schon um w_0 tordierte Drähte um den Winkel $w_1 - w_0$ weiter tordiert. Diese Winkel w_0 und w_1 wurden durch Längenabmessungen aus rechtwinkeligen Dreiecken berechnet und ergab sich:

$$w_0 = 11 \cdot 09° = 0 \cdot 1936$$

und

$$w_1 = 20 \cdot 28° = 0 \cdot 3540.$$

Nimmt man für Stahl nach den Versuchen Katzenelsohn's,[1] die unter Mitwirkung des Herrn H. v. Helmholtz ausgeführt wurden, die Zahl $n = 3 \cdot 10$, da einer Erwärmung

---

[1] Katzenelsohn, Über den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Metalle. Inaug. Berlin, 1887. Vergl. Winkelmann, I, 287.

des Stahldrahtes von 0° auf 100° eine Abnahme des Torsionsmoduls (7505 $kg.mm^2$) um $3\cdot 10\%$ entsprach, so ist demnach die der vorliegenden Torsion entsprechende Temperaturänderung ϑ zu berechnen aus:

$$\vartheta = \frac{(273+17)}{4\cdot 19\times 10^7\times 0\cdot 118}\times\frac{3\cdot 10}{10^4}\times 7505\times 981\times 10^5\times\frac{\pi}{2}\times$$
$$\times\frac{2\cdot 294}{10^4}\times\frac{1}{2}\,\frac{0\cdot 3540^2-0\cdot 1936^2}{7\cdot 5^2},$$

d. h. es soll sein

$$\vartheta = 0\cdot 003765.$$

Nun ergaben z.B. die Beobachtungen vom 22. März 1902 bei

$$k = 1\cdot 259,\qquad r = 1\cdot 49 \text{ Ohm},\qquad \tau = 4\cdot 08''.$$

Erster Ausschlag	Distanzen der Umkehrpunkte				z	X	Temperaturänderung ϑ
	x_1-x_2	x_3-x_2	x_3-x_4	x_5-x_4			
$T = 15\cdot 0$	13·8	8·3	8·0	—	0·202	8·62	0·00328°
$D = 15\cdot 3$	12·4	7·8	7·6	4·2	0·167	9·4	0·00343
$T = 14\cdot 6$	13·1	7·4	8·8	5·4	0·180	8·44	0·00313
$D = 15\cdot 1$	12·1	8·4	7·5	—	0·0978	9·0	0·00303

Mittel $\vartheta = 0\cdot 00322$.

Desgleichen erhielt ich beim Widerstande $r = 3\cdot 38$ Ohm, indem nämlich des Vergleiches wegen neben dem Torsionsapparate auch noch der Dehnungsapparat eingeschaltet worden war, für die Torsionen und Detorsionen die Werte:

Erste Ausschläge	x_1-x_2	x_3-x_2	x_3-x_4	z	X	ϑ
$T = 5\cdot 7$	4·3	2·4	2·3	0·177	3·7	0·00311
$D = 6\cdot 9$	5·5	3·9	3·3	0·053	4·0	0·00292

Mittel $\vartheta = 0\cdot 00302$

und beim Dehnen und Zusammenziehen der neuen, früher Drahtverbindung:

Erste Ausschläge	x_1-x_2	x_3-x_2	x_3-x_4	x_5-x_4	z	X	ϑ
$A=38\cdot0$	34·0	22·3	23·5	12·2	0·158	21·7	0·00889
$Z=36\cdot7$	28·3	20·6	—	—	0·0568	21·8	0·00797

Mittel $\vartheta = 0\cdot00843$.

Wie man sieht, stehen diese beim Tordieren und beim Dehnen erhaltenen Werte sowohl unter sich, wie mit den berechneten Angaben (0·00377 und 0·00803) in guter Übereinstimmung, was gewiss für die Verwendbarkeit der beiden Apparate spricht. Der Torsionsapparat im Vereine mit dem gebrauchten empfindlichen Galvanometer — ein vierspuliges Spiegelgalvanometer nach du Bois und Rubens von Keiser & Schmidt in Berlin — machten es, wie gezeigt, möglich, selbst bei den Torsionen außer den ersten Ausschlägen noch mehrere Distanzen der Umkehrpunkte beobachten zu können.

Es steht zu erwarten, dass man nun auch imstande sein wird, die Temperaturänderungen ϑ beim Tordieren von Drähten aus anderen Stoffen als Stahl zu verfolgen; solche Stoffe sind z. B. mit sehr hoher Änderung des Torsionsmodul (d. i. mit großem n) in absteigender Reihe:[1] Blei. Zink, Aluminium, Silber, Messing, Neusilber, Kupfer, Gold etc., für die sich also aus dem beobachteten ϑ durch Vergleich mit der Rechnung das n mit mehr oder minder großer Sicherheit auf neuem Wege ermitteln lassen wird. Die interessante Frage, ob nach Graetz[2] für Kautschuk n negativ zu nehmen ist, muss sich auf diese Art sicher entscheiden lassen.

Man kann aber noch einen Schritt in dieser Richtung weiter gehen. Wie sich aus den Temperaturänderungen ϑ_1

[1] Winkelmann, Handbuch der Physik, I, 271.

[2] L. c. 1406.

beim Dehnen das mechanische Wärmeäquivalent mit Sicherheit bestimmen ließ, so hätte sich ebensogut der lineare Ausdehnungscoefficient α, der dem ϑ_1 proportional ist, aus den beobachteten ϑ_1 ermitteln lassen. Wichtiger wird dieser Gedanke schon für die Torsionsbeobachtungen; nach der von mir nun ausgebildeten Methode kann man die Temperaturänderungen ϑ_2 beim Tordieren schon mit einiger Sicherheit bestimmen und nun umgekehrt durch Vergleichung mit der Formel einen neuen Weg gewinnen, die Abnahme des Torsionsmomentes F mit der Temperatur, d. i.

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dt_w} = -\frac{n}{10^4}$$

zu berechnen. Man findet nun durch logarithmisches Differentieren der Gleichung 7), dass

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dt_w} = \frac{1}{E}\frac{dE}{dt} - \frac{1}{1+\mu}\frac{d\mu}{dt} + 3\alpha \qquad 10)$$

ist, so dass es also nur noch einer Bestimmung von $\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}$ bedarf, um aus 10) den Betrag von $\frac{d\mu}{dt}$ auf neue Weise zu erhalten.

Ein solcher an und für sich neuer Weg bietet sich dar in der Betrachtung der Temperaturänderungen ϑ_3, wie sie beim weiteren Belasten eines auf beiden Enden frei aufliegenden Stabes durch Anbringen von Gewichten in der Mitte auftreten müssen; es lässt sich zeigen,[1] dass sich aus den beobachteten ϑ_3 der Ausdruck:

[1] Ist P das in der Mitte wirkende Gewicht, h der Biegungspfeil, d. i.

$$h = \frac{Pl^3}{12\pi E r^4},$$

so liefern die bekannten Beziehungen:

$$dQ = dU - Pdh = t.dS,$$

wenn die Temperatur t und der Zug P zu Unabhängigen gewählt werden:

$$\frac{\partial h}{\partial t_P} = \frac{\partial S}{\partial P_t}$$

und deshalb ist für den adiabatischen Vorgang:

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt_p}+\alpha$$

berechnen lässt. Solche Beobachtungen vorausgesetzt, wird es möglich sein, die Änderung der Elasticitätsconstante μ mit der Temperatur und $\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}$ auf neue Art zu bestimmen.

$$dQ = t\frac{\partial S}{\partial t_p}dt + t\frac{\partial S}{\partial P_t}dP = MC_p.dt + t\frac{\partial h}{\partial t_p}dP = 0$$

und

$$dt = -\frac{t}{MC_p}\frac{\partial h}{\partial t_p}dP = +\frac{t}{MC_p}.h.\left[\alpha + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t_p}\right].dP,$$

d. h. der Zugsvermehrung um dP entspricht eine Abkühlung um dt, indem $\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t}$ für die meisten Stoffe negativ und absolut genommen, viel größer als der lineare Ausdehnungscoefficient α ist.

Über die Elektricitätserregung bei dem Hindurchgange von Luftblasen durch Wasser

von

Dr. **Robert Fischer.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Mai 1902.)

Die Erscheinung der Elektricitätserregung beim Fallen von Flüssigkeitstropfen durch Gase, insbesondere von Wassertropfen durch atmosphärische Luft, wurde von Lenard[1] in der Abhandlung: »Über die Elektricität der Wasserfälle« eingehend beschrieben. Eine Fortsetzung der Arbeiten dieses Forschers bilden die Untersuchungen von J. J. Thomson:[2] »On the Electricity of Drops« und Usener:[3] »Über die Elektricitätserregung durch Flüssigkeitsstrahlen«.

Das inverse Phänomen, die Elektricitätsentwickelung bei dem Hindurchgange von Gasblasen durch Flüssigkeiten, wurde zuerst von Lord Kelvin, M. Maclean und A. Galt[4] experimentell verfolgt und in der Abhandlung: »Electrification of Air and other Gases by Bubbling through Water and other Liquids« beschrieben, wenngleich das Stattfinden einer solchen Elektricitätserregung — freilich damals nur als eine Störungserscheinung — bereits von v. Wesendonck[5] bei den Versuchen: »Über die Elektricitätserregung durch Reibung von Kohlensäure an Metallen« bemerkt worden war.

---

[1] Ph. Lenard, Wied. Ann. d. Phys. u. Chem., 1892, Bd. 46.

[2] J. J. Thomson, Philosoph. Magaz., 1894, Bd. 37, p. 341.

[3] Usener, Inauguraldissertation, Bonn, 1895.

[4] Lord Kelvin, M. Maclean & A. Galt, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 57, Nr. 344.

[5] K. v. Wesendonck, Wied. Ann. d. Phys. u. Chem., Bd. 47.

Die Hauptresultate der Untersuchungen der drei englischen Forscher seien im folgenden kurz mitgetheilt:

1. Steigen Gasblasen durch Flüssigkeiten auf, so ist fast immer eine Elektricitätserregung zu beobachten.

2. Die Größe dieser Elektricitätserregung ist abhängig von der Natur der Flüssigkeit, beziehungsweise des Gases, und zwar wird reines Wasser stets positiv, Luft stets negativ; ebenso werden Lösungen von Zinksulfat, Ammoniak, Schwefelsäure, Salzsäure, Calciumchlorid und Salpeter, sowie Wasser mit Zusätzen von Paraffinöl, Phenol, Benzin oder Alkohol beim Hindurchgange von Luft, zwar in verschiedener Stärke, jedoch immer positiv geladen, während die Luft selbst negativ geladen erscheint. Das Vorzeichen der Ladung ändert sich jedoch, wenn dem Wasser Kochsalz oder Kupfersulfat in bestimmten Mengen zugesetzt wird; in diesen Fällen erweist sich nämlich das Wasser negativ, die Luft hingegen positiv geladen. Die normale positive Ladung des Wassers ergab sich auch, wenn Sauerstoff, Kohlensäure, Wasserstoff oder Leuchtgas das Wasser durchsetzten.

Das Vorhandensein einer Ladung in der Flüssigkeit wurde durch Verbinden derselben mit einem Quadrantenelektrometer constatiert. Zum Nachweise der Ladung des Gases wurden zwei verschiedene Methoden benützt. Die eine derselben bestand darin, dass das aus der Flüssigkeit aufquellende Gas in einem weiten Behälter gesammelt und in demselben mit Hilfe eines Wassertropfcollectors in Verbindung mit dem Elektrometer untersucht wurde. Die zweite Methode stützt sich auf die Verwendung sogenannter »elektrischer Filter«; dieselben waren gelegentlich der Untersuchung von durch stille Entladung aus Spitzen elektrisierter Luft von Lord Kelvin[1] verwendet und als ein für derartige Untersuchungen gut verwendbarer Apparat erkannt worden. Diese Filter bestehen aus kurzen weiten Röhren, in welche Scheiben aus feinmaschigem Drahtnetze eingestellt sind. Das Metall entzieht dem durchstreichenden

[1] Lord Kelvin, M. Maclean & A. Galt, On the Diselectrification of Air. Proceedings of the Royal Society, Vol. 56, Nr. 345, p. 436. — Lord Kelvin, On the Electrification of Air. Proceedings of the Philosoph. Soc. of Glasgow, 1894—1895.

Luftstrome den größten Theil seiner Ladung, gestattet also durch Verbindung des Filters mit dem Elektrometer die Messung der aufgenommenen Elektricitätsmenge.

Diese Untersuchungen bilden eine erschöpfende qualitative Darstellung des betrachteten Phänomens; da jedoch über die Größe der verwendeten Gas-, beziehungsweise Flüssigkeitsmengen, über die Capacitäten der Ansammlungs- und Messapparate etc. keine besonderen Angaben gemacht sind, bedürfen dieselben in quantitativer Hinsicht einer Vervollständigung, um mit jenen der anderen Forscher in Beziehung gesetzt werden zu können. Die im nachstehenden beschriebenen Untersuchungen wurden in der Absicht unternommen, wenigstens in Bezug auf Luft und Wasser, diese Lücke auszufüllen.

Leider konnte infolge der sich im Verlaufe der Experimentaluntersuchung ergebenden Schwierigkeiten innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeit eine erschöpfende Bearbeitung der Frage nicht durchgeführt werden und musste die Weiterführung der begonnenen Arbeit auf unbestimmte Zeit verschoben werden.

Zur Ausführung der Versuche wurde eine von der Versuchsanordnung Lord Kelvin's nur in wenigen unwesentlichen Punkten abweichende Untersuchungsmethode in Anwendung gebracht. Als Gefäß zur Aufnahme des Wassers diente eine dreihalsige Glasflasche von circa 8 *cm* Durchmesser und 12 *cm* Höhe. In dem mittleren Halse der Flasche war ein Glasrohr eingesetzt, welches circa 1·5 *cm* über dem Boden endete. Ferner war durch den Pfropfen, welcher das Glasrohr hielt, ein dünner Platindraht gezogen, der einerseits fast bis auf den Boden der Flasche reichte und anderseits zu einer außen an der Flasche angebrachten Klemmschraube führte. In den einen der seitlichen Hälse war ein kurzes, ziemlich weites Glasrohr fest eingekittet, der zweite seitliche Hals war durch einen Pfropfen verschlossen und diente nur zur Einfüllung des Wassers. Wurde das Gefäß theilweise mit Wasser gefüllt und aus dem kurzen seitlich angebrachten Rohre Luft angesogen, so trat ein Luftstrom in Form einer Reihe von Blasen durch das Wasser. Um das Wassergefäß vollkommen isoliert zu halten, war dasselbe auf eine Paraffintafel gestellt, und alle in das Gefäß

führenden Röhren mit aus Paraffin hergestellten Verbindungsstücken ausgestattet. Die bereits erwähnte, außen an der Flasche angebrachte Klemmschraube gestattete, den in das Wasser tauchenden Platindraht mit Hilfe eines Umschalters entweder mit dem Messapparate zu verbinden, denselben isoliert zu halten oder zur Erde abzuleiten. Sowohl die eintretende, wie die austretende Luft hatte je ein direct an die isolierenden Verbindungsstücke angesetztes »elektrisches Filter« zu durchstreichen. Das am mittleren Halse diente lediglich als Schutzfilter gegen etwaige, dem eintretenden Luftstrome anhaftende Ladungen. Dasselbe war demgemäß constant zur Erde abgeleitet. Das am seitlichen Halse angebrachte Filter war das eigentliche Messfilter und deshalb auch an der von der Flasche abgewendeten Seite durch ein isolierendes Verbindungsstück von der Luftableitung bestens isoliert. Die Beschreibung der Einrichtung der Filter soll gelegentlich der Besprechung der Leistungsfähigkeit derselben nachgetragen werden.

Als Messinstrument diente ein Quadrantenelektrometer. Die Lemniscate desselben erhielt eine Hilfsladung von circa 200 Volt durch Verbindung mit einer Zambonischen Säule. Das eine Quadrantenpaar war dauernd zur Erde abgeleitet. das andere wurde mit dem jeweils auf seine Ladung zu untersuchenden Körper in Verbindung gesetzt. Das Elektrometer, sowie die Zuleitungen waren von mit Stanniol überzogenen und zur Erde abgeleiteten Umhüllungen aus Carton vor Induction geschützt; ebenso war das Wassergefäß und das Messfilter in einem mit Stanniol überzogenen und zur Erde abgeleiteten Kasten mit abnehmbarer Vorderwand eingeschlossen. In diesem Kasten hatten auch alle Commutatoren Aufstellung gefunden. Dieselben bestanden aus von außen vollständig isoliert zu handhabenden Federcontacten, welche ohne jegliche Elektricitätserregung functionierten.

Lord Kelvin hat bei seinen Versuchen die Luft durch das Wasser gepresst; in den im nachstehenden beschriebenen Untersuchungen wurde dieselbe durch das Wasser gesaugt. Da nämlich in der zur Erzeugung des Luftstromes verwendeten Wasserstrahl-Luftpumpe die Luft mit dem Wasser bereits in innige Berührung kommt und überdies bei ihrem Wege von der

Pumpe zu dem Wassergefäße einen ziemlich langen Schlauch passieren muss, kommt dieselbe, wie verschiedene diesbezüglich angestellte Versuche gezeigt haben, bereits geladen an. Es wurde deshalb vorgezogen, die Luft direct aus dem Zimmer in das Wassergefäß einzusaugen und das vor dem Eintrittsrohre angebrachte abgeleitete Filter, sowie ein noch vor dasselbe geschaltetes, mit Watte gefülltes Rohr, als Schutz gegen fremde Ladungen und zur Zurückhaltung von Staub zu verwenden.

Zur Bestimmung der in das Wassergefäß eingeleiteten Luftmenge wurde ein eigens construierter Messapparat benützt. Die Luft durchsetzte denselben nach ihrem Aufquellen durch das Wasser und konnte ihr Volum unter einem ganz geringen Überdrucke durch Verdrängung eines gleichen Wasservolumens, welches immer wieder zur Verwendung gelangte, mit ziemlicher Genauigkeit bestimmt werden. Der Luftstrom war in dem Intervalle von 0·5 *l* bis 8·0 *l* pro Minute regulierbar. Um auch plötzliche Druckschwankungen in der Wasserleitung unschädlich zu machen, wurde zwischen Pumpe und Messapparat noch ein leerer Glasballon als Regulator eingeschaltet.

Wie bereits erwähnt, bestanden die von Lord Kelvin zur Messung der elektrischen Ladung der Luft eingeführten Filter aus kurzen Röhren, in welche Scheibchen aus Messingdrahtnetz eingefüllt waren. Bei den ersten Versuchen dieser Untersuchung wurden ebenso construierte Filter verwendet. Bei längerem Gebrauche derselben zeigte sich jedoch eine Verstopfung der Netzmaschen (circa 400 pro Quadratcentimeter), wodurch nicht nur dem Luftstrome ein nennenswerter Widerstand entgegengesetzt wurde, sondern auch in den Filtern selbst eine Elektricitätserregung eintrat, welche Spannungen von 0·1 bis 0·2 Volt erreichte. Es wurden deshalb die Netzfilter durch Röhren, welche mit kleinen Messingnägeln gefüllt waren, ersetzt. Die Röhren waren aus Glas oder Metall, circa 12 *cm* lang und circa 2 *cm* weit. 10 *cm* der Rohrlänge wurden von der Nagelfüllung eingenommen, auf diese wurde beiderseits eine Scheibe von weitmaschigem Messingdrahtnetz — lediglich um das Herausfallen der Nägel zu verhindern — aufgesetzt und dann das Rohr beiderseits mit durchlochten Pfropfen, in welche die Röhren der isolierenden Verbindungs-

stücke eingeführt wurden, verschlossen. Aus dem Inneren des Rohres führte ein blanker Metalldraht zu einer außen an demselben befestigten Klemmschraube.

Um die entladende Kraft dieser Filter zu erproben, wurden zwei derselben, untereinander isoliert, verbunden und ein Strom durch Aufquellen durch Wasser elektrisierter Luft durch dieselben gesogen. War das dem eintretenden Luftstrome zugekehrte Filter (Nr. 1) mit dem Elektrometer verbunden, so zeigte dasselbe ganz bedeutende Ladungen an; wurde jedoch dieses Filter zur Erde abgeleitet und das dem eintretenden Luftstrome abgewandte Filter (Nr. 2) mit dem Elektrometer in Verbindung gesetzt, so ergab sich kein Elektrometerausschlag. Die folgende Tabelle gibt einen dieser Versuche wieder:

Tabelle 1.

Dauer des Aufsaugens in Minuten..............	0	1	2	3	4	5
Angesaugtes Luftquantum in Litern	0·0	10·0	20·0	30·0	40·0	50·0
Ladung des Filters 1 in Volt	—0·00	—0·66	—1·50	—2·30	—3·60	—5·00
Ladung des Filters 2 in Volt	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00

Dieser Versuch allein würde jedoch noch nicht ausreichen, um die entladende Kraft des Filters zu beweisen; es wäre ja immerhin möglich, dass die Luft zwar einen Theil ihrer Ladung an das Filter abgibt, einen anderen Theil jedoch forträgt, der dann, wenn die entladende Kraft der beiden Filter die gleiche ist, auch bei dem Passieren mehrerer Filter nicht mehr an dieselben abgegeben wird. Wenn aber eine Elektricitätserregung nur zwischen Luft und Wasser stattfindet, muss sich offenbar in der Luft eine gleich große Elektricitätsmenge vorfinden wie im Wasser und nur das entgegengesetzte Vorzeichen tragen. Das Filter wird jedoch, wenn es isoliert aufgestellt oder mit dem Elektrometer verbunden — außer wenn es wie früher zur Erde abgeleitet — ist, der Luft nur eine Elektricitätsmenge entziehen können, welche dem Ausgleichspotentiale zwischen Filter und Luft entspricht. Die aufgenommene Elektricitäts-

menge kann demnach immer nur ein Bruchtheil der wirklich in der Luft enthaltenen sein, und zwar wird der Bruch umso größer sein, je größer das Potential der Luft gegen jenes des Filters ist, ein Zustand, welcher bei Beginn der Ladung jedenfalls vorhanden ist und umso länger erhalten bleibt, je größer die Capacität des Filters und der mit demselben in leitender Verbindung stehenden Conductoren ist. Wenn demnach die durch das Filter aufgesammelte Elektricitätsmenge auch etwas kleiner sein wird als die thatsächlich bei dem in Untersuchung stehenden Processe erzeugte, so wird doch durch Vergleich der zusammengehörigen, im Filter, beziehungsweise im Wasser auftretende Elektricitätsmenge auf die entladende Kraft des Filters ein Rückschluss gemacht werden dürfen.

Es wurden deshalb die folgenden Parallelversuche angestellt:

Bei dem Hindurchblasen von 80 *l* Luft durch 400 cm^3 Wasser in 10 Minuten zeigte das Elektrometer:

mit dem Filter verbunden .....16·08 Volt negativ,
mit dem Wasser verbunden....13·26 Volt positiv,

bei der Wiederholung des Versuches unter denselben Umständen:

mit dem Filter verbunden .....16·08 Volt negativ,
mit dem Wasser verbunden....12·90 Volt positiv.

Es ist also im Mittel aus beiden Versuchen:

das Potential des Filters.......16·08 Volt negativ,
das Potential des Wassers.....13·08 Volt positiv.

Zur Bestimmung der Capacitäten des Elektrometers mit den Zuleitungen in Verbindung mit dem Wassergefäße, beziehungsweise dem Filter wurde ein Luftcondensator von 10 *cm* Plattendurchmesser und 1·5 *mm* Plattenabstand zum Potentiale von 6 Volt geladen und durch Ladungstheilung der hieraus bekannten Elektricitätsmenge die unbekannte Capacität der früher bezeichneten Systeme von Conductoren ermittelt. Hiebei fand sich:

Capacität von Elektrometer und Filter zusammen . . . 98·40 *cm*,
Capacität von Elektrometer und Wasser » . . . 121·82 *cm*.

Es entsprechen demnach den in den angeführten Versuchen beobachteten Potentialen die Elektricitätsmengen:

im Wasser . . . . 5·31 elektrostatische Einheiten +,
im Filter . . . . . . 5·27 » » —,

also eine vollkommen befriedigende Übereinstimmung.

Bei längerer Benützung scheint jedoch die Aufnahmsfähigkeit der Filter durch die Oxydation der Metalltheile zu leiden, da nur neue Filter so gute Übereinstimmung in der Elektricitätsmenge zeigen. Nachdem hiemit die Benutzbarkeit der Filter als Sammelapparate für die Luftladungen auch für quantitative Messungen nachgewiesen erscheint, möge die Besprechung der einzelnen angestellten Versuche angeschlossen werden.

Ohne über die Art der Elektricitätserregung bei dem Aufsprudeln von Luft durch Wasser eine specielle Voraussetzung zu machen, wird man doch in erster Linie sich diese Elektricitätserregung als in der Trennungsfläche zwischen Luft und Wasser vor sich gehend betrachten müssen. Dementsprechend wird dann auch die Größe dieser Fläche für die Intensität der Elektrisierung maßgebend sein. Eine Variation der Größe der Blasenoberfläche lässt sich aber durch die Veränderung des Durchmessers des Rohres, aus dem die Luftblasen entweichen, leicht erreichen.

Kreisförmige, nach abwärts gerichtete Rohröffnungen von verschiedenen Durchmessern ergaben folgende Resultate:

Tabelle 2.

	Rohrdurchmesser, Millimeter					
	1	2	3	4	5	7
Wasser, Volt positiv	16·15	14·20	10·70	9·54	8·46	6·23
Wasser, elektrostat. Einh. . .	6·46	5·68	4·28	3·82	3·38	2·49
Filter, Volt negativ	17·23	13·07	9·07	8·30	7·00	5·70
Filter, elektrostat. Einh.	7·31	5·54	3·84	3·52	2·97	2·42

Die in dieser Tabelle angegebenen Ladungen wurden durch das Aufsprudeln von 40·0 *l* Luft in 5 Minuten erzeugt. Die Capacitäten betrugen:

Elektrometer und Wassergefäß . . . . 120·12 *cm* elektrostat.
Elektrometer und Filter . . . . 127·30 *cm* »

Den kleineren Rohrdurchmessern entsprechen demnach unter sonst gleichen Umständen größere Elektricitätsmengen.

Saugt man den Luftstrom mit Hilfe eines Aspirators durch das Wasser, so nimmt dessen Intensität entsprechend der Verminderung der Druckhöhe des Wassers im Aspirator continuierlich ab. Die Beobachtung des Elektrometerganges, wenn dasselbe mit dem Messfilter in Verbindung steht, während dieser Luftstrom von abnehmender Stärke Wasser und Filter durchfließt, lässt sofort die Abhängigkeit der Größe der Ladung von der in der Zeiteinheit aufquellenden Luftmenge erkennen.

Tabelle 3.

Zeit in Minuten	0	1	2	3	4	5
Luftmenge in Litern	0·0	3·5	6·5	9·0	9·7	10·0
Filterladung in Volt negativ .	0·0	1·6	2·6	3·2	3·4	3·4

Tabelle 4.

Zeit in Minuten	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Luftmenge in Litern	0	1·5	3·0	5·0	7·0	8·0	9·0	9·7	10·0
Filterladung in Volt negativ	0·0	0·3	0·7	1·1	1·5	1·9	2·0	2·1	2·1

Es zeigt sich, dass die Elektricitätsmenge mit wachsender Intensität des Luftstromes größer wird und dass gleichen Luftmengen, wenn dieselben in verschiedenen Zeiten das Wasser passieren, ungleich große Ladungen entsprechen.

Als ein weiteres Beispiel über den Zusammenhang der Intensität des Luftstromes mit der Größe der durch denselben

bedingten Elektricitätserregung möge noch folgender Versuch angeführt werden, bei welchem die Luft mit Hilfe der Luftpumpe eingesaugt und ein Steigrohr von 3 *mm* Durchmesser mit nach unten gerichteter Mündung verwendet wurde:

Tabelle 5.

In 5 Minuten Liter Luft	7·5	15·0	25·0	40·0
Wasserladung, Volt positiv	1·33	4·00	6·00	9·66

Bildet man aus den Zahlwerten dieser Tabelle die entsprechenden Proportionen, so ergibt sich für die Luftmengen:

1·0 : 2·0 : 3·3 : 5·2,

für die Potentiale, beziehungsweise die denselben proportionalen Elektricitätsmengen:

1·0 : 3·0 : 4·5 : 7·26,

also ein analoges Verhalten, wie bei dem Aspiratorversuche. Dasselbe dürfte seine Erklärung darin finden, dass infolge der verschiedenen Drucke, welche erforderlich sind, um unter sonst gleichen Umständen aus demselben Rohre in gleichen Zeiten verschiedene Luftmengen austreten zu lassen, auch die Blasengröße eine Änderung erfährt. Dies dürfte auch die Ursache davon sein, dass Rohre gleicher Öffnungsweite, aber mit nach aufwärts, beziehungsweise nach abwärts gerichteter Mündung ceteris paribus verschieden große Ladungen bedingen. So fand sich:

Bei Rohrdurchmesser 1 *mm*, Tauchtiefe 3·5 *cm* und einer Luftmenge von 30 *l* in 5 Minuten:

Öffnung nach abwärts.......Wasserladung 5·67 Volt positiv,
» » aufwärts ...... » 4·00 » »

Bei Rohrdurchmesser 4 *mm*, Tauchtiefe 4·5 *cm* und einer Luftmenge von 40 *l* in 5 Minuten:

Öffnung nach abwärts ......Wasserladung 11·0 Volt positiv,
» » aufwärts...... » 8·3 » »

Bei nach unten gerichteter Mündung ist sonach die Ladung ganz erheblich stärker.

Einen ganz bedeutenden Einfluss auf die Größe der Elektricitätserregung übt, wie übrigens schon aus einigen der bisher angegebenen Versuche hervorgeht, eine Veränderung der Höhe, welche die Luftblasen zu durchsetzen haben. Zur Klarstellung der diesbezüglichen Verhältnisse wurden drei Gruppen von Versuchen angestellt. Die erste derselben wurde in den eingangs beschriebenen Flaschen vorgenommen. Hiebei konnte die Steighöhe der Blasen zwar nur innerhalb geringer Grenzen variiert werden, diese Anordnung ermöglichte aber, die Elektricitätserregung sowohl in der Luft, als auch im Wasser zu verfolgen und hiedurch die gefundenen Werte immer einer Controle unterwerfen zu können. Die Änderung der Tauchtiefe wurde durch Verschiebung des Steigrohres bewirkt und blieb die Wassermenge unverändert gleich 400 cm^3. Die Dauer des Aufsprudelns war bei allen Versuchen dieser Reihe 5 Minuten und betrug die Luftmenge constant 40 *l*.

Tabelle 6.

Rohrdurchmesser: 2 *mm*, Mündung nach abwärts.

	Tauchtiefe in Centimetern		
	2	3	4
Wasser, Volt positiv	13·9	14·3	14·3
Filter, Volt negativ	14·07	14·30	14·30

Tabelle 7.

Rohrdurchmesser: 3 *mm*, Mündung nach abwärts.

	Tauchtiefe in Centimetern			
	1	2	3	4
Wasser, Volt positiv	3·19	5·37	9·62	13·53
Filter, Volt negativ	2·49	4·76	9·74	14·40

Tabelle 8.

Rohrdurchmesser: 4 *mm*, Mündung nach abwärts.

	Tauchtiefe in Centimetern			
	1	2	3	4
Wasser, Volt positiv	3·13	6·27	8·04	10·26
Filter, Volt negativ	3·20	6·53	8·04	10·06

Tabelle 9.

Rohrdurchmesser: 5 *mm*, Mündung nach abwärts.

	Tauchtiefe in Centimetern	
	1	4
Wasser, Volt positiv	4·2	9·13

Tabelle 10.

Rohrdurchmesser: 4 *mm*, Mündung nach aufwärts.

Luftmenge, Liter in 5 Minuten	15	25	40
Wasser, Volt positiv, Tauchtiefe 2 *cm*	1·2	3·6	7·0
Wasser, Volt positiv, Tauchtiefe 3·5 *cm*	2·2	5·6	3·2

Besonders auffallend sind die für das Rohr von 2 *mm* (Tabelle 6) gefundenen Werte: hier äußert sich die Vergrößerung der Steighöhe fast gar nicht in einer Änderung der erzeugten Elektricitätsmenge, ein Fehler in der Beobachtung ist aber dadurch sehr unwahrscheinlich gemacht, dass die Elektricitätsmengen für Luft und Wasser, obwohl sie verschiedenen Versuchen entstammen, ziemlich gut übereinstimmen.

Die Capacitäten betrugen:

Elektrometer und Wassergefäß zusammen . 127·02 *cm* elektrostatisch,

Elektrometer und Filter zusammen .... 124·00 *cm* elektrostatisch.

Um den Einfluss der Veränderung der Blasensteighöhe auf die Elektricitätserregung über weitere Grenzen verfolgen zu können, als dies bei Anwendung der Flaschen geschehen konnte, wurde eine zweite Gruppe von Versuchen angestellt, bei welchen als Wassergefäß ein 1 *m* langes und circa 6 *cm* weites Glasrohr diente. Dasselbe war vertical aufgestellt und beiderseits mit Pfropfen verschlossen. Durch den unteren Pfropfen war das Steigrohr verschiebbar eingeführt; der obere Pfropfen war von einer kurzen Glasröhre durchsetzt und diese durch einen kurzen Schlauch mit dem Filter verbunden. Diese Anordnung ermöglichte die Verwendung von Wasserhöhen bis zu 55 *cm*. Da die Röhre nicht hinreichend isoliert gehalten werden konnte, wurden nur die Luftladungen untersucht. Die Rohröffnung war nach aufwärts gerichtet und hatte einen Durchmesser von 6 *mm*.

Tabelle 11.

Luftmenge in 5 Minuten 40 *l*.

Steighöhe in Centimetern..	5·8	10·0	25·0	38·0	45·0	55·0
Filter, Volt negativ	2·4	2·72	3·4	3·5	3·61	3·84

Tabelle 12.

Luftmenge in 5 Minuten 15 *l*.

Steighöhe in Centimetern ..	2·0	4·0	6·0	8·0	12·0	20·0	45·0
Filter, Volt negativ	0·42	0·70	0·92	1·00	1·12	1·21	1·40

Die Versuche lassen erkennen, dass die Steigerung der Elektricitätserregung bei Vergrößerung der Wasserhöhe immer kleiner wird. Dieser Anordnung hafteten aber noch einige Mängel an; bei starken Luftströmen bildete sich nämlich in der Röhre Schaumwasser, und es ist deshalb fraglich, ob die in der Tabelle als Steighöhe bezeichnete Zahl, welche den Abstand der Rohrmündung von dem ruhigen Wasserspiegel

angibt, auch thatsächlich für die Beurtheilung der von den Luftblasen durchsetzten Wasserschicht verwendet werden darf. Außerdem bedingte der Umstand, dass die geladene Luft von ihrem Austritte aus dem Wasser bis zum Eintritte in das Filter einen Schlauch passieren musste, ganz bedeutende Ladungsverluste. Es wurde deshalb eine dritte Gruppe von Versuchen angestellt, in welchen diese Übelstände nach Möglichkeit eingeschränkt wurden.

Als Wassergefäß diente jetzt eine 5 *cm* weite, rechtwinkelig abgebogene Glasröhre; der eine Schenkel derselben war 60 *cm* lang und wurde vertical aufgestellt, der kürzere, circa 30 *cm* lange Schenkel war horizontal gelegt. In dem verticalen Theile befand sich das Wasser, und zwar reichte dasselbe bis knapp unter den Ansatz des horizontalen Schenkels. Das Steigrohr war am unteren Ende des verticalen Theiles durch einen Pfropfen verschiebbar eingeführt. Das Filter war direct an den horizontalen Arm angesetzt, so dass keine nennenswerten Ladungsverluste eintreten konnten, da jetzt der Luftweg ganz bedeutend abgekürzt war. Auch die Ausbildung von Schaumwasser war durch den Ansatz des horizontalen Schenkels fast ganz hintangehalten.

Bei dem Hindurchblasen von 40 *l* Luft in 5 Minuten ergab sich:

Tabelle 13.

Rohrdurchmesser: 2 *mm*, Mündung nach aufwärts.

Steighöhe in Centimetern...	2·5	7·0	18·0	26·0	33·0	45·0
Filter, Volt negativ........	13·4	19·1	26·1	26·5	26·5	26·3

Capacität von Elektrometer und Filter zusammen: 127·3 *cm*.

Bei dem Aufsteigen der Luftblasen macht sich infolge der Abnahme des Wasserdruckes ein ganz bedeutendes Anwachsen der Luftblasen vom Momente des Austretens derselben aus dem Steigrohre bis zum Platzen derselben an der Wasseroberfläche bemerkbar. Es wurde deshalb noch versucht, eine Anordnung zu treffen, welche die Blasen auf dem ganzen im Wasser

zurückzulegenden Wege unter annähernd gleichem Drucke erhält, also eine Vergrößerung der Blasenoberfläche nach der Loslösung von der Austrittsöffnung verhindert. Diese Forderung wurde dadurch annähernd erfüllt, dass das rechtwinkelig abgebogene Glasrohr mit dem längeren Schenkel horizontal, mit dem kurzen Schenkel vertical aufgestellt und so weit mit Wasser gefüllt wurde, dass dasselbe im verticalen Theile noch circa 5 *cm* hoch reichte. Das Rohr für die Luftzufuhr war im horizontalen Theile verschiebbar und besaß eine Öffnung von 2 *mm* Durchmesser. Das Filter war am verticalen Schenkel direct angebracht. Die Blasen mussten nun durch den horizontalen Schenkel streichen und zeigten bei den verschieden langen Wasserwegen, welche dieselben bei einer Verschiebung des Steigrohres in diesem horizontalen Schenkel zurückzulegen hatten, nicht nur bei dem Austritte aus der Rohrmündung, sondern auch während ihrer Fortbewegung eine ziemlich gleich bleibende Gestalt und Größe. Die beobachteten Ladungen des Filters beim Hindurchleiten von 40 *l* Luft in 5 Minuten waren:

Tabelle 14.

Horizontaler Wasserweg in Centimetern	5	15	25	35	45
Filter, Volt negativ	13·84	15·00	16·08	19·23	21·23

Capacität von Elektrometer und Filter zusammen: 127·3 *cm*.

Die Vergrößerung der Elektricitätserregung bei einer derartigen Verlängerung des Wasserweges ist also noch geringer und erfolgt noch langsamer als in den Versuchen, in denen die Blasen nach ihrer Ablösung von der Austrittsöffnung noch ein Wachsthum zeigten.

Schon bei der Anstellung der einzelnen bisher beschriebenen Versuche war es aufgefallen, dass bei Verwendung kalten Wassers oder bei niedrigen Lufttemperaturen die Elektricitätserregung beim Aufquellen von Luft durch Wasser ganz merklich verringert wurde. Es war deshalb nothwendig, Versuche anzustellen, bei welchen die Temperatur unter sonst

gleichen Versuchsbedingungen innerhalb möglichst weiter Grenzen variiert wurde.

Der Ausführung dieser Experimente stellten sich eine ganze Reihe von Schwierigkeiten entgegen. Vorerst musste, da die damalige Versuchsanordnung es nicht ermöglichte, das Wasser auf einer constanten höheren Temperatur — bei gleichzeitiger guter Isolation desselben — zu erhalten, von einer Untersuchung der Wasserladung abgesehen werden. Anderseits war auch die Untersuchung der Ladung der Luft dadurch erschwert, dass die bei höheren Temperaturen vom Luftstrome mitgeführten Wasserdämpfe sich in dem kalten Filter condensierte und die erforderliche Isolierthaltung desselben unmöglich machte. Es musste daher die Luft vor der Einleitung in das Filter erst durch gekühlte Vorlagen geleitet und so vom Wasserdampfe befreit werden. Hiebei gieng aber auch ein Theil der Luftladung verloren. Die folgende Tabelle gibt demnach nur einen Bruchtheil der wirklichen Ladung der Luft.

Tabelle 15.

Luftmenge in 5 Minuten 40 *l*.

Wassertemperatur Grade Celsius	0	10	15	25	30	35	50	60
Filter, Volt negativ ...	0·4	1·00	1·76	3·32	3·88	5·00	(6·4)	(8·0

Bei 50°, beziehungsweise 60° Wassertemperatur konnte das Filter nur 2 Minuten isoliert erhalten werden. Für diesen Zeitpunkt betrugen die Potentiale der Filterladung 2·56, beziehungsweise 3·2 Volt; die Werte in der Tabelle sind extrapoliert und deswegen in Klammern angeführt. Wurde endlich das Wasser auf Zimmertemperatur erhalten und die Luft, bevor sie in dasselbe eintrat, durch ein erwärmtes Rohr gesaugt, so ergab sich beim Aufquellen von 40 *l* Luft in 5 Minuten:

Rohr nicht erwärmt, Filter, 1·6 Volt negativ,
Rohr stark erwärmt, Filter, 2·8 Volt negativ.

Es zeigt sich also ein ganz bedeutendes Anwachsen der Elektricitätserregung bei einer Steigerung der Temperatur.

Im Anschlusse an diese Untersuchungen möge noch ein Versuch erwähnt werden, welcher feststellen sollte, ob Wasser eine elektrische Ladung erhält, wenn dasselbe durch Sieden in heftige Wallung versetzt wird und Dampfblasen aus demselben aufsteigen. Zu diesem Zwecke wurde eine gläserne Kochflasche mit Wasser halb gefüllt und in ein mit Glycerin gefülltes Blechgefäß gestellt, dieses Gefäß selbst aber an drei circa 2 *m* langen Drähten an einer Ebonitstange aufgehangen.

In das Wasser tauchte ein mit dem Elektrometer verbundener Platindraht. Wurde dieses Ölbad erhitzt, so konnte das Wasser nach Entfernen der Flamme noch circa 5 Minuten in lebhaftem Sieden erhalten werden. Die Anordnung erwies sich bei Zimmertemperatur als vollkommen isolierend, beim Sieden nach Entfernung der Flamme auch noch genügend isolationsfähig, indem von einer Ladung von 20 Volt in einem Zeitraume von 5 Minuten nur ein Verlust von circa 0·5 Volt beobachtet wurde.

Die Beobachtung des Elektrometers während des Siedens des Wassers im Ölbade nach Entfernung der Flamme ließ keine Elektricitätserregung erkennen, sobald nur Dampfblasen dem Wasser entstiegen; wurde jedoch mit Hilfe eines isoliert gehaltenen Glasrohres Luft durch das Wasser geblasen, so zeigte das Elektrometer sofort die Erzeugung einer positiven Ladung im Wasser an. Hieraus ergibt sich, dass beim Austreten von Dampfblasen aus Wasser eine Elektrisierung — wenigstens von der Größenordnung der Elektricitätserregung zwischen Luftblasen und Wasser — nicht stattfindet.

Die meisten Untersuchungen, welche sich mit der Frage der Elektrisierung der Luft beschäftigen, wenden der Erörterung der Rolle, welche einem eventuellen Staubgehalte der Luft zukommt, eine große Aufmerksamkeit zu, da ja die Auffassung weit verbreitet ist, dass die Luft selbst ungeladen und der Staub der eigentliche Träger der Ladung ist. In den vorliegenden Untersuchungen wurde aus folgenden Gründen auf ein specielles Eingehen auf die Behandlung staubhaltiger Luft verzichtet: Wird staubhaltige Luft durch das Wasser gepresst, so nimmt das Wasser einen Theil des Staubes auf; die Versuche würden sich dann nicht mehr auf Wasser (es möge hier

nochmals betont werden, dass zu den beschriebenen Versuchen ausschließlich destilliertes Wasser in Verwendung genommen wurde), sondern auf Lösungen beziehen, welche nach den Untersuchungen von Lord Kelvin dem reinen Wasser gegenüber oftmals ein ganz entgegengesetztes Verhalten zeigen. Es würde also nicht nur die Wirkung staubhaltiger Luft in Erscheinung treten, sondern sich gleichzeitig der Einfluss der in das Wasser übergegangenen Stoffe zeigen, und dies in einer Form, welche nicht gestattet, aus den superponierten Phänomenen die Einzelerscheinung zu isolieren. Es wurde demnach auch in den anderen Versuchen danach gestrebt, den Staub nach Möglichkeit von Luft und Wasser fernzuhalten und dies dadurch zu erreichen gesucht, dass einerseits dem Filter das bereits erwähnte Watterohr vorgelegt wurde und anderseits immer nach wenigen Versuchen das Wasser in dem Gefäße erneuert wurde.

Bei dem Hindurchgange der Luftblasen durch das Wasser geräth dasselbe in ziemlich heftige Bewegung, welche sich bis an die Gefäßwand erstreckt und deshalb eine Untersuchung darüber erforderlich macht, ob nicht etwa durch die Reibung des Wassers an der Gefäßwand eine Elektricitätserregung eintritt, welche zu Fehlern in den Beobachtungen Anlass geben könnte.

Diese Elektricitätserregung müsste sich sofort darin äußern, dass unter sonst gleichen Versuchsbedingungen Gefäße aus verschiedenem Materiale verschieden große Elektricitätsmengen in Luft und Wasser einerseits zeigen müssten und dass anderseits auch die Elektricitätsmengen in der Luft, gemessen durch die Bestimmung des Potentiales eines Filters von constanter Capacität, bei Anstellung von Versuchen mit Wassergefäßen aus verschiedenem Materiale untereinander verschieden sein müssten, wenn eine eventuelle Elektricitätserregung zwischen Wasser und Gefäßwand eine Rückwirkung auf die Elektricitätserregung zwischen Wasser und Luftblasen ausüben würde.

Die Untersuchungen wurden ausgedehnt auf Gefäße aus Glas, Weißblech, Blech mit Schellacküberzug, Blech mit Paraffinüberzug und Glas mit Paraffinüberzug. Als Gefäße dienten theils die auch in den früheren Versuchen verwendeten Glas-

flaschen, theils Blechbüchsen vom gleichen Durchmesser mit den Flaschen. Die Steigröhren waren theils blanke Glas- oder Metallröhren, theils Glasröhren mit Überzug von Schellack oder Paraffin.

Bei der Verwendung von Metallgefäßen konnten den Glasgefäßen gegenüber nur ganz geringe Differenzen beobachtet werden, welche die Abweichungen der einzelnen Versuche in ein und demselben Gefäße kaum überschreiten. So wurde z. B. beim Hindurchblasen von 40 *l* Luft in 5 Minuten beobachtet:

Das Wasser befindet sich in einem Metallgefäße mit Metallsteigrohr:

Filterladung: 4·28 Volt negativ.

Das Wasser befindet sich in einem Glasgefäße mit Glassteigrohr:

Filterladung: 4·00 Volt negativ.

Wesentlich anders gestaltet sich jedoch der Process, wenn das Gefäß mit einem Isolator, welcher vom Wasser nicht benetzt wird, überzogen ist. Ausgeführt wurden unter sonst gleichen Versuchsbedingungen folgende Parallelversuche:

Metallgefäß, innen blank, mit ebenfalls blankem Metallsteigrohre:

Filter: 4·28 Volt negativ.

Gefäß und Steigrohr aus Metall, beide mit Schellacküberzug:

Filter: 2·28 Volt negativ.

Gefäß und Steigrohr aus Metall, beide mit Paraffinüberzug:

Filter: 1·17 Volt negativ.

Um davor vollkommen gesichert zu sein, dass nicht etwa in Lösung gegangene Stoffe des Wandüberzuges die Elektricitätserregung beeinflussen, wurde eine mit einem Paraffinüberzuge innen versehene Glasflasche mehrere Tage hindurch mit destilliertem Wasser gewaschen und dann folgender Versuch angestellt:

Flasche und Steigrohr mit Paraffinüberzug:

Wasser: 7·91 Volt positiv,
Filter: 7·44 Volt negativ.

Flasche und Steigrohr blank:

Wasser: 16·00 Volt positiv,
Filter: 12·20 Volt negativ.

Zum Nachweise, dass das Wasser durch das Paraffin in keiner Weise verändert wurde, wurde dasselbe aus der innen paraffinierten Flasche in die blanke Glasflasche überfüllt und sodann neuerdings einem Luftstrome ausgesetzt. Es ergab sich:

Wasser: 15·3 Volt positiv,
Filter: 12·20 Volt negativ,

also eine hinreichend gute Übereinstimmung in den letzten beiden Versuchen, um eine Veränderung der Beschaffenheit des Wassers in der paraffinierten Flasche für ausgeschlossen zu betrachten.

Überblickt man dieses auffällige Verhalten nochmals, so zeigt sich sofort, dass Gefäßwände aus Leitern, beziehungsweise benetzten Isolatoren keine Abweichung vom normalen Verhalten erkennen lassen. Dies dürfte dadurch seine Erklärung finden, dass, falls eine Elektricitätserregung zwischen Wasser und Gefäßwand stattfinden sollte, dieselbe, wenn die Gefäßwand ein Leiter ist, einen sofortigen Austausch der entgegengesetzt gleichen Elektricitätsmengen zur Folge haben müsste. Die Glaswand hingegen als benetzter Isolator würde überhaupt nur eine Reibung des Wassers an der der Wand adhärierenden Wasserschichte zulassen. Während also im ersten Falle eine Elektricitätserregung möglich ist, dieselbe jedoch nach außen hin unwirksam bleiben dürfte, würde es im zweiten Falle, wo nur Reibung von Wasser an Wasser erfolgt, überhaupt zu keiner Elektricitätserregung kommen. Um auch das Verhalten der mit unbenetzbaren Isolatoren überzogenen Gefäßwände einer Erklärung näher zu bringen, müssen wir vorerst an die Versuche von Elster[1] erinnern, in welchen gezeigt wurde,

[1] Elster, Wied. Ann. d. Phys. u. Chem., Bd. 6, S. 578.

dass Wasser bei Reibung an festen Körpern — Eis ausgenommen — positiv elektrisch wird, also eine Ladung vom selben Vorzeichen wie bei dem Hindurchquellen von Luft annimmt. Dass aber die Ertheilung einer ziemlich starken constanten Ladung an das Wasser keine Änderung auf die Elektricitätserregung zwischen Luft und Wasser ausübt, zeigen folgende diesbezüglich angestellten Versuche: Das Wasser in einer innen blanken Glasflasche mit ebenfalls blanker Steigröhre aus Glas wurde durch Verbindung mit einem Satze von Accumulatoren auf einem constanten Potentiale erhalten und einem Luftstrome ausgesetzt. Der Versuch ergab:

Wasser 14 Volt positiv	Filter 2·3 Volt negativ,
Wasser zur Erde abgeleitet	Filter 2·3 Volt negativ,
Wasser 14 Volt negativ	Filter 2·2 Volt negativ.

Hiedurch ist gezeigt, dass die Reibung des Wassers an der Gefäßwand und eine eventuell hiemit verbundene Elektricitätserregung zur Erklärung der beobachteten Erscheinung nicht genügt. Es könnte die Ursache der in den mit Isolatoren überzogenen Gefäßen zur Beobachtung gelangten Abweichung in der Intensität der Elektrisierung noch in einer Änderung der Form oder Größe der Luftblasen gesucht werden, da ja, wie früher gezeigt wurde, hiemit ganz bedeutende Schwankungen der Elektricitätserzeugung verbunden sind. Da die Blasen selbst infolge der Undurchsichtigkeit der Gefäßwände einer directen Beobachtung entzogen waren, wurde eine Versuchsreihe angestellt, bei welcher als Wassergefäß eine innen blanke Glasflasche in Verwendung kam, das Material, beziehungsweise der Überzug der Steigröhren jedoch variiert wurde. Diese Versuche ergaben:

Steigrohr aus Messing, Filter . . . . 3·2 Volt negativ,
» » Glas, » . . . . 3·0 » »
» » Glas mit Schellacküberzug, Filter . . . . 2·33 » »
» » Glas mit Paraffinüberzug, Filter 1·60 » »

Eine Materialänderung des Steigrohres allein äußert sich nach diesen Versuchen schon ganz bedeutend und könnte

sonach das abweichende Verhalten der Elektricitätserregung bei Abänderung des Gefäßmateriales in Ermanglung einer anderen Deutung eine Erklärung aus einer Beeinflussung der Blasenausbildung — in erster Linie durch die Beschaffenheit des Steigrohres — erfahren.

Die Stellung des Steigrohres der Gefäßwand gegenüber zeigt keinen Einfluss auf die Elektricitätserregung. Wurde in einer dreihalsigen Flasche das Steigrohr in dem mittleren Halse — wie dies gewöhnlich der Fall war — eingesetzt, so ergab sich nach dem Aufsprudeln von 40 *l* Luft in 5 Minuten:

Filterladung 2·16 Volt negativ.

Wurde ein ganz gleiches Steigrohr in einen der seitlichen Hälse eingesetzt, so ergab sich unter sonst gleichen Umständen

Filterladung 2·20 Volt negativ.

Wurden endlich beide Steigröhren gleichzeitig in Function gesetzt, so ergab sich bei ungeänderter Luftmenge:

Filterladung 2·16 Volt negativ.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Luft ihre Ladung, welche sie beim Aufquellen durch Wasser angenommen hat, leicht an andere Körper abgibt. Es war deshalb bei der Anordnung der Versuche immer darauf Bedacht genommen werden, den Weg, den die Luft vor dem Austritte aus dem Wasser bis zum Eintritte in das Filter zurückzulegen hatte, möglichst abzukürzen, um derselben die Gelegenheit zu nehmen, ihre Ladung an die Wände der Leitung abzugeben. Um die Größe dieser Verluste beurtheilen zu können, wurden verschiedene Versuche angestellt, bei denen die geladene Luft vor ihrem Eintritte in das Filter verschieden lange Wege zurückzulegen hatte. So gab eine Luftmenge von 40 *l* in 5 Minuten an das Filter nachstehende Ladungen ab:

6·48 Volt negativ bei directer Einleitung.
0·80 » » , wenn dieselbe vor Eintritt in das Filter ein Glasrohr von 0·5 *cm* Weite und 150 *cm* Länge passierte.

1·80 Volt negativ, wenn in den Luftweg ein Glasrohr von 6 *cm* Weite und 50 *cm* Länge eingeschaltet war.
1·84 » » , wenn dasselbe Rohr eine Schichte von Chlorcalcium enthielt und die geladene Luft über dasselbe streichen musste.

Während sonach das Chlorcalcium keine Wirkung äußert, wenn die Luft über dasselbe streicht, bewirkt es fast vollständige Entladung, wenn die Luft durch dasselbe hindurchgetrieben wird. Ein Luftstrom von 40 *l* in 5 Minuten gab ab:

7·04 Volt negativ an ein gewöhnliches Filter.
5·60 » » an eine isoliert aufgestellte, durch einen Platindraht mit dem Elektrometer verbundene Chlorcalciumröhre.
0·56 » » an ein Metallfilter, wenn dasselbe hinter eine zur Erde abgeleitete Chlorcalciumröhre geschaltet war.

Verfolgt man den Verlauf der Elektricitätserregung durch Beobachtung des mit dem Wasser oder mit dem Filter verbundenen Elektrometers von Minute zu Minute, so zeigt sich ein fast vollkommen gleichmäßiges Ansteigen der Potentiale, z. B.:

Tabelle 16.

Dauer des Aufsaugens, Minuten....	1	2	3	4	5
Luftmenge in Litern..............	8·0	16·0	24·0	32·0	40·0
Wasser, Volt positiv.............	0·80	1·60	2·38	3·10	3·82
Filter, Volt negativ.............	0·75	1·50	2·20	2·95	3·65

Fasst man die aus den bisher angestellten Experimenten gewonnenen Erfahrungen zusammen, so ergeben dieselben folgende Resultate:

1. Alle Versuche bilden eine Bestätigung der bereits von Lord Kelvin, M. Maclean und A. Galt beschriebenen Erscheinung, dass Luft, welche in Blasen durch Wasser hindurchtritt, eine negative elektrische Ladung erhält, während das Wasser selbst hiebei positiv geladen wird.

2. Erzeugt man durch Verwendung von Steigröhren verschiedener Durchmesser Blasen von verschiedener Größe, so findet sich, dass die durch das Aufquellen gleicher Luftmengen in gleichen Zeiten erzeugten Elektricitätsmengen bei Verkleinerung der Austrittsöffnung größer werden.

3. Unter sonst gleichen Umständen erzeugen Röhren mit nach abwärts gerichteter Mündung größere Ladungen, als Röhren mit nach oben gerichteter Mündung.

4. Die Elektricitätserregung nimmt bei Vergrößerung der pro Zeiteinheit das Wasser durchsetzenden Luftmenge stärker zu als die Intensität des Luftstromes.

5. Die Elektricitätserregung wird verstärkt, wenn der von den Luftblasen zu durchsetzende Wasserweg verlängert wird. Dieser Einfluss äußert sich anfangs ziemlich stark, insbesondere scheint das bei dem Aufsteigen infolge der Druckverminderung eintretende Wachsthum der Luftblasen die Elektricitätsentwickelung zu unterstützen. Von einem bestimmten Momente an erfolgt jedoch, bei Verlängerung des Weges der Blasen durch das Wasser, nur mehr eine geringe Zunahme der Ladung.

6. Die beobachtete Beeinflussung des Elektrisierungsprocesses durch das Material des Gefäßes, beziehungsweise des Steigrohres scheint durch eine Modification der Blasenausbildung, namentlich durch die Steigrohrbeschaffenheit, bedingt zu sein.

7. Die Intensität der Elektricitätserregung ist von der Temperatur des Wassers und der Luft abhängig; höheren Temperaturen entspricht eine Verstärkung der Elektrisierung.

Es wäre verfrüht, auf Grundlage dieser Untersuchungsresultate schon auf eine theoretische Behandlung des Phänomenes der Elektricitätserregung bei dem Hindurchgange von Luftblasen durch Wasser einzugehen oder eine Parallele mit den von verschiedenen Forschern beim Tropfenfalle beobachteten Ladungserscheinungen ziehen zu wollen. Hiezu müsste der mechanische Vorgang beim Aufquellen der Luftblasen und seine Beziehungen zu dem in Verbindung mit demselben ablaufenden Processe der Elektricitätserzeugung in einer viel schärferen Darstellung gegeben sein, als dies in den vorliegenden Untersuchungen, welche nur der allgemeinen Orien-

tierung dienen können, der Fall ist. Erst wenn es möglich sein wird, an Stelle der wenig präcisen Merkmale, wie Rohrdurchmesser, Blasensteighöhe etc. die wirklichen Blasengrößen und Formen, deren Veränderungen bei der Fortbewegung und die Geschwindigkeit, mit welcher die letztere erfolgt, die Druckverhältnisse und die beim Austritte der Luftblasen aus dem Wasser sich abspielenden Vorgänge mit den einzelnen Phasen des Elektrisierungsprocesses in Zusammenhang zu bringen, dann erst wird es möglich sein, ein abschließendes Urtheil über die ganze Erscheinung zu bilden und dieselbe mit anderen Beobachtungen in Beziehung zu setzen.[1]

[1] Sowohl im Winter 1900, als 1901 wurden gelegentlich der starken Schneefälle einige Experimente angestellt, in welchen untersucht werden sollte, ob Luft bei Reibung an Schnee elektrische Ladungen annimmt. Hiezu wurden weite Röhren aus Glas oder Blech mit Schnee gefüllt, an einem Ende derselben ein »elektrisches Filter« isoliert befestigt und sodann ein möglichst kräftiger Luftstrom durch den Schnee und das Filter gesaugt. Trotzdem die Empfindlichkeit des mit dem Filter verbundenen Quadrantenelektrometers ziemlich groß war, konnten nur ganz minimale Ausschläge an demselben constatiert werden, wenn die Versuche unter Beobachtung aller Vorsichtsmaßregeln, durch welche ein Schmelzen des Schnees gehindert wurde, angestellt waren. Diese Elektrometerangaben, welche über 0·05 Volt negativ nicht hinausgiengen, zeigten das Auftreten schwacher Elektricitätserregungen in der Luft bei der Reibung an dem Schnee an. Im Schnee selbst konnten keine Ladungen nachgewiesen werden, was seine Begründung wohl darin finden dürfte, dass die zu den Versuchen verwendeten Schneemengen von circa 5 bis 10 *l* eine den geringen Elektricitätsmengen gegenüber viel zu große Capacität besaßen, um zu einem messbaren Potentiale geladen zu werden.

Über die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Schwingungen einer Saite

von

Heinrich Brell.

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. April 1902.)

Sind bei einem physikalischen Probleme, das durch k generelle Coordinaten $p_1, p_2, \ldots p_k$ charakterisiert ist, die virtuelle Arbeit: $P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \ldots + P_k \delta p_k$ und die lebendige Kraft: $L = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} a_{k\lambda} \dot{p}_k \dot{p}_\lambda$ gegeben, so drücken bekanntlich sowohl die Lagrange'schen Gleichungen $Q_1 = 0, Q_2 = 0, \ldots Q_k = 0$, wobei $Q_\mu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\mu} - P_\mu$, als auch die allgemeine Minimumseigenschaft des Zwanges $Z = \frac{1}{D} [A_{11} Q_1^2 + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \ldots] = \frac{1}{D} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu$, wenn D die nicht identisch verschwindende Determinante aus den a mit den Unterdeterminanten $A_{k\lambda}$ ist, Gesetze für die Bewegung des Systems aus.

Wie man sieht, sind sämmtliche Lagrange'schen Ausdrücke: $Q_1, Q_2, \ldots Q_k$ in der Formel für den Zwang $Z = \frac{1}{D} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu$ vereinigt. Es wird daher, wie Prof. A. Wassmuth[1] zuerst bemerkte, das Gauss'sche Princip der Anwendung der Lagrange-schen Gleichungen dann vorzuziehen sein, wenn gerade die Vereinigung aller Lagrange'schen Gleichungen angestrebt

[1] Über die Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten. Diese Sitzungsber., II, 104, 282 (1895).

wird; so z. B. in dem Falle einer Saite, die man sich aus discreten Punkten aufgebaut denkt.

An der Hand der Lagrange'schen Gleichungen wurde dieses Problem zuerst von Rayleigh[1] und dann später von v. Helmholtz[2] behandelt.

Es ist klar, dass die Anwendung des Principes des kleinsten Zwanges auf dieses Problem, wie es nun im folgenden geschehen soll, im Sinne der obigen Bemerkung eine gewisse Vereinfachung der Lösung mit sich bringt, ganz abgesehen davon, dass die Bedingung $Z =$ Minimum ein Gesetz für die Bewegung ausdrückt.

I.

Eine Saite sei zwischen zwei fixen Punkten M_0 und M_n, die in der X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems liegen, ausgespannt. In gleichen Abständen (a) voneinander trage sie $(n-1)$ materielle Punkte, alle von der Masse m, gegen welche die Masse der Saite selbst vernachlässigt werden kann.

Infolge der herrschenden Spannung S, von der angenommen wird, dass sie während der Bewegung der einzelnen Massenpunkte in der ganzen Saite ihre Größe beibehalte und nur ihre Richtung ändere, werden, solange auf das System keine äußeren Kräfte wirken, die Massenpunkte in eine Gerade zu liegen kommen.

Wird aber die Saite durch äußere Kräfte aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht, was eine Verlängerung derselben bewirkt, so wird dadurch zur Spannung S eine elastische Kraft hinzutreten, welche den äußeren Kräften entgegenwirkt und welche wir der Verlängerung λ der Längeneinheit proportional setzen können, solange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden soll.

Bedeutet E den Elasticitätscoefficienten, q den Querschnitt der Saite, dann ist also die ganze Kraft:

$$K = S + Eq\lambda.$$

[1] J. W. Struth, Baron Rayleigh, Die Theorie des Schalles, I, 120 (1879).
[2] Helmholtz, Akustik, S. 72.

Zur Zeit $t = 0$ habe der Punkt M_i die Coordinaten: $\xi_i = ia$, $\eta_i = 0$, $\zeta_i = 0$; nach einer Verschiebung seien dieselben: $\xi_i' = ia + x_i$, $\eta_i' = y_i$, $\zeta_i' = z_i$. Die Verschiebungen x_i, y_i, z_i, welche als verschwindend klein gegen a vorausgesetzt werden, sind die Coordinaten der Punkte des Systems und, da sie voneinander unabhängig sind, können sie auch als generelle Coordinaten betrachtet werden.

Es wird daher der Zwang

$$Z = \frac{1}{D} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = \frac{1}{D} \sum_{0}^{n} A_{ii} \left[\underset{(x_i)}{Q_i^2} + \underset{(y_i)}{Q_i^2} + \underset{(z_i)}{Q_i^2} \right],$$

da die lebendige Kraft

$$L = \sum_{i=0}^{n} m_i [\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2]$$

ist, wobei die Determinante $D = m^{n+1}$ und sämmtliche $A_{ii} = m^n$ werden. Es wird schließlich:

$$Z = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n} \left[\underset{(x_i)}{Q_i^2} + \underset{(y_i)}{Q_i^2} + \underset{(z_i)}{Q_i^2} \right]. \qquad 1)$$

Die Kraft P_i erhält man durch Betrachtung der Gesammtarbeit Φ.

Der Abstand von zwei Nachbarpunkten in der Ruhelage $M_{i-1} M_i = a$ geht nach der Verschiebung über in $M_{i-1}' M_i' = s = a(1+\lambda)$; die Verlängerung ist also $a\lambda$, die elementare Arbeit $= K.ad\lambda$ und die Gesammtarbeit

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} \int_0^{\lambda} K.ad\lambda = \sum_{i=0}^{n} a \left[S\lambda + \frac{Eq}{2} \lambda^2 \right]. \qquad 2)$$

Es erübrigt nur noch, λ als Function der Coordinaten darzustellen. Nun ist $\lambda = \frac{s-a}{a}$ und s die Distanz der beiden Punkte M_i' und M_{i-1}' mit den diesbezüglichen Coordinaten: $ia + x_i$, y_i, z_i und $(i-1)a + x_{i-1}$, y_{i-1}, z_{i-1}.

Daher ist

$$s^2 = [a+x_i-x_{i-1}]^2+[y_i-y_{i-1}]^2+[z_i-z_{i-1}]^2.$$

Die Voraussetzung, dass die Verschiebungen x_i, y_i, z_i gegen a verschwindend klein sind, liefert:

$$s = [a+x_i-x_{i-1}]\left[1+\frac{(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2}{2(a+x_i-x_{i-1})^2}\right],$$

$$\lambda = \frac{x_i-x_{i-1}}{a}+\frac{(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2}{2a^2} \quad \text{und}$$

$$\lambda^2 = \frac{(x_i-x_{i-1})^2}{a^2}.$$

So erhalten wir nun für die Gesammtarbeit:

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n}\left\{S(x_i-x_{i-1})+\frac{Eq}{2a}(x_i-x_{i-1})^2+\right.$$
$$\left.+\frac{S}{2a}[(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2]\right\}$$

oder, da die Endpunkte fix sind, somit die erste Summe wegfällt,

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n}\left|\frac{Eq}{2a}(x_i-x_{i-1})^2+\frac{S}{2a}(y_i-y_{i-1})^2+\frac{S}{2a}(z_i-z_{i-1})^2\right|.$$

Also ist die Kraft, parallel zur x-Axe auf den Punkt M_i

$$P_{x_i} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \frac{Eq}{a}(x_{i+1}-2x_i+x_{i-1})$$

und analog:

$$P_{y_i} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y_i} = \frac{S}{a}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}).$$

Der Ausdruck für den Zwang Z lautet demnach, wenn man berücksichtigt, dass $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$Z = \frac{1}{m} \sum_1^n \Big\{ \Big[m\ddot{x}_i + \frac{Eq}{a}(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) \Big]^2 + \\ + \Big[m\ddot{y}_i + \frac{S}{a}(2y_i - y_{i+1} - y_{i-1}) \Big]^2 + \\ + \Big[m\ddot{z}_i + \frac{S}{a}(2z_i - z_{i+1} - z_{i-1}) \Big]^2 \Big\}. \qquad 3)$$

Der Zwang Z enthält, wie ersichtlich, wirklich alle Lagrange'schen Gleichungen; wir bekommen dieselben aus der Minimumsbedingung:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{x}_i} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \ddot{y}_i} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \ddot{z}_i} = 0,$$

d. i.

$$m\ddot{x}_i = \frac{Eq}{a}[x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}]$$

$$m\ddot{y}_i = \frac{S}{a}[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}]$$

$$m\ddot{z}_i = \frac{S}{a}[z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}];$$

von diesen drei Gleichungen gibt uns die erste über die longitudinalen, die beiden anderen über die transversalen Schwingungen des Punktsystems Aufschluss.

II.

Um die Differentialgleichung der Bewegung für die continuierliche Saite aus den Gleichungen für die discrete Saite abzuleiten, denken wir uns zuerst die Masse m überall gleichmäßig über das Intervall a vertheilt. Rücken sodann die Punkte M_i immer näher aneinander, so wird, wenn wir $M_0 M_{i-1}$ mit ξ bezeichnen, a in $d\xi$ übergehen; bedeutet ρ die als constant angenommene Dichte der continuierlichen Saite, so wird $m = \rho d\xi$. Die Verschiebungen x, y, z werden jetzt als Functionen der unabhängig Variablen ξ erscheinen.

Es ist

$$x_i = f(\xi)$$

$$x_{i+1} = f(\xi+d\xi) = f(\xi) + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} (d\xi)^2$$

$$x_{i-1} = f(\xi-d\xi) = f(\xi) - \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} (d\xi)^2.$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} (d\xi)^2 = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi^2} (d\xi)^2.$$

Analog werden die Ausdrücke für die Verschiebungen nach den beiden anderen Coordinatenaxen.

Gleichung 3) wird daher:

$$Z = \frac{1}{\rho\, d\xi} \int_0^l \left\{ \left[\rho\, d\xi . \ddot{x} - \frac{Eq}{d\xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} (d\xi)^2 \right]^2 + \ldots \right.$$

$$= \frac{1}{\rho} \int_0^l d\xi \left\{ \left[\rho \ddot{x} - Eq \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right]^2 + \left[\rho \ddot{y} - S \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right]^2 + \left[\rho \ddot{z} - S \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \right]^2 \right\}. \quad 3')$$

Die Bedingung für das Minimum von Z ergibt die drei bekannten Gleichungen:

$$\ddot{x} = \frac{1}{\rho} Eq \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \quad \ddot{y} = \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad \ddot{z} = \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Der Vollständigkeit halber möge der Ausdruck des Zwanges für die continuierliche Saite direct abgeleitet werden, indem wir von der Form

$$Z = \Sigma \left[m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2 + \ldots \right] \quad 4)$$

ausgehen und bezüglich der Kraft die bisherige Annahme beibehalten.

Wir betrachten einen Punkt M_i der verschobenen Saite $M = (\xi + x, y, z)$; die Coordinaten eines Nachbarpunktes M_i' sind dann Functionen von $\xi + d\xi$, also:

$$M_i' = \left[\xi + x + d\xi + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi,\ y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi,\ z + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \right].$$

Daher ist

$$\overline{M_i M_i'}^2 = (ds)^2 = (d\xi)^2 \left(1 + \frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 (d\xi)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 (d\xi)^2$$

$$= (d\xi)^2 \left(1 + \frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \left[1 + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2}\right]$$

$$ds = d\xi \left(1 + \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) \left[1 + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}{2\left(1 + \frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2}\right]$$

$$= d\xi + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 d\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 d\xi.$$

λ, die Verlängerung der Längeneinheit, ist daher:

$$\lambda = \frac{ds - d\xi}{d\xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2,$$

die Gesammtarbeit

$$\Phi = \Sigma a \left[S\lambda + \frac{1}{2} Eq\lambda^2\right]$$

$$= \int_0^l d\xi \left| S \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{S}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{S}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{Eq}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \right|.$$

Um die Kräfte $X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \ldots$ zu finden, bilden wir, da man Φ nicht nach den Verschiebungen x, y, z differenzieren kann,

$$-\delta\Phi = \Sigma(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

$$-\delta\Phi = -\int_0^l d\xi \left[S \frac{\partial(\delta x)}{\partial \xi} + S \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\delta y)}{\partial \xi} + S \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial(\delta z)}{\partial \xi} + Eq \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\delta x)}{\partial \xi} \right.$$

$$= S \left| -\delta x \right|_0^l - S \left| \frac{\partial y}{\partial \xi} \delta y \right|_0^l + \int_0^l S \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \delta y \, d\xi + \ldots$$

Da aber die Endpunkte fix sind, somit dort $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ ist, so erhalten wir:

$$-\delta\Phi = \int_0^l d\xi \left[S \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \delta y + S \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \delta z + Eq \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \delta x \right].$$

Weil die Variationen δx, δy, δz willkürlich sind, folgt

$$X = Eq \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} d\xi, \quad Y = S \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} d\xi, \quad Z = S \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} d\xi.$$

Gleichung 4) wird somit:

$$Z = \int_0^l \rho\, d\xi \left\{ \left[\ddot{x} - \frac{Eq}{\rho\, d\xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} d\xi \right]^2 + \ldots \right\} \quad \text{oder}$$

$$= \frac{1}{\rho} \int_0^l d\xi \left\{ \left[\rho\ddot{x} - Eq \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right]^2 + \left[\rho\ddot{y} - S \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right]^2 + \left[\rho\ddot{z} - S \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \right]^2 \right\},$$

eine Gleichung, die mit (3′) identisch ist.

Über die Gleichung der Sättigungscurve und die durch dieselbe bestimmte maximale Arbeit

von

Paul Ritter.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1902.)

Es hat vor nicht langer Zeit Herr Dieterici[1] experimentell gefunden, dass das Verhältnis der kritischen Temperatur zu derjenigen, bei welcher die äußere Verdampfungsarbeit ein Maximum ist, constant ist, und hat dieses Verhältnis zu 1·3 angeben, oder anders ausgedrückt, es sei diese Temperatur gleich $\frac{1}{1\cdot 3}$ in kritischen Daten gemessen. Hierauf hat Herr Stefan Meyer[2] darauf hingewiesen, dass die Constanz dieses Verhältnisses schon aus dem Mangel an Materialconstanten in der sogenannten reducierten Van der Waal'schen Gleichung

$$\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2}$$

folge, und hat, da eine befriedigende Gleichung für die Sättigungscurve noch nicht aufgestellt war, die Temperatur der maximalen Arbeit dadurch bestimmt, dass er in großem Maßstabe eine dichte Schar von Isothermen nebst der Sättigungscurve verzeichnete und durch Versuche das größte in die Sättigungscurve eingeschriebene Rechteck ermittelte. Für τ ergab sich auf diese Weise 0·700.

[1] C. Dieterici, Ann. der Phys. 6, S. 869, 1901.

[2] St. Meyer, Sitz. Ber. kais. Akad., Wien, Bd. 111, S. 305—310.

Es lässt sich jedoch eine nicht zu complicierte Gleichung für die Sättigungscurve aufstellen und die maximale Verdampfungsarbeit auch durch Rechnung finden, wie im folgenden gezeigt werden wird.

Ist

$$\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2} \tag{1)}$$

die Gleichung einer Isotherme, so besteht für den Sättigungsdruck außerdem noch die Gleichung

$$\int_\alpha^\gamma \pi \, d\omega = \pi(\gamma - \alpha) \tag{2)}$$

oder, da

$$\int \pi \, d\omega = \frac{8\tau}{3} l(3\omega - 1) + \frac{3}{\omega} \tag{3)}$$

auch 2) in der Form

$$\frac{8\tau}{3} l \frac{3\gamma - 1}{3\alpha - 1} + 3\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right) - \pi(\gamma - \alpha) = 0 \tag{4)}$$

Hiebei bedeuten α, β, γ der Reihe nach die Wurzeln der Gleichung 1) bei gegebenen π und τ. Der natürlichste Weg zur Aufstellung der Gleichung der Sättigungscurve wäre nun der, Gleichung 1) nach ω aufzulösen, die Werte in 4) einzusetzen und hernach noch τ mit Hilfe von 1) durch ω zu ersetzen. Nach bekannten Auflösungsregeln cubischer Gleichungen erhielte man etwa:

$$\alpha = n + 2\sqrt{n^2 - \frac{1}{\pi}} \sin\left[\frac{1}{3} \arcsin\left(n^3 - \frac{3n}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{1}{\left(n^2 - \frac{1}{\pi}\right)^3}} - 60°\right]$$

$$\beta = n - 2\sqrt{n^2 - \frac{1}{\pi}} \sin\left[\frac{1}{3} \arcsin\left(n^3 - \frac{3n}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{1}{\left(n^2 - \frac{1}{\pi}\right)^3}}\right]$$

$$\gamma = n + 2\sqrt{n^2 - \frac{1}{\pi}} \sin\left[\frac{1}{3} \arcsin\left(n^3 - \frac{3n}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{1}{\left(n^2 - \frac{1}{\pi}\right)^3}} + 60°\right],$$

wobei der Kürze wegen

$$\frac{1}{9}\left(1+\frac{8\tau}{\pi}\right)=u$$

gesetzt ist. Wie man schon aus diesen Ausdrücken ersieht, würde die Gleichung sehr compliciert und zu einer Discussion daher nicht geeignet sein.

Zu einer einfacheren Form der Gleichung der Sättigungscurve gelangt man, wenn man alle Größen durch eine der Wurzeln, etwa α und etwa noch durch π ausdrückt und diese Werte in 4) einführt. Da α eine Wurzel der Gleichung 1) ist, so kann man nach entsprechendem Ordnen durch $\omega-\alpha$ dividieren und die sich dadurch ergebende quadratische Gleichung von ω hat die Wurzeln β und γ, für welche sich die Werte ergeben

$$\beta=\frac{3\alpha-1-\sqrt{(3\alpha-1)^2-4\pi\alpha^3}}{2\pi\alpha^2} \tag{5}$$

$$\gamma=\frac{3\alpha-1+\sqrt{(3\alpha-1)^2-4\pi\alpha^3}}{2\pi\alpha^2}. \tag{6}$$

Setzt man noch

$$\sqrt{(3\alpha-1)^2-4\pi\alpha^3}=D \tag{7}$$

so wird

$$\pi=\frac{(3\alpha-1)^2-D^2}{4\alpha^3} \tag{8}$$

$$\beta=\frac{2\alpha}{3\alpha-1+D} \tag{9}$$

$$\gamma=\frac{2\alpha}{3\alpha-1-D} \tag{10}$$

Diese Werte in 4) eingesetzt, ergibt mit Benützung von 1) in der Form

$$\left(\pi+\frac{3}{\alpha^2}\right)(3\alpha-1)=8\tau \tag{11}$$

nach gehöriger Reduction:

$$l\,\frac{3\alpha+1+D}{(3\alpha-1-D)(3\alpha-1)}-\frac{3\alpha(-3\alpha+3+D)(9\alpha-1+D)}{(3\alpha-1)(3\alpha+1+D)(3\alpha+1-D)}=0. \qquad 12)$$

Führt man für D den ursprünglichen Wert wieder ein, so wird aus 12)

$$l\,\frac{3\alpha+1+\sqrt{(3\pi-1)^2-4\pi\alpha^3}}{(3\alpha-1-\sqrt{(3\alpha-1)^2-4\pi\alpha^3})(3\alpha-1)}-$$

$$-\frac{3(-3\alpha+3+\sqrt{(3\alpha-1)^2-4\pi\alpha^3})(9\alpha-1+\sqrt{(3\alpha-1)^3-4\pi\alpha^3})}{4(3\alpha-1)(3+\pi\alpha^2)}=0. \qquad 13)$$

Dies ist die Gleichung des linken Astes der Sättigungscurve. Die Gleichung des rechten Astes hätte man erhalten, wenn man γ statt α eingeführt hätte; das Resultat wäre dasselbe wie 13), nur mit geändertem Vorzeichen der Quadratwurzel. Bezeichnet man α und γ gemeinschaftlich mit ω, so lässt sich die Gleichung der Sättigungscurve in der Form schreiben:

$$l\,\frac{3\omega+1\pm\sqrt{(3\omega-1)^2-4\pi\omega^3}}{(3\omega-1\mp\sqrt{(3\omega-1)^2-4\pi\omega^3})(3\omega-1)}-$$

$$-\frac{3(-3\omega+3\pm\sqrt{(3\omega-1)^2-4\pi\omega^3})(9\omega-1\pm\sqrt{(3\omega-1)^2-4\pi\omega^3})}{4(3\omega-1)(3+\pi\omega^2)}=0. \qquad 14)$$

Speciell für die Berechnung der maximalen Verdampfungsarbeit ist es bequemer, statt α oder γ β beizubehalten. Man erhält so auf ganz analogem Wege:

$$\alpha = \frac{2\beta}{3\beta - 1 + \Delta} \tag{15}$$

$$\gamma = \frac{2\beta}{3\beta - 1 - \Delta}, \tag{16}$$

$$\pi = \frac{(3\beta - 1 + \Delta)(3\beta - 1 - \Delta)}{4\beta^3}, \tag{17}$$

wobei

$$\Delta = \sqrt{(3\beta - 1)^2 - 4\pi\beta^3}. \tag{18}$$

Mit Hilfe dieser Werte und mit

$$v = 3\beta \tag{19}$$

wird aus 4)

$$l\,\frac{(v+1+\Delta)(v-1+\Delta)}{(v+1-\Delta)(v-1-\Delta)} - \frac{4\Delta v(v+1)}{(v-1)(v+1+\Delta)(v+1-\Delta)} = 0. \tag{20}$$

Die Verdampfungsarbeit ist gegeben durch

$$A = \pi(\gamma - \alpha). \tag{21}$$

Dies wird mit den oben eingeführten Werten

$$A = \frac{9\Delta}{v^2}.$$

Als Bedingung für das Maximum von A erhält man durch Differentiation nach v

$$2\Delta - v\frac{d\Delta}{dv} = 0. \tag{22}$$

$\frac{d\Delta}{dv}$ ergibt sich aus 20) nach einigen Umformungen zu

$$\frac{d\Delta}{dv} = \frac{\Delta}{v} \cdot \frac{v^3 - 4v^2 + v - 2 - \Delta^2(v-2)}{(v-1)[(v+1)(v-3) - \Delta^2]}, \tag{23}$$

wodurch aus 22) wird:

$$\Delta^2 = \frac{v^3 - 2v^2 - 3v + 8}{v}.$$

Dies in 20) eingesetzt gibt:

$$l\,\frac{\left[v+\sqrt{\frac{v^3-2v^2-3v+8}{v}}\right]^2-1}{\left[v-\sqrt{\frac{v^3-2v^2-3v+8}{v}}\right]^2-1}=$$

$$=\frac{4(v+1)\sqrt{v^3(v^3-2v^2-3v+8)}}{(v-1)^2(v+2)}\,. \qquad 24)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $v=4\cdot 1004$, die übrigen Größen berechnen sich daraus zu:

$$\left.\begin{aligned}\pi&=0\cdot 2006\\ \tau&=0\cdot 6999\\ \alpha&=0\cdot 4672\\ \beta&=1\cdot 3668\\ \gamma&=7\cdot 8054\\ A&=1\cdot 4722\end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

Die Gleichung 20) ist geeignet, die Beziehungen zwischen π, τ u. s. w. bis auf Glieder höherer Ordnung zu entwickeln. Für $v=\infty$ wird auch $\Delta=\infty$, und zwar convergiert, wie leicht gezeigt werden kann, $v-\Delta-1$ dabei gegen 0. Bezeichnet man

$$v-\Delta-1=2\varepsilon,$$

so ergibt sich für ε aus 20) bis auf Glieder höherer Ordnung für große v

$$\varepsilon=\frac{v^2}{e^{v+1}},$$

woraus folgende Beziehungen gerechnet werden können:

$$\begin{aligned}\pi&=\frac{27}{e^{v+1}} & v&=l\frac{27}{\pi}-1\\ \tau&=\frac{27}{8l\frac{27}{\pi}} & \pi&=27e^{-\frac{27}{8\tau}}\\ v&=\frac{27}{8\tau} & \tau&=\frac{27}{8v}\end{aligned} \qquad 26)$$

$$\alpha = \frac{9}{(27-8\tau)}$$

$$\gamma = \frac{e^{v+1}}{v-1} = \frac{9}{\pi l \frac{27}{\pi}} = \left(\alpha - \frac{1}{3}\right) e^{\frac{6\alpha}{3\alpha-1}} \qquad 26)$$

$$\Delta = \frac{8\tau}{3}$$

Diese Gleichungen gelten angenähert für niedrige Temperaturen, etwa bis $\tau = 0 \cdot 5$.

Für Zustände nahe dem kritischen gilt, wie man durch Entwickeln bis auf Größen höherer Ordnung erhält, angenähert:

$$\Delta^2 = \frac{20}{3}(v-3)$$

$$\pi = \frac{9(3v^2-26v+63)}{4v^3}$$

$$\tau = \frac{9}{32v^3}(3v^2-14v+63)$$

$$\Delta = \frac{9}{v^2}\sqrt{\frac{20}{3}(v-3)}.$$

Über die magnetischen Wirkungen einer rotierenden elektrisierten Kugel

von

Dr. Arthur Szarvassi.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1902.)

Die Frage, ob eine rotierende elektrische Ladung magnetische Wirkungen äußere, ist auf experimentellem Wege zuerst von Rowland und nach diesem von mehreren anderen Forschern untersucht worden. Im folgenden wird versucht, eine Theorie der Erscheinung zu geben unter der Voraussetzung, dass um die Rotationsaxe allseitige Symmetrie herrscht. Ist diese nicht vorhanden, so ist klar, dass allfällige magnetische Wirkungen nie auf Rechnung convectiv bewegter wahrer Elektricität allein, sondern wenigstens theilweise auch von Verschiebungsströmen gesetzt werden müssen.

Als Grundlage der Berechnung des vorliegenden Problems wählen wir die Gleichungen, die Hertz in seiner »Elektrodynamik bewegter Körper«[1] aufgestellt hat. Bedeutet $\mathfrak{E}$ die elektrische Kraft, $\mathfrak{D}$ die dielektrische Verschiebung, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft, $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction, $\mathfrak{K}$ die elektrische Strömung, $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit der Bewegung und A den reciproken Wert der Lichtgeschwindigkeit, so lauten jene Gleichungen in Vectorsymbolen:

[1] Ausbreitung der elektrischen Kraft 1892.

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = A\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{curl} V\mathfrak{D}\mathfrak{u} + \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \mathfrak{K}\right)$$

$$-\operatorname{curl} \mathfrak{E} = A\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} V\mathfrak{B}\mathfrak{u} + \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{B}\right). \quad 1)$$

Von der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, welche nach der Ableitung der Gleichungen zunächst nur jene der Kraftlinien bedeutet, setzt Hertz voraus, dass sie gleichzeitig die des Mediums sei, dass also die elektrischen und magnetischen Zustände sich nur zugleich mit dem Träger derselben bewegen können. Ich werde zunächst zeigen, dass diese Voraussetzung in unserem Falle zu einem Widerspruche führt.

Wir nennen die Componenten von $\mathfrak{u}$, bezogen auf ein englisches Coordinatensystem, α, β und γ. Nehmen wir eine gleichförmige Rotation um die X-Axe an, in einem Sinne, welcher, von der positiven Seite der Axe gesehen, der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt gerichtet ist, so sind

$$\alpha = 0; \quad \beta = -wz; \quad \gamma = wy,$$

wo w die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Wir zerlegen ferner $\mathfrak{D}$ in drei Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, von denen $\mathfrak{X}$ in die Richtung der X-Axe, $\mathfrak{R}$ in die Richtung von $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ fällt und $\mathfrak{S}$ senkrecht auf $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{R}$ steht, derart, dass diese drei Richtungen in derselben Weise aufeinander folgen wie bezüglich die X-, Y- und Z-Axe unseres Coordinatensystems; in analoger Weise zerlegen wir $\mathfrak{B}$ in die Componenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Führen wir nunmehr Cylindercoordinaten ein durch den Ansatz

$$y = \rho \cos \varphi; \quad z = \rho \sin \varphi,$$

und berücksichtigen, dass wegen der Symmetrie alle vorkommenden Größen von φ unabhängig sein müssen, so erhalten wir nach einfacher Rechnung für die Componenten von $\operatorname{curl} V\mathfrak{D}\mathfrak{u}$

nach der X-Achse: 0,

nach der Y-Achse: $w \sin \varphi \left(\rho \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \rho} + \mathfrak{R}\right)$,

nach der Z-Achse: $-w \cos \varphi \left(\rho \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \rho} + \mathfrak{R}\right)$.

Die analogen Componenten von curl $V\mathfrak{B}\mathfrak{u}$ sind:

$$0,$$

$$w \sin\varphi\left(\rho\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\rho\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\rho}+\frac{\mathfrak{P}}{\rho}\right)$$

$$-w\cos\varphi\left(\rho\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\rho\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\rho}+\frac{\mathfrak{P}}{\rho}\right)$$

Endlich werden

$$\operatorname{div}\mathfrak{D}=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\rho}+\frac{\mathfrak{R}}{\rho}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{B}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\rho}+\frac{\mathfrak{P}}{\rho}$$

Es folgt, dass die Componenten von curl $V\mathfrak{D}\mathfrak{u}$ den entsprechenden von $\mathfrak{u}\operatorname{div}\mathfrak{D}$ und ebenso die Componenten von curl $V\mathfrak{B}\mathfrak{u}$ denen von $\mathfrak{u}\operatorname{div}\mathfrak{B}$ entgegengesetzt gleich sind. In unserem Falle reducieren sich also die Gleichungen auf

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathfrak{H}&=A\mathfrak{K}\\ \operatorname{curl}\mathfrak{E}&=0,\end{aligned} \qquad 2)$$

da die Glieder $\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$ und $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$ für den stationären Zustand Null sind.

Zur vollständigen Bestimmung des Feldes benöthigen wir noch die Grenzbedingungen. Zur Aufstellung derselben verlegen wir nach Hertz' Vorgang das Coordinatensystem derart, dass die X-Y-Ebene mit einem Flächenelement der Grenzfläche des Körpers und die positive Z-Axe mit der nach außen gerichteten Normalen zusammenfällt. Da dieses Coordinatensystem dem Körper bei seiner Bewegung folgen soll, so muss zuvor bewiesen werden, dass die Hertz'schen Gleichungen ihre Form nicht ändern, falls man sie auf ein beliebig bewegtes Coordinatensystem bezieht; dieser Beweis ist in der That vor kurzem von Herrn C. Neumann[1] geliefert worden. Bezeichnet man nun

[1] Über die Maxwell-Hertz'sche Theorie. Abh. der königl. sächs. Gesellsch. der Wissensch., Bd. 27, S. 238 ff.

mit Bezug auf unser neues Coordinatensystem die Componenten von $\mathfrak{E}$ mit X, Y, Z; die von $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, die von $\mathfrak{H}$ mit L, M, N und schließlich die von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, so lauten die Grenzbedingungen nach Hertz:[1]

$$\left.\begin{aligned} L_2-L_1 &= -A\int_1^2 \mathfrak{Z}\frac{\partial\beta}{\partial z}\,dz \\ M_2-M_1 &= A\int_1^2 \mathfrak{Z}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\,dz \\ Y_2-Y_1 &= -A\int_1^2 \mathfrak{N}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\,dz \\ X_2-X_1 &= A\int_1^2 \mathfrak{N}\frac{\partial\beta}{\partial z}\,dz \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Hier bedeuten α, β, γ die Geschwindigkeitscomponenten relativ gegen das neue Coordinatensystem; die Integrationen sind über die zwar sehr kleine, aber endlich gedachte Dicke der Grenzschichte vom Medium 1 nach dem Medium 2 zu vollziehen. Die Vorzeichen sind bei Hertz die entgegengesetzten, da er sich eines französischen Coordinatensystems bedient.

Es müssen also im allgemeinen die Tangentialcomponenten der Kräfte unstetig werden an allen jenen Stellen der Grenzfläche, an denen ein Sprung der tangentialen Geschwindigkeitscomponenten auftritt. Da wir nun im vorliegenden Falle nach den Hertz'schen Voraussetzungen annehmen müssen, dass die Kraftlinien innerhalb des rotierenden Körpers mitrotieren, im Außenraume aber in Ruhe bleiben, so wird diese Unstetigkeit auch hier thatsächlich auftreten.

Bisher haben wir weder über die Natur des Feldes, noch über die Beschaffenheit des rotierenden Körpers nähere Voraussetzungen gemacht. Wir wollen nunmehr annehmen, dass der Körper ein Leiter sei, dessen magnetische Permeabilität μ sich von der des Außenraumes sehr wenig unterscheide. Da innerhalb des Leiters curl $\mathfrak{E} = 0$ sein muss, können Leitungsströme sich nicht ausbilden; daher reducieren sich die Gleichungen 2) auf

[1] Loc. cit. S. 273.

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathfrak{H} &= 0 \\ \operatorname{curl} \mathfrak{E} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

welche sowohl innerhalb, wie außerhalb des Körpers gelten. Wir nehmen nunmehr noch weiter an, dass überall

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{5}$$

In analoger Weise, wie wir $\mathfrak{B}$ in die Componenten $\mathfrak{L}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ zerlegt haben, zerlegen wir $\mathfrak{H}$ in die Componenten L, P, Q. Führen wir wieder Cylindercoordinaten ein, so zerfällt die erste der Gleichungen 4) in die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \rho} + \frac{Q}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Gleichung 5) wird

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{P}{\rho} = 0. \tag{7}$$

Durch die erste der Gleichungen 6), die Gleichung 7) und die Grenzbedingungen sind die in der Meridianebene liegenden Kraftcomponenten L und P vollkommen bestimmt.

Zu ihrer Berechnung führen wir in der Meridianebene Polarcoordinaten ein durch die Gleichungen:

$$x = r \cos \Theta; \quad y = r \sin \Theta.$$

Ferner zerlegen wir L und P in zwei andere Componenten U, V:

$$\begin{aligned} L &= U \cos \Theta - V \sin \Theta \\ P &= U \sin \Theta - V \cos \Theta; \end{aligned}$$

es liegt also U in der Richtung des Radiusvector r, V senkrecht zu U. die erste der Gleichungen 6) verwandelt sich dann in:

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r V) = 0.$$

Die Gleichung 7) wird

$$\frac{\partial U}{\partial r} + 2\frac{U}{r} + \frac{1}{r\sin\Theta}\,\frac{\partial}{\partial\Theta}(V\sin\Theta) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Elimination von V eine Gleichung für U:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r} + 2Ur\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\,\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial U}{\partial\Theta}\right) = 0. \qquad 8)$$

In unserem Falle fällt keine Componente der Geschwindigkeit in die Meridianebene; aus diesem Grunde und weil wir angenommen haben, dass der Unterschied in der Permeabilität zwischen dem Innen- und dem Außenraume zu vernachlässigen sei, bleibt U im ganzen Raume stetig. In unendlicher Entfernung muss dagegen U verschwinden wie $\frac{1}{r^2}$. Bezeichnen wir nun mit U_p den Wert von U in einem Punkte p, den wir momentan zum Ursprunge des Coordinatensystems wählen, so besteht nach dem Green'schen Satze die Beziehung:

$$4\pi U_p = -\int\Delta U\frac{d\tau}{r} - \int\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r^2}\right)do.$$

Das erste Integral ist erstreckt gedacht über den Innenraum, das zweite über die Oberfläche einer Kugel von beliebig großem Radius r. Setzt man

$$do = r^2\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi; \quad d\tau = do\, dr$$

und transformiert das Raumintegral in ein Integral über die Fläche genommen, so wird

$$4\pi U_p = \int\frac{U}{r}\,do,$$

da nach Gleichung 8)

$$\Delta U = -\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(rU) \text{ ist.}$$

Das Oberflächenintegral $\int \frac{U}{r} \, do$ verschwindet aber, wenn wir r genügend groß nehmen. Daher ist

$$U_p = 0.$$

Da der Punkt p beliebig war, verschwindet also U im ganzen Raume. Daraus folgt aber auch das Verschwinden von V.

Als einzige magnetische Kraftcomponente bleibt demnach Q übrig, d. h. die magnetische Kraft verläuft in geschlossenen Kreisen um die Rotationsaxe. Da aber sowohl innerhalb, wie außerhalb des Körpers curl $\mathfrak{H} = 0$, ist diese Kraftvertheilung unmöglich. Also ist $Q = 0$; eine magnetische Kraft ist überhaupt nicht vorhanden.

Denken wir uns nun den rotierenden Körper mit Elektricität belegt, so ist die Normalcomponente der elektrischen Kraft an der Körperoberfläche jedenfalls von Null verschieden. Mit den Grenzbedingungen 3) ist es daher unvereinbar, dass weder im Außen-, noch im Innenraume eine magnetische Kraft auftritt. Wie man sieht, besteht also ein Widerspruch zwischen den Hertz'schen Gleichungen und den Grenzbedingungen, welcher durch die Hertz'sche Auffassung der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ entsteht.

Um diesem Widerspruche auszuweichen, braucht man nur die Annahme fallen zu lassen, dass die Kraftlinien nicht anders als zugleich mit dem Medium sich bewegen können. Wir wollen also annehmen, dass $\mathfrak{u}$ stets die Geschwindigkeit der Kraftlinien bedeute und dass diese sich auch relativ gegen das Medium bewegen können. Unter dieser Voraussetzung wird das vorliegende Problem leicht lösbar. Wir nehmen an, dass die Kraftlinien sowohl innerhalb, wie außerhalb des rotierenden Körpers mitrotieren. Durch diese Annahme fällt der Sprung der Geschwindigkeiten an der Grenzfläche fort, und die Grenzbedingungen 3) geben die Bedingung, dass die Tangentialcomponenten der Kräfte sich stetig durch die Grenzfläche hindurch fortsetzen müssen. Die Gleichungen 4) und 5) liefern dann widerspruchsfrei $\mathfrak{H} = 0$ und für die elektrische Kraft den statischen Zustand wie für den Fall der Ruhe.

Aus der modificierten Hertz'schen Theorie folgt also, dass die Rotation eines um die Axe vollkommen symmetrischen, elektrisierten Körpers keine magnetischen Wirkungen habe. Wie wir sahen, kommt dieses negative Ergebnis daher, dass die Größen curl $V\mathfrak{D}\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}$ sich gegenseitig aufheben. Wir können in unserer Theorie diese Größen auffassen als Theile des wahren Stromes, von denen der erste von der Bewegung der elektrischen Kraftlinien durch das Medium, der andere von der Bewegung wahrer Elektricität herrührt. In dieser mehr empirischen Weise werden thatsächlich die Gleichungen 1) von einigen englischen Forschern, namentlich Heaviside, aufgefasst. In der ursprünglichen Hertz'schen Fassung der Theorie ist eine solche Auffassung unmöglich, da Hertz eine Relativbewegung der Kraftlinien gegen das Medium nicht zulässt. Wir sehen aber, dass der negative Erfolg eines Rotationsversuches nicht beweist, dass elektrische Convection keine magnetischen Wirkungen habe, sondern nur, dass diese Wirkung durch die entgegengesetzte der bewegten Kraftlinien aufgehoben wird. Wir wollen nun versuchen, die magnetischen Wirkungen zu berechnen für den Fall, dass nur Convection wahrer Elektricität vorhanden wäre, ohne uns jedoch zu verhehlen, dass diese Auffassungsweise den Rahmen unserer Theorie verlässt.

Wir haben also jetzt die Gleichungen:

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} = A\mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}$$
$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{E} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0.$$

Da sich die tangentialen Componenten der Kräfte stetig durch die Körperoberfläche hindurch fortpflanzen, ist die elektrische Kraft statisch vertheilt. Als rotierenden Körper wählen wir eine elektrisierte Kugel; dann ist div $\mathfrak{D}$ nur auf dieser von Null verschieden und daselbst gleich einer Constanten σ. Zur Lösung der Gleichungen bedienen wir uns eines Vectorpotentials $\mathfrak{A}$ mit den Componenten F, G, H, welche wegen der Beziehung

$$\mathrm{div}\,(\sigma\mathfrak{u}) = 0$$

gegeben sind durch

$$F = 0; \quad G = \mu A \int \frac{\sigma \beta \, d\tau}{r}; \quad H = \mu A \int \frac{\sigma \gamma \, d\tau}{r}.$$

r bedeutet die Entfernung des Raumelementes $d\tau$ von jenem Punkte $P(x_1, y_1, z_1)$, in dem der Wert von $\mathfrak{A}$ gesucht wird. Da die Integrationen ausgedehnt werden müssen über alle $d\tau$, in denen σ von Null verschieden ist, so haben wir hier über die Oberfläche der Kugel zu integrieren.

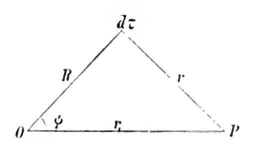
Wir führen Polarcoordinaten ein und setzen:

$$x = R \cos \vartheta; \quad y = R \sin \vartheta \cos \varphi; \quad z = R \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$x_1 = r_1 \cos \vartheta_1; \quad y_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1; \quad z_1 = r_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1$$

$$d\tau = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

wenn R der Radius der Kugel ist. Aus beistehender Figur ist ferner die Beziehung klar:



$$r = \sqrt{R^2 + r_1^2 - 2 R r_1 \cos \psi}.$$

Wir berechnen zunächst G, und zwar für

$$r_1 < R.$$

$$G = -\mu \sigma A w R^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta \sin \varphi \, d\vartheta \, d\varphi}{r}$$

$$= -\mu \sigma A w R^3 . J.$$

$$J = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta \sin \varphi \, d\vartheta \, d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2 R r_1 \cos \psi + r_1^2}}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta \sin \varphi \, d\vartheta \, d\varphi}{R \sqrt{1 - 2 \frac{r_1}{R} \cos \psi + \left(\frac{r_1}{R}\right)^2}}$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{R}\right)^n P_n(\cos\psi);$$

hier bedeutet $P_n(\cos\psi)$ die n^{te} Kugelfunction des Argumentes $\cos\psi$, die wir nunmehr nach zonalen Kugelfunctionen der Argumente ϑ und ϑ_1 entwickeln wollen.

Es ist

$$\cos\psi = \cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)$$

$$P_n(\cos\psi) = \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda C_{n\lambda} P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta) P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta\sin^\lambda\vartheta_1\cos\lambda(\varphi-\varphi_1),$$

wo

$$a_0 = 1;\quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 2;\quad C_{n\lambda} = \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi(n+\lambda)};$$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta) = \frac{d^\lambda P_n(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^\lambda},$$

und Π die Gauss'sche Function bedeutet.

Es ist daher zunächst zu berechnen

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\lambda(\varphi-\varphi_1)d\varphi =$$

$$= \cos\lambda\varphi_1\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\lambda\varphi\, d\varphi+\sin\lambda\varphi_1\int_0^{2\pi}\sin\varphi\sin\lambda\varphi\, d\varphi$$

$= 0$, wenn $\lambda \gtrless 1$, und

$= \pi\sin\varphi_1$, wenn $\lambda = 1$.

Dadurch wird

$$J = \frac{2\pi}{R}\frac{\Pi(n-1)}{\Pi(n+1)}\sin\varphi_1\sin\vartheta_1 P_n'(\cos\vartheta_1).$$

$$\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{R}\right)^n P_n'(\cos\vartheta).$$

Nun ist

$$\int_0^{\pi}\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta}\sin^3\vartheta\, d\vartheta = -\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}d\vartheta =$$

$$=\int_0^{\pi}P_n(\cos\vartheta)\sin 2\vartheta\, d\vartheta = 2\int_0^{\pi}P_1(\cos\vartheta)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$= 0$, wenn $n \gtrless 1$, und

$= \frac{2}{3}$ wenn $n = 1$.

Demnach

$$J = \frac{4}{3}\pi\frac{r_1}{R^2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1$$

$$G = -\frac{4}{3}\mu\pi A\sigma wRz_1 \qquad \text{für } r_1 < R.$$

Dieselbe Berechnung für H gibt

$$H = \mu A\sigma wR^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta\, d\varphi}{r}$$

$$= \mu A\sigma wR^3 . J_1.$$

Bei analogem Verfahren wie mit J erhalten wir

$$J_1 = \frac{4}{3}\pi\frac{r_1}{R^2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1,$$

demnach

$$H = \frac{4}{3}\pi\mu A\sigma wRy_1 \qquad \text{für } r_1 < R.$$

Für den zweiten Fall

$$r_1 > R$$

wird

$$G = -\mu A\sigma wR^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi}{r}$$

$$= -\mu A\sigma wR^3 . J_2.$$

$$J_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r_1}\right)^n P_n(\cos\psi).$$

Im übrigen berechnet man J_2 ähnlich wie J und erhält

$$J_2 = \frac{4}{3}\pi\frac{R}{r_1^2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1$$

$$G = -\frac{4}{3}\pi\mu A\sigma wR^4\frac{z_1}{r_1^3} \qquad \text{für } r_1 > R.$$

Ebenso schließlich

$$H = \frac{4}{3}\pi\mu A\sigma w R^4 \frac{y_1}{r_1^3} \quad \text{für } r_1 > R.$$

Da

$$\mu H = \text{curl}\,\mathfrak{A},$$

so werden die Componenten L, M, N von $\mathfrak{H}$ für das Innere der Kugel $(r_1 < R)$

$$L = \frac{8}{3}\pi A\sigma w R; \quad M = N = 0.$$

Es herrscht also ein homogenes Feld in der positiven Richtung der Drehungsaxe. Das magnetische Potential ist

$$\Phi = -\frac{8}{3}\pi\sigma A w R x.$$

Außerhalb der Kugel $(r_1 > R)$ ist

$$L = \frac{4}{3}\pi A\sigma w \frac{R^4}{r^3}(3\cos^2\vartheta - 1)$$

$$M = 4\pi A\sigma w \frac{R^4}{r^3}\cos\vartheta\cos(r, y)$$

$$N = 4\pi A\sigma w \frac{R^4}{r^3}\cos\vartheta\cos(r, z),$$

indem wir die Indices von r und ϑ weglassen. Daher ist

$$\mathfrak{H} = \frac{4}{3}\pi A\sigma w \frac{R^4}{r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}.$$

Zur deutlicheren Veranschaulichung genügt es, der Symmetrie halber die Verhältnisse in einer Meridianebene zu betrachten. Die radiale und tangentiale Componente U und V werden:

$$U = \frac{8}{3}\pi A\sigma w \frac{R^4}{r^3}\sin\beta; \quad V = \frac{4}{3}\pi A\sigma w \frac{R^4}{r^3}\cos\beta,$$

wenn $\beta = 90° - \vartheta$ der geographischen Breite auf der Erde entspricht. Nennt man noch i den Winkel, welcher der magnetischen Inclination entspricht, so ist

$$\sin i = \frac{U}{V} = \frac{2 \sin \beta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \beta}}$$

$$\cos i = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \beta}},$$

daher

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} \beta} = 2.$$

Es existiert ferner ein Potential von der Größe

$$\Phi_1 = -\frac{4}{3} \pi A \sigma w \frac{R^4}{r^2} \sin \beta.$$

Das Feld des Außenraumes hängt mit jenem innerhalb der Kugel gar nicht zusammen, da die beiden durch eine Schicht getrennt sind, in welcher die magnetische Kraft wirbelt.

Es liegt nahe, das Magnetfeld zu vergleichen mit dem der Erde, indem man annimmt, dass das letztere einer elektrischen Ladung der Erde zu verdanken ist. In der That zeigt unsere magnetische Kraftvertheilung mit der des Erdmagnetismus eine bemerkenswerte Übereinstimmung. Die Gleichungen unserer Theorie

$$\Phi_1 \text{ prop. } \sin \beta, \quad V \text{ prop. } \cos \beta, \quad U \text{ prop. } \sin \beta$$
$$\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \beta$$

sind dieselben, zu denen die Herren v. **Bezold** und **Bauer** für die Mittelwerte der erdmagnetischen Größen gelangt sind. Man müsste annehmen, dass die Erde eine negative Ladung hat; allein die Größe derselben müsste von der Ordnung 10^{13} Coulomb sein, welche Zahl von unwahrscheinlicher Höhe ist.

Über eine gewisse projective Beziehung von vier Strahlenbüscheln I. Ordnung

von

V. Weiß in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1902.)

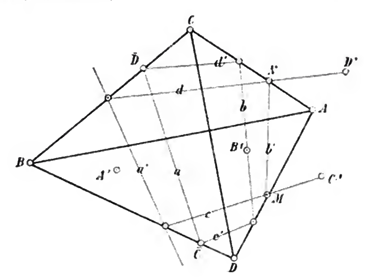
Die vorliegende Arbeit enthält einen rein geometrischen Beweis des folgenden, wie ich glaube, neuen Satzes:

Vier beliebige Strahlenbüschel I. Ordnung des Raumes, welche paarweise keinen Strahl gemein haben, sind projectiv aufeinander bezogen, wenn je vier Strahlen aus den vier Büscheln einander als entsprechend zugewiesen werden, die derselben Regelschar angehören. 1)

Fernerhin enthält sie eine Reihe von Bemerkungen, die die in dem eben ausgesprochenen Satze genannte projective Beziehung und das System der dieselbe definierenden ∞^1 Regelscharen näher charakterisieren. Eine dieser Bemerkungen, die eine Eigenschaft des eben genannten Systems enthält, wollen wir gleich hier anführen:

Die Leitstrahlen der diese projective Beziehung definierenden ∞^1 Regelscharen in den Ebenen der gegebenen Strahlenbüschel I. Ordnung bilden vier Strahlenbüschel II. Ordnung, von denen ein jeder jene drei Geraden enthält, in denen seine Ebene, die er ja mit einem der vier gegebenen Strahlenbüschel I. Ordnung gemein hat, von den Ebenen der drei übrigen gegebenen Strahlenbüschel I. Ordnung geschnitten wird. 2)

$[\alpha A_1]$, $[\beta B_1]$, $[\gamma C_1]$ und $[\delta D_1]$ seien vier beliebige Strahlenbüschel I. Ordnung des Raumes, wobei α, β, γ und δ die Ebenen und A_1, B_1, C_1 und D_1 die Mittelpunkte derselben bedeuten (siehe Fig. 1; in dieser Figur sind A, B, C und D die Eckpunkte jenes Tetraeders, dessen Seitenebenen die Ebenen α, β, γ und δ sind, und zwar liegt jeder dieser Eckpunkte der gleichnamigen Seitenebene gegenüber).



Wenn a' eine beliebige Gerade des Raumes ist, so gibt es immer eine und nur eine Regelschar, für die die Gerade a' ein Leitstrahl ist und die in jedem der drei Büschel $[\beta B_1]$, $[\gamma C_1]$ und $[\delta D_1]$ einen Strahl besitzt. Jeder dieser drei Strahlen, sie seien b, c und d, ist nämlich eindeutig bestimmt, denn er verbindet den Mittelpunkt jenes dieser drei Büschel, dem er angehört, mit jenem Punkte der Ebene dieses Büschels, in dem dieselbe von der Geraden a' geschnitten wird. Die so bestimmte Regelschar nennen wir R. Die Leitstrahlen derselben in den Ebenen β, γ und δ seien b', c' und d'.

Wenn die Gerade a' einen Strahlenbüschel II. Ordnung σ_α beschreibt, der in der Ebene α liegt und jene drei Geraden dieser Ebene enthält, in denen dieselbe von den Ebenen β, γ und δ geschnitten wird, so beschreibt jeder der Leitstrahlen b', c' und d' der Regelschar R ebenfalls einen Strahlenbüschel II. Ordnung, der jene drei Geraden enthält, in denen seine Ebene, die ja eine der drei Ebenen β, γ und δ ist, von den drei übrigen der vier Ebenen α, β, γ und δ geschnitten wird. Wir verificieren dies etwa für die Gerade b'. Dieselbe verbindet jene

beiden Punkte M und N, in denen die Ebene β von den Strahlen c und d der Regelschar R geschnitten wird und, wenn die Gerade a' den Büschel σ_α beschreibt, so beschreiben die Punkte M und N die Geraden $(\beta\gamma)$ und $(\beta\delta)$ (das sind die Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$ des Tetraeders $\overline{ABCD}$) projectiv, denn die Geraden c und d beschreiben die Büschel $[\gamma C_1]$ und $[\delta D_1]$ projectiv, weil $a' \barwedge c$ und $a' \barwedge d$ ist (siehe die Figur). Die die Punkte M und N verbindende Gerade b' beschreibt daher einen Strahlenbüschel II. Ordnung, der die Geraden $(\beta\gamma)$ und $(\beta\delta)$ enthält. Er enthält aber auch die Gerade $(\beta\alpha)$. Dies sehen wir ein, wenn wir die Gerade a' in diese Gerade $(\beta\alpha)$ fallen lassen.

Gleichzeitig ist das Folgende deutlich: Die drei Strahlenbüschel II. Ordnung, die die drei Geraden b', c' und d', wie wir soeben gesehen haben, beschreiben, wenn die Gerade a' den Büschel σ_α beschreibt, sind projectiv aufeinander bezogen, wenn wir diese drei Geraden einander als entsprechend zuweisen, und je zwei dieser Büschel haben die Schnittgerade ihrer Ebenen entsprechend gemein. Wir weisen dies etwa für die von den Geraden c' und d' beschriebenen Büschel nach. Zunächst ist $c' \barwedge b$ und auch $d' \barwedge b$ (siehe die Figur); daher ist $c' \barwedge d'$. Fernerhin fallen die Geraden c' und d' gleichzeitig in die Gerade $(\gamma\delta) \equiv \overline{AB}$. Die Geraden c' und d' sind nämlich Leitstrahlen derselben Regelschar R_0. Wenn daher die Gerade c' in die Gerade $(\gamma\delta)$ fällt (dies ist ja, wie wir gesehen haben, für eine bestimmte Lage der Geraden a' der Fall), so wird sie nothwendig mit der Geraden d' identisch, denn sie ist dann nicht nur der Leitstrahl der Regelschar R_0 in der Ebene γ, sondern auch deren Leitstrahl d' in der Ebene δ.

Der in der Ebene α liegende Strahl a der Regelschar R beschreibt einen Strahlenbüschel I. Ordnung, wenn die Gerade a', d. i. der Leitstrahl der Regelschar R in der Ebene α, den Büschel σ_α beschreibt, und dabei ist $a \barwedge a'$. Die Gerade a verbindet nämlich die Schnittpunkte $\bar{C}$ und $\bar{D}$ der Geraden c' und d' mit der Ebene α und, wenn die Gerade a' den Büschel σ_α beschreibt, so beschreiben die Punkte $\bar{C}$ und $\bar{D}$ die Geraden $(\alpha\gamma)$ und $(\alpha\delta)$ (das sind die Kanten $\overline{BD}$ und $\overline{BC}$ des Tetraeders $\overline{ABCD}$) projectiv, denn die Geraden c' und d' beschreiben dabei, wie wir gesehen haben, projective Strahlenbüschel

II. Ordnung. Diese projective Beziehung der Punkte $\bar{C}$ und $\bar{D}$ ist aber eine perspective Beziehung, denn die genannten projectiven Strahlenbüschel II. Ordnung, die die Geraden c' und d' beschreiben, haben, wie wir gesehen haben, die Schnittgerade $(\gamma\delta) \equiv \overline{AB}$ ihrer Ebenen entsprechend gemein, so dass die Punkte $\bar{C}$ und $\bar{D}$ für eine bestimmte Lage der Geraden a' im Punkte B zusammenfallen. Die Verbindungsgerade der Punkte $\bar{C}$ und $\bar{D}$, d. i. die Gerade a, dreht sich also um einen fixen Punkt, derselbe sei Q, wenn die Gerade a' den Büschel σ_α beschreibt. Dabei ist augenscheinlich $a \overline{\wedge} a'$.

Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse in der folgenden Weise zusammen: Wenn die Gerade a' den Büschel σ_α beschreibt, so beschreiben vier Strahlen der Regelschar R die vier Strahlenbüschel I. Ordnung $[\alpha Q]$, $[\beta B_1]$, $[\gamma C_1]$ und $[\delta D_1]$ projectiv und die in den Ebenen α, β, γ und δ liegenden Leitstrahlen dieser Regelschar R beschreiben vier Strahlenbüschel II. Ordnung (ebenfalls projectiv), von denen ein jeder jene drei Geraden enthält, in denen seine Ebene, die eine der vier Ebenen α, β, γ und δ ist, von den drei übrigen dieser vier Ebenen geschnitten wird. (Einer dieser Büschel ist der Büschel σ_α.)

Um jetzt unseren eigentlichen Zweck zu erreichen, müssen wir den Büschel σ_α so wählen, dass dann der Punkt Q in den Punkt A_1 fällt, denn dann beschreibt die Regelschar R die im Satze (I) genannte Mannigfaltigkeit von ∞^1 Regelscharen, wenn der Strahl a' den Büschel σ_α beschreibt. Diese Wahl von σ_α ist möglich, und zwar auf eine einzige Weise:

Es seien nämlich σ_α^1 und σ_α^2 zwei besondere Annahmen für den Büschel σ_α. Die entsprechenden besonderen Lagen des Punktes Q seien Q_1 und Q_2. Jeder der zwei Büschel $[\alpha Q_1]$ und $[\alpha Q_2]$ enthält einen Strahl, der den Punkt A_1 enthält. Diese zwei Strahlen seien a_1 und a_2. Dem Strahl a_1 entspricht im Büschel σ_α^1 ein Strahl a_1' und dem Strahl a_2 im Büschel σ_α^2 ein Strahl a_2' (specielle Fälle der vorhin gefundenen projectiven Beziehung $a \overline{\wedge} a'$). Wenn wir nunmehr als σ_α jenen einzigen Strahlenbüschel II. Ordnung wählen, der die fünf Strahlen $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$, a_1' und a_2' enthält, so fällt dann der Punkt Q mit dem Punkte A_1 zusammen. Damit haben wir, wie gesagt,

unseren eigentlichen Zweck erreicht, d. h. der Satz (I) und die Bemerkung (α) sind bewiesen.

Es ist vielleicht von Interesse, eine Methode zu kennen, die es gestattet, die in dem eben bewiesenen Satze angegebene projective Beziehung der vier gegebenen Strahlenbüschel I. Ordnung für zwei beliebige von diesen Büscheln herzustellen. Eine solche Methode liegt in der folgenden Bemerkung:

Die Strahlen jener einzigen Regelschar, die die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier der gegebenen Büschel und fernerhin die Verbindungsgerade der Mittelpunkte und die Schnittgerade der Ebenen der beiden übrigen Büschel enthält, schneiden die Ebenen der erstgenannten zwei Büschel in Punkten, die aus den Mittelpunkten dieser Büschel durch entsprechende Strahlen derselben projiciert werden. β)

Wir wollen die Richtigkeit dieser Bemerkung z. B. für die Büschel $[\alpha A_1]$ und $[\gamma C_1]$ beweisen. Die diesfalls zu verwendende Regelschar ist nämlich keine andere als jene einzige Regelschar, die die Kanten $\overline{A_1 C_1}$ und $\overline{B_1 D_1}$ des Tetraeders $\overline{A_1 B_1 C_1 D_1}$ und die Kante $\overline{AC}$ des Tetraeders $\overline{ABCD}$ enthält. Diese Regelschar werde ρ genannt. Fernerhin seien k_α und k_γ jene zwei Kegelschnitte, in denen diese Regelschar ρ von den Ebenen α und γ geschnitten wird. Der Kegelschnitt k_α enthält augenscheinlich die Punkte A_1 und C und der Kegelschnitt k_γ die Punkte C_1 und A. Fernerhin schneiden diese beiden Kegelschnitte in der Schnittgeraden ihrer Ebenen, d. i. die Kante $\overline{BD}$, dieselben Punkte aus. Diese Punkte, sie seien M und N, sind keine anderen als jene Punkte der Kante $\overline{BD}$, in denen diese von jenen zwei Geraden m und n geschnitten wird, die die folgenden vier Geraden schneiden: die Kanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Tetraeders $\overline{ABCD}$ und die gleichnamigen Kanten $\overline{A_1 C_1}$ und $\overline{B_1 D_1}$ des Tetraeders $\overline{A_1 B_1 C_1 D_1}$. Wir erhalten nämlich die Punkte der Kegelschnitte k_α und k_γ auch als Schnittpunkte der einzelnen Leitstrahlen der Regelschar ρ mit den Ebenen α und γ. Wenn wir dies für die Geraden m und n, die ja auch Leitstrahlen der Regelschar ρ sind, anwenden, so sehen wir die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar ein.

Wir beziehen nunmehr die Kegelschnitte k_α und k_γ in der folgenden Weise projectiv aufeinander: Wenn a und c einander entsprechende Strahlen der im Sinne des Satzes (I) projectiven Strahlenbüschel $[\alpha A_1]$ und $[\gamma C_1]$ sind, so ordnen wir einander jene Punkte A_2 und C_2 der Kegelschnitte k_α und k_γ zu, in denen diese Kegelschnitte neben den Punkten A_1 und C_1 von den Strahlen a und c geschnitten werden. Diese projective Beziehung, sie werde Π genannt, ist so beschaffen, dass in ihr die Punkte M und N sich selbst entsprechen und die Punkte C und A einander entsprechen. Wir können nämlich die Gesammtheit der Strahlen zweier Strahlenbüschel I. Ordnung, deren Mittelpunkte in der Schnittgeraden ihrer Ebenen liegen, als (singuläre) Regelschar auffassen. (Wir wollen hier die Rechtfertigung dieser Auffassung übergehen.) Ist nunmehr M' der Schnittpunkt der Geraden m mit der Kante $\overline{AC}$; ist fernerhin μ die den Punkt M (d. i. der Schnittpunkt von m mit $\overline{BD}$) mit der Kante $\overline{A_1C_1}$ verbindende Ebene und μ' die den Punkt M' mit der Kante $\overline{B_1D_1}$ verbindende Ebene, so ist die Gesammtheit der Strahlen der Strahlenbüschel I. Ordnung $[M\mu]$ und $[M'\mu']$ eine Regelschar in dem eben angegebenen Sinne. (Die Schnittgerade der Ebenen μ und μ' ist die Gerade m, die die Punkte M und M' enthält.) Diese Regelschar ist eine der im Satze (I) genannten ∞^1 Regelscharen, denn die vier in ihr enthaltenen Strahlen $\overline{A_1M}$, $\overline{B_1M'}$, $\overline{C_1M}$ und $\overline{D_1M'}$ sind augenscheinlich der Reihe nach Strahlen der gegebenen vier Strahlenbüschel I. Ordnung $[\alpha A_1]$, $[\beta B_1]$, $[\gamma C_1]$ und $[\delta D_1]$. (Der Punkt M liegt nämlich in den Ebenen α und γ und der Punkt M' in den Ebenen β und δ.) Die Strahlen $\overline{A_1M}$ und $\overline{C_1M}$ sind daher einander entsprechende Strahlen der im Sinne des Satzes (I) projectiven Strahlenbüschel $[\alpha A_1]$ und $[\gamma C_1]$. Analog sind die Strahlen $\overline{A_1N}$ und $\overline{C_1N}$ einander entsprechende Strahlen dieser beiden Büschel. Wir können aber auch noch ein drittes Paar entsprechender Strahlen dieser beiden Büschel angeben. Zu den im Satze (I) genannten ∞^1 Regelscharen gehört nämlich nach der Bemerkung (α) eine, für die die Kante $\overline{AC}$ ein Leitstrahl ist. Diese Regelschar besitzt im Büschel $[\alpha A_1]$ den Strahl $\overline{A_1C}$ und im Büschel $[\gamma C_1]$ den Strahl $\overline{C_1A}$. Diese beiden Strahlen sind daher ebenfalls einander entsprechende Strahlen

dieser beiden Büschel. Wir erhalten also: Die Strahlenpaare $\overline{A_1 M}$ $\overline{C_1 M}$, $\overline{A_1 N}$ $\overline{C_1 N}$ und $\overline{A_1 C}$ $\overline{C_1 A}$ sind Paare einander entsprechender Strahlen der projectiven Büschel $[\alpha A_1]$ und $[\gamma C_1]$. Daraus aber folgt auf Grund der Definition der projectiven Beziehung $\Pi[k_\alpha(A_2) \bar{\wedge} k_\gamma(C_2)]$, dass in derselben, wie gesagt, die Punkte M und N sich selbst entsprechen und dass die Punkte C und A einander in ihr entsprechen.

Wir können die Kegelschnitte k_α und k_γ aber auch in der folgenden Weise projectiv aufeinander beziehen: Wir ordnen je zwei Punkte dieser Kegelschnitte einander zu, die auf demselben Strahl der Regelschar ρ liegen. Diese projective Beziehung ist aber offenbar auch so beschaffen, dass in ihr die Punkte M und N sich selbst und die Punkte C und A einander entsprechen, und ist daher identisch mit der projectiven Beziehung $\Pi[k_\alpha(A_2) \bar{\wedge} k_\gamma(C_2)]$. Die die Punkte A_2 und C_2 verbindende Gerade ist daher ein Strahl der Regelschar ρ. Daraus ist aber die Richtigkeit der Bemerkung (β) für die Büschel $[\alpha A_1]$ und $[\gamma C_1]$ unmittelbar deutlich.

Fernerhin wollen wir im Anschluss an die Bemerkung (α) eine Construction der in dieser Bemerkung genannten Strahlenbüschel II. Ordnung, sie seien σ_α, σ_β, σ_γ und σ_δ, angeben; z. B. für den Büschel σ_δ:

Zunächst bezeichnen wir die Seiten des Dreiecks $\overline{ABC}$ mit a, b und c und die in dem Punkte D_1 einander schneidenden Seitenebenen des Tetraeders $\overline{A_1 B_1 C_1 D_1}$ mit α_1, β_1 und γ_1. Fernerhin bestimmen wir jene drei Strahlen a_1, b_1 und c_1 des Büschels $[\delta D_1]$, in denen die Ebene δ von den Ebenen α_1, β_1 und γ_1 geschnitten wird. Dann sind die die Punkte (bc_1) und (cb_1), fernerhin (ca_1) und (ac_1) und endlich (ab_1) und (ba_1) verbindenden Geraden drei Strahlen des Büschels σ_δ — sie seien a_2, b_2 und c_2 — und bestimmen im Vereine mit den Strahlen a, b und c diesen Büschel. Der Punkt D_1 ist der Brianchonpunkt für das gleichnamige Sechsseit $(aa_2 bb_2 cc_2)$.

Beweis: Zu den im Satze (I) genannten Regelscharen gehören nach der der Bemerkung (α) reciproken Bemerkung sechs besondere, nämlich jene, von denen eine jede so beschaffen ist, dass für sie eine von den sechs Kanten des

Tetraeders $\overline{A_1B_1C_1D_1}$ ein Leitstrahl ist. Wir betrachten z. B. jene von diesen sechs Regelscharen — sie sei R_0 —, für die die Kante $\overline{D_1A_1}$ ein Leitstrahl ist. Es sei b_0 der dem Büschel $[\beta B_1]$ angehörige Strahl dieser Regelschar und d_0' jener ihrer Leitstrahlen, der in der Ebene δ liegt. b_0 und $\overline{D_1A_1}$ liegen in derselben Ebene (jeder Strahl einer Regelschaar schneidet jeden ihrer Leitstrahlen), die aber keine andere ist als die Ebene γ_1. Ihre Schnittgerade c_1 mit der Ebene δ schneidet daher die Kante $\overline{AC}$ in demselben Punkte wie die Gerade b_0. In diesem Punkte wird diese Kante aber auch von der Geraden d_0' geschnitten, denn die Geraden b_0 und d_0' schneiden einander aus demselben Grunde wie die Geraden b_0 und $\overline{D_1A_1}$. Wir können daher, weil wir die Kante $\overline{AC}$ mit b bezeichnet haben, sagen: Die Gerade d_0' enthält den Punkt (bc_1). Ebenso enthält sie den Punkt (cb_1), ist daher keine andere als die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte, die wir a_2 genannt haben. Sie gehört aber, ebenso wie alle in der Ebene δ liegenden Leitstrahlen der im Satze (I) genannten Regelscharen, dem Büschel σ_δ an, und daraus folgt die Richtigkeit der angegebenen Construction unmittelbar.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die Strahlenbüschel II. Ordnung σ_α, σ_β, σ_γ und σ_δ unabhänig voneinander sind; diese Thatsache lässt sich dahin aussprechen, dass der Satz (I) [inclusive Bemerkung (α)] die folgende Umkehrung gestattet, die vielleicht auch von Interesse ist:

Vier Strahlenbüschel II. Ordnung des Raumes, von denen ein jeder jene drei Geraden enthält, in denen seine Ebene von den Ebenen der drei übrigen gegebenen Büschel geschnitten wird, sind projectiv aufeinander bezogen, wenn je vier Strahlen aus den vier Büscheln einander als entsprechend zugewiesen werden, die derselben Regelschar angehören. Die Leitstrahlen der diese projective Beziehung definierenden ∞^1 Regelscharen in den Ebenen der gegebenen Büschel bilden vier Strahlenbüschel I. Ordnung.

Dieser Satz wird ähnlich bewiesen wie der Satz (I). Die Strahlenbüschel I. Ordnung und II. Ordnung vertauschen nur ihre Rollen. (Wir wollen den Beweis hier nicht durchführen.)

Bahnbestimmung der großen Feuerkugel vom 3. October 1901

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn.

(**Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1902.**)

Das Meteor, über welches im folgenden berichtet werden soll, ist um $7^h\ 27 \cdot 5^m$ mttl. Wiener Zeit auf einer Fläche beobachtet worden, welche, nach den eingelangten Nachrichten, zum mindesten vom adriatischen Meere unweit Abbazia bis in die Gegend von Magdeburg innerhalb einer Breitendifferenz von $7^1/_4°$ oder mehr als 800 *km* und in einer Erstreckung von $8^1/_2$ Längengraden, also etwa 630 *km* von West nach Ost reicht.

Viele der vorliegenden Schilderungen bezeichnen die Lichtstärke, zu welcher sich dieses, zuerst nur als unscheinbare Sternschnuppe auftretende Meteor in wenigen Secunden entwickelte, als überwältigend, und solche Eindrücke mochten wohl diesmal noch viel mehr als sonst Anlass gegeben haben zu den größten Täuschungen über die Entfernung der Erscheinung. Die einen glaubten gleichzeitig oder doch nach wenigen Secunden sehr heftige Detonationen vernommen zu haben, andere behaupteten, dass meteorische Massen ganz in der Nähe niedergefallen wären, dies aber mit gleicher Bestimmtheit in den verschiedensten Theilen des Beobachtungsgebietes, so z. B. ebenso in der Umgebung Wiens, als in Salzburg und in Preußisch-Schlesien, wo sogar das Gewicht der angeblich gefallenen Masse angegeben wurde.

Niemals ist bisher eine so große Anzahl von Nachrichten (mehr als 200) zu meiner Verfügung gestanden, doch erwiesen sich viele derselben, wie gewöhnlich, für den vorliegenden

Zweck als unbrauchbar. Der größte Theil der Berichte ist auch diesmal infolge eines von dem wirklichen Mitgliede der kaiserl. Akademie, Herrn Sternwarte-Director, Hofrath Prof. Dr. Edmund Weiß in mehreren Wiener Tagesblättern veröffentlichten Aufrufes eingelangt und mir freundlichst mitgetheilt worden.

Von dieser Seite wurde auch eine Nachfrage durch die k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus bei den Beobachtern auf den meteorologischen Stationen angeregt, deren Ergebnisse mir durch die Sternwarte ebenfalls zur Verfügung gestellt worden sind.

Herrn Director Dr. Aristides Brezina in Wien verdanke ich die Möglichkeit, in eine äußerst reichhaltige Sammlung von Zeitungsnotizen über diese Feuerkugel aus dem ganzen Beobachtungsgebiete Einsicht zu nehmen, Herrn Prof. A. Paudler in Leipa wieder die gefällige Vermittlung mehrerer böhmischen Beobachtungen und Herrn Director Prof. P. F. Schwab in Kremsmünster einige wichtige Angaben aus Oberösterreich.

Hinsichtlich der Wahrnehmungen in den angrenzenden Gebieten des Deutschen Reiches erfreute ich mich neuerdings der oft erprobten, so wertvollen, unermüdlichen Unterstützung von Seite des Herrn Prof. Dr. E. Reimann in Hirschberg. Einen schätzbaren Beitrag habe ich dem freundlichen Entgegenkommen des Herrn Sternwarte-Directors Prof. Dr. Bruns in Leipzig zu verdanken.

Aus Böhmen und Mähren, besonders auch aus Brünn, sind mir unmittelbar zahlreiche Beobachtungen zugekommen.

Die eingelaufenen Nachrichten konnten zwar, der großen Mehrzahl nach, nicht sofort verwendet werden, da sie zu unbestimmte, ja sogar mitunter über das Wesentlichste auch gar keine Angaben enthielten, allein sie boten doch Veranlassung, durch weitere briefliche — bei der großen Menge allerdings sehr langwierige — Erkundigungen, das brauchbare Material zu vermehren.

Schließlich konnten zur Bestimmung der geographischen Lage des Hemmungspunktes, welcher in Böhmen zwischen Prag und Budweis gelegen war, Beobachtungen aus nicht weniger als 58 verschiedenen Orten in Verbindung gebracht

werden. Für die Bestimmung des Radiationspunktes dienten 42 scheinbare Bahnbogen und 64 Schätzungen der Dauer nach Secunden waren aus diesen Mittheilungen zu schöpfen.

Dass unter den hier erwähnten Angaben äußerst verschiedene Grade der Genauigkeit bis zum Beiläufigen herab vertreten sind, entspricht nur der Natur des Gegenstandes. Ich habe mich aber bemüht, alles einigermaßen Brauchbare mit entsprechenden Gewichten zu versehen und in Rechnung zu ziehen.

Bei der Anführung der Beobachtungen wurde das in irgendeinem Sinne Verwendbare möglichst in der ursprünglichen Ausdrucksweise wiedergegeben, doch mussten bei der Fülle des Materials bedeutende Kürzungen vorgenommen werden, und es sind viele Angaben über das Aussehen des Meteors nur in übersichtlichen Zusammenstellungen am betreffenden Orte benützt worden.

Die aus der Untersuchung der Bahn hervorgehenden kosmischen Beziehungen sind, sowie in früheren Fällen, am Schlusse erörtert worden.

Es obliegt mir noch, außer den hier namentlich angeführten Förderern dieser Arbeit, auch den vielen Beobachtern, welche sich in jeder Weise bemühten, mich durch ihre Mittheilungen zu unterstützen, insbesondere aber der Tagespresse, deren eigentlich kaum zu entbehrende Mitwirkung diesmal ganz besonders hervortritt, den verbindlichsten Dank auszudrücken.

Das nachfolgende Verzeichnis der Beobachtungsorte ist in der Hauptsache nach wachsenden Breiten geordnet, doch wurden dabei einzelne Ländergebiete im Zusammenhange vorgenommen.

Beobachtungen.

1. Rabaz (31° 50′; 45° 4′). Herr Banquier S. Nagel befand sich auf der Seefahrt von Pola nach Abbazia beim Örtchen Rabaz. Die Feuerkugel leuchtete etwa durch 2 bis 3^s und fiel in nördlicher Richtung beiläufig bei St. Peter ($A = 181 \cdot 7°$).

2. Illyrisch-Feistritz (31° 55′; 45° 34′), $7^h\ 25^m$ m. e. Z. Das Meteor fiel tief am Horizont genau unter dem Polarstern oder höchstens 1° westlicher ($A = 181°$) (Herr Jos. Goričan).

3. Agram (32° 38·5′; 45° 49′). Um $^{1}/_{2}$ 8^{h} wurde ein hellleuchtendes Meteor beobachtet. Es erschien in etwa 60° Höhe über dem nördlichen Horizont als smaragdgrün strahlende Kugel, die rasch hinter dem Sljeme niedergieng. Es folgte ihr ein lebhaftes Wetterleuchten (»Agramer Zeitung«). Die Kuppe Bistra des Sljeme hat $A = 169°$.

4. Littai (32° 29·7′; 46° 3·4′), 7^{h} 25^{m}. Das Meteor fiel in der Richtung zwischen N und NNW in scheinbarer Neigung von etwa 18° (gezeichnet) gegen die Verticale von rechts nach links und ähnelte einem etwa 3^{s} dauerndem Blitze (Herr R. Starovasník, Beamter).

5. Schloss Dornau bei Pettau (33° 37′; 46° 26·5′). Um 7^{h} 30^{m} fuhr am NW-Horizont eine glänzende Kugel mit einem Silberstreifen hinter sich, ähnlich dem einer Rakete, nieder und erleuchtete mit grünen und rothen Flammen die ganze Gegend. Der Rest verschwand hinter den Hügeln der Landschaft (»Ostdeutsche Rundschau«).

6. Graz (33° 6′; 47° 4′). Das Meteor flog im Bogen in der Richtung zwischen Schöckl und Gösting-Murthal (d. i. zwischen N und NNW) sehr grell, wie elektrisches Licht strahlend, plötzlich vom Bogen abbrechend, wobei das elektrisch-weiße Licht erlosch und der Körper senkrecht rothglühend herunterfiel (Herr Ad. Siegmund, städtischer Beamter).

7. Oberdorf bei Voitsberg (32° 48′; 47° 4·3′). Das Meteor erschien um $^{1}/_{2}8^{h}$ in nördlicher Richtung mit blauer Flamme in der Höhe von etwa 30°, fiel senkrecht und verschwand mit rother Farbe hinter dem Horizonte (»Grazer Tagespost«).

8. Schönberg bei Ober-Wölz (32° 0·8′; 47° 11·5′). Der leuchtende Körper verschwand im N, etwas gegen W zu hinter dem Horizonte (Herr Lehrer St. Pichler).

9. Leoben, auf der Gösserstraße (32° 46′; 47° 22·5′). »Etwas nach $7^{1}/_{4}{}^{h}$ erschien scheinbar im Zenit ein heller, grüner Stern, der auf seinem Wege größer und größer wurde, bis er endlich die Größe der vollen Mondscheibe erreichte, immer noch grünleuchtend. Wie er sich dem Horizonte näherte, fieng das Phänomen an zu sprühen und färbte sich roth, bis es endlich hinter dem Knappenriedl, scheinbar im Tollinggraben ($A = 167°$)

verschwand, ein stärkeres rothes Licht verbreitend«. Hiernach wäre dabei die Höhe etwa 6° bis 9° gewesen (»Obersteirer Blatt«).

10. Grundlsee bei Aussee (31° 31·7′; 47° 38′). Das Meteor erschien beiläufig in ENE 30° hoch und verschwand nach etwa 2ˢ hinter dem »Backenstein« im Todtengebirge. Darnach erfolgte noch ein mehrmaliges Aufleuchten am nordöstlichen Himmel. Diesen Angaben würde für das Verschwinden ungefähr 190·6° Azimut und 9·6° Höhe entsprechen. Der Richtung nach würde es nach des Beobachters Schätzung zwischen Linz und Krems die Erde erreicht haben (Herr Dr. H. Bell). Nach einer Notiz in der »Grazer Tagespost« aus Aussee gieng es im Bogen von N gegen W.

11. Neuberg (33° 15′; 47° 40′). Eine rothe Kugel bewegte sich, vom Kamme der Schneealpe (zwischen N und NNE) ausgehend, blitzartig im schwachen Bogen gegen die Lachalpe in nordwestlicher Richtung und zerplatzte, die ganze Gegend grell beleuchtend (»Grazer Tagespost«).

12. St. Gallen (32° 17′; 47° 41·4′). Fiel in der Richtung von S gegen N, fast senkrecht, gezeichnet, 14° von der Verticalen abweichend von rechts gegen links, leuchtete sehr stark und verschwand hinter den Bergen, einen Streifen zurücklassend (Herr Fr. Arthofer).

13. Maria Zell (32° 58′; 47° 45′). Verbreitete sehr grelles Licht (»Obersteirer Blatt«).

14. Ischl (31° 17′; 47° 43′). Über dem nördlichen Gebirge Zimitz wurde ein 2 bis 3ˢ dauernder intensiver Lichtschein beobachtet (Herr J. Voglhuber).

15. Grödig bei Salzburg (30° 42′; 47° 44·5′). Eine vortreffliche Beschreibung verdanke ich der Güte des hochw. Herrn Pfarrers P. Josef Dum, welcher das Meteor schon sehr früh bemerkt hatte, da seine Aufmerksamkeit eben diesem Theile des Himmels zugewendet war. Der Herr Beobachter betrachtete die Milchstraße, die sich vom Untersberge über Grödig zum Gaißberg (bei Salzburg) hinzog, als er gegen E zu in großer Höhe eine unbedeutende Sternschnuppe bemerkte, die aus der Milchstraße kam, sehr schnell gegen S zog und bald verschwand. Bald darauf tauchte ebenfalls an der Milchstraße, vielleicht gar im selben Sternbilde, das Meteor auf, in der Höhe über Anif.

Der Gaißberg zeigte sich links. Es zog in der Richtung gegen Salzburg, also nördlich und die Bahn war anfänglich ungefähr $42^1/_2{}^\circ$ gegen die Horizontale geneigt. Es hob sich stark vom Himmel ab, blieb aber zuerst in Umfang und Lichtstärke gleich, wurde weißglühend, mit intensivem schmalen Schweife, schwoll dann sichtbar an, sich gleichsam aufblähend. Beiläufig in gleicher Höhe mit dem Capucinerberg (also nahe dem Horizont) erlitt das Phänomen plötzlich eine staunenerregende Veränderung. Es war eine Kugel daraus geworden, die dem Vollmonde wenig nachstand. Man gewann den Eindruck eines Weltbrandes im Kleinen. Von der Kugel gieng ein Lichtkegel nach oben und nach unten, aus welchem zahlreiche Funken sprühten. Es war, als stiegen vom unteren Kegel braune Wölkchen auf, durch welche die Kugel in gedämpftem feurigen Goldgelb durchleuchtete; der obere Kegel hatte das Aussehen, als brodelte darin eine flüssige Masse, die der Kugel entquoll und zeigte oben rechts einen sehr effectvollen Saum. So blieb das Phänomen bis zu 6^s wie hingezaubert auf derselben Stelle. Plötzlich verschwand es und war wie zu einem rothleuchtenden Sternchen zusammengeschmolzen, das in der Richtung Grödig-Morzg scheinbar zur Erde niedergieng.

Von dem Aussehen der Erscheinung im höchsten Glanze hat der hochwürdige Herr Beobachter eine in Farben ausgeführte Skizze beigelegt und überdies alle hier bezeichneten Richtungen durch Eintragung in die Karte sichergestellt. Hiernach hat die Richtung gegen Anif $A = 251°$, gegen den Gaißberg $A = 219°$, gegen Morzg, wo das Meteor verschwunden ist, $A = 203 \cdot 5°$.

16. Weyer (32° 20′; 47° 51′). Das Meteor verschwand sehr schnell, nach 3 bis 4^s mit röthlichem Feuerschein in 15 bis 20° Höhe hinter dem Horizonte und wurde zuerst gesehen 20 bis 30° östlich von Magnetisch Nord (Herr Gerichtsadjunct Dr. Carl Weizner).

17. Kirchdorf a. d. Krems (31° 50′; 47° 54′). Die Feuerkugel schien in nordöstlicher bis nordnordöstlicher Richtung senkrecht zu Boden zu fallen. Sie hatte einen hellen senkrechten Schweif und glich einer grün und roth leuchtenden Rakete (Herr Jurist Schützenberger).

18. Kürnberg (32° 12·5′ 48° 0·7′). Es sank in länglicher Form wie ein Glastropfen, in prächtig gelblichem Lichte erglänzend, gerade auf die Warte (?) nieder, ohne Hinterlassung eines Rückstandes (Herr J. Lintemer).

19. Garsten (32° 4·5′; 48° 1·5′). Das Meteor wurde in der Richtung gegen N beobachtet.

20. Steyr (32° 5′; 48° 2·8′). Erschien »ungefähr in der Mitte des Firmaments etwas mehr gegen N«. Bewegung in der Richtung gegen NW, sehr merklich von der Senkrechten abweichend, etwa gegen 35° (Herr M. Blümelhuber).

21. Kremsmünster (31° 47·5′; 48° 3′). Der Güte des Herrn Sternwarte-Directors P. Fr. Schwab verdanke ich folgende Beobachtung: Nach Angabe des Schülers der 5. Gymnasial-Classe C. Meynhard erschien das Meteor nahe am Zenit und war anfangs kaum so groß als jetzt Jupiter, nahm rasch an Größe und Helligkeit zu, so dass die ganze Gegend auffallend hell wurde. Das Licht war zuerst weiß, mitunter bläulich, der nachleuchtende Streifen etwas röthlich. Durch Messung mit dem Meteoroskop ergaben sich für den Beginn N 19·5° E, 74·2° hoch, für das Verschwinden hinter Bäumen N 31·0° W, 30·4° hoch.

22. Uttendorf (30° 47′; 48° 9′). Das Meteor erhellte das Dunkel der Nacht und nahm seinen Weg in östlicher Richtung, einen rothen Lichtstreifen ausstrahlend (»Linzer Volksblatt«).

23. Ried (31° 9′; 48° 13′). In östlicher Richtung wurde ein hell leuchtendes Meteor beobachtet, welches durch 2^s dauerte (»Linzer Tagespost«).

24. Grein (32° 31′; 48° 13′). Um $^1/_2 8^h$ wurde in nördlicher Richtung der Fall eines Meteors beobachtet, welches außerordentliche Helle verbreitete. Einem Beobachter am Donauufer schien es knapp hinter dem Schlosse Greinburg im Park niedergefallen zu sein (etwa NNW). Einem andern, in der Nähe der Priemmühle, $^1/_4$ Stunde nördlich von Grein, schien es, als ob die Feuerkugel in unmittelbarer Nähe des Öllingergutes gefallen wäre (ungefähr 10° W von N). Der Berichterstatter bemerkt, es dürfte wohl eher in Böhmen oder noch weiter nordwärts gefallen sein (»Linzer Tagespost«).

25. Braunau (30° 42·5′; 48° 15′). Von der Innbrücke aus schien etwa 7^h die glänzende Kugel, welche einen gelblichen Schweif nach sich zog, gegen E zu verschwinden, als ob dieselbe unter der Eisenbahnbrücke ins Wasser gefallen wäre (also mehr nordöstlich). (»Braunauer Wochenblatt«.)

26. Linz (31° 57·5′; 48° 18·5′). Um $7^h 25^m$ beobachteten Spaziergänger, durch ein plötzliches helles Aufleuchten aufmerksam gemacht, ein Meteor, ähnlich einer sehr großen zur Erde fallenden Rakete. Es strahlte in grünlichem Lichte, während der nachfolgende Streifen röthlich glänzte. Von der Frank-Fabrik aus schien es auf das kleine Exercierfeld (beiläufig $A = 195°$) von der Harrachgasse in der Richtung gegen die Tabakfabrik niederzufallen ($A = 186°$ wenig sicher). (»Linzer Volksblatt«.)

27. Raab (31° 19′; 48° 21′). Ein Meteor von seltener Größe und Schönheit verschwand nach 8^s Dauer in nordöstlicher Richtung. Es hatte zuerst grünlichgelbes Licht, gestaltete sich aber schließlich zu einer intensiv roth strahlenden Kugel, vom Durchmesser der doppelten Mondscheibe (»Linzer Tagespost«).

28. Taufkirchen (31° 12′; 48° 24′). Personen, welche den Verlauf vom Anfang an wahrnahmen, sahen einen sternähnlichen Himmelskörper sich plötzlich unter großer Helle erweitern bis Vollmondsgröße. Das Licht war so intensiv, dass man an ein Schadenfeuer dachte. Richtung von S gegen N (»Linzer Volksblatt«).

29. Freistadt (32° 10′; 48° 31′). Das Meteor wurde um $7^1/_4{}^h$ in nördlicher Richtung gesehen (»Linzer Volksblatt«).

30. Ober-Weißenbach (31° 53′; 48° 33′). Zwischen $7^1/_4$ und $7^1/_2{}^h$ wurde plötzlich die hiesige Gegend in weitem Umkreise von einem intensiven, dem elektrischen ähnlichen Lichte erfüllt. Im Freien weilende Personen sahen einen großen feurigen Lichtball, der die Form eines Hufeisens und einen breiten feurigen Streifen hinter sich hatte, vom südlichen Himmel in nördlicher Richtung zur Erde herabfallen. *D:* 6 bis 7^s (»Linzer Volksblatt«).

31. Rainbach (32° 8′; 48° 34′). Es fiel scheinbar senkrecht, nördlich herab (ebenda).

32. Gloggnitz-Weißenbach (33° 35·5′; 47° 40′). Herr R. Echinger hat das Meteor von der Reichsstraße bei Kilometer 74 zwischen genannten Orten in der Richtung über dem Schneeberg beobachtet ($A = 145°$ für den Kaiserstein, nur beiläufig) (»Österreichische Volkszeitung«).

33. Wiener-Neustadt (33° 56′; 47° 49′) 7^h 25^m ein im NW niedergehendes sehr grell leuchtendes Meteor (Wiener-Neustädter-Zeitung).

34. Berndorf (33° 47′; 47° 56·6′). Die Fallinie des Meteors war gegen die Verticale von rechts oben nach links unten 16° geneigt. Die blendend helle Erscheinung war oben hellgrün, in der Mitte roth, unten gelblichweiß und dauerte nur einige Secunden (Herr U. Scherer, Werkmeister).

35. Kottingbrunn (33° 53·5′; 47° 57·3′). Beobachter bemerkte das Meteor aus dem Eisenbahnwagen in der Richtung über Vöslau ($A = 147°$) als große, grünlich glänzende Kugel, die oben eine langgezogene bewegliche Flamme hatte, wie eine brennende Granate, und sich in ziemlich steilem Bogen der Erde näherte. D: 4^s (Rittmeister D. Unleserlich).

36. Freiland bei Schrambach (33° 14·6′; 48° 0·5′) 7^h 25^m. Die Feuerkugel war in NNW zu beobachten, beleuchtete die ganze Gegend einige Secunden lang und verschwand, von der Traisenbrücke aus gesehen (neben Côte 395 der Specialkarte), genau ober dem »Hundsgruber« ($A = 165°$). Aus der Höhendifferenz würde $h = 9·5°$ hervorgehen. Bewegung rechts oben nach links unten. Scheinbare Neigung gegen die Verticale ungefähr 9° (Herr Ludwig Pollak, Werksbeamter).

37. Poldihof bei Scheibbs (32° 49·5′; 48° 1′). Nach des Berichterstatters Herrn J. Edenberger Meinung, fiel das Meteor gegen Pöchlarn zu ($A = 189°$). Ein anderer Beobachter gibt Richtung Oberndorf ($A = 210°$). Durch 2^s war es taghell. »Der Körper schien so groß wie ein 50 Literfass, war tropfenförmig, weißglühend, unten stumpf, oben spitz«.

38. Bruck a. d. Leitha (34° 26·5′; 48° 1·5′). 7^h $20·5^m$ m. e. Z. wurde es durch 2 bis 3^s blitzartig taghell. Beobachter wendete sich um und sah unterhalb des Großen Bären gerade in der Richtung gegen Wien ($A = 127°$) eine feurige Kugel

erlöschen (Herr R. Zajac, Locomotivführer). Herr Lehrer F. Bernhart gibt die Fallrichtung NW an.

Aus Gramatneusiedl (34° 10′; 48° 2′) wurde berichtet, dass der Lichteffect ein überwältigender, beinahe beängstigender war (»Österr. Volkszeitung«).

39. Laxenburg (34° 0′; 48° 3′). Ein stark leuchtender bläulicher Körper, aus dem später unten zahlreiche Funken herauskamen, flog ziemlich niedrig, von der Guntramsdorferstraße aus gegen Neudorf, also NW, aber mehr nördlich ($A = 142 \cdot 5°$) (Herr Stöckler).

40. Heiligenkreuz (33° 44′; 48° 4′). Ein Feuerstreifen von Farbe des elektrischen Lichtes, der sich von E gegen N bewegte, aber hinter den Bergen verschwand (Fräulein Herma Grundmann).

41. Mödling (33° 57·5′; 48° 5′). Eine lebhaft weißgrün leuchtende Kugel, welche einen langen feurigen Streifen hinter sich ließ. Vor dem Verschwinden erfolgte in der Mitte eine vehemente Explosion. Die scheinbare Neigung gegen die Verticale ist durch eine Skizze ungefähr zu 20° angegeben. Richtung: WNW. D: 4 bis 5^s (Herr V. Bernhart).

Ein anderer Beobachter, Herr R. Bohmann, der sich in der Vorderbrühl befand, schreibt, mit derselben Zeitangabe, es fiel senkrecht eine Sternschnuppe, die sich immer mehr vergrößerte und ein grelles bläuliches Licht annahm, um dann in einer großen ziemlich rothen Flamme momentan zu erlöschen. Sie gieng in der Richtung gegen den Gießhübel, respective Hochleithen nieder. Eine Dame in der Hinterbrühl sah das auffallend große, grell leuchtende Meteor in nördlicher Richtung (»Neue Freie Presse«).

Herr Friedr. Desbalmes sah es vom Eichkogel in der Richtung von N nach W gegen das Priesnitzthal zu fallen. Farbe: gelb, blau und roth.

42. Ulmerfeld (32° 29·5′; 48° 5′). $7^1/_2{}^h$ in nordwestlicher Richtung ein hell leuchtendes etwa 7 bis 8^s andauerndes Meteor, anfangs einem glühenden Glastropfen gleichend, dann einen glänzenden Streifen hinterlassend, in grünem Lichte endigend.

43. Amstetten (32° 33′; 48° 7·5′). Links vom Bahnzuge in N bis NE Richtung fiel eine Feuerkugel in starkem grünlichen Glanze, welche nach kurzem Laufe in mehrere röthliche Stücke zersplitterte (Herr H. Hatschek).

44. Zwischen Neumarkt und Kemmelbach (32° 45′; 48° 9′) 7^h 22^m m. e. Z. Nach einer Skizze des Beobachters, Herrn Baron Brunicki, schien das Meteor aus dem fahrenden Bahnzuge »genau senkrecht gegen Norden« ungefähr mitten zwischen β und γ des Großen Bären zu fallen. Mit Bezug auf dieses Sternbild wäre die Höhe für den Anfang zu etwa 39° und für das Ende mit 13° zu nehmen. Ein anderer Beobachter (Herr Richter), der sich offenbar im selben Zuge befand, gibt 7^h 24^m m. e. Z. und den Fall ebenfalls »senkrecht« (nach einer Skizze aber doch mit leichter Abweichung rechts nach links) an und nördlich.

45. Hainburg (34° 36·5′; 48° 9′) Herr Volksschullehrer E. Kindermann berichtete an die k. k. Wiener Sternwarte: Gerade damit beschäftigt, zweien Schülern die wichtigsten Sternbilder am Himmel zu zeigen, bemerkten wir neben dem Sternbilde des »Großen Bären« ein blaues Aufleuchten, das bald ins Rothviolette und ins Orangerothe übergieng. Skizziert wurde die Fallinie 65° gegen den Horizont geneigt von rechts nach links aus etwa 30° Anfanghöhe zu 10·5° Endhöhe. A: beiläufig 142°.

46. Eichgraben (33° 39′; 48° 10′). Eine blendend lichtblau leuchtende Kugel mit rothem Schweife in der Richtung gegen W senkrecht abfallend, die Umgebung beinahe taghell erleuchtend (»Neues Wiener Tagblatt«).

47. Hutten bei Eichgraben (33° 39′; 48° 11′). Das Meteor fiel, mit starkem Zischen die Luft durchsausend im Walde genannt »am Stein« nieder ($A = 153°$, sehr unsicher).

48. Pyhra bei St. Pölten (33° 21′; 48° 10′). Die ganze Gegend erhellte sich plötzlich und gegen N schauend gewahrte man ein Meteor, ähnlich einem großen glühenden Glastropfen.

49. Ardagger (32° 29·5′; 48° 11′). Erst sah man eine ungewöhnlich große Sternschnuppe, die sich im Fallen zu einer Feuerkugel gestaltete und momentan eine blitzähnliche Helle verbreitete (Anna Gmainer).

50. Melk (33° 0′; 48° 13·7′). Der Beobachter Herr Prof. P. Coelest. Jungnikl sah, infolge blendend greller Beleuchtung des Zimmers sich umwendend, nur den letzten Theil der Bahn, 13 bis 14° westlich von Nord, $h = 11°$. Scheinbare Neigung 10·5° gegen die Senkrechte.

51. Weißenkirchen a. d. Perschling (33° 26′; 48° 16′). Die Feuerkugel war bläulich, hatte rückwärts einen gelben Streifen und verbreitete erschreckenden Feuerschein (Herr P. Speiser, Lehrer.).

52. Königstetten (33° 48′; 48° 18′). Fallrichtung gegen Tulln ($A = 117$). Schweif sehr feurig (Herr Ad. Herring).

53. Atzgersdorf (33° 58′; 48° 8·8′). Vom nordwestlichen Himmel löste sich eine Kugel, welche sofort trompetenartige Form annahm, zu unterst meist wie Auerlicht, in der Mitte dunstig blaugrün und oben rothglühend aussah. D: 3^s (Herr R. Gärdtner).

54. Wien (im Mittel der Beobachtungspunkte: 34° 1·6′; 48° 12·6′). Mittel aus 30 Zeitangaben: $7^h\ 27·5^m$ Ortszeit. Nicht weniger als 48 Berichte und Notizen sind von hier eingelaufen, von welchen aber nur ein Theil brauchbare Angaben enthält. Die wenigen, welche theils durch Messungen, theils durch Beziehung auf Gestirne sichergestellt wurden, mögen zunächst angeführt werden.

a) Herr Postofficial A. Tietze sah die ganze Bahn beim Jubiläums-Stadttheater (34° 1·0′; 48° 13·5′) sehr genau und lieferte unter Anleitung des Herrn Hnatek von der Sternwarte mit dem Meteoroskop für den Endpunkt, nach irdischen hinreichend entfernten Marken, die Angabe $A = 149°$ magn. $h = 15°$. Mit 8·1° Declin. wird das astronom. Azimut 140·9°. Der Anfang erschien in der Mitte des »Kleinen Bären«, nach Herrn Tietze's späterer Einzeichnung in $\alpha = 245°$, $\delta = +80°$ oder $A = 170°$, $h = 50°$. Zeitangabe: $7^h\ 25^m$ W. Z. D: 2 bis 3^s Über den Verlauf der Erscheinung lieferte der Beobachter folgende Mittheilungen: die ersten $^4/_5$ der Bahn, während welcher das Meteor nicht besonders lichtstark war, wurden in derselben Zeit zurückgelegt, wie das letzte Fünftel, wo das Meteor plötzlich größer wurde und fast bis Vollmondgröße anwuchs. Es platzte dann mit bläulichem Lichte, das auch, was

die Helligkeit betrifft, sehr viel Ähnlichkeit mit dem einer Bogenlampe hatte. Es stoben dabei auch kurze Funken nach allen Seiten. Im letzten Fünftel blieb ein sehr bald schwindender Schweif zurück.

b) Herr Hauptmann Fr. Schumann (VI., Gumpendorferstraße, 34° 1·3′; 48° 12′) berichtete an die Sternwarte, dass er nach den Angaben seiner Fräulein Tochter, welche das Meteor in seinem »glänzenden Verlaufe« gesehen hatte, constatieren konnte, dass es fast von ζ Ursae maj. ausgieng und in NNW-Richtung gegen α in Canes venatici zog, worauf es hinter Dächern verschwand. Die Richtung dürfte gegen die Habsburgwarte verlaufen sein. Platzen der Kugel wurde nicht beobachtet.

c) Nach einer Notiz in der »Neuen Freien Presse« erschien das Meteor wie eine aus Mizar des Großen Bären senkrecht auf die Erde schießende Rakete. Der Lichtstreifen schwoll zu einer feurigen Kugel an, die, bevor sie die Erde erreichte, nach allen Richtungen hin zerstob.

d) Herr Sectionschef Dr. Lorenz Ritter v. Liburnau erblickte (nach einer Mittheilung an die Sternwarte, beim Schwarzenberggarten 34° 2·4′; 48° 12′) das helleuchtende Meteor in steiler Bahn etwa höchstens 1° westlich von η Urs. maj. (Benetnasch) vorüberfallen. Es hatte birnförmige Gestalt, scheinbar die Größe einer bauchigen $^1/_4$ Literflasche, in welcher am Boden eine grüne, in der Mitte und am spitzen Ende eine hellgelbe, durchleuchtende Flüssigkeit enthalten wäre. Ein nachfolgender Lichtstreifen wurde nicht bemerkt, dagegen ein rothes Aufleuchten, als das Meteor schon »nach einem kleinen Bruchtheil einer Secunde« hinter den Dächern verschwunden war.

e) Herr Hauptmann v. Hennig (Rennweg 34° 3′; 48° 12·2′) schreibt: Circa 60° unter dem Zenit, beiläufig im »Großen Bären«, erschien ein rothglühender Stern von $^1/_8$ Vollmondgröße, der in einem Winkel von etwa 60° zur Horizontalen gegen NNW abwärts zog. Es hatte den Anschein, als ob das Meteor beim Hauptzollamte niedergieng. Etwa 1^s nach dem Verschwinden des immer röther und immer größer glänzenden Meteors hinter den Häusern entstand ein sich bis auf halbe Himmelshöhe aus-

dehnender heller gelber Schein in der Richtung II. Bezirk—Kahlenberg. Dauer der Erscheinung 1·5^s.

Aus den mehrfachen Beziehungen zu den Bärensternen in den Beobachtungen aus Wien und Umgebung lässt sich mit Sicherheit schließen, dass in der Mittheilung *d)* eine Verwechslung von η mit ζ Urs. maj. stattgefunden hat. Unter dieser Voraussetzung könnte aus den Angaben *a)* bis *d)* als Mittel für den Endpunkt das Azimut $A = 137°$ genommen werden.

Außerdem liegen aber noch 24 Angaben mehr beiläufiger Natur vor, welche wegen ihrer großen Zahl nicht ohneweiters zu vernachlässigen wären. Sie sind im Nachstehenden übersichtlich zusammengestellt, wobei hinsichtlich der Positionsangabe erwähnt wird, dass die überall gleichbleibenden Gradzahlen bei der geographischen Länge 34° und bei der Breite 48° weggeblieben und nur die Minuten angeführt sind.

	Azimut
Herr L. Knittel (2′; 9·0′)[1], Inzersdorf, Feldgasse. Fall gegen Rothneusiedel zu. Skizziert	146°
Herr K. Marschalek (1·2′; 11·8′), Wienstraße 73 — zwischen Amerling- und Eszterházygasse	138°
Herr F. Pawelka (0·0′; 12·0), Schweglerstraße 18 gegen Holzplatz, Ecke der Schweglerstraße und Schmelz (aus der Gegend der Milchstraße kommend)	149°
Frau E. König, XIII., Am Schlossberg 15. — Wienbett bei Meidling (aus dem »vorderen Dreieck« des Großen Bären kommend) 7° bis 8° vom senkrechten Fall abweichend (skizziert)	119°
Herr A. Zach (1·0′; 12·0′), Ecke der Kirchen- und Siebensterngasse — scheinbar auf die Dächer zwischen Stuck- und verlängerter Kirchengasse	128°
Herr v. Hennig (siehe unter *e*)	153°
Herr F. Thim (1·6′; 12·3′), Burgring 1 — äußerste linke Ecke des Parlamentsgebäudes	138°
Herr L. Lepuschitz (1·5′; 12·4′), vor dem Thore der Hofstallungen, gegen Volkstheater und Raimund-Denkmal	140°

[1] Es ist überall zuerst der Standpunkt des Beobachters und dann der scheinbare Fallort bezeichnet.

Azimut

Herr F. Schaller (1·5′; 12·4′), Stand wie vorhin — zwischen Hotel Höller und Volkstheater .... 135°

Herr J. Konečný (2′: 12·4′), I., Albrechtsbrunnen. Eingezeichnet .. .. 137°

Scheinbare Neigung gegen den Horizont 76·5°.

Herr L. Koch (2·7′; 12·4′), Stadtpark, gegen Schubert-Denkmal. (Marke sehr nahe) .... 124°

Frau B. Wachtl (1·7′; 12·5′), Ecke Burgring—Franzensring — Fall senkrecht hinter dem Parlamentsgebäude.................................... 138°

Herr O. Popp (3·5′; 12·5′), III., Adamsgasse 15 — senkrechter Fall auf ein Dach zwischen Adamsgasse 6 und 12 (sehr nahe) .... 136°

Herr G. Freund (2·0′; 12·6′), I., Graben, Ecke der Spiegelgasse — senkrecht auf das Gebäude des Kriegsministeriums.......................... 146°

Herr L. Ružička (0 5′; 12·7′), VIII., Uhlplatz; skizziert . 134°

Herr S. Rosenthaler (1·6′; 12·7′), I., Burgtheater—Votivkirche .... 165°

Herr v. Nischer (1·2′; 12·7′), VIII., Rathhausecke gegen Florianigasse, Landesgericht, vertical herab........ 136°

Herr Regensberger (1·0′; 13·0′), IX., Höfergasse 3. Schräg abwärts gegen Sievering—Gersthof. Anfang über dem Hermannskogel $A = 146$ .... 130°

Herr A. Loebner (5′; 13·0′), Lagerhaus—Quai. In der »Mitte des Großen und Kleinen Bären« löste sich eine Sternschnuppe los, die, senkrecht zur Erde fallend, sich zu einer großen Ellipse erweiterte. Richtung: Militärschwimmschule — Leopoldsberg. D: 3ˢ .... 141°

Herr G. Rieger (1·2′; 13·4′). In der Richtung der Währingerstraße............................. 138°

Herr A. Ladeck (1·2′; 13·4′). Von der Tabak-Hauptniederlage Währingerstraße in die verlängerte Währingerstraße, etwas rechts abweichend .... 138°

Ungenannt (1·8′; 13·7′). Von der Brigittabrücke—Leopolds- und Kahlenberg. D: 3 bis 4ˢ .... 165°

Azimut

Fräulein M. Frank (1 8′; 13·7′), IX., gegenüber der Brigittabrücke. Fall zwischen Kobenzl und Grinzing gegen Latisberg, genau verfolgt .... 140°

Herr Prof. Dr. A. Vetschy (0·5′; 15·3′), Grinzing bei der Kirche — gegen Kobenzl........................ 125°

Das Mittel aus diesen 25 Angaben beträgt 139° ± 2·2°. Der mittlere Fehler einer dieser ziemlich rohen Beobachtungen ist ± 10·8°.

Das vorhin aus vier genaueren Angaben angeführte Mittel 137° könnte, wenn der mittlere Fehler einer Beobachtung zu ± 4° genommen würde, auf ± 2° genau angesehen werden, wonach man diese beiden Mittel wieder ungefähr gleichgewichtig zu einem Schlusswerte für das Endazimut $A = 138·0°$ ± 1·5° verbinden könnte.

Unter den hier nicht angeführten Beobachtungen, welchen eine Angabe über das Azimut nicht entnommen werden konnte, befinden sich noch drei, die den Fall als »senkrecht« bezeichnen, zwei mit »nahezu senkrecht«, die eine mit 7 bis 8°, die andere mit 3° Abweichung von der Verticalen, endlich eine in etwas »schiefer Richtung«. *D*: 1^s.

55. Marchegg (34° 35′; 48° 16·8′). Bahnneigung gegen die Verticale: 10° von rechts oben nach links unten, etwas nördlich von W. Ein wenig größer als Venus, blendend bläulich wie Bogenlicht. *D*: 4^s (Herr H. Schubert, Maler).

56. Laimbach (32° 46′; 48° 19′). Der glutrothe, faustgroße Körper, hinter welchem eine bläuliche Flamme loderte, ließ sich senkrecht ungefähr gegen N (Gutenbrunn) nieder. Den Feuerschein bemerkte man selbst in den Häusern (»Kremser Zeitung«).

57. Bisamberg (34° 1·5′; 48° 20′), 7^h 25^m. Genau in NW fiel senkrecht aus der Richtung des Sternes »Mizar« eine große feurige Kugel, die zuerst grünlich, dann violett und endlich roth leuchtete und in einer Höhe von 25° plötzlich verschwand. Beleuchtung »taghell« (Herr Oberlehrer Alois Gaipl).

58. Korneuburg (34° 0′; 48° 21′). Primaner Krausneker bemerkte in westlicher Richtung unter einem Winkel von 50°

eine mondgroße feurige Kugel in bengalisch verschiedenfarbigem Lichte sehr grell leuchtend. *D*: 5ˢ (Herr Xav. Krausneker, Bureauvorstand).

59. Wolkersdorf (34° 11′; 48° 23′). Die Feuerkugel erschien am nordwestlichen Himmel, westlich vom Großen Bären (Herr A. Meutzner).

60. Pyrawarth (34° 17′; 48° 27′). Taghell war durch eine Secunde die ganze Gegend erleuchtet (»Ostdeutsche Rundschau«).

61. Ober-Hollabrunn (33° 45′; 48° 34′). Richtung von SSE gegen NNW (an die k. k. meteorologische Centralanstalt).

62. Zwischen Ober-Stinkenbrunn und Rockendorf (33° 49′; 48° 37·6′). Eine etwa meterlange Flamme fiel vom Himmel vertical in der Richtung über Immerndorf und Guntersdorf ($A = 130$, unsicher) herab (Herr F. Kargl).

63. Großnondorf (33° 38·5′; 48° 38′). Die Feuerkugel gieng an der Nordseite dieses Dorfes von E bis W (Herr J. Auterit, Stud.).

64. Eggenburg (33° 29′; 48° 38·6′), $7^h 26^m$. Die ganze Landschaft war plötzlich hell beleuchtet. Ein Meteor, das einen glänzenden Streifen hinter sich ließ, fiel in nordwestlicher Richtung, erst weiß, dann röthlich. Scheinbare Neigung gegen die Verticale ungefähr 20° (Herr L. Sorgner und »Österreichische Volkszeitung«).

65. Stronsdorf (33° 57·5′; 48° 40′). Meteor von E bis N mit blendend weißem Lichte und Streifen. *D*: 3 bis 4ˢ.

66. Feldsberg (34° 25′; 48° 45′). Die intensiv feurige Kugel, einen langen Streifen nachziehend, fiel in nicht ganz senkrechter, also etwas schräger (8° gegen die Verticale von links oben nach rechts unten) Richtung, anscheinend gegen Voitelsbrunn zu ($A = 130·8°$) (Herr A. Zothe).

67. Zwischen Wappoltenreith und Ludweishofen (33° 9′; 48° 45′) befand sich Herr Locomotivführer Neubauer »auf einmal wie in Feuer eingehüllt«. Er dachte, das Meteor wäre ganz in seiner Nähe gefallen.

68. Gmünd (32° 37·7′; 48° 46·5′). Fall in nordwestlicher Richtung, anscheinend gegen Neunagelberg zu ($A = 167·5°$), mit großem Lichteffect (Herr J. Backhausen). $7^h 20^m$

Bewegung E bis W, zuerst hellgrün, dann roth. Die Gegend war taghell erleuchtet. D: 3^s lichtgrün, im ganzen 7 bis 8^s (»Budweiser Kreisblatt« und »Neue Freie Presse«).

69. Langegg bei Schrems (32° 49′; 48° 47·5′). Die glänzende, einen silberhellen Streifen zurücklassende Kugel erleuchtete durch 4 bis 5^s die Gegend taghell, worauf sie roth wurde und zerbarst, wobei sich in der Mitte ein schwarzer Punkt bemerkbar machte (»Bukowinaer Rundschau«).

70. Waidhofen a. Thaya (32° 57′; 48° 49′). Die Feuerkugel fiel senkrecht (nach einer Skizze aber 7° gegen die Verticale geneigt von rechts nach links). Der untere Theil war länglich, goldglänzend, der obere wie ein Stift oder Blumenstiel, silberhell. Die Erscheinung war nördlich (Herr A. Wlk).

71. Eisgarn (32° 46′; 48° 55′). Sie gieng in der Richtung Loimanns—Litschau nieder ($A = 132·5°$). An Größe übertraf sie den aufgehenden Vollmond mit außergewöhnlicher Helligkeit (Herr Dr. J. Zauricher).

72. Litschau (32° 40·5′; 48° 57′). Von E gegen nördliche Richtung. Neigung mindestens 60° gegen den Horizont. D: 2 bis 3^s. Form die eines Lichtkegels mit der Spitze nach oben (Herr M. Thiel).

73. Znaim (33° 42′; 48° 51′). Der ganz besonderen Bereitwilligkeit des Herrn Heinrich Homma jun. verdanke ich zwei voneinander unabhängige eingehende Mittheilungen:

a) $7^h\,25^m$ erschien gleich unterhalb η im »Großen Bären« (η Urs. maj. war zur Zeit in $A = 131°$, $h = 32°$ rund) eine ganz kleine Sternschnuppe von bläulicher Farbe, welche sich sehr rasch abwärts bewegte und bis $^1/_4$ Mondgröße zunahm. Nun trat eine Umwandlung ein. Sie wurde größer als die Mondscheibe, nahm genau die Form einer Ananas an, ja, man konnte sogar die einzelnen Abtheilungen und Einschnitte wie bei dieser ausnehmen. Auch ein Büschel war am oberen Ende derselben sichtbar, also kein sich zuspitzender Schweif. An den Seiten schienen Funken hervorzusprühen. Sie hatte eine kupferrothe Farbe, die nach unten zu ins Bläuliche übergieng und verschwand nach 10^s hinter einem Hause.

Herr Homma war auch so freundlich, einige Messungen mit dem Beobachter vorzunehmen, doch geschah dies erst nach

sechs Wochen, da die Erinnerung schon verblasst war, so dass die Ergebnisse mit den ersten Angaben nicht ganz gut übereinstimmen. Hiernach wurde das Meteor zuerst in einer Höhe von 44° bemerkt. In etwa 34° erreichte es die Größe der Mondscheibe und in 23° verschwand es hinter dem Dache. Die Bewegung wird nur ein wenig, etwa 5° bis 7° von der Verticalen abweichend angegeben, von links oben nach rechts unten (was offenbar verkehrt ist, da alle anderen Angaben aus dieser Gegend darin übereinstimmen, dass die Bewegungsrichtung des Meteors nördlich vom Zenit vorüber führte).

b) Ein anderer Beobachter theilt im »Znaimer Tagblatt« einen längeren Bericht mit, welcher in einigen Punkten etwas abweicht. Die Zeit wird auch zu $7^h 25^m$ angegeben. Es heißt darin unter anderem: Ich erblickte in geringer Entfernung etwas links von den drei Deichselsternen des »Wagens« einen neuen Stern in gleicher Größe, wie die Sterne des Großen Bären, mit etwas weiß-röthlichem Lichte. Die Bewegung des Meteors zur Erde hin war eine genau senkrechte. Bis zum ersten Drittel seiner Fallbahn leuchtete es, stets größer werdend, weiß-röthlich, bis zur Hälfte in roth, blau, grün und hierauf erst erglänzte es plötzlich wieder in eigenartigem weißen, acetylenartigen Lichte, das es bis zum Ende beibehielt. Nun gewahrte man auch etwas links oberhalb des Meteors einen immer stärker werdenden blutrothen Streifen. Der Kern hatte etwa halbe Mondgröße und zeigte ein deutliches Funkensprühen gegen den Schweif zu. Genau in der Verlängerung der Rapéengasse erloschen gleichzeitig Kern und Schweif. *D*: circa 8 bis 10^s.

74. Göding (34° 48′; 48° 51′). Es fiel in nordwestlicher Richtung fast senkrecht zur Erde (»Gödinger Zeitung«).

75. Rohatetz (34° 51′; 48° 57′). Am NW-Himmel fiel das Meteor in senkrechter Richtung und zerstob in viele glühende Splitter. *D*: 3^s. Die Umgebung erstrahlte in bläulichem Lichte (Herr L. Schlesinger).

Die folgenden Wahrnehmungen aus Luggau, Schönwald, Schiltern und Jassowitz verdanke ich der freundlichen Mühewaltung des Herrn P. Maresch, Winterschuldirectors in Schiltern.

76. Luggau (33° 34·5′; 48° 51′). Die Tochter des Gemeindevorstandes Herrn Stroh sah das Meteor helleuchtend in NW fallen. Ein anderer Beobachter bezeichnete es als breiten, leuchtenden Streifen. Allen schien das Meteor rechts (nördlich) vom Zenit abzuweichen.

77. Schönwald (33° 32′; 48° 55·5′). Die Bahn gegen NW hin war schief, unter etwa 20° gegen die Verticale von rechts oben nach links unten (Herr J. Stohl). — Herr Forstadjunct Schwieger sah »wenige Secunden darnach mehrere Meteore in gleicher Richtung nachfahren«.

78. Schiltern (33° 30·5′; 48° 56′). Meteor im Bogen von rechts kommend nach links. Ende ungefähr $A = 135°$ (Winterschüler Schmid). Es fiel genau senkrecht in NW. Nach Herrn Maresch's Bestimmung in $A = 139·5°$ Mondgröße (Fräulein A. Smetana). Mittel: $A = 137·2$, D: 6 bis 8^s.

79. Jasowitz (33° 25′; 48° 54′). Das Meteor fiel gegen Höslowitz in $A = 132·5°$ (Herr Neunteufel).

80. Datschitz (33° 6′; 49° 5′). Ein großer ovaler Körper mit gelber Mitte und dunkelrothem Rande erhellte im Falle aus SE gegen NNW taghell die Gegend. Starker donnerähnlicher Schall nach etwa 2^s [?] (Herr F. Fischer).

81. Hrottowitz (33° 44′; 49° 7′). Fall schräg, von links oben nach rechts unten 5° gegen die Verticale geneigt. Ende etwa $A = 130°$ nach Eintragung in die Karte (Herr Controlor J. Roubal).

82. Brünn (34° 16′; 49° 12′). *a)* Anfang $A = 99°$, $h = 47°$, Ende $A = 115°$, $h = 13·5°$. In Gemeinschaft mit dem Beobachter Herrn Buchhalter B. Heym gemessen. Mehrfach ♀- bis $^1/_4$ Mondgröße, bläulich-weiß. D: 3^s (gezählt).

b) Herr Redacteur Jeřabek sah das Verschwinden hinter dem »Deutschen Hause« in etwa $A = 98°$, $h = 14°$.

c) Eine Dame sah es vom »Kaiser Joseph-Denkmal« gegen $A = 111°$, $h = 12°$ auf eine Dachecke fallen.

d) Herr Regierungsrath Halluschka gibt ungefähr $A = 100°$. Bewegung schief von links oben nach rechts unten; zuerst wie eine Sternschnuppe, dann birnförmig, unten blauroth, oben goldgelb.

c) Herr Med. Dr. Löw gibt für das Ende $A = 120°$, $h = 13°$. Anfangshöhe $h = 33°$ (gemessen). Bestimmt mehr als $^1/_2$ Mondgröße. D höchstens 3 . Das Mittel der in Brünn beobachteten Endazimute wäre somit rund $A = 109° \pm 4°$.

83. Hulein (35°8′; 49° 19′). Herr Bürgerschullehrer B. Surma berichtete der Wiener Sternwarte, dass er das Meteor nach W, ganz wenig nördlich abweichend, fallen sah, aus einer Höhe von etwa 20° bis zum Horizont. Die Bahn gieng etwas schief im Bogen von links oben nach rechts unten, beiläufig 8° gegen die Verticale geneigt. D: 4^s. Herr Surma theilte mir überdies eine Beobachtung des dortigen Herrn Kaplan P. Stratil, nach Sternen orientiert, freundlichst mit. Hiernach bewegte sich das Meteor scheinbar zwischen den Sternbildern der nördlichen Krone und des Bootes, ausgehend zwischen η und φ Coronae (etwa von $\alpha = 230°$ $\delta = +31°$) und ungefähr parallel zur Linie δ, ε und α Bootes, beiläufig $A = 105°$, endigend.

84. Raitz (34° 18·4′; 49° 24·8′). Das Meteor erschien in der Mitte der Verbindungslinie von α Aquilae mit η Ursae maj. und gieng in der Richtung gegen Czernahora ($A = 95°$) nieder. Es hatte helles grünliches Licht und einen röthlichen Funkenschweif (L. K. an die Sternwarte).

85. Boskowitz (34° 49′; 49° 28·5′). In WSW wurde ein helleuchtendes ziemlich großes Meteor erblickt, welches hinter sich eine Flamme, ähnlich der eines Schmiedefeuers, ließ und gegen die böhmische Grenze hin niedergieng. D: 3^s (»Lidove Noviny«).

86. Sternberg (34° 57·5′; 49° 43′). Richtung ESE gegen WNW, große Helligkeit. D ungefähr 5 bis 6^s (Deutsches Volksblatt).

87. Loschitz (34° 35′; 49° 45′). Große Feuerkugel mit bläulichem Lichte gegen W (Herr W. Fritscher).

88. Mähr.-Neustadt (34° 46′; 49° 46′). Schien in SW herabzufallen (Herr F. Jackwerth).

89. Mürau (34° 31′; 49° 47·8′). Große verlängerte Feuerkugel, wie ein Komet, dann roth, Funken sprühend in $A = 79°$ verschwindend, 15° hoch (gemessen), Bahn von links oben nach rechts unten 11° gegen die Verticale geneigt (Herr Forstadjunct J. Bernatzik).

90. Mähr.-Schönberg (34° 38'; 49° 58'). Beobachter befand sich »auf dem Promenadewege von der Kaserne zum Bergwaldl«.[1] Plötzlich wurde die ganze Gegend von bläulichem Lichte tageshell beleuchtet. In der Richtung gegen die Heukoppe (beiläufig WSW bis W) flog das Meteor unter einem Winkel von etwa 60° zur Horizontalen in nordwestlicher Richtung und zog hinter sich einen rothen, allmählich verglimmenden Streifen. *D*: 5 bis 6^s (»Grenzbote«).

91. Mähr.-Rothwasser (34° 24·5'; 50° 2'). Der Anfang war nicht ganz in der Mitte des Horizontes und schwach. Dann wurde es birnförmig immer größer und heller. »Nach dem Platzen sah man ganz genau mehrere Theile abgesondert zur Erde fallen.« Die Gegend taghell beleuchtet (Herr H. Kubek). Nach den ergänzenden Angaben des Herrn Bürgerschullehrers K. Langer war das Azimut des Endpunktes $A = 74·5$ und die Abweichung der Richtung vom Zenit nur etwa 6°.

92. Mostek bei Skřipp (35° 35'; 49° 50'). Am westlichen Himmel erschien ein im röthlichen Lichte schimmerndes kugelförmiges Meteor, aus welchem eine Feuergarbe flackerte und fiel dahinzu in den nahen Gräzer Wald (Herr E. Herbatsch).

93. Troppau (35° 33'; 49° 56'). Die Lichtbahn war steil (78°) gegen den Horizont von links oben nach rechts unten gerichtet. Die Sehlinie zum Endpunkte wäre im Vergleiche mit der Abendweite der Sonne etwa $A = 83°$ zu nehmen (Herr H. Hampel).

94. Jägerndorf (35° 22'; 50° 5·5'). Die Feuerkugel fiel, alles blitzartig erleuchtend, in einem langgestreckten Bogen in südwestlicher Richtung und lieferte, zerplatzend, einen Funkenregen (Herr A. Aust).

95. Friedeberg (34° 46'; 50° 18·7'). $7^h 25^m$ zeigte sich am westlichen Himmel ein prachtvolles Meteor, zuerst in weißem, dann blauem, zuletzt in rothem Lichte, zerplatzend einen Funkenregen bildend. *D*: 5 bis 6^s. Licht, blendend und schattenwerfend. Die Höhe war beiläufig 45°, zuletzt 30° (Freie schles. Presse).

---

[1] Wohl Bürgerwald.

96. In Schwarzwasser (34° 49′; 50° 19′) glaubte man, dass in Gurschdorf Raketen aufgelassen worden wären. (Die Richtung ist etwa 10° südlich von W, aber ungenau, da diese Orte sehr ausgedehnt sind) (Freie schles. Presse).

97. Kalsching (31° 52′; 48° 52′). D: 3 bis 4^s (Neues Wiener Journ.).

98. Zwischen Neudorf und Forbes (32° 14′; 48° 55·5′). Herr Bergwerksbesitzer Miksch befand sich im Eisenbahnzuge und beobachtete den Fall 7^h 23^m Bahnzeit in etwa Stunde 23, anfangs als Sternschnuppe, dann sich ausbreitend und zertheilend. Der Locomotivführer desselben Zuges, Herr W. Karaschek, welcher Herrn Director Hofrath Dr. Weiß mündlich berichtete, drückte sich in letzterer Hinsicht ähnlich aus: »Es war anfangs bloß eine helle bläuliche Sternschnuppe, die sich absatzweise blähte, sich aber plötzlich unter enormer gelblicher Lichtentfaltung zu Mondgröße entwickelte und dann funkensprühend verschwand«. Die Meinung, dass es zwischen Wessely und Wittingau niedergegangen wäre (d. i. jedenfalls stark östlich von N), könnte sich nur auf das Erscheinen oder einen späteren Punkt, aber nicht auf das Ende beziehen, welches in dieser Gegend übereinstimmend westlich von N angegeben wird.

99. Gutwasser (32° 12′; 48° 58′). Die Magd Rochata bei Herrn Director Miksch ist aus dessen Villa in den Hof herausgetreten und hat über die Kirche weg den Fall gesehen, gegen hora 23 bis 24, also auch noch etwa 7 bis 8° westlich von N. Beide Mittheilungen verdanke ich der Freundlichkeit des Herrn Directors Dr. A. Brezina.

100. Budweis (32° 8·3′; 48° 58·5′). Es zeigte sich eine ungewöhnlich große Sternschnuppe, die sich in der Richtung gegen N senkte. Es schien, als ob eine große bläulich-feurige Kugel mit einem Kometenschweife sich zur Erde herablasse. Die Erscheinung fiel in der Nähe des Dorfes Hartowitz ($A = 182°$), welches durch 2 bis 3^s wie im elektrischen Lichte erstrahlte (Budweiser Kreisblatt und Prager Tagblatt).

101. Alt-Langendorf (31° 10·6′; 49° 12′). Die Kugel dürfte gegen Janawitz ($A = 222°$) niedergegangen sein.

102. Klattau (30° 56′; 49° 23′). Circa 7^h 23^m wurde am östlichen Himmel ein herrliches Lichtphänomen gesehen (101 und 102 sind Berichte an die Sternwarte mit unleserlicher Unterschrift).

103. Přibislau (33° 24′; 49° 35′). Ein Stern fiel gerade vom Zenit und wurde nach und nach größer. Im weiteren Fluge sprühten von ihm Funken in bläulichem Lichte, dann entstand daraus eine Feuerstraße. Die Kugel theilte sich (mit Getöse) in drei Stücke, welche in südwestlicher Richtung zur Erde fielen (Herr Bürgerschuldirector E. Činčera).

104. Staab (30° 50′; 49° 38·5′). Tageshelle verbreitete eine am nordöstlichen Himmel in 50° Höhe auftauchende Feuerkugel von der Farbe des Magnesiumlichtes, welche sich genau vertical abwärts bewegte, wie ein strahlendes Silberband, nach 3^s in Violett übergieng und verschwand. Funkensprühen wurde nicht bemerkt (Bischofteinitz-Staaber Bezirksnachrichten).

105. Dobrzan (30° 58′; 49° 39·4′). Das Phänomen, welches sich von SE nach NW bewegte und unter intensivem Funkensprühen erlosch, erhellte die ganze Gegend. *D*: 6^s (Prager Abendblatt).

106. Polička (33° 56′; 49° 43′). Das Meteor nahm die Richtung nach Kamenec und Sadek (*A*: beiläufig $77^1/_2$°). Die Richtung des Falles war wie von Plumenau her. *D*: über 3^s. Es hatte einen langen Schweif (Herr R. Koukal). Eine Beobachterin (Math. Roušar) schreibt, dass sie einen Stern fallen sah, der sich immer mehr vergrößerte, mit einem feurigen langen Ende.

107. Pilsen (31° 3·5′; 49° 44′). Herr Rechnungsrath R. Fuglewicz berichtete, dass er durch das gegen E gelegene Fenster einen rundlichen feurigen Körper hoch am Himmel erblickte, welcher sich in gerader Linie (anscheinend fast senkrecht) herabsenkte, grünliches Licht ausstrahlte und nach 6 bis 8^s erlosch. Dann sah man noch einige funkenähnliche Körper, von denen der größte wie ein Stern mittlerer Größe erschien. Die in die Karte eingetragene Richtung zum Fallpunkt (südlich am Lobes vorbei) hat 273° Azimut. Nach den mitgetheilten Ausmessungen dürfte die Höhe des ersten Erscheinens im

oberen Fensterdrittel ungefähr 25° und beim Erlöschen etwa 20° betragen haben, doch wenig sicher.

Dagegen schreibt Herr Prof. F. Held, dass von seiner Gattin das Meteor Ost zu Nord 18° hoch erblickt wurde.

108. St. Benigna oder Dobrotiva (31° 30·5′; 49° 46′). Frau M. Turek gibt bekannt, dass das Meteor in der Richtung nach Südost fiel und dass sie ein »Gepolter« vernahm.

109. Landskron (34° 17′; 49° 55′). 7^h 26^m ziemlich großes Meteor, roth, kugelförmig, schief, 70° (gezeichnet 60°) zum Horizont fallend, von links oben nach rechts. Vom Stadtplatz aus über dem Schlossberg ($A = 60·4°$). Licht sehr stark, Schatten werfend. D: 5^s (Herr Lehrer W. Gloger und »Ostdeutsche Rundschau«).

110. Marienbad (30° 22·5′; 49° 58′). Intensiv roth leuchtende Kugel am östlichen Himmel niedergehend. $D = 4^s$ (»Marienbader Zeitung«).

111. Wichstadtl (Studene bei Senftenberg. 34° 6′; 50° 4′). Der Berichterstatter Herr Oberlehrer Bohumil Fiala bemerkte das Meteor zwischen λ und κ Herkulis als glänzenden Funken, der sich fast senkrecht und langsam gegen κ Ophiuchi bewegte und sich auch langsam vergrößerte. Vom Äquator angefangen war das Meteor ungefähr von halber Mondgröße in der unteren Hälfte glänzendweiß, in der oberen wie rothglühendes Eisen, bewegte sich »sausend« (!) gegen δ, ε Ophiuchi und sank zwischen Scorpion und Wage unter den Horizont. Zuletzt fiel es am schnellsten. D: 5^s.

112. Grulich (34° 26′; 50° 5·5′). Das Meteor fiel in südwestlicher Richtung, die Gegend mit grünlichem Lichte blitzartig erleuchtend. D: 4 bis 5^s (»Deutsche Nachrichten«).

113. Prag (32° 5′; 50° 5′). Das »Prager Tagblatt« berichtete: Fräulein M. W. schreibt uns: Nach 7^h sah ich von meiner Wohnung auf dem Aujezd, deren Fenster in einen Garten, direct südlich gerichtet sind, genau im Südpunkte eine hell leuchtende raketenartige Erscheinung hoch am Himmel mehr als 2^s schweben, die mit zischendem Geräusch fast auf derselben Stelle verschwand. Das ganze Zimmer war trotz Lampenscheines in fahles blaues Licht gehüllt.

Herr O. Duchatschek theilte der Sternwarte mit, dass er um 7^h 15^m bis 20^m in der Carmelitergasse gegen SSE das Meteor aufleuchten sah und es zuerst für eine Rakete hielt. Später wurde es jedoch immer heller, zum Schlusse war es oben hellblau, unten, wie glühendes funkensprühendes Eisen (* die entgegengesetzte Angabe von 111). Man konnte von 1 bis 8 zählen. Der Herr Beobachter war so freundlich mir nähere Aufschlüsse durch Bild und Skizzen zu liefern. Die Gasse hat ziemlich genau die Richtung N—S. Er gieng an der Häuserreihe links. Über einigen zweistöckigen Häusern, noch etwas weiter links (östlich von Süd), nach seiner Einzeichnung etwa 42° hoch sah er das Meteor. Die Lichtbahn war dann genau oberhalb des Gehweges »in gerader Linie vor mir, so dass ich weder rechts noch links schauen musste«. Das Meteor gieng scheinbar senkrecht nieder und verschwand hinter der vierstöckigen Gendarmeriekaserne.

Die »Politik« berichtete, dass die riesige Feuerkugel, welche die Gegend nach $8^1/_4{}^h$ taghell erleuchtete, sich von E gegen W bewegte und dann »nach und nach zerfiel«. Nach dem Verschwinden ließ sich ein dumpfes, wie unterirdisches, eine Minute andauerndes Rollen vernehmen. Ein anderer Beobachter sagte aus, dass die Lichtstärke anfangs gering war, aber rasch anwuchs, auch zeigte sich vor dem Verschwinden ein kometenschweifähnlicher Lichtschein.

Herr Dr. F. Hantschel bemerkte am Ferdinandsquai um 7^h 22^m über seinem Kopfe hin in südwestlicher Richtung ein Aufblitzen in bläulichem Lichte und meinte, es müsse in der Nähe des Großen Bären gewesen sein. (Vermuthlich ist der Schwan gemeint, da der Bär weit unten gegen N stand, in welcher Gegend das Meteor von Prag aus nicht gesehen worden sein konnte.)

114. Königsberg a. d. Eger (30°11·6′; 50°7·5′). Herr Bergverwalter J. Mentzel konnte eben noch das Erlöschen der Feuerkugel über einem Schornsteine beobachten. Die Messung mit der Boussole ergab für die Richtung 8^h $8^1/_2{}^\circ$ oder nach Anbringung der magnetischen Declination (9·8°) 118·7° von N gegen E unter einem Höhenwinkel von 12° 38′. Zuerst wurde diese Richtung SE geschätzt.

115. Podiebrad (32° 47′; 50° 9′). Es war ein feuriger Klumpen in Gestalt einer Birne, beinahe von Mondgröße, der mit intensivem Lichte zur Erde flog. Der Rand strahlte in den prunkvollsten Farben und der nachfolgende Streifen war gelbroth. Nach dem Erlöschen sah man nur einen glühenden Funken zur Erde fallen. Anscheinend kam es aus der Milchstraße und der Flug war ein süd-nördlicher. *D*: 6 bis 8^s (anonym).

116. Elbogen (30° 24′; 50° 11′). Das Meteor glich einer großen elektrischen, in grünlichweißem blendenden Lichte strahlenden Bogenlampe mit dunkelrothem Schweife.

117. Falkenau (30° 18·3′; 50° 11′). Beobachter betrachtete die Milchstraße, als genau $7^h\ 22^m$ Prager Zeit direct über ihm eine Sternschnuppe beinahe in der Richtung W—E hinzog. Nachdem sie etwa $^2/_5$ des Weges von der Mitte der Milchstraße zum Horizonte zurückgelegt hatte, bewegte sie sich senkrecht gegen die Erde, wurde zusehends größer, beleuchtete die ganze Gegend etwa durch 1^s blitzhell und explodierte. Vorher bildete sich nach oben eine Spitze, nachher sprühten Funken nach oben und seitwärts. Dabei war die Beleuchtung roth (Herr J. Kraus).

118. Asch (29° 51′; 50° 13·5′). Die Feuerkugel wurde am südlichen Himmel (die Skizze gibt aber ungefähr 294° Azimut oder nahezu ESE) ungefähr 40° hoch sichtbar und zog schief von rechts oben nach links unten unter 23° (gezeichnet) gegen die Verticale in mehr östlicher Richtung. *D*: 2^s (Herr Bürgerschullehrer G. Scheidhauer).

119. Karlsbad (30° 32′; 50° 14′). $7^h\ 25^m$ sah ich ein Meteor, welches ziemlich von der Mitte des Firmamentes gegen ESE hin eine kurze Strecke zurücklegte und dann senkrecht herabfiel. Es hatte die Gestalt eines Wassertropfens, und vor dem Verschwinden hatte es das Aussehen, als ob kleinere Tropfen abfallen würden (Herr R. Lang).

Aus Salmthal berichtete Herr Fabriksleiter V. Koblizek, dass er, durch einen blendenden Strahl erschreckt, in östlicher bis südöstlicher Richtung eine feurige Kugel ganz senkrecht herabfallen und über dem Horizonte erlöschen sah. Sie sprühte nach aufwärts lange Strahlen aus.

120. Bei Bohdaneč (33° 23′; 50° 4′). Der Beobachter fuhr auf dem Rade, so dass er die Erscheinung im Rücken hatte. Durch das Licht, welches seine Acetylenlampe überstrahlte, angeregt, wendete er sich um und sah etwa am westnordwestlichen (?) Himmel, etwa 30° unter dem Zenite drei oder vier nahe aneinander befindliche, intensiv und etwas röthlich leuchtende Monde, die untereinander durch Blitze verbunden waren. Das Ganze etwa von der Größe des Großen Bären. Gleich darauf wurde es ganz finster (Herr E. Ritter v. Mallmann).

121. Neustadt a. Mettau (33° 48′; 50° 21′). Zwischen der Milchstraße und dem Großen Bären, näher der ersteren, scheinbar aus großer Höhe niedergehend, zeichnete der Himmelskörper, einer Rakete ähnlich, durch einen rothen Feuerstreifen seine Fallbahn. Die ganze Gegend war wie mit Magnesiumlicht hell beleuchtet (»Politik«).

122. Liboch a. Elbe (32° 7′; 50° 25′). Man sah einen keilförmigen feuerrothen Körper in der Richtung E—W über den Himmel gleiten. D: 1 bis 2^s (»Prager Tagblatt«).

123. Nachod (33° 50′; 50° 25′). Fall des Meteors von SE gegen NW. Es glich einer größeren Kugel, von der Funken sprühten. Licht grünlich und rosenroth, sehr intensiv. D: 4^s (Herr Bürgerschuldirector J. Hraše).

124. Jičin (33° 1′; 50° 26·2′). Das Meteor bewegte sich von E gegen W und beleuchtete die Gegend gleich einer elektrischen Bogenlampe. In der Richtung über Staré Město ($A = 15°$) zersplitterte die Kugel in viele kleine hell leuchtende Sternchen (»Politik«).

125. Rovensko (32° 55·5′; 50° 32′). Die Feuerkugel erschien $7^1/_4{}^h$ am südöstlichen Himmel in Art elektrischen Lichtes und fiel gegen SW (Herr J. Zikmund).

Aus dem Iserthale berichtete die »Reichenberger Zeitung«, dass am südlichen Himmel ein Meteor auftauchte, welches seinen Weg in SW-Richtung nahm. Licht gelb, dann rosenroth. D: 3^s.

126. Tatobity (32° 56·5′; 50° 34′). »Viele waren von der Erscheinung ganz erschreckt, weil sie mit einem Geräusche, gleich dem eines fahrenden Wagens verbunden war. Manche meinten, dass es ein Kobold (diblik) wäre, weil der Himmel

ganz rein und ein glänzender Streifen wie eine Fahne hinterher zu sehen war« (Herr F. Richter).

127. Leitmeritz (31° 47′; 50° 32′) 7^h 23^m. Am südöstlichen Himmel wurde eine Feuerkugel gesehen, welche die Richtung NE—SW hatte. Die Gegend war taghell erleuchtet (»Leitmeritzer Zeitung« und Herr H. Ankert).

128. Bilin-Sauerbrunn (31° 25·5′; 50° 32·6′). Es ist senkrecht heruntergeflogen in der Richtung Liebshausen ($A = 330°$) gegen Ratsch (?) (Herr P. Novotny).

129. Langujester Berg bei Brüx (31° 22′; 50° 34′) 7^h 25^m. Bläuliche Feuerkugel mit gelbrothem Schweife, der einen Funkenregen hinterließ. D: 5 bis 6^s (»Bohemia«).

130. Hühnerwasser (32° 28′; 50° 35′). Der Beobachter, Herr Pfarrer in Brenn, P. A. Hauptmann, befand sich vorübergehend an genanntem Orte mit dem Gesichte gegen SW, als um 7^h 26^m m. e. Z. ein Meteor von außerordentlicher Größe sich wie vom Himmel loslöste und nach abwärts flog. Zuletzt hatte es die Gestalt einer Birne von der Länge des Mondradius und ein Drittel davon zur Breite; dann löste sich aus der Mitte dieser blendend weißen Birne eine zweite Birne, welche aber in rothem Lichte erschien und den ganzen südwestlichen Horizont wie von Feuerschein erleuchtet zeigte. So verschwand die Erscheinung hinter vorstehenden Häusern, doch musste sie auch alsbald erloschen sein. Die Bahnlinie dürfte von 45 bis 60° Zenitabstand sich erstreckt haben. Ziemlich in derselben Richtung zog sich die Milchstraße hin. Die noch hinzugefügte Angabe, dass sich das Meteor von μ Herculis zu α Ophiuchi bewegt hatte, verschiebt die Bahn viel zu weit westlich und entspricht wohl einer anderen Zeit. D: 3 bis 5^s.

131. Zwickau (32° 18′; 50° 38·5′). Das Meteor bewegte sich in südlicher Richtung im hellen violetten Lichtglanze D: bis 7^s.

132. Leipa (32° 12·4′; 50° 41·5′). Herr Prof. Köcher sah das Meteor auf der Straße von Haida, nördlich ober Leipa, genau in der Richtung über der Straße ($A = 9°$) erlöschen. Es war birnförmig, intensiv weiß und bewegte sich in einem scheinbar nach SE geöffneten Bogen unter sehr großer Neigung gegen den Horizont. D : $2^1/_2{}^s$. Ungefähr dieselbe Schilderung

gibt von hier die »Leitmeritzer Zeitung« mit der Angabe $7^h 27^m$. In anderen Berichten (»Reichenberger Zeitung« und »Neues Wiener Tagblatt«) wird die Bewegungsrichtung SE—NW, die Dauer zu 5 bis 6^s angegeben und erwähnt, dass ein mächtiger röthlichgelber Lichtschweif zu beobachten war.

133. Rochlitz (33° 7′; 50° 43·8′). Über dem Wachstein war ein prachtvolles Meteor zu sehen, das in der Richtung gegen Jablonetz ($A = 27 \cdot 6°$) wie eine brennende Feuergarbe untergieng (»Gablonzer Anzeiger«).

134. Reichenberg (32° 43′; 50° 46′). $7^h 23$ bis 24^m m. e. Z. Niedergang, wie es schien, in der Richtung gegen Turnau, Jungbunzlau etc. $A = 14 \cdot 5°$ (Herr O. Goldberg). Die Reichenberger »Deutsche Volkszeitung« berichtete: Gestern abends gegen $^1/_2 8^h$ gieng in südöstlicher Richtung ein prachtvolles großes Meteor nieder, eine großartige Erscheinung, wie sie hier wohl noch nie beobachtet werden konnte. Außerordentliche Helligkeit verbreitete sich blitzartig und blendend und es schien im ersten Augenblicke thatsächlich, als ob der Mond heruntersauste. Am Nachthimmel leuchtete hinterdrein in kräftigen Zügen ein langer röthlichgelber greller Lichtschweif. D: 3 bis 4^s.

135. Tetschen-Bodenbach (30° 52′; 50° 47′). Meteor am südöstlichen Himmel in Mondgröße, funkensprühend, einen Lichtschweif nachziehend, außerordentliche Helle blitzartig verbreitend. D: 4^s.

136. Kamnitz-Neudörfel (32° 2·8′; 50° 47·6′). Nach der Angabe des Herrn Josef Paudler, der das Meteor über dem Wachberge sah, dürfte für das Ende ($A = 350°$) und für die Bahnneigung etwa 10° zu nehmen sein.

137. Rumburg (32° 11′; 50° 57·5′). Fall bei der Burgruine Tollenstein ($A = 352°$) in zwei Theilen (»Rumburger Zeitung«).

Aus dem Deutschen Reiche.

138. Neumarkt, Oberpfalz (30° 36′; 49° 13′). Der Beobachter, Herr Fabriksdirector J. Pichler, sah, durch einen »intensiv rothen Schein« aufmerksam gemacht, das Meteor, welches aber nicht den Eindruck einer Feuerkugel machte,

sondern zweier birnförmiger Körper, der kleinere nördlichere voraus. Es war (nur beiläufig) nordöstlicher Richtung.

139. Mähring (30° 12′; 49° 55′). In sehr großer Höhe zeigte sich eine feurige Kugel in schiefer Bahn (unter 17° Neigung gegen die Senkrechte, gezeichnet), E—W sich bewegend und gegen die Erdoberfläche hin immer größer werdend. Licht gelb, ähnlich dem Sonnenlichte. In Funken zerstäubend (Herr Förster R. Pangratz).

140. Wilschthal ober Gelenau (30° 39′; 50° 42·5′) $7^h\ 22^1/_2{}^m$. Ein prächtiges Meteor fiel im E ziemlich senkrecht, glänzte in stahlgrünem Lichte, das allmählich in Rothfeuer übergieng *D*: 4ˢ (»Dresdener Nachrichten«).

141. Cosel (35° 50′; 50° 20′). Nach einer Skizze des Beobachters, Untersecundaners König, welche mir Herr Prof. Dr. E. Reimann freundlichst übermittelte, beschrieb das Meteor einen Bogen von links nach rechts unter etwa 55° Neigung gegen den Horizont.

142. Reichenbach a. E. (34° 22·5′; 50° 42′). $7^h\ 26^m$ auf dem Wege von Peilau großartiger Meteorfall in südsüdwestlicher Richtung. Wie eine große elektrische Kugel näherte sich das Meteor in fast senkrechter Richtung der Erde und löste sich in rothem Feuer auf (»Schlesische Zeitung«).

143. Zwischen Liebersdorf und Grablau (33° 51·2′; 50° 47·9′) $7^h\ 31^m$. Anfang $A = 25°$, $h = 40°$; Ende $A = 40°$, $h = 20°$. Azimute nach dem Dorfe Mittel-Conradswaldau, Höhen nachträglich geschätzt. Gezeichnet wurde die scheinbare Bahn 27·6° gegen die Verticale geneigt. *D*: 3ˢ (Primaner Scholtz, durch Herrn Prof. D. Reimann).

144. Brieg (35° 9′; 50° 52′). Eine faustgroße Feuerkugel gieng mit langem Schweife in westlicher Richtung nieder. *D*: 4ˢ.

145. Hirschberg (33° 24′; 50° 54·3′). Alle folgenden Nachrichten verdanke ich ebenfalls der Güte des Herrn Prof. Dr. Reimann.

a) Herr Major Böhmer bemerkte, wie das Meteor in SSW hinter einem Hause verschwunden ist. Nach späteren Feststellungen wäre für diesen Punkt $A = 35°$, $h = 13°$ zu nehmen.

b) Das Kinderfräulein P. Reichelt sah es aus einem Fenster unter 27·5° Neigung (links — rechts) gegen die Verticale gegen SSW herabgehen. Spätere Angabe des Endpunktes circa 40° Azimut. Verschwinden hinter einem Dache, welches 12 bis 15° hoch. D: 4^s.

c) Ein Dienstmädchen sah das Meteor vom Wagen der Straßenbahn ebenfalls hinter einem Dache verschwinden, etwa in 40° Azimut, 23° hoch. D: 5^s.

d) Die beiden Obersecundaner Dickudt und Dinglinger haben es in der Vorstadt Rosenau (33° 23·5′; 50° 54·4′) gesehen. Beide haben die Richtung unabhängig voneinander in Karten eingetragen und die Höhen mit einem Kreise gemessen. Dickudt konnte vom ersten Punkte nur mehr die Höhe 33° angeben. Das Ende sah er in $A = 40°$, $h = 19°$. Dinglinger erhielt für den Anfang $A = 33°$, $h = 35°$ und für den Endpunkt $A = 41·5°$, $h = 20°$. Die Dauer schätzten beide auf 3 bis 4^s. Die Farbe bezeichneten sie als bläulich. Das Meteor zersprang in mehrere kleinere Kugeln. Beide Beobachter haben überdies die scheinbare Bahnneigung gegen die Verticale skizziert, der erstere mit 28·2°, der zweite mit 29°.

146. Zwischen Altenberg und Ober-Kauffung (33°38·3′; 50° 56·8′) beobachtete der Obersecundaner v. Bergmann die Erscheinung. Für die Richtungen, welche nachträglich in die Karte eingezeichnet wurden, orientierte er sich nach der Umgebung. Die Höhen wurden geschätzt. Es ergab sich der Anfang in $A = 26°$, $h = 40°$, das Ende in $A = 38°$, $h = 20°$. Scheinbare Bahnneigung gegen die Verticale 32°. $D = 2^s$. Farbe zuerst grün, dann röthlichweiß.

147. Lauban (32° 57·5′; 51° 7′). Herr Stud. rer. nat. Fränkel hat um $7^h\,25^m$ das Meteor am linken Aste der Milchstraße entlang herabkommen sehen. Es war zuerst grün, dann roth. Die scheinbare Neigung gegen die Verticale zeichnete Obertertianer Hilbig zu 19°. Die Beziehung auf die Milchstraße würde etwa 23° Azimut liefern. Der »Laubaner Anzeiger« meldete, dass das Meteor (ein Stein im Gewichte von 4 bis 5 Pfund) dicht bei der Hochwaldförsterei gefallen sei. Vorausgesetzt, dass diese Meldung auf eine optische Täuschung

aus Lauban zurückzuführen sei, käme in Betracht, dass das Azimut dahin etwa 35° beträgt.

148. Ingramsdorf (34° 14′; 50° 58′) $7^h\ 22^m$. In südwestlicher Richtung Kugel von grüner Farbe, beim Explodieren in das prächtigste Roth übergehend. *D* etwa 5^s (»Bote aus dem Riesengebirge«, »Breslauer Zeitung« etc.). Die erstere Zeitung berichtet, ohne Angabe des Beobachtungsortes, auch noch: Unter den Sternen am südwestlichen Himmel war plötzlich ein Meteor von der Größe der Sterne zu bemerken, welches sich in wenigen Secunden zu einer großen rothglühenden Kugel vergrößerte und am Himmel entlang fuhr.

149. Zittau (32° 28′; 50° 54′). Das Meteor wurde in südlicher Richtung beobachtet und es verbreitete gelbrothen Feuerschein (»Dresdener Nachrichten«).

150. Leipzig (30° 4′; 51° 20′). Der Güte des Herrn Sternwartedirectors Prof. Dr. A. Bruns verdanke ich die folgende dort eingelangte Mittheilung: In der Richtung der Moschelesstraße, Leipzig-Plagwitz, nach dem König Albertpark, gieng ein prächtiges Meteor nieder. Es war anfangs sehr klein, vergrößerte sich aber während 4 bis 5^s bedeutend und zersprang in fast rother Flamme. »Es war einige Secunden taghell« (Herr W. Dießner).

151. Rogätz (29° 56′; 52° 19′). $7^h\ 23^m$ wurde hier in ESE ein Meteor beobachtet, welches seinen Anfang in etwa 23° Höhe nahm und sich senkrecht zum Horizonte wandte. Zuerst fast wie eine Sternschnuppe, in röthlichem Lichte erscheinend, endete es nach secundenlangem Aufleuchten in strahlendem Grün (»Magdeburgische Zeitung«).

Das Meteor wurde auch noch an mehreren Orten in Ungarn, so in Teplitz-Trenczin, Neutra und Nagy-Lévard beobachtet, doch enthalten die Nachrichten keine brauchbaren Angaben. Lucyan Mycinski, Gymnasiast in Tarnów in Galizien schreibt, dass er am 3. October, $7^1/_2{}^h$ abends, zu Zabno (38° 32′, 50° 8′) ein Meteor beobachtet habe, von Vollmondgröße und leuchtend rother Farbe, mit mächtigem ebenso gefärbten Lichtschweife und zwar in der Richtung gegen Russisch-Polen zu,

»mehr weniger in der Direction nach Piotrków oder Łódz«. Diese Orientierung stimmt zwar mit dem Complexe der vorstehenden Beobachtungen nicht gut überein, gleichwohl dürfte aber nur die Ausdrucksweise ungenau sein, denn es ist im Übrigen doch wahrscheinlich, dass sich die Beobachtung auf dasselbe Meteor bezieht.

Für die Zeit des Falles ergibt sich aus den verlässlichsten Angaben $7^h\ 27 \cdot 5^m$ m. W. Z. oder $6^h\ 22^m$ m. Greenw. Z. und $7^h\ 22^m$ m. e. Z., womit auch das Mittel aus den vielen Wiener Angaben genau übereinstimmt.

Lage und Höhe des Hemmungspunktes.

Zur Ermittlung der geographischen Lage des Endpunktes konnten die Angaben aus 58 Beobachtungsorten verwendet werden, welchen jedoch sehr verschiedene Gewichte beizumessen waren. Die größere Zahl derselben, nämlich aus 36 Orten, sind Richtungsbeobachtungen, bezogen auf die Umgebung nach den Karten oder auf Gestirne. Doch sind unter den letzteren nicht derart sichere, dass sie besonders herauszuheben wären. Diesen Beobachtungen, deren mittlere Unsicherheit erfahrungsgemäß nicht viel weniger als $\pm$ 6° beträgt, wurde das Gewicht 1 beigelegt. Da das Mittel aus den Wiener Richtungsangaben nur mehr einen mittleren Fehler von $\pm$ 1·5° zeigt, erhielt dasselbe das Gewicht 16. Die Beobachtungen aus Brünn und Hirschberg sind augenscheinlich nicht besser als die ersterwähnten. Da aber ihrer je vier zu einem Mittel vereinigt wurden, erhielten die letzteren je das Gewicht 4. Überdies wurden auch noch 19 Angaben in Betracht gezogen, bei welchen die Bezeichnungen nur ziemlich ungefähr nach den Weltgegenden lauteten oder die sonst unsicher sind. Sie kamen mit dem Gewichte $^1/_4$ in Rechnung.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate, in völlig strenger Anwendung, ergab sich die Lage des End- oder Hemmungspunktes in

32° 7·6′ östl. von Ferro und 49° 36·5′ nördl. Breite,

d. i. in Böhmen, über der Gegend zwischen Seltschan und Sedletz, nahe dem Dorfe Jessenitz. Der mittlere Fehler einer

Beobachtung der Gewichtseinheit ergab sich $m = \pm 6 \cdot 1°$, also fast genau entsprechend dem erfahrungsgemäßen Werte. Der mittlere Fehler des Schlussresultates beträgt in geographischer Länge $\pm 2 \cdot 3'$ oder $\pm 2 \cdot 76$ *km*, in geographischer Breite $\pm 1 \cdot 8'$ oder $\pm 3 \cdot 33$ *km*, im ganzen daher $\pm 4 \cdot 3$ *km*.

Berücksichtigt man auch noch alle anderen Wahrnehmungen, welche nicht in Rechnung gezogen werden konnten, so wäre eine nur wenig nördlichere Lage etwas wahrscheinlicher als eine südlichere.

Die nachfolgende Übersicht enthält die in Rechnung gebrachten, sowie die verbesserten Azimute, die Gewichte und die wahrscheinlichsten Werte der Beobachtungsfehler.

Übersicht der zur Bestimmung der geographischen Lage des Endpunktes verwendeten Azimute und ihrer schließlichen Verbesserungen (ΔA).

	Azimut A aus den Beobachtungen	Azimut A endgiltig berechnet	ΔA ber.—beob.	Gewicht
1. Wien (54.)	138°	138°9	+ 0°9	16
2. Brünn (82.)	109	107·9	— 1·1	4
3. Hirschberg (145.)	39·3	32·9	— 6·4	4
4. Rabacz (1.)	181·7	182·5	+ 0·8	1
5. Illyr. Feistritz (2.)	181	182·0	+ 1·0	1
6. Schönberg (8.)	179	181·9	+ 2·9	1
7. Leoben (9.)	167	169·3	+ 2·3	1
8. Grödig (15.)	203·5	206·2	+ 2·7	1
9. Freiland (36.)	165	155·6	— 9·4	1
10. Neumarkt-Kemmelbach (44.)	153	165	+12·0	1
11. Hainburg (45.)	142	132·5	— 9·5	1
12. Melk (50.)	166·5	158·4	— 8·1	1
13. Bisamberg (57.)	135	136·7	+ 1·7	1
14. Ober-Stinkenbrunn (62.)	130	132·4	+ 2·4	1
15. Eggenburg (64.)	135	136·9	+ 1·9	1

	Azimut A aus den Beobachtungen	Azimut A endgiltig berechnet	ΔA ber.—beob.	Gewicht
16. Gmünd (68.)	167°5	159°6	— 7°9	1
17. Eisgarn (71.)	132·5	149·3	+16·8	1
18. Znaim (73.)	131	127·1	— 3·9	1
19. Schiltern (78.)	137·2	127·3	— 9·9	1
20. Jasowitz (79.)	132·5	130·2	— 2·3	1
21. Hrottowitz (81.)	130	116·0	—14·0	1
22. Hulein (83.)	105	99·5	— 5·5	1
23. Raitz (84.)	95	98·4	+ 3·4	1
24. Mürau (89.)	79	83·8	+ 4·8	1
25. M. Rothwasser (91.) .	74·5	74·3	— 0·2	1
26. Neudorf (98.)	165	160·2	— 4·8	1
27. Gutwasser (99.)	172·5	175·6	+ 3·1	1
28. Budweis (100.)	182	179·9	— 2·1	1
29. Polička (106.)	77·5	85·0	+ 7·5	1
30. Pilsen (107.)	273	279·7	+ 6·7	1
31. Wichstadtl (111.) ...	68·4	70·6	+ 2·2	1
32. Prag (113.)	0·0	356·7	— 3·3	1
33. Königsberg (114.) ...	298·7	290·7	— 8·0	1
34. Jičin (124.)	15	35·2	+20·2	1
35. Leipa (132.)	9	1·7	— 7·3	1
36. Rochlitz (133.)	27·6	29·8	+ 2·2	1
37. Liebersdorf (143.) ...	40	43·2	+ 3·2	1
38. Altenberg (146.)	38	36·1	— 1·9	1
39. Lauban (147.)	23	20·1	— 2·9	1
40. Agram (3.)	169	175·0	+ 6·0	1/4
41. Gloggnitz (32.)	145	154·0	+ 9·0	1/4
42. Garsten (19.)	180	181·2	+ 1·2	1/4
43. Linz (26.)	190·5	184·6	— 5·4	1/4
44. Rainbach (31.)	180	180·0	0·0	1/4
45. Kottingbrunn (35.) ..	147	145·6	— 1·4	1/4
46. Bruck a. L. (38.)	127	137·2	+10·2	1/4
47. Laxenburg (39.)	142·5	142·0	— 0·5	1/4
48. Hutten (47.)	153	145·8	— 7·2	1/4
49. Feldsberg (66.)	130·8	121·4	— 9·4	1/4

	Azimut A aus den Beobachtungen	Azimut A endgiltig berechnet	ΔA ber.—beob.	Gewicht
50. Alt-Langendorf (101.)	222°	236°2	+14°2	1/4
51. Sct. Benigna (108.). .	315	298·2	—16·8	1/4
52. Landskron (109.) . . .	60·4	82·2	+21·8	1/4
53. Troppau (93.)	83	82·9	— 0·1	1/4
54. Asch (118.)	294	291·2	— 2·8	1/4
55. Salmthal (119.)	292·5	299·9	+ 7·4	1/4
56. Reichenberg (134.) . .	14·5	17·7	+ 3·2	1/4
57. Kamnitz-Neudörfel (136.)	350	356·9	+ 6·9	1/4
58. Rumburg (137.)	352	1·0	+ 9·0	1/4

Viel geringer ist die Anzahl der für die Höhenbestimmung verwendbaren Beobachtungen. Unter den zahlreichen Angaben aus Wien wurde nur eine einzige (54, *a*) durch Messung festgelegt. Der dabei erhaltene Wert von 15° ist überdies offenbar zu groß, da noch zwei Vergleichungen mit der Höhe des Stephansthurmes und der Votivkirche vorkommen, welche höchstens 5° für die Höhe geben würden. Ich habe als Mittel (15° mit doppeltem Gewichte) 10° angenommen. Aus Brünn habe ich selbst durch Messung die drei recht gut stimmenden Höhenwerte 12°, 13°, 14° erhalten. Aus Melk (11°), Mürau (15°), Königsberg (12° 38′) wurden die dort gemessenen Höhenmittel benützt. Die Einzeichnung unter dem »Großen Bären« ergeben aus Neumarkt-Kemmelbach 13°, aus Hainburg 10·5°. Die abgeschätzten scheinbaren Höhen wurden auf zwei Drittel reduciert, so jene in Hühnerwasser auf 20° und die aus Liebersdorf und Altenberg auf 13·3°. Ähnlich wurde für Hirschberg 13·5° angenommen.

Nachstehende Übersicht enthält alle einzelnen Resultate und die nothwendigen Verbesserungen.

	Entfernung v. Ende *km*	Scheinbare Höhe *h*	Entsprech. lineare Höhe, *km*	Verbess. scheinbare Höhe	Δh
Wien (54.)	208	10°	40·3	10·6	−4·4°[1]
Brünn (82.).........	162	13	39·7	14·0	+1·0
Neumarkt (44.)	168	13	41·2	13·5	+0·5
Melk (50.)..........	152	11	31·5	15·0	+4·0
Hainburg (45.)......	242	10·5	49·7	8·9	−1·6
Mürau (89.)	174	15	49·5	13·0	−2·0
Königsberg (114.) ...	156	12°38′	37·1	14·6	+2·0
Hühnerwasser (130.) .	111	20	41·6	20·5	+0·5
Hirschberg (145.)....	170	13·5	43·4	13·3	−0·2
Liebersdorf (143.) ...	182	13·3	45·9	12·4	−0·9
Altenberg (146.).....	185	13·3	46·8	12·1	−1·2

Da die Gewichtsschätzungen hier sehr unsicher sind, wurde das einfache Mittel genommen. Dieses liefert für die

Höhe des Hemmungspunktes: 42·4 *km* ±1·6 *km*.

Der mittlere Fehler einer der verwendeten (reducierten) Angaben stellt sich auf ±2·2°.

Scheinbarer Radiationspunkt.

Zur Bestimmung desselben liegen brauchbare Beobachtungen aus 42 Orten vor. Nur 11 davon geben den ersten Bahnpunkt, die übrigen nur die Neigung der scheinbaren Bahn gegen den Horizont oder Vertical.

Unter den Wiener Beobachtungen finden sich einige Beziehungen auf Gestirne. Die Angaben 54, *b)* und *c)* (ζ Urs. maj. $\alpha = 200°$ $\delta = 55{^\circ}5$) sind nahezu übereinstimmend. Auch *d)* wird dahin zu zählen sein. Da der Endpunkt in $\alpha = 180°$, $\delta = 3{^\circ}9$ erschien, liefern diese Angaben eine scheinbar verti-

[1] Bezieht sich auf die directe Messung unter 54, *a*.

cale Bahn. Außerdem wird noch in vier anderen Berichten aus Wien die Bahn als senkrecht bezeichnet, während sie Herr Konečny mit 76°5 Neigung skizzierte.

Ziemlich stark abweichend von diesen Beobachtungen ist die Einzeichnung unter 54, *a)* bei $\alpha = 245°$, $\delta = +80°$. Sie gibt einen von der Verticalen weit abweichenden Bahnbogen, welcher nach abwärts zu gar nicht in der Nähe von ζ, sondern zwischen ε und δ Urs. maj. verläuft. Ich glaube, die Vermittlung dieser Widersprüche in der Annahme einer scheinbaren Bahn zu finden, welche zwischen ζ und ε Urs. maj. ($\alpha = 197°$, $\delta = 56°$) durchzieht und hinsichtlich der Neigung der Angabe Konečny's ungefähr entspricht.

In Kremsmünster (21.) erschien das Ende in $A = 187 \cdot 7°$ $h = 12 \cdot 8$, während die Angabe des jungen Beobachters $A = 149°$ $h = 30 \cdot 4°$ lieferte. Ohne Zweifel hatte er seinen Standpunkt nicht richtig wiedergefunden. Wenn die von ihm angegebene Bahn parallel im Sinne des richtigen Endpunktes verlegt wird, gibt sie für den Anfang: $A = 238 \cdot 2°$ $h = 56 \cdot 6°$ oder $\alpha = 108 \cdot 5°$ $\delta = +54 \cdot 2°$, einen sehr plausibeln Ort.

Von den übrigen derartigen Beobachtungen wurde genommen: für (7.) Oberdorf $A = 180°$ $h = 30°$, für (44.) Neumarkt (nach der Einzeichnung) aus der Richtung $\alpha = 302 \cdot 5°$ $\delta = +48°$, für (57.) Bisamberg: ζ Urs. maj., für (73.) Znaim: η Urs. maj., für (82.) Brünn der unter *a)* bezeichnete Anfang, für (111.) Wichstadtl die Mitte zwischen α und λ Herculis und für (130.) Hühnerwasser die Linie vom linken Rande der Milchstraße her.

Hiezu kommen noch (83.) Hulein mit der Angabe $\alpha = 229 \cdot 5°$ $\delta = 31°$ und (84.) Raitz mit $\alpha = 262°$ $\delta = 36°$.

Mit Ausnahme der Beobachtungen aus Oberdorf, Neumarkt und Kremsmünster, von denen die beiden ersten mehr beiläufiger Natur sind, während die letztere nach einer hypothetischen Combination abgeändert wurde, haben die vorstehenden Bahnbogen je das Gewicht 4 erhalten.

Die übrigen 31 Beobachtungen lieferten nur die Bahnrichtung, bezeichnet durch den Knoten am Äquator (I) und den berechneten Endpunkt (II). Hienach wurden folgende scheinbare Bahnen in die Rechnung einbezogen:

	I		II		Gewicht
	α	δ	α	δ	
Wien (54.)	197°	56°	180·1°	39·0°	4
Bisamberg (57.)	200	55·5	182·0	38·3	4
Znaim (73.)	205·9	49·8	195·2	36·1	4
Brünn (82.)	244·5	38·6	209·5	22·1	4
Hulein (83.)	229·5	31·0	214·8	13·7	4
Raitz (84.)	262	36	217·1	16·1	4
Wichstadtl (111.)	259·5	20·2	238·1	− 0·5	4
Oberdorf (7.)	122·6	72·9	138·2	49·1	1
Kremsmünster (21.) ..	353·3	54·6	108·5	54·2	1
Neumarkt (44.)	302·5	48·1	147·3	53·1	1
Hühnerwasser (130.) .	307	20	288·8	−18·4	1
Littai (4.)	318·7	0	128·2	48·3	1
St. Gallen (12.)	315·6	0	127·3	52·4	1
Grödig (15.)	306·2	0	83·2	45·6	1
Berndorf (34.)	341·0	0	170·5	43·0	1
Freiland (36.)	328·8	0	160·5	48·3	1
Steyr (20.)	331·0	0	121·1	54·9	1
Mödling (41.)	347·9	0	176·1	40·8	1
Hainburg (45.)	0·0	0	185·2	33·4	1
Melk (50.)	327·9	0	158·4	52·3	1
Marchegg (55.)	353·0	0	188·6	32·9	1
Eggenburg (64.)	353·1	0	185·3	41·8	1
Feldsberg (66.)	349·0	0	197·6	29·3	1
Waidhofen (70.)	336·0	0	179·7	51·1	1
Schiltern (78.)	355·9	0	196·4	37·7	1
Rohatetz (75.)	7·7	0	205·5	21·6	1
Hrottowitz (81.)	357·9	0	206·2	30·2	1
Mürau (89.)	40·0	0	227·3	5·9	1
Rothwasser (91.)	54·2	0	234·6	0·3	1
Troppau (93.)	43·6	0	226·1	2·6	1
Pilsen (107.)	198·2	0	5·0	15·4	1
Landskron (109.)	39·5	0	229·2	5·7	1
Asch (118.)	323·0	0	324·0	— 3·2	1
Karlsbad (119.)	353·5	0	356·6	— 4·6	1
Kamnitz (136.)	308·0	0	305·0	—22·3	1
Mähring (139.)	196·0	0	10·0	4·1	1

	I		II		Gewicht
	α	δ	α	δ	
Liebersdorf (143.)....	281·2	0	259·4	−16·6	1
Hirschberg (145.)....	290·7	0	269·0	−19·8	4
Altenberg (146.).....	292·6	0	265·4	−20·4	1
Lauban (147.).......	296·4	0	281·3	−24·0	1
Cosel (141.).........	245·3	0	232·4	− 3·9	1
Rogätz (151.).......	327·8	0	337·9	−25·5	1

Hieraus wurde für den scheinbaren Radianten gefunden:

Rectascension: 327·6° ± 2·4°,
Nördliche Declination: 33·8 ± 2·2

im Sternbilde des »Pegasus«, nahe an der Grenze des »Schwan«.

Die mittleren Fehler des Resultates sind oben beigefügt. Der mittlere Fehler einer Beobachtung der Gewichtseinheit beträgt ± 10°, woraus sich derselbe für das Gewicht 4 zu ± 5° ergeben würde. In Wirklichkeit ist jedoch, wie man finden wird, die mittlere Genauigkeit der Beobachtungen letzterer Art etwas größer.

In der nachstehenden Aufzählung der nöthigen Verbesserungen (*v*) bedeutet der bei den ersten 11 Beobachtungen angeführte Zahlenwert den sphärischen Abstand des betreffenden Punktes I vom zugehörigen endgiltig verbesserten Bahnbogen, und es stimmt das Vorzeichen überein mit dem von $\Delta\delta$. Bei den übrigen Beobachtungen, welche nur Neigungsabweichungen lieferten, bedeutet *v* mit seinem Vorzeichen die nöthige Verbesserung der angegebenen, scheinbaren Neigung gegen die Verticale (also + im Sinne der Vergrößerung derselben).

Verbesserungen am Punkt I:

	v	Gewicht
1. Wien (54.)............	+ 0·25°	4
2. Bisamberg (57.).......	+ 0·3	4
3. Znaim (73.)...........	− 5·2	4
4. Brünn (82.)...........	+ 3·0	4

	v	Gewicht
5. Hulein (83.)	— 6·1	4
6. Raitz (84.)	+ 2·2	4
7. Wichstadtl (111.)	— 1·8	4
8. Oberdorf (7.)	+ 1·3	1
9. Kremsmünster (21.)	+ 6·2	1
10. Neumarkt (44.)	+17·0	1
11. Hühnerwasser (130.) ...	— 6·8	1

Verbesserungen der Neigung:

	v
12. Littai (4.)	— 2·8°
13. St. Gallen (12.)	— 6·3
14. Grödig (15.)	+ 3·3
15. Berndorf (34.)	— 5·5
16. Freiland (36.)	+ 4·6
17. Steyr (20.)	—19·3
18. Mödling (41.)	—11·6
19. Hainburg (45.)	—22·0
20. Melk (50.)	+ 4·1
21. Marchegg (55.)	— 7·3
22. Eggenburg (64.)	—12·9
23. Feldsberg (66.)	— 7·4
24. Waidhofen (70.)	+ 3·3
25. Schiltern (78.)	+ 7·6
26. Rohatetz (75.)	+ 5·0
27. Hrottowitz (81.)	+ 1·6
28. Pilsen (107.)	+13·5
29. Mürau (89.)	+ 3·9
30. Landskron (109.)	— 4·4
31. Troppau (93.)	+ 3·7
32. Asch (118.)	—23·0
33. Karlsbad (119.)	+ 0·7
34. Rothwasser (91.)	+12·1
35. Kamnitz (136.)	+14·8
36. Mähring (139.)	— 6·8
37. Liebersdorf (143.)	— 3·3

	v
38. Altenberg (146.)	— 7·6
39. Lauban (147.)	+ 5·3
40. Cosel (141.)	—16·8
41. Rogätz (151.)	+11·6

Sämmtliche mit Gewicht 1.

	v	Gewicht
42. Hirschberg (145.) ...	— 7·6°	4

Dieser Radiationspunkt befand sich für den Horizont der Hemmungsstelle in 300·4° Azimut und 65·3° Höhe, wodurch Richtung und Neigung der Bahn gegen die Erde bestimmt sind.

Höhe des ersten Aufleuchtens, Bahnlänge und geocentrische Geschwindigkeit.

Da diese Größen innig miteinander verbunden sind, können sie zur Abkürzung auch im Zusammenhange hier betrachtet werden.

Wegen der Wichtigkeit der Geschwindigkeitsschätzung verdienen insbesondere jene Beobachtungen besondere Erörterung, welche einerseits den Punkt des ersten Aufleuchtens, anderseits die Dauer mit einiger Bestimmtheit angeben. Solcher liegen insbesondere aus Wien einige vor. Der verbesserte Bahnbogen gieng dort 2·6° nördlich an »Mizar« vorbei ($A = 139·3°, h = 32·4°$) und die dortigen Berichte, welche (wie z. B. 54 *b*, *c* und wohl auch *d*, sowie mehr beiläufig noch einige andere) den Anfang in dieser Gegend angeben, würden den Punkt des ersten Aufleuchtens in 119 *km* und die Bahnlänge zu 85 *km* bestimmen. Es sind dies nebst jenen, welche man aus Hirschberg (wohl nur beiläufig) erhält, die geringsten Maßzahlen für jene beiden Größen, wenn man von der Beobachtung in Znaim absieht, von der später noch die Rede sein wird. Die auf diese Länge sehr nahe zu beziehende Dauerangabe des Herrn Hauptmann v. Hennig: 2·5ˢ, würde also auf 34 *km* Geschwindigkeit schließen lassen.

Ein anderer Beobachter, Herr Loebner, der die Dauer zu 3ˢ schätzte, hat das Meteor schon früher als »Sternschnuppe« zwischen dem großen und kleinen Bären gesehen. Wenn man

für diese minder bestimmte Angabe einen ungefähr entsprechenden Punkt nimmt, würde die Anfanghöhe 169 *km*, die Bahnlänge zu 140 *km*, also die Geschwindigkeit zu 47 *km* hervorgehen.

Wenn in der Beobachtung des Herrn Tietze (54 *a*) der bezeichnete Anfangspunkt in die scheinbare Bahn verbessert wird, wie früher angegeben, so gibt sie für das Aufleuchten 187 *km* und für die Bahnlänge 160 *km*. Diese Höhe ist diejenige, welche bei großen Meteoren für das Aufleuchten am häufigsten beobachtet wird, wenn die Aufmerksamkeit zufällig auf den Himmel gerichtet ist. Auffallend ist jedoch die angegebene relativ kurze Dauer von nur 2 bis 3^s, woraus gar 64 *km* für die Geschwindigkeit zu folgern wären. Sonst kommen aus Wien nur noch zwei Dauerschätzungen: 1^s und 3 bis 4^s ohne Bezeichnung der Bahn vor.

Sehr bestimmt sind die Angaben über Anfang und Dauer auch aus Brünn (82.). Sie liefern 133 *km* Anfanghöhe und 99 *km* Bahnlänge in 3^s (zwei unabhängige nachträgliche Zählungen nach der Secundenuhr), also 33 *km* Geschwindigkeit, fast genau wie 54 *b*.

Dieselbe Bahnlänge wie die Brünner Beobachtung liefert jene aus Hühnerwasser (130.), aber mit 3 bis 5^s Dauer nur etwa 25 *km* Geschwindigkeit. Auch aus den Angaben aus Wichstadtl (111.) erhält man dieselben Werte für das Aufleuchten und die Bahnlänge, aber, wegen 5^s Dauer, nur 20 *km* Geschwindigkeit. Ist die in Staab (104.) angegebene Höhe von 50° für den Anfang annähernd richtig, so wäre diese Beobachtung in völliger Übereinstimmung hinsichtlich des Ergebnisses mit Brünn, da auch die Geschwindigkeit zu 33 *km* sich ergibt.

Wenig von diesen Längen abweichend, erhält man aus Altenberg (146.) nach dem Azimut von 26° (da die Höhe nur geschätzt erscheint), für die Anfanghöhe 129 *km* und für die Bahnlänge 95 *km*, was mit 2^s Dauer 47·5 *km* Geschwindigkeit gäbe. Etwas kürzer fallen diese Strecken gemäß der Beobachtung aus Hullein (83.) nach den dort bezeichneten Sternen aus, nämlich, Aufleuchten in 126 *km*, Bahnlänge 92 *km*. 4^s Dauer gibt 23 *km* Geschwindigkeit.

Überhaupt treffen auf eine Bahnlänge zwischen 90 und 100 *km* (mit einem Dauermittel von 3^s) verhältnismäßig zahlreiche Beobachtungen zusammen, wie es scheint diejenigen, welche erst durch die auffallend gesteigerte Helligkeit im letzteren Theil der Bahn veranlasst wurden. Es wurde aber auch, wie schon angeführt, das Meteor schon viel früher beobachtet. Ganz besonders entschieden spricht sich das in der Beobachtung von Grödig (15.) aus. Dort findet sich das Aufleuchten im zweiten Berichte in der Richtung nach Anif ($A = 251°$) angegeben und bemerkt, dass der Gaisberg ($A = 219°$) links blieb, Das erstere Azimut gibt eine so lange Bahn, dass man wenigstens im vorliegenden Falle, an der Wahrscheinlichkeit zweifeln muss. In der That gibt der erste Bericht die Linie über dem Gaisberg hin an. Man wird also etwa das Mittel zwischen beiden Azimuten, d. i. 235° nehmen dürfen. In der verbesserten Bahn entspricht diesem Azimute ein Punkt, 50° hoch, in der Milchstraße (Cassiopeia), was mit der Beschreibung übereinstimmt. Diese Annahme würde eine Anfanghöhe von 315 *km* und eine Bahnlänge von 300 *km* in 6^s ergeben. Der Gegensatz wird durch die Angabe aus Znaim (73.) dargestellt, in welcher die kürzeste Bahnlänge mit der hoch überschätzten Dauer von 10^s verbunden erscheint. Ist dort wirklich die Feuerkugel erst bei η Urs. maj. bemerkt worden, so entspricht dem nicht mehr als 46 *km* Bahnlänge, was mit der bezeichneten Dauer ein unglaubliches Resultat gibt.

Es folgt hier eine übersichtliche Zusammenstellung der Ergebnisse, worunter auch einige, bei welchen keine Dauer angeführt ist, wenn sich wenigstens die Bahnlänge ermitteln ließ. Die dabei benützten Werte sind aus den Beobachtungen entnommen und in die scheinbare Bahn verbessert. Hinsichtlich der ebenfalls sehr langen Bahn aus Agram ist zu bemerken, dass die dort angegebene Höhenschätzung von 60° auf 40° herabgemindert wurde. Die Angaben aus Weyer, Scheibbs und Neuberg sind nicht sehr bestimmt. Bei einer so steilen Bahn, wie die in Rede stehende, sind unsichere Azimute wenig brauchbar und die Höhenangaben sicherer, wenn sie nicht, wie dies häufig der Fall, auf starker Überschätzung beruhen.

	Anfang-höhe *km*	Bahn-länge *km*	Dauer Secunden	Geschwindig-keit *km*
Hirschberg (145.)	95	60	3·5	17
Wien (die Angaben bei Mizar) (54.)	119	85	2·5 (54 *e*)	34
Neumarkt - Kemmelbach (44.)	120	86	—	—
Kremsmünster (21.)	121	87	—	—
Hainburg (45.)	121	87	—	—
Asch (118.)	125	91	2	45·5
Hullein (83.)	126	92	4	23
Grundlsee (10.)	126	92	2	46
Altenburg (146.)	129	95	2	47·5
Hühnerwasser (130.)	133	99	3—5	25
Brünn (82.)	133	99	3	33
Wichstadtl (111.)	133	99	5	20
Staab (104.)	133	99	3	33
Liebersdorf (143.)	147	115	3	38
Oberdorf (7.)	149	117	—	—
Raitz (84.)	165	133	—	—
Wien (54.) (Loebner)	169	140	3	47
Landskron (109.)	175	146	5	29
Rogätz (151.)	186	159	—	—
Wien (54. *a*) (Tietze)	187	160	3	50
Weyer (16.)	198	172	—	—
Scheibbs (37.)	224	199	—	—
Neuberg (11.)	256	235	—	—
Grödig (15.)	315	300	6	50
Agram (3.)	315	300	—	—

Das einfache Mittel aus diesen 15 Resultaten würde für die Geschwindigkeit 36 *km* ± 3 *km* geben. Der angeführte mittlere Fehler enthält jedoch selbstverständlich nicht die systematischen Fehlereinflüsse.

Viele andere Dauerschätzungen liegen noch vor, ohne Angaben zur Ermittlung der etwa entsprechenden Bahnlänge. Das Mittel aus sämmtlichen mir bekannt gewordenen 64 einzelnen

Schätzungen der Dauer beträgt 3·94^s. Hieran betheiligen sich die Angaben in folgender Abstufung:

Dauerschätzung:	Vorkommen:
1^s	4 mal
1—2^s	2 »
2^s	4 »
2—3^s	7 »
3^s	9 »
3—4^s	5 »
4^s	12 »
4—5^s	4 »
5^s	5 »
5—6^s	3 »
6^s	2 »
6—8^s	3 »
7—8^s	1 »
8^s	1 »
8—10^s	1 »
10^s	1 »

Das Mittel aus den oben angeführten verschiedenen Bahnlängen beträgt 134 *km*. Dieses mit der mittleren Dauer von 3·94^s (aus allen 64 Schätzungen) verbunden, würde 34 *km* für die Geschwindigkeit geben.

Die Übereinstimmung mit dem vorhin abgeleiteten Werte von 36 *km* ist so groß, dass man diesen wohl beibehalten kann.[1]

[1] Lange nach Abschluss aller diese Feuerkugeln betreffenden Rechnungen fand ich in den »Mittheilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie etc.« in Berlin. XII. 4. (Mai 1902) noch eine Beobachtung des Herrn Stationschef E. Stosius aus Léva in Ungarn (36° 16′; 48° 13·5′). Dieser schreibt nämlich: »Am 3. October 1901, 7^h 22·5^m m. e. Z. (genaue Ablesung der Zeit, unmittelbar nach der Beobachtung) habe ich vom Stationsplatz aus in der Richtung gegen Westen, genau dort, wo heute (6. December 1901) 5^h 2^m früh die Plejaden stehen, also in derselben Declination und Rectascension den Wächter beanständet, dass der in dieser Richtung stehende Wasserkrahn noch nicht beleuchtet war. In dem angeführten Momente habe ich in dieser Himmelsgegend eine Feuerkugel von der halben Größe des Monddurchmessers aufblitzen gesehen, welche in der nächsten Secunde um das Doppelte oder Dreifache größer

Aussehen der Feuerkugel, Größe, Farbe und Intensität des Lichtes, Auflösung etc.

Beobachter, welche das Meteor schon frühzeitig, in den ersten Phasen bemerkten, bezeichneten es als »eine kleine« oder eine »gewöhnliche Sternschnuppe«, als einen Stern, gleich »den Deichselsternen des Großen Wagens« oder »gleich jenen am südwestlichen Himmel«, der sich allmählich zu der schließlich angegebenen bedeutenden Größe entwickelte. In 18 Berichten wird diese Thatsache ausdrücklich und mitunter in sehr weit voneinander entfernten Orten, z. B. in Leoben und Polička, fast mit denselben Worten hervorgehoben. Hier sollen diese Angaben nur durch die Zahlen des vorangegangenen Verzeichnisses registriert werden, damit man sie rascher aufsuchen und vergleichen könne. Sie sind insbesondere unter: 9, 15, 21, 28, 41, 49, 54 *a)*, 54 (Loebner), 73 *a)* und *b)*, 98, 103, 106, 111, 117, 148, 150, 151 zu finden. Herr Tietze (54 *a*) sagte, dass sich das Meteor im letzten Fünftel seiner Bahn »plötzlich« vergrößerte. Nach der früheren Zusammenstellung der Höhen und Bahnlängen wäre dies daher etwa in den letzten 50 bis 60 *km* der Bahn anzunehmen, bei etwa 90 *km* Höhe. Nach den vielen zusammenfallenden Angaben in jener Übersicht dürfte jedoch eine lebhafte Lichtentwicklung schon in 120 bis 135 *km* Höhe stattgefunden haben, während nach einzelnen Berichten, z. B. aus Wien und dem so weit entfernten Rogätz (in der Gegend von Magdeburg) das Meteor in der Höhe von mehr als 180 *km* als Sternschnuppe wahrgenommen wurde.

---

geworden, die Form eines Eies annahm und dann senkrecht auf den Horizont fiel.« Farbe rothgelb. *D*: 5^s.

Mit den Ergebnissen vorliegender Untersuchung ist diese Beobachtung in guter Übereinstimmung. Die Zeitangabe beträgt um $0 \cdot 5^m$ mehr, wurde aber auch »nach der Beobachtung« abgelesen. Die Richtung der oben ausgemittelten Bahnebene läuft nach rückwärts nur ein wenig südlich an Léva vorbei, so dass der Abfall des Meteors zwar sehr nahe senkrecht, aber doch etwas von Süd her geneigt erschienen sein sollte. In der That hatten die Plejaden in der bezeichneten Stellung 112° Azimut. Der berechnete Endpunkt des Meteors erschien aus Léva in 118° Azimut, also nur 6° nördlicher. Nimmt man an, dass die Feuerkugel nur wenige Grade nördlich von dem durch die Plejaden nachträglich fixierten Orte herabgegangen war, so entspricht dies genau den ermittelten Verhältnissen.

Es muss besonders hervorgehoben werden, dass die beschriebene außerordentliche Vergrößerung der Feuerkugel bei der thatsächlichen Bahnlage nicht etwa eine scheinbare, aus einer großen Distanzverminderung entstandene gewesen sein konnte, sondern mit voller Sicherheit auf eine reelle bedeutende Entwicklung der leuchtenden Sphäre in den tieferen atmosphärischen Schichten und während weniger Secunden schließen lässt.

Was die Gestalt betrifft, unter welcher das Meteor erschien, da es über die Größe eines Sternes hinausgewachsen war, so war es wohl die gewöhnliche, typische, doch dürfte eine Analyse der betreffenden Berichte gerade in diesem Punkte nicht ohne Interesse sein. In 30 Mittheilungen wird das Meteor als kugelförmiger Körper schlechtweg bezeichnet, wobei einige noch einer Zuspitzung nach rückwärts, eines kegelförmigen Schweifes, einer Feuergarbe oder Flamme nach oben (»brennende Granate«) erwähnen. Auch der Ausdruck »kometenartiger Schweif« kommt vor. Dagegen ist in 20 Berichten die Verlängerung der ungefähr verticalen Dimension (oval, elliptisch) bestimmt ausgedrückt, und es findet sich darunter 10mal die Bezeichnung »birnförmig« und 6mal »tropfenförmig« (Glastropfen, Wassertropfen, Thräne). In Hühnerwasser (130) wurde das Verhältnis der Längen- zur Querdimension wie 3 : 1 angegeben. Dieselben Verhältnisse zeigt eine Skizze des Herrn Ingenieurs Popp aus Wien. Znaim 73 *a* gibt eine ausführliche Beschreibung, in welcher die Vergleichung mit einer Ananas vorkommt. Im Zusammenhang mit dem Schweif, welcher einmal auch als »flatternd« bezeichnet wird, kommt der Vergleich mit einer »Trompete« und einem umgekehrten Blumenstiel vor.

An den Schweif schloss sich ein langer Lichtstreifen, welcher in mehr als 30 Berichten besonders erwähnt und vielfach als bandförmig bezeichnet wird. Dieser verschwand aber sofort wieder oder war doch nur (21) kurz nachleuchtend. In einigen Mittheilungen wird die Erscheinung als ein Feuerband oder Lichtstreifen dargestellt, aus dem sich erst später unten eine glänzende Kugel entwickelte. Der Vergleich mit einem bandförmigen Blitz kommt mehrmals vor, und scheint wohl auch zu

beweisen, dass die langen Dauerangaben auf beträchtlicher Überschätzung beruhen. Die Ähnlichkeit mit einer Rakete wird häufig erwähnt.

Größenschätzungen, welche durch Vergleichung mit dem Monde benützbare Resultate liefern, finden sich ziemlich viele. In Marchegg (55) wurde das Meteor nur ein wenig größer als Venus geschätzt. Diese erscheint wohl mit freiem Auge ohne Zweifel viel größer als ihr scheinbarer Durchmesser ist, doch ist das Verhältnis schwer zu schätzen.

Die in Hühnerwasser (130) angeführten scheinbaren Dimensionen führen auf einen Querdurchmesser von 170 *m* und eine Länge von 510 *m*. Die weitestgehende Überschätzung (doppelter Monddurchmesser) lieferte Raab in Oberösterreich (27), aus welcher der Durchmesser der leuchtenden Sphäre zu 3700 *m* hervorgehen würde. Im Nachstehenden sind die reellen Durchmesser (auf Zehner der Meter abgerundet), aus den Vergleichungen mit der scheinbaren Mondgröße abgeleitet, der Reihe nach angeführt:

	Durchmesser in Metern
Brünn (82*a*)	380
Podiebrad (115)	600
Znaim (73*b*)	680
Wichstadtl (111)	720
Brünn (82*b*)	760
Neudorf (98)	790
Eisgarn (71)	1140
Tetschen—Bodenbach (135)	1330
Taufkirchen (28)	1450
Wien (54*a*)	1460
Grödig (15)	1620
Znaim (73*a*)	1690
Korneuburg (58)	1810
Wien (54, Schaller)	1940
Leoben (9)	2350

Dabei wurde für die Angabe »fast« dem Monddurchmesser gleich, drei Viertel, und für die Bezeichnung »größer« als derselbe, fünf Viertel des scheinbaren Monddurchmessers

genommen. Ohne Zweifel beruhen die letzten Resultate bereits auf namhafter Überschätzung. Da es sich hier aber auch um die Vergleichung mit ähnlichen Fällen handelt, so kann als Mittelwert (mit Ausschluss der vorhin angeführten äußersten Werte) rund 1250 *m* für den Durchmesser der Sphäre glühender Dämpfe und Gase genommen werden. Die auch diesmal häufig vorkommenden Größenschätzungen nach irdischen Gegenständen haben selbstverständlich für die Verwendung in dem hier erörterten Sinne keinen Wert, weil es ganz unbestimmt ist, in welcher Entfernung der Beobachter den Vergleichsgegenstand annimmt. Als Beitrag zu den großen Verschiedenheiten derartiger Vorstellungen sei jedoch erwähnt, dass in Wien eine Beobachterin die Größe als die einer Zwirnspule, ein Beobachter »wie die einer Streichholzschachtel« angibt, während ebenda viele andere Angaben auf »faustgroß«, »kopfgroß«, wie »eine Halbliterflasche«, $^1/_4$ *m* breit etc. lauten und ein Beobachter in Rohrendorf bei Hollabrunn das Meteor der Größe nach mit einem $^1/_2$ Eimerfass, jener bei Scheibbs (37) mit einem 50 Literfass vergleicht. Dazwischen kommen noch viele Abstufungen vor.

Es ist besonders anzuführen, dass nach mehreren Beobachtungen eine Theilung der Feuerkugel noch im letzten Theile ihres Laufes stattgefunden haben musste. Nur ist es schwer zu erklären, dass, abgesehen von diesen vereinzelten Angaben, in den vielen anderen Berichten davon gar nicht die Rede ist.

Herr Ritter v. Mallmann (120) charakterisiert die Erscheinung als 3 bis 4 nahe aneinander befindliche intensiv und etwas röthlich leuchtende Monde; das Ganze etwa von der Größe des großen Bären, also ziemlich ausgedehnt.

Fräulein Marie Frank in Wien berichtete, dass sie eine große leuchtende rothe Kugel und, fügt sie hinzu, »ich glaube mich nicht zu irren«, auch 2 bis 3 kleinere sich zur Erde senken sah.

Herr Fabriksdirector Pichler zu Neumarkt in Bayern (138) sah, wie Herr v. Mallmann, das Meteor erst, nachdem er durch die Erhellung aufmerksam wurde, und gibt an, dass er zwei birnförmige Körper sah, den kleineren, nördlichen voraus. Das Licht war aber schon intensiv roth.

Eine Beobachterin in Přibislau (103) gibt an, dass sich die Kugel »mit Getöse« (?) in drei Stücke theilte, worauf diese in südwestlicher Richtung zur Erde fielen. In Rumburg (137) sah man auch zwei Theile fallen und aus Carlsbad (119) meldete man, dass es vor dem Verschwinden das Aussehen hatte, als ob kleinere Tropfen abfallen würden.

Aus Neudorf in Böhmen (98) berichtete Herr Miksch, dass die Feuerkugel sich ausbreitete und zertheilte.

Vielleicht gibt die Schilderung des Beobachters aus Hühnerwasser (130), Herrn Pfarrers Hauptmann, den Schlüssel zur Vermittlung und Aufklärung. Er sagt: »Dann löste sich aus der Mitte dieser blendend weißen Birne eine zweite Birne, welche aber im rothen Lichte erschien und den ganzen südwestlichen Himmel wie von Feuerschein geröthet zeigte. Der Schlussatz deutet an, dass beide Kugeln wohl nur ganz kurze Zeit, vielleicht nur momentan zusammen sichtbar waren; die größere, weißstrahlende, musste schon erloschen sein, wenn die schwächere rothe diesen Effect hervorrufen konnte. Indessen sah Herr Pichler, der auch angibt, dass der scheinbar kleinere Körper voraus war, doch noch beide Meteortheile gleichzeitig, aber auch den größeren schon roth. Berücksichtigt man die zwei- bis dreimal größere Entfernung Grödigs bei Salzburg (gegenüber Hühnerwasser), so mag wohl auch die Angabe des Herrn Pfarrers Dum (15), dass schließlich die sehr große Feuerkugel zu einem röthlichen Sternchen zusammengeschmolzen war, hier zu berücksichtigen sein.

Auch der Beobachter aus Podiebrad (115), welches sehr viel näher liegt, gibt an, dass man nach dem Erlöschen einen glühenden Funken zur Erde fallen sah.

Aus Pilsen (107) berichtete man, dass nach dem Erlöschen noch einige funkenähnliche Körper sichtbar waren, wovon der größte wie ein Stern mittlerer Größe erschien.

In Rothwasser (91) sah man »nach dem Platzen« ganz genau mehrere Theile zur Erde fallen.

Ein Beobachter, der sich im Eilzuge bei Amstetten (43) befand, berichtete der Wiener Sternwarte ebenfalls, dass die anfangs gewöhnliche, sehr glänzende Feuerkugel nach kurzem

Laufe in mehrere röthliche Stücke »zersplitterte« und dann verschwand.

Aus 14 anderen Beobachtungsstationen wird mitgetheilt, dass das Meteor unter Funkensprühen erlosch, doch mag billig bezweifelt werden, ob unter dieser allgemeinen Bezeichnung jene besonderen Theilungserscheinungen verstanden worden sind, von welchen oben die Rede ist; dagegen soll noch hervorgehoben werden, dass nach Herrn Bernharts Bericht (Mödling, 41) — und sehr guter Skizze — vor dem Verschwinden »in der Mitte eine vehemente Explosion erfolgte«. In der Zeichnung ist die geneigte Bahn über die Explosion noch weiter fortgesetzt.

Diese Erörterungen führen dazu, auch die verschiedenen Angaben über die Farbe des Lichtes in Betracht zu ziehen. Von diesen lauten 64, d. i. die relativ größte Zahl auf eine Nuance, welche der größten Wärmeintensität entspricht, nämlich blendend-weiß (elektrisches, Magnesium-, Auerlicht etc., 25), bläulich- und grünlich-weiß, hellblau oder grün (39). Im Zusammenhange damit stehen die Berichte über die außerordentliche Lichtstärke, welche die Feuerkugel in dieser Phase entwickelte. Nicht allein aus den Sudetenländern, dann aus Nieder- und Oberösterreich findet man viele Angaben, wie »taghell«, »schattenwerfend«, »blendend grell«, »beängstigend«, »man war vom Feuer eingehüllt« etc., sondern auch noch aus Steiermark bis in die Gegend von Pettau wurde berichtet, dass die »ganze Gegend erleuchtet« war.

Diesem grellen Lichte folgte ein anscheinend rascher Übergang in Roth, die Farbe geringeren Wärmegrades und dieser Farbenwechsel ist in 24 Berichten ausdrücklich hervorgehoben. Er wurde selbst noch in dem sehr entfernten Leipzig (150, »zersprang in fast rother Flamme«) bemerkt.

In acht Berichten wird die Feuerkugel überhaupt nur als roth bezeichnet, und es ist möglich, dass wenigstens einige derselben sich nur auf den letzten Theil des Laufes beziehen. Einige wenige Nachrichten endlich bezeichnen die Farbe des Sternchens zuerst als eine röthliche, welche dann in strahlendes Weiß oder Grün übergieng. Dass beim Beginne des

Erglühens bald nach dem Eintritte in die Atmosphäre die Farbe auch röthlich erschien, ist nicht unwahrscheinlich.

Die Farbe des Schweifes und namentlich die des zurückgelassenen Streifens wird zumeist röthlich, auch goldig oder zuerst silberglänzend, dann feuerroth, selbst blutroth bezeichnet. Dies bezieht sich offenbar auf die höchst fein vertheilten, in der Atmosphäre zurückgebliebenen Roste, welche ihren hohen Hitzgrad und damit die bedeutende Leuchtkraft in wenigen Secunden wieder verloren hatten.

Es ist nicht in Abrede zu stellen, dass die oben hinsichtlich der Theilung besonders angeführten Berichte mehrfache Widersprüche enthalten. Dies ist aber wohl begreiflich bei einer so unvermutheten, überwältigenden Erscheinung von nur wenigen Secunden Dauer, welche sich schwer in allen Einzelnheiten vollkommen beobachten und ebenso schwer ganz richtig schildern lässt. Berücksichtigt man jedoch die wesentlichsten Angaben, so wird anzunehmen sein, dass es sich wie gewöhnlich nicht um einen einzelnen Meteoriten, sondern gleichsam um ein Wölkchen von vielen Partikeln, vielleicht bis zu staubartigen Massen herab, handelte. Hiebei fiel das durch die blendend hellen Farben nachgewiesene Maximum der Lichtstärke mit der Weißglut der aus den kleineren Theilchen (wegen ihrer relativ größeren Oberfläche) sich alsbald und am frühesten entwickelnden Dämpfe zusammen. Nachdem diese kleinen Massen entweder gänzlich aufgelöst oder doch in dem langen, zuletzt auch verglimmenden Streifen zurückgeblieben waren, konnten einige relativ größere (an sich vermuthlich aber auch nur kleine) Körper, röthliche Glut verbreitend, in der Bahn noch etwas weiter vorlaufend, wahrgenommen werden. Es ist auch nicht unwahrscheinlich, dass einige, aber auch nur ganz geringe Massen wirklich zur Erde gefallen sind.

Die größere Hemmungshöhe und der Abgang starker Schallerscheinungen sprechen gegen die Wahrscheinlichkeit des Falles bedeutender Massen.

Obwohl in den vielen Berichten sich zahlreiche (hier nicht alle mitgetheilte) Angaben über mehr oder weniger heftige Detonationen finden, so sind doch nur zwei darunter, welche — zwar auch keine volle Sicherheit gewährend — nicht schon

von vorneherein als Spiel der Phantasie anzusehen sind, nämlich die Nachricht aus dem nahe am Fallorte gelegenen Sct. Benigna (108), dass man ein »Gepolter« vernahm und jene der »Politik« aus Prag (113) — auch nicht weit entfernt —, dass sich nach dem Verschwinden ein dumpfes, wie unterirdisches eine Minute andauerndes Rollen vernehmen ließ. Beide Angaben lassen wenigstens die Deutung offen, dass der Schall erst nach jenem längeren Intervall gehört wurde, welches der immer noch sehr großen Entfernung entspricht.

Außerdem fehlt es nicht an Berichten über donnerähnliches selbst schreckenerregendes Getöse, welches zugleich mit dem Falle an den entlegendsten Orten vernommen wurde, das also mit diesem Ereignisse sicher nicht im Zusammenhange stand, wenn es überhaupt nicht bloß eingebildet war. Noch viel häufiger sind die Angaben über »zischendes«, »sausendes« oder »eigenthümliches« Geräusch, mit welchem das Meteor über die Beobachter angeblich hingezogen ist, die eben auch in dieselbe Kategorie gehören. An einem Orte in Südböhmen, weit entfernt von der Flugbahn der Feuerkugel, glaubten einige Leute sich von derselben sogar gestreift, ja verletzt und »mussten sich deshalb zu Bette legen«.

Schließlich sei noch erwähnt, dass auch viele Nachrichten über die Auffindung angeblich herabgefallener Massen aus dem ganzen Beobachtungsgebiete von Ober- und Niederösterreich, dann aus Steiermark bis Lauban in Preußisch-Schlesien, insbesondere auch aus Böhmen, aber alle weit entfernt von der Fallstelle und alle auf den ersten Blick als irrthümlich erkennbar, vorliegen.

Kosmische Verhältnisse.

Wird die vorhin ermittelte geocentrische Geschwindigkeit von dem Zuwachse durch die Erdschwere befreit, so bleiben noch 34·2 *km*. Die Zenitattraction betrug unter dieser Voraussetzung nur 0·6°, so dass für die scheinbare Höhe des Radianten noch 64·7° zu nehmen wäre. Dieser geringfügige, weit innerhalb der Fehlergrenzen liegende Betrag wurde jedoch hier nicht angebracht.

Bezogen auf die Ekliptik waren die Coordinaten des Radianten in 345·0° Länge und 43·5° Breite. Da die Sonnenlänge 189·5° betrug, war die Elongation desselben vom Apex der Erdbewegung 106·7° und die heliocentrische Geschwindigkeit $v = 51·7$ *km* oder 1·74 in der üblichen Einheit, woraus eine Hyperbel von der Halbachse $a = -0·98$ und der Excentricität $e = 1·87$ zu folgern wäre. Die Länge des aufsteigenden Knotens war 189·5°, die Bahnneigung $i = 30·5°$, die Länge des Perihels 46° und die Periheldistanz $q = 0·850$, die Bewegung direct.

Wenn die aus den Beobachtungen gefolgerte Geschwindigkeit zu Grunde gelegt wird, erhält man für den kosmischen Ausgangspunkt dieser Meteorbahn 287·7° Länge und 30·2° nördl. Breite. Dieser Ort liegt nicht sehr weit entfernt von der Gegend, welche man gewöhnlich für den Apex des Sonnensystems im Weltraum annimmt. Meteore, welche aus dieser Richtung und mit einer der angegebenen Halbachse entsprechenden Geschwindigkeit in das Sonnensystem eindringen, würden je nach der Epoche des Zusammentreffens mit der Erde, sehr verschiedene, weit voneinander entlegene Radiationspunkte darbieten.

Der für den 3. October durch diese Feuerkugel nachgewiesene scheinbare Radiant würde sich nämlich im October und November durch den Schwan, im December durch die nördlichsten Theile des Herkules oder durch den Drachen bewegen, sich Mitte Jänner in der Nähe der nördlichen Krone befinden, im Februar herabsteigend bis Ende März sich entlang der äquatorealen Partien des Ophiuchus, dann durch die folgenden Monate bis gegen Mitte Juli immer weiter östlich am Äquator fort bewegen, bis er im August und September im »Pegasus« aufsteigend wieder an den alten Ort anlangt.

Diese sphärische Eilinie erweitert und verschiebt sich namentlich gegen Westen für geringere, während sie sich verengt und theilweise östlich schiebt für größere Geschwindigkeiten. Für Werte zwischen $v = 1·74$ und $v = 2$ ist der Unterschied jedoch nicht sehr bedeutend.

Berechnet man beispielsweise mit dem ersteren aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte von v einige Radianten für

andere Epochen, so erhält man insbesondere für die dem Beobachtungstage näher liegenden Jahresabschnitte, wo der Einfluss der Geschwindigkeitshypothese noch nicht sehr erheblich ist, bemerkenswerte Übereinstimmungen.

So ergibt sich z. B. für August 15, der Radiant in $\alpha = 326 \cdot 6°, \delta = +14 \cdot 5°$. In Denning's General-Katal., S. 281, findet man von beobachtenden Radianten sehr nahe liegende vertreten. Eine correspondierend beobachtete Sternschnuppe: August 9. 1868 nach Herschel aus $\alpha = 326°$, $\delta = +12°$, nach demselben eine Feuerkugel: August 10. 1870 aus $\alpha = 320$, $\delta = +12°$, nach Waller eine correspondierende Meteorbeobachtung für August 11. 1871 aus $\alpha = 324°$, $\delta = +13°$.[1]

Die rechnungsmäßige tägliche Verschiebung des Radianten würde um diese Zeit in α und δ ungefähr $+ \frac{1}{2}°$ betragen, so zwar, dass die drei Angaben, auf den 15. August reduciert, lauten würden: $\alpha = 329°$, $\delta = +15°$, $\alpha = 322 \cdot 5°$, $\delta = 14 \cdot 5°$, $\alpha = 326°$, $\delta = +15 \cdot 5°$, im Mittel: $\alpha = 325 \cdot 8°$, $\delta = +15°$.

Der berechnete Ort des Radianten für September 15. wäre $\alpha = 330°$, $\delta = +25 \cdot 9°$. Auch für diese Epoche finden sich bei Denning (a. a. O. S. 283) naheliegende beobachtete Radianten, und zwar für Sternschnuppen, nämlich: August 24. bis September 14. 1872: $\alpha = 333°$, $\delta = +27°$ (Denning aus italienischen Beobachtungen), September 8. 1885: $\alpha = 335°$, $\delta = +28°$ und $\alpha = 333°$, $\delta = +32°$ (Denning), September 18. bis 27. 1878: $\alpha = 333°$, $\delta = +23$ (Sawyer).

In der Epoche unserer Beobachtung selbst, nämlich Anfang October wird nach Heis aus vielen (32) Sternschnuppen der Radiant für September 16. bis October 26. (mittlere Epoche; October 6.) angegeben: $\alpha = 328°$, $\delta = +35°$ in großer Übereinstimmung mit dem Resultate dieser Untersuchung.

Für November 15. ist die berechnete Position des Radianten $\alpha = 290 \cdot 5$, $\delta = +49 \cdot 2°$. Nahe liegt der von mir allerdings nur beiläufig bestimmte Radiant einer Feuerkugel

[1] Bei der zweiten und dritten Angabe konnte auch die Geschwindigkeit ermittelt werden. Für die Feuerkugel zu 25 e. M. und für das dritte Meteor gar zu 45 e. M. (Denning a. a. O.) Beide Angaben entsprechen hyperbolischen Bahnen, die erstere mit $46 \cdot 5$, die letztere mit $72 \cdot 5$ *km* helioc. Geschwindigkeit.

für November 1. in $\alpha = 294°$, $\delta = +42°$ (Monthl. Not. R. A. Soc. 57, 3).

Sehr bemerkenswert ist auch die Beziehung zu dem reichhaltigen »Coronids« im Jänner. Der berechnete Ort — allerdings ziemlich stark durch die Geschwindigkeitshypothese beeinflusst — wäre für Jänner 15. $\alpha = 238{\cdot}6°$, $\delta = +29{\cdot}1°$. Nach Denning (a. a. O. S. 265) hat man beobachtet: Jänner 1892 (Corder) $\alpha = 233°$, $\delta = +32°$ (Sternschnuppen), Jänner 18. 1869 (Schiap. und Zez.) $\alpha = 232°$, $\delta = +36°$ aus 21 Sternschnuppenbahnen, Jänner 28.—29. $\alpha = 233°$, $\delta = +34°$ (Greg und Herschel).

Die weiter südlichen, äquatorealen Radianten sind durch die Beobachtungen noch wenig erschlossen, man findet aber doch zum Beispiel für März 15. berechnet: $\alpha = 260{\cdot}6°$, $\delta = -2{\cdot}6°$, beobachtet für März 31. bis April 12. nach Denning (a. a. O. S. 270) $\alpha = 262°$, $\delta = \pm 0$. für Mai 15. berechnet: $\alpha = 292{\cdot}3°$, $\delta = -4{\cdot}3$, beobachtet, nach Denning (a. a. O. S. 276), für denselben Tag $\alpha = 294°$, $\delta = \pm 0$, endlich für Juni 15. berechnet: $\alpha = 306°$, $\delta = 0{\cdot}0°$, beobachtet (nach Denning a. a. O. S. 277), Juni 13.—29. 1880 $\alpha = 305{\cdot}5°$, $\delta = +4°$ (Sawyer).

Zur Theorie des photographischen Processes

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1902.)

Der Herstellung eines photographischen Bildes liegt die Vorstellung folgendes idealen Vorganges zugrunde: durch das Licht, welches von irgend einem Punkte eines Gegenstandes ausgeht und in der Camera die Platte trifft, wird diese befähigt, im sogenannten Entwickler eine Schwärzung anzunehmen. Bezeichnen wir dieselbe mit S_1, wobei als Maß eine beliebige Einheit angenommen werde, die Lichtstärke des aufzunehmenden Objectes mit L, so soll:

$$S_1 = \alpha L t$$

sein, wobei α eine Constante, t die Expositionszeit bedeute. Fällt nun auf das fertiggestellte Negativ Licht von der Stärke L_1 und besitzt die durchgelassene Lichtmenge die Intensität L', so wollen wir die Schwärzung definieren durch:

$$S_1 = \frac{L_1 - L'}{L_1}.$$

Es ist somit:

$$L' = L_1 (1 - S_1) = L_1 - \alpha L L_1 t. \qquad 1)$$

Stellen wir mit Hilfe des Negativs, indem wir Licht von der Stärke L_1 auffallen lassen, ein positives Bild her, so können wir abermals die Schwärzung des Positivs bezeichnen durch:

$$S_2 = \beta L' t',$$

wobei β eine der sich schwärzenden Substanz zukommende Constante und t' analog dem Früheren, die Expositionsdauer bedeute. Wir erhalten somit nach Gleichung 1):

$$S_2 = \beta L_1 t' - \alpha \beta L L_1 t t'. \qquad 2)$$

Gesetzt den Fall, wir hätten ein Diapositiv hergestellt und es komme von der Rückseite Licht von der Stärke L_2; das in unser Auge gelangende Licht, welches die geschwärzte Schichte passieren muss, habe die Intensität L'', so ist nach obiger Definitionsweise die Schwärzung:

$$S_2 = \frac{L_2 - L''}{L_2},$$

folglich nach Gleichung 2):

$$\frac{L_2 - L''}{L_2} = \beta L_1 t' - \alpha\beta L L_1 t t'$$

oder:

$$L'' = L_2 - \beta L_1 L_2 t' + \alpha\beta L L_1 L_2 t t'.$$

Werden nun die Expositionszeiten so gewählt, dass:

$$\beta L_1 t' = \alpha L_2 t = 1,$$

so ist:

$$L'' = L.$$

Das heißt: das Licht, welches vom Bilde ausgeht, besitzt dieselbe Stärke, wie das Licht des aufgenommenen Gegenstandes. Es gibt somit die Photographie ein vollständig getreues Bild.

Der Zweck des Folgenden ist nun, zu untersuchen, wie weit man in Wirklichkeit diesen idealen Process erreichen kann.

Wir wollen zuerst kennen lernen, in welchem Verhältnis die Schwärzung, wie wir sie früher definiert haben, zur reducierten Silbermenge steht. Das Silber scheidet sich, wie ja die Beobachtung ergibt, in Körnern aus vom Querschnitte f, und es werde das auf ein Korn auffallende Licht vollkommen absorbiert. Denken wir uns nun die empfindliche Schicht der photographischen Platte in unendlich dünne, zur Platte parallele Schichten zerlegt und es sei die in der Flächeneinheit einer solchen unendlich dünnen Schicht enthaltene Anzahl Silberkörner dN, so wird dieselbe von der Intensität L des passierenden Lichtes ein Quantum dL wegnehmen, welches gegeben ist durch:

$$dL = L f dN$$

daraus folgt für das durchgelassene Licht:

$$\frac{dL}{L} = -f dN$$

und integriert:

$$lL = -fN + lC$$

oder:

$$L = C.e^{-fN}.$$

Besitzt das auf die Platte auffallende Licht die Intensität L_0, so wird für $N = 0$ $C = L_0$ und allgemein:

$$L = L_0 e^{-fN};$$

das heißt: wir erhalten die gewöhnliche Absorptionsformel des Lichts. Wir müssen also berücksichtigen, dass die Schwärzung nicht proportional der ausgeschiedenen Silbermenge ist. Nur für den Fall, als wir es mit einer sehr dünnen Schicht zu thun haben und die Schwärzung nicht sehr stark vorgeschritten ist, so dass fN eine kleine Zahl bedeutet, können wir setzen:

$$e^{-fN} = 1 - fN$$

Da die Schwärzung:

$$S = \frac{L_0 - L}{L_0}$$

ist, so folgt:

$$S = 1 - e^{-fN} = fN.$$

In diesem Falle ist also thatsächlich die Schwärzung proportional der reducierten Silbermenge.

Bei verschiedenen photochemischen Reactionen zeigt sich die auffallende Erscheinung, dass die Reaction nicht proportional der Lichtmenge erfolgt, sondern dass zu Beginn des Processes eine längere Belichtung nothwendig ist, bis die Reaction eintritt. Erst nachdem das Licht eine bestimmte Zeit gewirkt hat, verläuft die Reaction so, dass die umgesetzten Mengen proportional der sie durchsetzenden Lichtmengen sind. Man belegt diese zur Erzielung der Proportionalität nothwendige »Vorbelichtung« mit dem Namen der photochemischen Induction. Ähnlich verläuft die Wirkung der Belichtung photographischer Platten. Obwohl die verschiedenen Untersuchungen über diesen Gegenstand in ihren Resultaten vielfach auseinander gehen, so scheint es mir doch eine verlässliche

Thatsache, dass nach einer bestimmten Vorbelichtung die Schwärzung einer Platte proportional der auffallenden Lichtmenge ist. Wenigstens gilt dies, so lange die Schwärzung nicht zu intensiv wird. Dass bei starker Schwärzung die auffallende Lichtmenge mit der Schwärzung nicht mehr proportional wächst, muss ja schon aus unserer früheren Überlegung folgen, nach welcher die Schwärzung einer Platte bei größerer Dichte nicht mehr proportional der Menge des reducierten Silbers ist.

Die Bromsilbergelatinplatten sind nicht durchsichtig, sondern nur durchscheinend, d. h. sie absorbieren eine beträchtliche Menge Lichtes. Nennen wir demnach x eine bestimmte Tiefe in der Schicht, so ist die dort herrschende Lichtstärke:

$$L = L_0 e^{-\alpha x},$$

wenn wir unter L_0 die Intensität des auffallenden Lichtes und unter α den Absorptionscoefficienten des Bromsilbers verstehen.

Wir wollen im folgenden das nicht belichtete Bromsilber passiv, das belichtete activ nennen. Ist die photochemische Induction bereits erfolgt, so ist die aus dem passiven sich in actives Bromsilber verwandelnde Menge proportional der auffallenden Lichtmenge und natürlich auch proportional der vorhandenen passiven Bromsilbermenge. Wir erhalten demnach die Gleichung:

$$(M_0 - M) L_0 e^{-\alpha x} dx\, dt = a\, dM\, dx, \tag{3}$$

wenn wir unter M_0 die ursprünglich in der Volumseinheit der Gelatinschicht enthaltene Bromsilbermenge und unter M die entsprechende active Menge des Bromsilbers verstehen. Es ist dann $M_0 - M$ die jeweilig in der Volumeinheit vorhandene Bromsilbermenge, so dass in der Flächeneinheit einer Schicht von der Dicke dx sich die passive Menge $(M_0 - M)dx$ befindet. a ist die entsprechende Proportionalitätsconstante. Gleichung 3) ergibt nun weiter:

$$L_0 e^{-\alpha x} dx\, dt = \frac{a\, dM\, dx}{M_0 - M} =$$

$$= -a\, dx\, d[l(M_0 - M)]. \tag{4}$$

Um nun die active Menge nach der Belichtungsdauer τ kennen zu lernen, haben wir obige Gleichung zu integrieren. Ihr Integral ist:

$$-\frac{L_0}{a}e^{-ax}\tau = l(M_0 - M) + C \qquad 5)$$

Diese Gleichung ist nur dann anwendbar, wenn die photochemische Induction bereits erfolgt ist. Diese erfordere die Lichtmenge b. In der Tiefe x ist die Lichtstärke $L_0 e^{-ax}$. Die Zeit τ_1, welche zur Erzielung der photochemischen Induction nöthig ist, ist durch die Gleichung

$$b = L_0 e^{-ax}\tau_1 \qquad 6)$$

gegeben. Zur Zeit τ_1 beginnt somit die Umwandlung des passiven in actives Bromsilber. In diesem Zeitpunkt ist also $M = 0$. Folglich gilt nach Gleichung 5):

$$-\frac{L_0}{a}e^{-ax}\tau_1 = lM_0 + C.$$

Da nun:

$$\tau_1 = \frac{b}{L_0}e^{ax}$$

ist, so ergibt sich:

$$-\frac{b}{a} - lM_0 = C.$$

Demnach wird Gleichung 5):

$$-\frac{L_0}{a}e^{-ax}\tau = l\left(\frac{M_0 - M}{M_0}e^{-\frac{b}{a}}\right).$$

woraus sich leicht gewinnen lässt:

$$M = M_0\left(1 - e^{\frac{b}{a}}e^{-\frac{L}{a}e^{-ax}\tau}\right). \qquad 8)$$

Dies ist die active Bromsilbermenge der Volumeinheit in der Tiefe x der photographischen Schicht. Ist die ganze Schicht von der Dicke δ photochemisch induciert und wollen wir die Gesammtmenge $\overline{M}$ des activen Bromsilbers kennen lernen, so haben wir Gleichung 8) wieder mit dx zu multiplicieren und zwischen den Grenzen 0 und δ zu integrieren. Nehmen wir ferner δ, wie es in Wirklichkeit ja gewöhnlich der Fall ist, sehr klein an, so ist auch ax sehr klein und wir können $e^{-ax} = 1 - ax$ setzen. Wenden wir dies auf Gleichung 8) an, so ergibt dies:

$$\overline{M} = \int_0^{\delta} [M_0(1 - e^{-\frac{L_0\tau - b}{a}} \cdot e^{\frac{L_0 a \tau}{a} x})] dx.$$

Bei der von uns gemachten Vernachlässigung ist es wegen der Kleinheit des x weiters erlaubt $e^{-\frac{L_0 a \tau}{a} x} = 1$ zu setzen. Danach erhalten wir:

$$\overline{M} = M_0(1 - e^{-\frac{L_0\tau - b}{a}})\delta.$$

Diese Gleichung zeigt abermals eine große Abweichung von dem idealen Fall, den wir eingangs darstellten. Setzen wir jedoch voraus, die Platten seien vorbelichtet, so dass im Durchschnitt gerade die photochemische Induction erreicht ist, dann können wir in Gleichung 8) $b = 0$ setzen. Es wird also:

$$\overline{M} = M_0\delta(1 - e^{-\frac{L_0\tau}{a}}).$$

Wiederum können wir, so lange $\frac{L_0}{a}\tau$ eine kleine Größe ist, $e^{-\frac{L_0}{a}\tau} = 1 - \frac{L_0}{a}\tau$ schreiben, und wir erhalten:

$$\overline{M} = M_0\delta\frac{L_0}{a}\tau.$$

In diesem Falle ist also die active Bromsilbermenge proportional der Belichtungsdauer. Dieser Größe ist dann, bei den gemachten Annahmen, wie wir bereits erläutert haben, auch die Schwärzung proportional, was auch thatsächlich von verschiedenen Experimentatoren bestätigt wird.

Wir wollen uns nun zur Entwickelung photographischer Platten selbst wenden. Um den Einfluss des Entwicklers zur Genüge kennen zu lernen, müsste die genaue Kenntnis des chemischen Vorganges vorausgesetzt werden. Bekanntlich ist derselbe aber vorläufig noch nicht klar gelegt, doch ist das für unseren Zweck, da es sich uns hauptsächlich um den qualitativen Verlauf handelt, auch nicht weiter von Belang.

Wir wollen folgende Voraussetzung machen: Die an der chemischen Reaction theilnehmenden Componenten seien der Entwickler, das active Bromsilber, das reducierte Silber und die durch die Reaction entstehende neue Verbindung. Die

Concentration des Entwicklers sei E, jene des activen Bromsilbers in der Gelatine B, die des reducierten Silbers S, schließlich die der neu entstehenden Verbindung N. Bei der Reaction gehe der Entwickler mit n_1, das active Bromsilber mit n_2, das reducierte Silber mit n_3 und die neue Verbindung mit n_4 Molekeln in die Verbindung ein. Danach bestimmt sich die Reactionsgeschwindigkeit V durch die Gleichung:

$$V = KE^{n_1}B^{n_2} - K'S^{n_3}N^{n_4},$$

indem ja Entwickler und Bromsilber verschwindet, Silber und neue Verbindung entsteht.

Nennen wir B_0 das gesammte, in der Volumeinheit vorhandene Bromsilber und nehmen wir an, dass bei der Reaction Bromsilber in Silber verwandelt wird, so muss $B+S = B_0$ sein. Ferner wollen wir die Voraussetzung machen, dass die Menge der neuentstehenden Verbindung proportional der reducierten Silbermenge sei. Es gehen so viele Bromatome in die neue Verbindung ein, als Silberatome ausgeschieden werden. Die neue Verbindung muss jedoch löslich sein, da sie sich ja auswaschen lassen soll. Es wird demnach eine Diffusion der neuen Verbindung aus der Gelatine in den Entwickler stattfinden, und es wird in erster Annäherung die diffundierende Menge proportional der Menge der neuerzeugten Substanz sein, weshalb deren Concentration in der Gelatine in erster Annäherung proportional der Concentration des freien Silbers angesehen werden kann, was übrigens auch gilt, wenn die neue Verbindung nicht im Wasser, sondern erst im Fixirbad löslich wäre. Wir können somit $N = k_1 S$ setzen und es wird:

$$V = kE^{n_1}[B_0 - S]^{n_2} - k'_1 S^{n_3+n_4},$$

wobei wir $k_1 k' = k'_1$ gesetzt haben. Die in der Zeit dt reducierte Silbermenge dS ist proportional Vdt. Wir haben demnach:

$$Vdt = [kE^{n_1}(B_0 - S)^{n_2} - k'_1 S^{n_3+n_4}]dt =$$
$$= k_2 dS,$$

wenn wir unter k_2 die entsprechende Proportionalitätsconstante verstehen. Die Trennung der Variabeln ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{k_2\, dS}{k E^{n_1}(B_0 - S)^{n_2} - k_1' S^{n_3+n_4}} = dt.$$

Da uns der wirkliche chemische Vorgang nicht näher bekannt ist, so wollen wir der Einfachheit halber versuchsweise

$$n_2 = n_3 = n_4 = 1$$

setzen, ferner soll noch:

$$\frac{k}{k_2} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{k_1'}{k} = \beta$$

eingeführt werden. Dies ergibt:

$$\frac{dS}{E^{n_1} B_0 - E^{n_1} S - \beta S^2} = \alpha\, dt.$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0}}\, l\, \frac{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} + E^{n_1} + 2\beta S}{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} - E^{n_1} - 2\beta S} - l\, C = \alpha t,$$

wobei C eine willkürliche Constante bedeute. Die letzte Gleichung lässt sich weiter umformen in:

$$l\, \frac{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} + E^{n_1} + 2\beta S}{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} - E^{n_1} - 2\beta S} =$$
$$= \sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0}\, \alpha t + \sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0}\, l\, C.$$

Für $t = 0$ muss auch $S = 0$ werden. Daher muss:

$$\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0}\, l\, C = l\, \frac{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} + E^{n_1}}{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} - E^{n_1}}$$

sein, woraus wir schließlich die Gleichung erhalten:

$$\frac{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} + E^{n_1} + 2\beta S}{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} - E^{n_1} - 2\beta S} =$$
$$= \frac{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} + E^{n_1}}{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0} - E^{n_1}}\, e^{\sqrt{E^{2n_1} + 4\beta E^{n_1} B_0}\, \alpha t}. \qquad 9)$$

Die Compliciertheit der Beziehung zwischen dem reducierten Silber S und der Entwickelungsdauer t des Entwicklers lässt trotz unserer vereinfachenden Annahmen nur sehr schwer den Fortgang des Entwickelungsprocesses erkennen. Wir wollen daher unseren Fall noch mehr specialisieren. Wir nehmen vorerst an, dass wir es mit sehr verdünntem Entwickler zu thun haben; dann ist E^{n_1} eine kleine Größe, welche wir gegenüber den anderen vorkommenden Größen vernachlässigen können. Mit Rücksicht darauf ergibt die letzte Gleichung:

$$\frac{\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0} + 2\beta S}{\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0} - 2\beta S} = e^{\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0}\,\alpha t} \qquad 10)$$

oder:

$$S = \sqrt{\frac{E^{n_1} B_0}{\beta}} \cdot \frac{e^{\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0}\,\alpha t} - 1}{e^{\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0}\,\alpha t} + 1}.$$

Solange $\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0}\,\alpha t$ klein ist, d. h. solange die Entwickelungsdauer nicht weit vorgeschritten ist, können wir wieder $e^{\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0}\,\alpha t} = 1 + \sqrt{4\beta E^{n_1} B_0}\,\alpha t$ setzen. Daraus folgt:

$$S = \sqrt{\frac{E^{n_1} B_0}{\beta}} \cdot \frac{\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0}\,\alpha t}{2} = E^{n_1} B_0\, \alpha t.$$

Diese Gleichung besagt demnach: Benützen wir verdünnten Entwickler und entwickeln wir nicht zu lange, so ist die Schwärzung der Platte proportional der Concentration des Entwicklers, der Menge des activen Bromsilbers und der Entwickelungsdauer.

Zur Verification der letzten Behauptung wurden folgende Versuche gemacht:

1. Eine Chlorbromsilberplatte wurde belichtet und dann in der Dunkelkammer in zwei Theile zerschnitten. Diese wurden gleichzeitig in einen verdünnten Entwickler gegeben und der eine Theil doppelt so lang als der andere darin gelassen. Nach dem Fixieren, Waschen und Trocknen der beiden Theile wurde der kürzer entwickelte Theil noch einmal zerschnitten und die so erhaltenen neuen Theile aufeinander gelegt. In der That

zeigte sich dann, dass die beiden letzteren Theile zusammengenommen genau dieselbe Schwärzung ergaben, welche der länger entwickelte Theil besaß.

2. Eine Platte wurde in zwei Theile zerschnitten und von derselben Lichtquelle in derselben Entfernung so belichtet, dass sich ihre Belichtungszeiten wie 1:2 verhielten. Beide Theile wurden dann gleichzeitig in den Entwickler gegeben und gleich lange entwickelt. Auch hier zeigten sich wieder Schwärzungen, welche sich, wie die Prüfung nach Art der früheren Platten ergab, genau wie 1:2 verhielten.

3. Eine Platte wurde belichtet, sodann halbiert und die beiden Theile in verdünnte Entwickler gegeben, deren Concentrationen sich wie 2:1 verhielten, während die zugehörigen Entwickelungszeiten im Verhältnis 1:2 standen. Nach unserer letzten Formel müssten für den Fall, als $n_1 = 1$ ist, die Plattentheile gleiche Schwärzung zeigen, was mit ziemlicher Vollkommenheit erreicht wurde, obwohl es nicht auffallend gewesen wäre, wenn sich ein entsprechend größerer Unterschied in der Schwärzung gezeigt hätte; ist ja der wirkliche physikalische Vorgang der Entwickelung, d. i. die Art des Entwicklers, allmählich in die Gelatineschicht hineinzudiffundieren, ein sehr complicierter, während wir möglichst vereinfachende Voraussetzungen gemacht haben. Wir finden also zwischen Rechnung und Versuch eine vorzügliche Übereinstimmung.

Wählen wir in der Gleichung 10) die Zeit t sehr groß, so dass auch $\sqrt{4\beta E^{n_1} B_0 \alpha t}$ groß gegen 1 wird; dann wird:

$$S = \sqrt{\frac{E^{n_1} B_0}{\beta}} .$$

Wir haben somit das beachtenswerte Resultat, dass bei verdünntem Entwickler und bei kurzer Entwickelungsdauer die Schwärzungen proportional den activen Bromsilbermengen sind, bei langer Entwickelungsdauer jedoch proportional den Wurzeln aus diesen Mengen. Mithin sind die Contraste nach langer Entwickelung geringer als bei kurzer Entwickelung. Wir erhalten demnach erst ein kräftigeres und später ein flaueres Bild, wie es auch in der Praxis thatsächlich beobachtet wird.

Benützen wir einen derart concentrierten Entwickler, dass E^{n_1} groß gegen $4\beta B_0$ wird, so ergibt Gleichung 9) mit Vernachlässigung der kleinen Größen

$$\frac{E^{n_1}+\beta S}{\beta B_0-\beta S} = \frac{E^{n_1}}{\beta B_0} e^{E^{n_1}\alpha t}$$

oder es wird:

$$S = \frac{E^{n_1}(e^{E^{n_1}\alpha t}-1)}{\beta + \frac{E^{n_1}}{B_0} e^{E^{n_1}\alpha t}}.$$

Da $e^{E^{n_1}\alpha t}$ nach der Voraussetzung bald sehr groß werden muss, so folgt:

$$S = B_0.$$

Mit einem concentrierten Entwickler wird somit sämmtliches actives Bromsilber in Silber überführt. Aus unserer Überlegung folgt ohneweiters, dass die Concentration des Entwicklers auf die endgiltige Schwärzung sehr von Einfluss ist. Will man demnach die Schwärzung einer Platte gleichzeitig zu photometrischen Messungen benützen, so ist es nothwendig, stets concentrierten Entwickler zu benützen, da nur dieser sämmtliches actives Bromsilber in Silber überführt.

Aus dem Ganzen ist ersichtlich, dass es nur sehr schwierig gelingen kann, ein Bild herzustellen, welches vollkommen das Original wiedergibt. Nach unseren Überlegungen wäre dazu erstens nöthig, die Platten entsprechend vorzubelichten, was jedenfalls nur nach längerer Übung gelingt. Zweitens handelt es sich um die richtige Expositionszeit, die nicht zu lang sein darf, damit mit stärkerem Entwickler entwickelt werden kann. Mit diesen Vorsichtsmaßregeln werden wir ein möglichst getreues Bild erzielen. Dasselbe gilt natürlich für den Positivprocess. Gleichzeitig erkennen wir jedoch auch, dass sich zu lange Exposition theilweise durch die Wahl eines verdünnten Entwicklers und die entsprechende Entwickelungsdauer corrigieren lässt. Da wir eine der Lichtstärke proportionale Schwärzung nur dann erzielen, wenn die Schwärzung überhaupt nicht zu stark wird, so werden sich nur von jenen Gegenständen

getreue Bilder herstellen lassen, welche keine großen Lichtcontraste aufweisen. Thatsächlich ist es bei Aufnahmen von Gegenständen mit sehr starken Lichtunterschieden wie z. B. bei Landschaften nach der Natur nothwendig, Lichtfilter zu benützen, welche zu stark wirkende Lichtmengen dämpfen, da sonst der Himmel oder der entfernte Hintergrund gegenüber dem lichtschwachen Vordergrund im Bilde viel zu hell und zu einförmig erscheint.

Bleiben wir nicht innerhalb der durch die Rechnung erhaltenen Grenzen, so wird die Licht- und Schattenvertheilung auf dem Bilde nicht dem Originale entsprechen. Wir erhalten dann zwar richtige Conturen, aber nicht die richtigen Abschattierungen. Da wir nun verschiedene Formen lediglich nur durch die verschiedenartigen Schattierungen erkennen, so mag dies auch die Ursache sein, dass manches Porträt, welches unter ungünstigen Bedingungen aufgenommen ist, obwohl die betreffende Person ihren gewohnten Gesichtsausdruck bei der Aufnahme hatte, doch recht unähnlich erscheint. Besonders hervortretend werden aber alle jene Mängel bei der Herstellung von Photographien in natürlichen Farben nach dem Dreifarbensystem. Da es hier sehr wichtig ist, dass die Abschattierungen der Platte genau dem Originale entsprechen, so werden hier auch umsomehr alle Fehler hervortreten. Thatsächlich gelingt es auch nicht, ohne Retouche derartige Bilder zur Zufriedenheit herzustellen.

Es geht wohl aus dem Gesagten zur Genüge hervor, dass die bewusste Herstellung eines wirklich guten photographischen Bildes großer Übung und vielfacher Erfahrung bedarf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XIX. SITZUNG VOM 9. OCTOBER 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 111, Abth. I, Heft I bis III (Jänner bis März 1902). — Abth. II a, Heft I und II (Jänner und Februar 1902): Heft III und IV (März und April 1902). — Abth. II b, Heft I bis III (Jänner bis März 1902). — Monatshefte für Chemie, Bd. XXIII, Heft VI (Juni 1902); Heft VII (Juli 1902).

Der Vorsitzende, Präsident Prof. E. Sueß, begrüßt die Classe bei Wiederaufnahme ihrer Sitzungen nach den akademischen Ferien.

Der Vorsitzende macht ferner Mittheilung von dem Verluste, welchen diese Classe durch das am 5. September l. J. in Berlin erfolgte Ableben ihres ausländischen Ehrenmitgliedes Geheimrathes Prof. Dr. Rudolf Virchow, sowie durch das am 7. September l. J. in Zürich erfolgte Ableben ihres ausländischen correspondierenden Mitgliedes Directors Dr. Heinrich Wild erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Prof. Dr. Cornelio Doelter in Graz, Bergrath Dr. Friedrich Teller und Prof. Dr. Rudolf Wegscheider in Wien sprechen ihren Dank für ihre Wahl zu correspondierenden Mitgliedern dieser Classe im Inlande, Geheimrath Prof. Dr. Karl von Voit in München spricht den Dank für seine Wahl zum correspondierenden Mitgliede im Auslande aus.

Das Comité des XIV. internationalen medicinischen Congresses übersendet das Reglement und vorläufige Programm der am 23. bis 30. April 1903 zu Madrid abzuhaltenden Sitzungen.

Prof. Dr. G. Anton und Docent Dr. H. Zingerle übersenden die Pflichtexemplare ihres mit Unterstützung der

kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: »Bau, Leistung und Erkrankung des menschlichen Stirnhirnes«, Theil I (Graz, 1902) und sprechen den Dank für die ihnen zur Herausgabe desselben bewilligte Subvention aus.

Dankschreiben sind eingelangt:

1. von Dr. E. Anding in München für eine Subvention zur Herausgabe eines Heftes seines Werkes »Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum«;
2. von Dr. L. Langstein in Basel für eine Subvention zur Ausführung von Studien über die Zucker-Eiweißfrage;
3. von Prof. W. Láska in Lemberg für eine Subvention zur Aufstellung eines Schwerependels;
4. von Prof. Dr. F. Streintz in Graz für eine Subvention zur Ausführung von Experimentaluntersuchungen über die Beziehung des Temperaturcoefficienten des Widerstandes von reinen Metallen zu deren kinetischem Verhalten.

Das w. M. Hofrath A. Rollett in Graz übersendet eine Abhandlung von Dr. Fritz Pregl, Assistenten am physiologischen Institute in Graz, welche sich betitelt: »Über Isolierung von Desoxycholsäure und Cholalsäure aus frischer Rindergalle und über Oxydationsproducte dieser Säuren.«

Das c. M. Prof. J. Seegen übersendet zwei von ihm in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Über Zuckerbildung in der in Alkohol aufbewahrten Leber.«

II. »Über den Einfluss von Alkohol auf die diastatische Wirkung von Speichel- und Pancreasferment.«

Das c. M. Prof. Hans Molisch übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von stud. phil. Georg Irgang ausgeführte Arbeit: »Über saftausscheidende Elemente und Idioblasten bei *Tropaeolum majus* L.«

Prof. P. Franz Schwab in Kremsmünster übersendet den Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1901.

Herr Hugo Fürth übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien mit dem Titel: »Zur Kenntnis der Quecksilberamidoverbindungen«.

Herr Pedro Gómez Sánchez in Madrid übersendet eine Mittheilung, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten betreffend.

Herr Georg Nakovics in Kispest übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Die allgemeine algebraische Auflösung der Gleichung fünften Grades ohne Zuhilfenahme elliptischer Transcendenten«.

Hofrath Prof. Dr. Karl Zulkowski und Franz Cedivoda in Prag übersenden eine Abhandlung, betitelt: »Über den Abbau der unlöslichen Kalkphosphate durch Ammoncitratlösungen«.

Dr. techn. Paul Dannenberg in Wien übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Wien, betitelt: »Über einige Jod- und Bromderivate des Thymols«.

Prof. P. Karl Puschl in Seitenstetten übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Über Fortpflanzung des Lichtes durch Körpersubstanz«.

Der Secretär, Hofrath V. v. Lang, legt Heft 2 von Band IV_1 und Heft 7 von Band I der »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen« vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Heck, O.: Die Natur der Kraft und des Stoffes (Begründung und Fortentwicklung der chemischen Theorien). Homberg, 1901. 8°

Gramme, Zénobe: Hypothèses scientifiques. Paris, 1902. 8°.

Grujić, Spiridion Dj.: Das Wesen der Anziehung und Abstoßung. Berlin, 1902. 8°.

Haeckel, Ernst: Kunstformen der Natur. Lieferung 7. Leipzig und Wien. 4°.

Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts in Paris: Carte photographique du Ciel. Zone +1, Feuilles 28, 30, 32, 49, 66, 73, 76, 80, 82, 113, 120, 106. — Zone —1, Feuilles 51, 76. — Zone +3, Feuilles 78, 87, 91, 107, 111. — Zone +5, Feuilles 101, 130. — Zone +7, Feuilles 86, 87, 88, 120, 129, 132, 134, 135. — Zone +9, Feuilles 86, 87, 88, 104, 115, 134. — Zone +22, Feuilles 9, 65, 81, 84, 88, 101, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 151, 155, 159, 166, 167, 168, 173, 175. — Zone +24, Feuilles 76, 78, 97, 108, 122, 130, 135, 174.

Ministère des Colonies. Office colonial: Ressources végétales des Colonies françaises; par Gustavo Niederlein. Paris 1902. 4°.

Oeckinghaus E.: Über die Bewegung der Himmelskörper im widerstehenden Mittel. Halle a. S., 1890. 8°.

— Die mathematische Statistik in allgemeinerer Entwicklung und Ausdehnung auf die formale Bevölkerungstheorie (Separatabdruck aus »Monatshefte für Mathematik und Physik«, XIII. Jahrgang, Wien. 8°).

Schwab, Franz, P.: Über die Quellen in der Umgebung von Kremsmünster. Linz, 1902. 8°.

Stiatessi, Raffaello D.: Spoglio delle osservazioni sismiche dall' Agosto 1901 al 31 Luglio 1902. Mugello, 1902. 8°.

Royal Observatory in Edinburgh: Annals, Vol. I. Glasgow, 1902. 4°.

Technische Hochschule in Karlsruhe: Verschiedene Publicationen.

Cinquantenaire scientifique de M. Berthelot 24. Novembre 1901. Paris, 1902. 4°.

Über Fortpflanzung des Lichtes durch Körpersubstanz

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. October 1902.)

In der von mir aufgestellten, den »Wärmezustand der Gase« betreffenden Hypothese[1] habe ich die Annahme gemacht, dass die Atome eines Gases die Fähigkeit haben, gewisse Strahlengattungen, welche sie bei jeder Temperatur vermöge eines inneren Erregungszustandes ihrer Substanz erzeugen, an ihren bei deren Ausbreitung getroffenen Oberflächen durch Reflexion vollständig zu diffundieren, und dass zugleich andere, entweder von weiterher auf sie einfallende oder von ihnen selbst durch gegenseitige Bewegung um Gleichgewichtslagen erzeugte Strahlengattungen an ihren Oberflächen keine erhebliche Reflexion erfahren, sondern durch ihre Substanz hindurch mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf ähnliche Weise, wie im Äther, fortgepflanzt werden.

Dieser Annahme entsprechend, müssen die jedesmal einen gewissen Raum einnehmenden Atome eines durchsichtigen Körpers überhaupt die Fähigkeit besitzen, jene Strahlengattungen, bezüglich welcher derselbe durchsichtig ist, durch ihre sich dabei als fortpflanzendes Medium verhaltende Substanz hindurchzulassen, d. h. in einem durchsichtigen Körper müssen auch seine Atome durchsichtig sein. Ein durch einen solchen Körper gehender Lichtstrahl wird also nach meiner Vorstellung nicht, wie man anzunehmen pflegt, durch den

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXI, Abth. IIa, Februar 1902.

zwischen seinen Atomen gelagerten Äther allein, sondern auch durch seine getroffenen, mit der nöthigen Elasticität begabten Atome hindurch fortgepflanzt; er muss demgemäß auf seinem Wege abwechselnd durch Atomsubstanz und Äther gehen. Dies führt zu einer das Brechungsvermögen durchsichtiger Körper betreffenden Folgerung, welche man mit den aus der Erfahrung diesbezüglich gewonnenen Thatsachen vergleichen kann.

Man denke sich einen durchsichtigen cylindrischen Körper in seiner Längsrichtung von homogenen Lichtstrahlen durchsetzt. Er habe eine Länge $= s$ und einen Querschnitt $= 1$; es stellt dann s auch sein Volumen vor. Bedeutet σ die Summe der von der Substanz seiner Atome erfüllten Räume, so ist $s-\sigma$ die Summe der mit Äther erfüllten Zwischenräume. In der Substanz der Atome mögen die Strahlen mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ und im Äther mit der Geschwindigkeit γ sich fortpflanzen; ihre mittlere Geschwindigkeit im ganzen Körper sei c. Die Zeit, während welcher dieselben den Körper durchlaufen, besteht aus der Zeit, welche sie in den Atomen und aus derjenigen, welche sie im Äther zwischen diesen zubringen; da die genannten Zeiten durch die bezüglichen Quotienten aus Weg und Geschwindigkeit bestimmt sind, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{s}{c} = \frac{\sigma}{\varkappa} + \frac{s-\sigma}{\gamma}.$$

Bedeutet n den Brechungsindex des Körpers und ν denjenigen der Substanz seiner Atome, so ist $n = \frac{\gamma}{c}$ und $\nu = \frac{\gamma}{\varkappa}$; aus obiger Gleichung folgt daher

$$(n-1)s = (\nu-1)\sigma.$$

Hat der Körper die Dichte d und die Substanz seiner Atome die Dichte δ, so ist $sd = \sigma\delta$, und man erhält also die Formel

$$\frac{n-1}{d} = \frac{\nu-1}{\delta},$$

nach welcher das specifische Brechungsvermögen $\frac{n-1}{d}$ des Körpers mit dem specifischen Brechungsvermögen $\frac{\nu-1}{\delta}$ der Atomsubstanz identisch ist. Jenes hängt sonach bloß von der materiellen Beschaffenheit, namentlich von der Elasticität und Dichte der den Körper bildenden Atome ab und ist von den mittleren Distanzen und relativen Positionen derselben ganz unabhängig.

Wären die Atome der chemischen Elemente, wie man annimmt, absolut unveränderliche Theilchen und alle Veränderungen der Körper nur durch den Wechsel der gegenseitigen Stellungen der sie zusammensetzenden Atome bedingt, so müsste demnach das specifische Brechungsvermögen eines Körpers für dieselbe Strahlengattung unter allen Umständen eine constante Größe sein. Dies ist nun zwar bei bloßen Veränderungen von Druck, Volumen und Temperatur im ganzen mit bemerkenswerter Annäherung, bei chemischen Veränderungen aber sehr gewöhnlich in keiner Weise der Fall. Man kann hieraus schließen, dass jene aus früherer Zeit bisher noch beibehaltene Annahme nicht richtig ist. Dass die chemischen Atome keine ausdehnungslosen Punkte sind, sondern raumerfüllende Gebilde von sehr complicierter Zusammensetzung sein müssen, gibt man jetzt ohnehin allgemein zu, und von dieser Vorstellung bis zu derjenigen, dass ihre innere Structur unter hinreichend starken äußeren Einflüssen mehr oder weniger sich modificieren könne, ist nur ein kleiner Schritt. Diese letztere Hypothese erscheint nun aber, wie ich in der erwähnten Abhandlung schon angedeutet habe, zur Erklärung der Thatsache, dass jedes Element im freien Zustande und in seinen Verbindungen ganz verschiedene Eigenschaften und insbesondere auch ganz verschiedene Atomrefractionen zeigen kann, nach meiner Ansicht als unabweisbar. Der Übergang eines bloßen Gemenges verschiedenartiger Stoffe in den Zustand einer chemischen Verbindung derselben beruht dann wesentlich nicht auf einer Veränderung der gegenseitigen Stellungen der bezüglichen Atome, sondern auf einer Veränderung der inneren oder substanziellen Structur dieser Atome selbst, welche, vom

Wechsel der sonstigen Eigenschaften abgesehen, nach obiger Folgerung immer auch einen entsprechenden Wechsel des specifischen Brechungs- und Dispersionsvermögens mit sich bringt.

Durch eine vor kurzem erschienene Abhandlung E. v. Oppolzer's[1] ist die Frage nach der Mitbewegung des Lichtes in einem bewegten durchsichtigen Körper in Verfolg eines von Doppler herstammenden Gedankens neu angeregt worden. Auf Grund der oben ausgesprochenen Anschauung lässt sich diese Frage theoretisch leicht beantworten.

Der vorhin gedachte cylindrische Körper bewege sich, während ihn wieder in seiner Längsrichtung homogene Lichtstrahlen durchsetzen, in gleicher Richtung wie diese mit constanter Geschwindigkeit fort. Der Weg, den die Strahlen dann von ihrem Eintritte in den Körper bis zu ihrem Austritte durchlaufen, begreift nebst der Länge s des Körpers noch jene Strecke in sich, welche dieser inzwischen zurücklegt und welche $= gt$ ist, wenn g die Geschwindigkeit seiner Fortbewegung und t die von den ihn durchsetzenden Strahlen in ihm zugebrachte Zeit bedeutet. Es bezeichne nun α den Coefficienten der Mitbewegung der Strahlen und also αg den Zuwachs, welchen ihre für den ruhenden Körper geltende Geschwindigkeit c durch Mitbewegung erfährt, so legen dieselben den Weg $s+gt$ mit der Geschwindigkeit $c+\alpha g$ zurück, und man hat daher für die Zeit t den Ausdruck

$$t = \frac{s+gt}{c+\alpha g} = \frac{s}{c-(1-\alpha)g}.$$

Die von den Strahlen in den Atomen zugebrachte Zeit ist nach obiger Bezeichnung wieder $= \frac{\sigma}{\chi}$. Da sie in diesen durch Fortpflanzung den Weg σ und durch Mitbewegung zugleich den Weg $\frac{g\sigma}{\chi}$ zurücklegen, so ist der von denselben im Äther zwischen den Atomen zurückgelegte Weg

[1] Erdbewegung und Äther. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXI, Abth. IIa, Februar 1902.

$$= s+gt-\sigma-\frac{g\sigma}{\varkappa},$$

welcher, den vom Körper durchfurchten Äther selbst als relativ ruhend vorausgesetzt, mit der Geschwindigkeit γ durchlaufen wird; die Zeit t muss demnach der Bedingung

$$t = \frac{\sigma}{\varkappa} + \frac{s+gt-\sigma-\frac{g\sigma}{\varkappa}}{\gamma}$$

genügen, und somit erhält man, hier für t den betreffenden obigen Ausdruck setzend, zur Bestimmung des Mitbewegungsfactors α die Gleichung

$$\frac{s}{c-(1-\alpha)g} = \frac{\sigma}{\varkappa} + \frac{s-\sigma-\frac{g\sigma}{\varkappa}}{\gamma} + \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{s}{c-(1-\alpha)g},$$

aus welcher duch entsprechende Umformung

$$\left(\frac{\sigma}{\varkappa} + \frac{s-\sigma-\frac{g\sigma}{\varkappa}}{\gamma}\right)(1-\alpha)g =$$

$$= -s+\left(\frac{\sigma}{\varkappa}+\frac{s-\sigma}{\gamma}\right)c+\left(s-\frac{c\sigma}{\varkappa}\right)\frac{g}{\gamma}$$

folgt. Die von g freien Glieder dieser Gleichung heben sich gemäß der für den Körper in der Ruhe geltenden Beziehung gegenseitig auf; wenn man die übrigbleibenden Glieder durch g dividiert und das dann noch mit g behaftet bleibende Glied als vergleichsweise verschwindend klein vernachlässigt, so bekommt man

$$\left(\frac{\gamma\sigma}{\varkappa}+s-\sigma\right)(1-\alpha) = s-\frac{c\sigma}{\varkappa}.$$

Mit Einführung der beiden Brechungsindices n und ν folgt hieraus

$$(\nu\sigma+s-\sigma)(1-\alpha) = s-\frac{\nu\sigma}{n};$$

den unbekannten Brechungsindex ν kann man mittels der Gleichung

$$\nu = 1 + (n-1)\frac{s}{\sigma}$$

eliminieren, wodurch einfach

$$ns(1-\alpha) = \frac{s-\sigma}{n}$$

wird, und es resultiert also, da nach obigem das Verhältnis $\frac{\sigma}{s} = \frac{d}{\delta}$ ist, für den Mitbewegungsfactor α die Formel

$$\alpha = \frac{n^2 - 1 + \frac{d}{\delta}}{n^2}.$$

Bezüglich der Frage nun, ob diese Formel der Wirklichkeit entspricht, kommen zunächst die Gase, da bei ihrer gewöhnlichen Dichte der Wert von α wegen seiner Kleinheit sich aller Beobachtung entziehen dürfte, nicht in Betracht. Bei flüssigen und festen Körpern dagegen wird sich durch künftige experimentelle Bestimmungen des Factors α vielleicht constatieren lassen, dass hier die Mitbewegung des Lichtes wirklich immer eine nicht unbedeutend andere ist, als sie gemäß der Fresnel'schen Formel, wonach $\alpha = \frac{n^2-1}{n^2}$ wäre, sein müsste.[1] Es scheint nämlich, dass bei den genannten Körpern der Quotient $\frac{d}{\delta}$ oder das Verhältnis $\frac{\sigma}{s}$ des von den Atomen erfüllten Raumes zum ganzen Körpervolumen keineswegs für

[1] Für das Wasser, wo $n = \frac{4}{3}$ und $\frac{n^2-1}{n^2} = 0 \cdot 437$ ist, fand Fizeau im Jahre 1851 durch seinen betreffenden Interferenzversuch, dass die Geschwindigkeitszunahme des Lichtes, wenn es im bewegten Wasser im Sinne von dessen Bewegung sich fortpflanzt, die Hälfte der Geschwindigkeit des Wassers beträgt. Da so $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, folgt für diese Flüssigkeit aus obiger Formel $\frac{d}{\delta} = \frac{1}{9}$, d. h. die Atome des Wassers sind 9mal dichter als dieses. Anderseits fanden im Jahre 1886 Michelson und Morley auf gleichem Wege für dieselbe Flüssigkeit, fast genau der Fresnel'schen Formel gemäß, $\alpha = 0 \cdot 434$ mit einem möglichen Fehler von $0 \cdot 02$, nach welchem $\frac{d}{\delta}$ keinesfalls größer als $\frac{1}{34}$ sein könnte. Letzteres Resultat dürfte das weniger wahrscheinliche sein.

alle Fälle sehr klein ist, sondern vielmehr, wenigstens für die Metalle, sogar sich der Einheit nähern kann. Ich schließe dies aus der bedeutungsvollen Thatsache, dass bei einigen Metallen, und zwar bei Silber, Gold und Kupfer, wozu nach Drude auch das Magnesium kommt, der Brechungsexponent n kleiner als 1 wird, einer größeren Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den Atomen als im Äther entsprechend.

Bei Silber fand Kundt für weißes Licht experimentell im Mittel $n = 0\cdot27$. Hieraus folgt diesbezüglich

$$\frac{d}{\delta} = \frac{0\cdot73}{1-\nu};$$

da in solchem Falle $\nu < 1$ sein muss, so ist demnach für dieses Metall

$$\frac{d}{\delta} > 0\cdot73,$$

d. h. der von den Atomen erfüllte Raum beträgt im Silber jedenfalls mehr als 0·73 des ganzen Körpervolumens.

Ich halte dieses Ergebnis zugleich für einen sicheren Beweis dafür, dass bei der Fortpflanzung des Lichtes im Silber weit überwiegend nicht der Äther, sondern die Substanz der ponderablen Atome das fortpflanzende Medium ist. Man darf sonach in Ansehung der enormen, etwa das Vierfache derjenigen im Äther betragenden Geschwindigkeit, womit das Licht in diesem Metalle sich fortpflanzt, vielleicht vermuthen, dass sein an erster Stelle stehendes Leitungsvermögen für Wärme und Elektricität wesentlich auf der unbekannten, aber offenbar außerordentlich großen Elasticität seiner einander sehr nahen Atome beruht. Eine gewisse, jedenfalls große Elasticität entspricht überhaupt auch der allgemein angenommenen Unzusammendrückbarkeit der Atome.

Es sei als bemerkenswert noch hervorgehoben, dass nach der hier abgeleiteten Formel der Mitbewegungsfactor α des einen bewegten Körper durchsetzenden Lichtes in dem Falle, wenn (was im Spectrum bei Gold und Kupfer vorkommt) der Brechungsindex $n = 1$ ist, nicht verschwindet, wie es die Fresnel'sche Formel verlangen würde, sondern $= \frac{d}{\delta}$ wird; es

findet also diesfalls eine Mitbewegung des Lichtes statt, und zwar wird dasselbe beschleunigt oder verzögert, je nachdem es durch den Körper im Sinne seiner Fortbewegung oder im entgegengesetzten Sinne hindurchgeht. In dem möglich scheinenden Falle, dass $n = \sqrt{\left(1 - \frac{d}{\delta}\right)}$ ist, wird $\alpha = 0$; die Bewegung des Körpers lässt dann die Geschwindigkeit des ihn durchsetzenden Lichtes unverändert. Geht n unter den vorigen Wert herab, so wird α negativ, das Licht wird also verzögert, wenn es durch den Körper im Sinne seiner Bewegung geht, und es wird beschleunigt, wenn es im entgegengesetzten Sinne sich fortpflanzt. Diese Folgerungen werden sich allerdings durch Versuche vielleicht nicht prüfen lassen.

Das Bisherige betrifft die Mitbewegung des Lichtes in einem bewegten durchlässigen Körper für die Bedingung, dass die Richtung der Fortpflanzung desselben in die Richtung der Fortbewegung des Körpers falle; das Licht wird dann durch die Mitbewegung allgemein entweder beschleunigt oder verzögert, während seine Fortpflanzungsrichtung nicht alteriert wird. Fällt dagegen das Licht auf den bewegten durchlässigen Körper senkrecht zu dessen Bewegungsrichtung ein, so wird dasselbe durch die Mitbewegung im Körper ersichtlich weder beschleunigt noch verzögert, sondern nur von seiner Fortpflanzungsrichtung abgelenkt, und der Betrag dieser Ablenkung hängt einfach nur von dem Verhältnisse der Mitbewegung zu dem gleichzeitig im Körper zurückgelegten Wege ab.

Bewegt sich der oben gedachte cylindrische Körper, in seiner Längsrichtung von Lichtstrahlen getroffen, senkrecht zu dieser Richtung mit der Geschwindigkeit g fort, so werden die denselben durchsetzenden Strahlen, während sie mit der entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Weglänge s zurücklegen, senkrecht dazu durch Mitbewegung in der Substanz seiner Atome um die Strecke $\frac{g\tau}{\varkappa}$ fortgeführt; die Ablenkung der Strahlen wird daher meiner Anschauung gemäß durch das Verhältnis

$$\frac{g\tau}{\varkappa} : s$$

bestimmt, und es ist, wenn β den jedenfalls sehr kleinen Ablenkungswinkel vorstellt,

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{g\sigma}{\varkappa s} = \frac{\nu\sigma}{s} \cdot \frac{g}{\gamma}$$

oder, wenn man hier ν durch die betreffende obige Formel ausdrückt und zugleich $\frac{\sigma}{s} = \frac{d}{\delta}$ setzt,

$$\operatorname{tang} \beta = \left(n - 1 + \frac{d}{\delta}\right) \frac{g}{\gamma}.$$

Man ersieht dabei, dass nach dieser Formel die Ablenkung β auch in dem Falle, wenn $n < 1$ ist, immer positiv bleibt. Wie zu erwarten, zeigt sich, dass bewegte Gase von gewöhnlicher Dichte die senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung auf sie einfallenden Strahlen nicht merklich abzulenken vermögen und dass insbesondere die Atmosphäre der Erde, mit dieser im Weltraume sich fortbewegend, auf die Größe der Aberration keinen in Betracht kommenden Einfluss ausüben kann.

Bedeutet b diejenige Ablenkung, welche stattfände, wenn die Strahlen an der Bewegung des durchsetzten Körpers vollauf theilnähmen, so ist

$$\operatorname{tang} b = \frac{g}{c} = \frac{ng}{\gamma},$$

und hiemit erhält man aus der vorigen Gleichung:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{n - 1 + \frac{d}{\delta}}{n} \operatorname{tang} b.$$

Da die Ablenkungswinkel β und b für alle möglicherweise vorkommenden Fälle sehr klein sind, kann man in dieser Gleichung für die Tangenten auch die Winkel selbst setzen, wodurch unmittelbar

$$\beta = \frac{n - 1 + \frac{d}{\delta}}{n} b$$

wird; es ergibt sich also die wirkliche Ablenkung, wenn man diejenige, welche der vollen Mitbewegung entspräche, mit dem Factor

$$\frac{n-1+\frac{d}{\delta}}{n}$$

multipliciert.

Die vorangehende Gleichung würde sich ohne weiteres auch auf den vielleicht entscheidungsvollen, von Egon v. Oppolzer vorgeschlagenen optischen Versuch mit einer rotierenden cylindrischen Glasscheibe anwenden lassen.

Bei einem Scheibendurchmesser von 1 *m* und 1800 Umdrehungen in der Minute berechnet sich die Ablenkung des diametral durch die Scheibe gehenden Lichtes unter der Annahme vollständiger Mitbewegung, wie v. Oppolzer in seiner oben citierten Abhandlung näher ausführt, für Flintglas $= 0 \cdot 226''$ und für Crownglas $= 0 \cdot 207''$; es ist daher diesfalls nach dem Vorigen, wenn ρ die wirkliche rotatorische Ablenkung bedeutet, für Flintglas ($n = 1 \cdot 74$):

$$\rho = \frac{0 \cdot 74 + \frac{d}{\delta}}{1 \cdot 74} \times 0 \cdot 226''$$

und für Crownglas ($n = 1 \cdot 60$):

$$\rho = \frac{0 \cdot 60 + \frac{d}{\delta}}{1 \cdot 60} \times 0 \cdot 207''.$$

Wenn es möglich wäre, durch Versuche der angedeuteten Art die Lichtablenkung ρ mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen, ließe sich auf diese Weise für die bezüglichen Glassorten das unbekannte Verhältnis $\frac{d}{\delta}$ ermitteln. Gewiss ist, dass solche Versuche in jeder Hinsicht von hohem Interesse wären und zur Erkenntnis der Beziehung zwischen Körpersubstanz und Äther einen wichtigen Beitrag liefern könnten.

Krystallographisch-optische Bestimmungen

(5. Reihe)

von

Viktor v. Lang,
w. M. k. Akad.

(Mit 59 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juni 1902.)

1. Hydroschwefligsaures Zink

ZnS_2O_4.

Siehe A. Nabl, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIb, 1899, S. 432.

Krystallsystem rhombisch.

$$a:b:c = 1:0\cdot9827:0\cdot5596.$$

Formen 100, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
{ 100.110 =	45° 30′	
{ 110.1$\bar{1}$0	91 0	*91° 0′
{ 110.111	51 24	51 15
{ 111.$\bar{1}\bar{1}$1	77 12	
1$\bar{1}$0.111	90 37	90 40
111.1$\bar{1}$1	52 50	*52 50
{ 100.111	64 4	
{ 111.$\bar{1}$11	51 52	

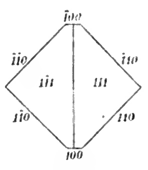


Fig. 1.

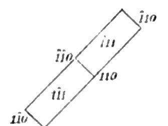


Fig. 2.

Die Form 111 kommt nur halbflächig vor, und zwar, wie die vorstehenden Projectionen zeigen, in zweierlei Weise, so dass hieraus kein Argument etwa für das monoklinische System abgeleitet werden kann. Auch das optische Verhalten spricht für das rhombische System, indem die Ebene der optischen Axe genau senkrecht zur Längsrichtung der Krystalle, also senkrecht zur *Z*-Axe liegt. Durch die Prismenflächen sieht man am Rande des Gesichtsfeldes eine optische Axe, die andere fällt schon hinaus, doch scheint der Axenwinkel sehr klein und der Charakter negativ zu sein.

2. Magnesium-Platincyanür

$MgPtCy_4 + 7H_2O$.

Krystalle von Hofrath Lieben.

Als ich die magnetischen Eigenschaften dieses tetragonalen Salzes untersuchte, bemerkte ich, dass die einzigen Messungen, die vor langer Zeit Dr. Springer, Pogg. Ann., Bd. 71, 1847, S. 328 anstellte, einer Verbesserung bedürfen. Ich fand

$$a : c = 1 : 0 \cdot 6103.$$

	Gerechnet	Beobachtet	Springer
{ 111.001 =	40° 48′	*40° 48′	39° 39′
{ 111.$\bar{1}\bar{1}$1	81 36		79 18
111.100	62 29	62 37	63 10·5
111.$\bar{1}$11	55 2	55 5	

3. Anilinkobaltcyanid.

Krystallsystem rhomboedrisch.

$$bc = ca = ab = 50° 47'.$$

Formen: 111, 10$\bar{1}$, 100, 211, 011, 321.

	Gerechnet	Beobachtet
111.100 =	74° 4′	
111.211	41 12	
111.011	60 20	
111.321	45 23	45° 57′
321.10$\bar{1}$	44 37	*44 37
10$\bar{1}$.100	33 36	33 50
100.101	56 24	56 17
10$\bar{1}$.110	41 14	41 18
110.231	29 51	
231.121	18 55	
110.011	97 32	
231.132	37 50	
10$\bar{1}$.211	55 13	
211.112	69 34	
10$\bar{1}$.312	69 9	
312.213	41 42	
100.321	37 23	
321.121	58 6	
321.132	76 6	

Fig. 3.

Große Krystalle, durchsichtig, stellenweise bräunlich, auch bläulich gefärbt und prismatisch nach der morphologischen Axe. Die dünneren sind nur Combinationen des Grundrhomboeders (100) mit dem ersten Prisma 10$\bar{1}$, die dickeren sind dagegen flächenreicher, wie aus der beistehenden horizontalen Projection ersichtlich ist.

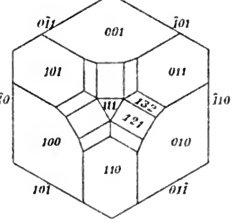


Fig. 4.

Der optische Charakter ist positiv; durch die Prismenflächen kann man trotz der beträchtlichen Dicke bei Natriumlicht den negativen Charakter der Nebenaxe erkennen.

4. Hydrazid des Acetessigsäuremethylesters.

Siehe P. Cohn und S. Tauss, Ber. d. d. chem. Ges., J. 33, 1900, S. 731.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a:b = 0\cdot9456:1, \quad ac = 95° 9'.$$

Formen 001, 110.

	Beobachtet
$110.1\bar{1}0 =$	86° 34′
110.001	86 15

Die Krystalle sind Tafeln nach der Fläche 001, am Rande durch die Flächen 110 begrenzt. Da keine anderen Flächen gefunden wurden, konnte das Axenverhältnis nicht vollständig bestimmt werden.

Die Gleichheit der angeführten Winkel könnte das rhomboedrische System vermuthen lassen. Allein durch die Fläche 001 ist es möglich, noch eine der optischen Axen zu sehen, und man erkennt, dass dieselben in der Symmetrieebene liegen.

5. Acetoxylharnstoff

$C_5H_8N_2O_2$.

Siehe J. Heilpern, diese Sitzungsber., Bd. 105, IIb, 1896, S. 200.

Krystallsystem triklinisch.

$$a:b:c = 1:0\cdot8241:0\cdot6540.$$

$bc =$	82° 14′	010.001 =	96° 19′
ca	101 44	001.100	79 10
ab	98 1	100.010	83 22

Formen 100, 010, 001, 110, $1\bar{1}0$, 111, $\bar{1}11$, $1\bar{1}1$, $\bar{1}\bar{1}1$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	79° 10′	*79° 10′
100.111	51 23	
111.1̄11	56 25	
1̄11.1̄00	72 12	
100.11̄1	60 36	
11̄1.1̄1̄1	52 5	
1̄1̄1.1̄00	67 19	
01̄0.001	83 41	*83 41
010.111	59 51	
111.11̄1	52 12	
11̄1.01̄0	67 57	
010.1̄11	60 48	
1̄11.1̄1̄1	72 21	72 28
1̄1̄1.010	47 51	*47 51
100.110	46 17	*46 17
110.010	37 5	*37 5
010.1̄10	42 30	42 40
1̄10.1̄00	54 8	
110.111	41 54	
111.001	46 9	
001.1̄1̄1	48 14	48 15
1̄1̄1.1̄1̄0	43 48	43 20
001.1̄1̄0	92 2	91 50
1̄10.1̄11	52 42	52 40
1̄11.001	49 52	50 18
001.11̄1	37 49	
11̄1.11̄0	39 37	39 —

Fig. 5.

Da die Prismenflächen 110, 11̄0 sehr schmal sind, so haben die Krystalle einen kugelförmigen Habitus.

6. Ferriacetylaceton

$Fe(C_5H_7O_2)_3$?

Krystalle von Herrn F. Gach.

Krystallsystem rhombisch.

$$a:b:c = 1:1·7580:2·1490.$$

Formen 010, 001, 011, 021, 110.

	Gerechnet	Beobachtet
011.001 =	50° 43′	51° —
021.001	67 45	67 45′
011.021	17 2	
010.110	60 22	60 22
110.1$\bar{1}$0	59 16	
110.011	67 30	
110.021	62 46	

Fig. 6.

Die sehr kleinen Krystalle haben die Gestalt von sechsseitigen Tafeln, welche senkrecht zur ersten Mittellinie sind, doch kann man im weißen Lichte kaum die eigentlichen Axenbilder sehen. Wegen der rothen Farbe der Krystalle ist im Na-Lichte gar nichts mehr zu erkennen, dagegen sieht man die Axenbilder bei Li-Beleuchtung sehr gut. Die Axenebene ist senkrecht zur Fläche 010, der optische Charakter negativ und der scheinbare Axenwinkel etwa 50°. Diese Plättchen sind auch dichroitisch, und zwar sind die Schwingungen parallel der zweiten Mittellinie licht, senkrecht dazu dunkel. Das Schema der optischen Orientierung ist nach dem Vorhergehenden ab.

7. Aluminium-Acetylaceton

$Al(C_5H_7O_2)_3$.

Siehe F. Gach, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIb, 1899, S. 768.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a:b:c = 1·901:1:1·3610,$$
$$ac = 98° 54′.$$

Formen: 100, 001, 110, $\bar{1}01$, $\bar{1}03$.

	Gerechnet		Beobachtet		
100.001 =	81°	6′	*81°	6′	
{ 100.110	61	58	*61	58	
{ 110.$\bar{1}$10	56	4	55	55	
110.001	85	50	86	50	
100.$\bar{1}$01	62	24	*62	24	?
100.$\bar{1}$03	28	0	27	—	?

Der Habitus der Krystalle ist durch das Vorherrschen der Flächen 100 und 001 bestimmt, welche den Krystallen ein prismatisches Ansehen geben. Die Flächen $\bar{1}01$ und $\bar{1}03$ wurden ein einzigesmal als schmale Abstumpfungen der Kante [001.$\bar{1}$00] beobachtet, wobei es aber sehr zweifelhaft blieb, ob die Lichtreflexe von wirklichen Flächen herrührten. Es bleibt also die Länge der Axe *c* ganz unsicher.

Bei Na-Licht erkennt man auf der Fläche 100, dass die Ebene der optischen Axen parallel der Symmetrieebene ist, die Axenpunkte liegen außerhalb des Gesichtsfeldes, aber anscheinend unsymmetrisch gegen die Flächennormale, welche negativ ist. Fläche 001 erweist sich entsprechend positiv. Auch hier sind die Axen nicht zu sehen, doch scheint hier die Unsymmetrie stärker zu sein.

8. Äpfelsaures Mangan.

Krystalle von Dr. Pomeranz.

Diese Verbindung wird von Prof. Handl als tetragonal mit einem Axenverhältnisse $a:c = 1:1{\cdot}3064$ beschrieben (diese Sitzungsber., Bd. 32, 1858, S. 254). Hiemit stimmten meine Messungen vollkommen überein, dagegen zeigte die optische Untersuchung, dass die scheinbar tetragonalen Pyramiden, in denen diese Krystalle auftreten, aus vier zweiaxigen Individuen zusammengesetzt sind, die zum mindesten dem rhombischen System angehören. Nachstehende Figur zeigt die Erscheinung, welche eine zur scheinbaren tetragonalen Axe senkrechte Platte

im Polarisationsapparate bietet. Die Trennungslinien der vier Individuen fallen mit den Diagonalen des quadratischen Querschnittes zusammen, während jedes Individuum zwei optische Axen senkrecht zu den Kanten des Querschnittes zeigt. Der Axenwinkel ist allerdings sehr klein, doch kann man mit der Glimmerplatte den positiven Charakter der ersten Mittellinie constatieren.

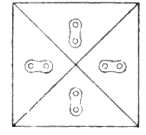


Fig. 7.

9. Diacetylmesoweinsäurenitril

$C_8H_8N_2O_4$.

Siehe F. Pollak, diese Sitzungsber., Bd. 103, IIb, 1894, S. 432.

Krystallsystem rhombisch.

$a:b:c = 0\cdot7150:1:0\cdot6809.$

Formen: 100, 010, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
100.111 =	51° 48′	*51° 48′
111.$\bar{1}$11	76 24	
010.111	63 45	*63 45
111.1$\bar{1}$1	52 30	52 43
111.11$\bar{1}$	81 2	81 30

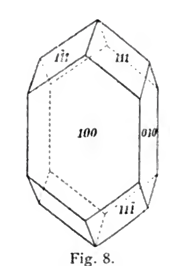


Fig. 8.

Die Krystalle sind dicke Tafeln durch das Vorherrschen der Fläche 100 und sind spaltbar parallel 010.

Durch die Fläche 100 im Polarisationsapparat betrachtet, zeigen die Krystalle, dass die Ebene der optischen Axe senkrecht zur *Z*-Axe ist. Mit Hilfe der Na-Flamme erkennt man ferner den negativen Charakter der *X*-Axe.

Dementsprechend zeigen Platten parallel der Spaltungsfläche positiven Charakter, auch lassen sie die Axen am äußersten Rande des Gesichtsfeldes erkennen, so dass die *Y*-Axe wahrscheinlich erste Mittellinie ist. Das Schema der optischen Orientierung wird daher $\mathfrak{c}\mathfrak{a}\underset{+}{\mathfrak{b}}$.

10. Diacetyltraubensäurenitril

$C_8H_8N_2O_4$.

Siehe F. Pollak, diese Sitzungsber., Bd. 103, IIb, 1894, S. 438.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1 \cdot 2569 : 1 : 2 \cdot 6102,$$
$$ac = 97° \, 15'.$$

Formen: 100, 001, 011, 110.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	82° 45′	*82° 45′
{ 001.011	68 53	*68 53
{ 011.01$\bar{1}$	42 14	
{ 100.110	51 16	*51 16
{ 110.$\bar{1}$10	77 28	77 28
001.110	85 28	85 31
011.110	40 53	
011.$\bar{1}$10	45 38	45 30

Fig. 9.

Vorherrschend ist die Fläche 001, an manchen Krystallen ist auch die Fläche 100 stark entwickelt, während sie bei anderen mit der Fläche 110 im Gleichgewichte ist. Die ersteren Krystalle haben einen prismatischen, die letzteren einen tafelförmigen Habitus.

Wie die Untersuchung der Krystalle im Na-Lichte lehrt, scheint die Ebene der optischen Axen parallel der Symmetrieebene zu sein; eine Mittellinie ist nahezu senkrecht zur Fläche 100 und hat positiven Charakter.

11. Iso-α-Methylglutaconsäure

$C_6H_8O_4$.

Siehe Th. v. Smoluchowsky, diese Sitzungsber., Bd. 102, IIb, 1893, S. 790.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 8360 : 1 : 0 \cdot 4558,$$
$$ac = 100° \, 33'.$$

Formen: 100, 101, $\bar{1}01$, 110.

	Gerechnet	Beobachtet
100.101 =	53° 28′	53° 30′
101.$\bar{1}$01	56 45	*56 45
$\bar{1}$01.$\bar{1}$01	69 47	*69 47
100.110	39 25	*39 25
110.$\bar{1}$10	101 10	
110.101	62 37	62 19
110.10$\bar{1}$	74 31	74 33

Fig. 10.

Die Krystalle sind nach der Symmetrieaxe verlängert.

Die Ebene der optischen Axe ist parallel der Symmetrieaxe, wobei die positive Mittellinie nahezu senkrecht zur Fläche 101 ist. Da die Axenpunkte schon außerhalb des Gesichtsfeldes liegen, konnte nicht entschieden werden, ob dies die erste Mittellinie ist, auch konnte ihr Charakter nur bei Na-Licht ermittelt werden.

12. Zersetzungsproduct $C_6H_8O_4$ aus δ-Oxy-α-Methylglutarsäure, wahrscheinlich α-Methylglutaconsäure.

Siehe Th. v. Smoluchowski, diese Sitzungsber., Bd. 102, IIb, 1893, S. 797.

Krystallsystem triklinisch.

$$a:b:c = 1:0\cdot8152:0\cdot9540.$$

bc =	66° 13′	010.001 =	107° 51′
ca	109 27	001.100	78 47
ab	134 4	100.010	70 13

Formen: 100, 010, 001, 011, $\bar{1}01$, $1\bar{1}0$, $1\bar{2}0$, $\bar{1}11$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	78° 47′	79° 12′
001.$\bar{1}$01	49 22	
$\bar{1}$01.$\bar{1}$00	51 51	
100.011	62 50	
011.$\bar{1}$11	47 30	*47 30
$\bar{1}$11.$\bar{1}$00	69 40	*69 40

Fig. 11.

	Gerechnet	Beobachtet
$010.011 =$	50° 51′	
011.001	57 0	
$001.0\bar{1}0$	72 9	
$010.\bar{1}11$	67 20	*67° 20′
$\bar{1}11.\bar{1}01$	53 10	52 52
$\bar{1}01.0\bar{1}0$	59 30	
010.100	70 13	*70 13
$100.1\bar{1}0$	59 57	*59 57
$1\bar{1}0.1\bar{2}0$	23 48	
$1\bar{2}0\ 0\bar{1}0$	26 2	
$100.\bar{1}20$	96 25	96 44
$1\bar{1}0.001$	63 54	
$001.\bar{1}11$	65 37	
$\bar{1}11.\bar{1}10$	50 29	

Die Krystalle sind nach der *Z*-Axe verlängert.

13. Ammoniumsalz der *o, p*-Dinitrophenylamincarbonsäure.

Siehe P. Cohn, diese Sitzungsber., Bd. 110, IIb, 1901, S. 303.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a:b:c = 1·9337:1:1·9227,$$
$$ac = 107° 47'.$$

Formen: 001, 110, $\bar{1}01$, 103, $\bar{2}79$.

	Gerechnet	Beobachtet
$110.\bar{1}10 =$	56° 58′	*56° 58′
$\bar{1}01.001$	53 40	53 56
001.103	16 0	15 55
$\bar{1}01.103$	69 40	*69 40
110.103	74 37	*74 37
110.001	81 37	81 27
$10\bar{1}.110$	73 46	74 0
$110.\bar{2}79$	41 5	41 4
$\bar{2}79.\bar{1}01$	65 9	64 56
$\bar{1}10.\bar{2}79$	45 3	45 35

Fig. 12.

Die Krystalle sind nach der Symmetrieaxe Y verlängert. Vorstehende Figur gibt die Projection auf die Symmetrieebene. Von der Form $\bar{2}79$ wurde nur ein Flächenpaar beobachtet, doch spricht auch das optische Verhalten für das monoklinische System. Die Ebene der optischen Axe ist parallel der Symmetrieebene, durch die Fläche $\bar{1}01$ ist eine Axe sichtbar.

14. 4-Chlor-*m*-Phenylendiamin

$C_6H_7N_2Cl$.

Siehe P. Cohn und A. Fischer, diese Sitzungsber., Bd. 109, II b, 1900, S. 155.

Krystallsystem rhombisch.

$$a:b:c = 0\cdot 7106:1:0\cdot 6375.$$

Formen: 100, 110, 011, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
100.110 =	35° 24′	35° 22′
110.$\bar{1}$10	109 12	109 12
100.111	52 54	56 —
111.011	37 6	
111.0$\bar{1}$0	70 20	
011.0$\bar{1}$0	65 2	*65 2
110.011	71 51	71 36
111.110	42 16	
111.1$\bar{1}$0	75 55	
111.1$\bar{1}$1	70 46	

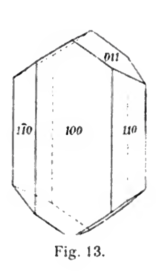


Fig. 13.

Die meisten der rothbraun gefärbten Krystalle sind durch das Vorherrschen der Fläche 100 tafelförmig, doch tritt diese Fläche manchmal ganz zurück, wodurch der Habitus der Krystalle nadelförmig nach der Z-Axe wird. Die Fläche 111 konnte nur als unendlich schmale Abstumpfung der Kante 100.011 beobachtet werden und nur näherungsweise bestimmt werden.

Unvollkommen spaltbar parallel 001, noch schlechter nach 010. Spaltungsstücke nach der letzteren Fläche sind senkrecht zur ersten Mittellinie, welche negativen Charakter hat. Die Axenebene ist parallel der *Z*-Axe, die Axen am Rande des Gesichtsfeldes. Das Schema der optischen Orientierung wird $\underset{+}{c}$**ba**, was auch durch Beobachtungen auf der Fläche 100 und auf der anderen Spaltungsfläche bestätigt wurde.

15. 1 : 3 : 5-Chlorphenylendiamin

$C_6H_3Cl(NH_2)_2$.

Siehe P. Cohn, diese Sitzungsber., Bd. 110, IIb, 1901, S. 19.

Krystallsystem rhombisch.

$a:b:c = 0{\cdot}7115:1:0{\cdot}4709$.

Formen: 010.110.011.

	Gerechnet	Beobachtet
{ 010.110 =	54° 34′	
{ 110.0$\bar{1}$0	70 52	*70° 52′
{ 010.011	64 47	65 —
{ 011.0$\bar{1}$1	50 26	*50 26
110.011	75 42	75 47

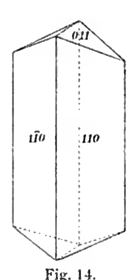


Fig. 14.

Die Krystalle sind prismatisch parallel der *Z*-Axe, die Fläche 010 ist äußerst schmal.

16. *p*-Phenylendicarbylamin.

Siehe F. Kaufler, diese Sitzungsber., Bd. 110, IIb, 1901, S. 914.

Krystallsystem triklinisch.

$a:b:c = 0{\cdot}9571:0{\cdot}8489:1$.

bc =	105° 15′	010.001 =	74° 41
ca	87 42	001.100	87 30
ab	107 38	100.010	72 16

Formen: 100, 001, $1\bar{1}0$, $0\bar{1}1$.

	Berechnet	Beobachtet
100.001 =	87° 30′	$87^1/_2$°
$100.1\bar{1}0$	59 49	
$1\bar{1}0.001$	102 0	102
$0\bar{1}1.001$	60 30	$60^1/_2$
$0\bar{1}1.100$	104 0	104
$0\bar{1}1.1\bar{1}0$	63 0	63

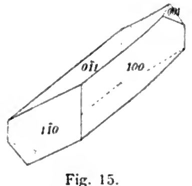


Fig. 15.

Die Krystalle eigneten sich sehr schlecht zur Messung, da die Flächen $1\bar{1}0$ und 001 immer abgerundet sind, es bleibt selbst die Bestimmung des Krystallsystems unsicher.

Der Habitus ist durch das Vorherrschen der Fläche $0\bar{1}1$ tafelförmig. Vollkommen spaltbar nach 001.

17. Dinitrochlortoluol

$C_7H_5N_2O_4Cl$.

Siche P. Cohn, diese Sitzungsber., Bd. 110, IIb, 1901, S. 394.

Krystallsystem rhombisch.

$$a:b:c = 0{\cdot}667:1:1{\cdot}015.$$

	Gerechnet	Beobachtet
{ 010.110 =	56° 18′	56° 1′
{ $110.1\bar{1}0$	67 24	*67 24
{ 010.011	44 35	44 20
{ 011.001	45 25	*45 25
{ $011.0\bar{1}1$	90 50	
011.110	66 43	66 30

Fig. 16.

Die Krystalle haben meistens die Form dünner Nadeln, gebildet durch das Prisma 110 und geschlossen durch Flächen, die nicht messbar waren. Andere Krystalle treten in dünnen Tafeln parallel der Fläche 010 auf, sie lieferten die obigen Beobachtungen.

18. 2-4-Nitrochlorbenzoesäure

C_6H_3, COOH, NO_2, Cl.

Krystalle von Dr. P. Cohn.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a:b:c = 0{\cdot}7449:1:0{\cdot}8226,$$
$$ac = 98^\circ\ 26'.$$

Formen: 100, 010, 110, 101, $10\bar{1}$, $30\bar{2}$, $\bar{1}11$, $\bar{1}21$.

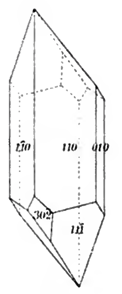


Fig. 17.

	Gerechnet	Beobachtet
100.101 =	38° 20′	38° 32′
$101.\bar{1}01$	95 44	*95 44
$\bar{1}01.\bar{1}00$	45 56	45 44
$\bar{1}00.\bar{3}02$	30 43	
110.010	53 32	
$110.1\bar{1}0$	72 56	*72 56
$010.\bar{1}11$	59 25	58 40
$010.\bar{1}21$	40 14	
110.101	50 53	*50 53
$101.\bar{1}\bar{2}1$	93 42	93 52
$\bar{1}\bar{2}1.\bar{1}\bar{1}0$	35 25	35 40
$\bar{1}11.\bar{1}10$	38 12	
$\bar{1}11.\bar{1}00$	53 13	
$\bar{1}21.\bar{1}00$	63 18	
$\bar{1}11.101$	94 56	
$\bar{1}11.\bar{3}02$	33 50	33 28

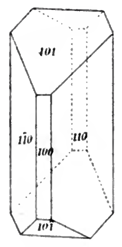


Fig. 18.

Die Krystalle sind nach der *Z*-Axe verlängert und treten in zwei verschiedenen Ausbildungen auf, je nachdem die Flächen 101 oder die Flächen $11\bar{1}$ vorkommen. Die Fläche $\bar{1}21$ wurde nur als schmale Abstumpfung der Kanten 110.101 beobachtet.

Spaltbar nach 100.

Bodewig hat schon eine 5-2-Nitrochlorbenzoesäure gemessen, welche ebenfalls monoklinisch ist mit nahezu demselben Axenwinkel 98° 17′ und derselben Spaltbarkeit nach 100, siehe Groth, Zeitschrift für Krystallographie, Bd. 5, 1881, S. 563. Die übrigen Abmessungen lassen sich aber nicht ganz einfach aufeinander beziehen. Es ist nämlich nach Bodewig

$$a:b:c = 5\cdot2588:1:2\cdot2955$$
$$= 7\times0\cdot7512:1:{}^{2}/_{5}\times0\cdot8114.$$

Um die Übereinstimmung herzustellen, müssten also die von Bodewig beobachteten Formen die Symbole 100, 001, 710, 502 erhalten, für welche aus meinem Axensystem folgt

100.710 =	79° 4′	79° 7½′ beobachtet
100.502	59 15	59 36 »

19. Hydrochinondiäthyläther.

Siehe E. Brezina, diese Sitzungsber., Bd. 110, IIb, 1901, S. 551.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a:b:c = 0\cdot9371:1:1\cdot2493,$$
$$ac = 109°\ 52'.$$

Formen: 010, 001, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	48° 36′	
110.1$\bar{1}$0	82 48	*82° 48′
110.111	25 27	
111.001	49 47	*49 47
110.001	75 14	*75 14
010.111	58 31	
111.1$\bar{1}$1	62 58	62 48
111.1$\bar{1}$0	77 33	

Fig. 19.

Die Krystalle sind meist sehr dünne Tafeln parallel der Fläche 001, die Flächen 111 und 010 kommen nie an dickeren Individuen vor.

Die Ebene der optischen Axe ist parallel der Symmetrieebene, eine optische Axe ist auf Fläche 001 zu sehen.

20. Bisoxyhydrochinonhexaäthyläther

$C_{12}H_4(OC_2H_5)_6$.

Siehe E. Brezina, diese Sitzungsber., Bd. 110, IIb, 1901, S. 547.

Krystallsystem triklinisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 6633 : 1 : 1 \cdot 2816.$$

bc =	101° 23′	010.001 =	78° 16′
ca	90 38·5	001.100	87 2
ab	100 35	100.010	78 18

Formen: 001, 111, $\bar{1}$11, 1$\bar{1}$1, $\bar{1}\bar{1}$1.

	Gerechnet	Beobachtet
$\bar{1}\bar{1}$1.001 =	75° 40′	75° 15′
001.111	61 24	*61 24
111.11$\bar{1}$	42 56	42 45
1$\bar{1}$1.001	68 10	*68 10
001.$\bar{1}$11	60 52	*60 52
$\bar{1}$11.$\bar{1}$1$\bar{1}$	50 58	50 57
111.$\bar{1}$11	93 43	*93 43
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$1	63 18	63 7
$\bar{1}\bar{1}$1.1$\bar{1}$1	104 54	*104 54
1$\bar{1}$1.111	60 22	60 41

Fig. 20.

Die wohl ausgebildeten Krystalle sind dünne Tafeln parallel der Fläche 001.

21. Triacetylmethylpyrogallol

$C_6H_2CH_3(OCOCH_3)_3$.

Siehe O. Rosauer, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 602.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1 \cdot 1892 : 1 : 1 \cdot 5447,$$
$$ac = 94° 44′.$$

Formen: 001, 101, 111, $\bar{1}$11.

	Gerechnet	Beobachtet
001.101 =	49° 27′	
101.10$\bar{1}$	75 9	*75° 9′
10$\bar{1}$.00$\bar{1}$	55 24	56 40
001.111	61 10	60 53
111.11$\bar{1}$	52 46	
11$\bar{1}$.00$\bar{1}$	66 4	67 —
101.111	42 6	42 14
111.$\bar{1}$1$\bar{1}$	95 48	
10$\bar{1}$.11$\bar{1}$	44 24	44 8
11$\bar{1}$.$\bar{1}$11	91 12	92 —
111.$\bar{1}$11	96 26	
111.10$\bar{1}$	79 2	
11$\bar{1}$.101	79 27	

Fig. 21.

Die anscheinend schönen Krystalle eignen sich nur schlecht zur Messung, so dass selbst Zweifel über das Krystallsystem möglich sind. Gegen das triklinische System spricht jedoch das optische Verhalten. Betrachtet man die nach der Fläche 001 tafelförmigen Krystalle im Polarisationsapparat, so sind die Hauptschnitte parallel und senkrecht zur Kante 101.001.

22. Monoamidotrimethylgallussäuremethyläther-Chlorhydrat

$C_6HNH_2, HCl(OCH)_3COOCH_3$.

Siehe A. M. Hamburg, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 655.

Krystallsystem rhombisch.

$$a : b : c = 0\cdot6486 : 1 : 0\cdot9490.$$

Formen: 001, 111, 221.

	Gerechnet	Beobachtet
001.111 =	60° 10′	*60° 10′
111.11$\bar{1}$	59 40	50 30
001.221	74 0	
221.22$\bar{1}$	32 0	
111.221	13 50	13 40

Fig. 22.

	Gerechnet	Beobachtet
111.$\bar{1}$11 =	93° 24′	*93° 24′
111.1$\bar{1}$1	56 20	
221.$\bar{2}$11	107 30	
221.2$\bar{1}$1	62 64	

Sehr gut spaltbar parallel 001.

Diese Fläche ist, wie man bei Na-Licht erkennt, senkrecht zur Normale der optischen Axen. Letztere sieht man auf einer senkrecht zur X-Axe geschliffenen Platte. Hiebei ist die zweite Mittellinie parallel der Y-Axe. Der optische Charakter ist negativ, AB beiläufig 70° und $\rho < v$. Das Schema der optischen Orientierung wird

$$\underset{+}{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

23. Amidomethylgallussäuremethyläther.

Siehe A. M. Hamburg, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 656.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0\cdot3998 : 1 : 0\cdot2917,$$
$$ac = 97° 14'.$$

Formen: 010, 011, $\bar{1}$01, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	68° 23′	68° 41′
110.1$\bar{1}$0	43 14	*43 14
110.111	45 14	
111.011	32 22	
011.$\bar{1}$01	41 18	*41 18
$\bar{1}$01.$\bar{1}\bar{1}$0	61 6	*61 6
111.$\bar{1}$01	73 40	74 —
010.011	73 52·5	
011.0$\bar{1}$1	32 15	
010.111	66 12	
111.1$\bar{1}$1	47 36	

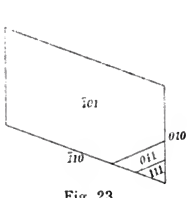


Fig. 23.

Die Flächen der Form 110 sind stets sehr ungleich entwickelt, mitunter fehlt ein Flächenpaar gänzlich wie in vorstehender Figur, welche eine Projection senkrecht zur *Z*-Axe vorstellt.

Die Krystalle sind rothbraun gefärbt und fluorescieren blau.

24. Phloroglucindiäthyläther.

Siehe H. Weidel und J. Pollak, diese Sitzungsber., Bd. 106, IIb, S. 347.

Krystallsystem tetragonal.

$$a : c = 1 : 0\cdot2817.$$

Formen: 100, 110, 111, π(311).

	Gerechnet	Beobachtet
010.131 =	50° 52′	50° 59′
010.111	74 50	74 47
131.111	23 58	23 47
111.1$\bar{1}$1	30 20	*30 20
110.111	68 17	68 21
111.$\bar{1}\bar{1}$1	43 26	
110.131	53 29	53 —
131.$\bar{1}$11	36 21	
131.13$\bar{1}$	96 36	97 —

Fig. 24.

Die Krystalle haben durch die gleiche Entwickelung der vollzähligen Formen einen dodekaederähnlichen Habitus. Die Form 311 ist hemisymmetrisch entwickelt: tetragonale Pyramide dritter Art.

Der optische Charakter ist positiv.

25. 3, 5-Diäthoxyorthochinon-2-Monoximäthyläther

$$C_6H_2+(OC_2H_5)NOC_2H_5.$$

Siehe H. Weidel und J. Pollak, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 369.

Krystallsystem triklinisch.

$$a : b : c = 0\cdot6322 : 1 : 0\cdot4857,$$

bc = 90° 10′		010.001 =	94° 34′
ca	62 24	001.100	117 57
ab	96 24	100.010	80 27

Formen: 010, 001, 110, $\bar{1}10$, 111, $1\bar{1}1$.

	Gerechnet	Beobachtet
010.001 =	94° 34′	94° 34′
110.010	53 38	*53 38
010.$\bar{1}$10	66 27	*66 27
$\bar{1}$10.$\bar{1}\bar{1}$0	59 55	59 56
010.111	62 15	*62 15
111.1$\bar{1}$1	50 7	*50 7
1$\bar{1}$1.0$\bar{1}$0	67 38	67 36
110.111	59 30	*59 30
111.001	55 29	
001.$\bar{1}\bar{1}$0	65 1	
$\bar{1}$10.001	65 42	
001.1$\bar{1}$1	49 36	
1$\bar{1}$1.1$\bar{1}$0	64 42	64 52
1$\bar{1}$0.111	85 38	
110.1$\bar{1}$1	89 5	

Fig. 25.

Die dunkelrothen, durchscheinenden Krystalle sind durch das Vorherrschen der Fläche 010 tafelförmig.

26. Äthyl-Pyriphloron-Diäthyläther (3, 5-Diäthoxy-Äthenyl-2-Amidophenol)

$C_{12}H_{15}NO_3$.

Siehe D. Moldauer, diese Sitzungsber., Bd. 105, 1896, S. 457.

Krystallsystem triklinisch.

$$a : b : c = 0\cdot4805 : 1 : 0\cdot4696.$$

bc = 89° 56′		010.001 =	80° 30′
ca	91 22	001.100	88 37
ab	99 30	100.010	89 50

Formen: 010, 001, 011, 101, 110, 1$\bar{1}$0.

	Gerechnet	Beobachtet
010.011 =	57° 7′	
011.001	23 23	
001.0$\bar{1}$0	99 30	
101.001	43 30	*43° 30′
110.010	63 52	*63 52
010.$\bar{1}$10	64 4	*64 4
$\bar{1}$10.$\bar{1}\bar{1}$0	52 4	
010.101	83 16	*83 16
110.101	46 46	47 6
110.001	84 37	
110.011	75 6	
$\bar{1}$10.011	77 19	
011.101	48 21	
101.1$\bar{1}$0	54 20	*54 20
$\bar{1}$10.001	87 11	

Fig. 26.

Die Flächen spiegeln im allgemeinen gut, nur die Flächen 001 und 011 sind sehr schlecht und schuppig. Erst nachträglich konnten für die Fläche 001 annähernde Messungen ausgeführt werden.

Die Krystalle sind nach der Fläche 010 plattenförmig.

27. Chlorhydrat des symmetrischen Diäthylamidomonooxybenzols

$C_{10}H_{18}N_2OCl_2$.

Siehe J. Pollak, diese Sitzungsber., Bd. 102, IIb, 1893, S. 444.

Krystallsystem triklinisch.

$$a : b : c = 1 : 0·3734 : 0·6749.$$

bc =	92° 31·5′	010·001 =	86° 26′
ca	96 41	001.100	83 19
ab	93 34	100.010	87 28·5

Formen: 100, 001, 110, $\bar{1}01$ und 101 nur als sehr gute Spaltungsfläche.

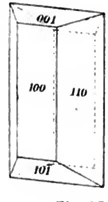


Fig. 27.

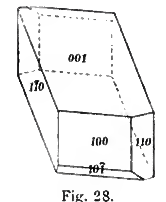


Fig. 28.

	Gerechnet	Beobachtet
$\bar{1}00.001$ =	96° 41′	96° 41′
100.101	51 26	51 27
101.001	31 53	
001.$\bar{1}01$	36 6	36 6
$\bar{1}01.\bar{1}00$	60 35	60 35
1$\bar{1}$0.100	71 38	71 38
100.110	67 13	67 13
110.$\bar{1}10$	41 9	41 20
110.001	84 23	84 11
1$\bar{1}$0.001	91 0	91 0
$\bar{1}\bar{1}0.\bar{1}01$	81 43	81 52
$\bar{1}10.\bar{1}01$	78 19	

Was den Habitus dieser Krystalle betrifft, so herrscht bei einem Theile derselben die Fläche 001 vor, so dass manche Krystalle ein plattenförmiges Aussehen erhalten. Andere Krystalle sind jedoch gerade nach der Z-Axe gestreckt, indem die Flächen der Zone [100.110] vorherrschen.

28. Diacetylderivat des symmetrischen Diäthylamidomonoxybenzols

$C_{14}H_{20}O_3N_2$.

Siehe J. Pollak, diese Sitzungsber., Bd. 102, 1893, S. 448.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0\cdot8054 : 1 : 0\cdot4059,[1]$$
$$ac = 91° 13'.$$

Formen: 100, 010, 111, $\bar{1}11$, $\bar{1}21$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.010 =	90° 0′	89° 50′
100.111	64 3	*64 3
111.$\bar{1}11$	50 3	49 40
$\bar{1}11$.100	65 54	*65 54
$\bar{1}00$.$\bar{1}21$	69 27	69 6
010.111	70 14	69 40
111.$1\bar{1}1$	39 32	39 10
010.$\bar{1}11$	69 55	*69 55
$\bar{1}11$.$\bar{1}\bar{1}1$	40 10	
010.$\bar{1}21$	53 50	54 5
$\bar{1}21$.$\bar{1}\bar{2}1$	72 20	
$\bar{1}11$.$\bar{1}21$	16 8	

Fig. 29.

Vollkommen spaltbar nach 100.

Außer den Krystallen von monoklinem Habitus, der in der Figur dargestellt ist, kommen auch solche vor, wo die beiden Hemipyramiden 111 und $\bar{1}11$ ziemlich gleich entwickelt sind, so dass dieselben einen rhombischen Charakter erhalten. Da die Messungen bei der schlechten Beschaffenheit der Flächen auch nicht mit großer Genauigkeit auszuführen waren, so würde bei der geringen Schiefe das Krystallsystem zweifelhaft bleiben, wenn nicht das optische Verhalten für das monokline

[1] Neu berechnet.

System sprechen würde. Während auf der Theilungsfläche die optischen Hauptschnitte parallel und senkrecht zur Kante [100, 010] liegen, machen sie auf der Symmetrieebene einen Winkel mit derselben.

29. Triacetylderivat des symmetrischen Diäthylamidomono-oxybenzols.

Siehe J. Pollak, diese Sitzungsber., Bd. 102, IIb, 1893, S. 447.

Krystallsystem triklinisch.

$$a : b : c = 1 : 1·0459 : 1·6598.$$

bc =	79° 53′	010.001 =	112° 55′
ca	65 54	001.100	121 21
ab	112 7	100.010	60 5

	Gerechnet	Beobachtet
110.001 =	121° 59′	
$\bar{1}10.001$	79 30	*79° 30′
$110.\bar{1}10$	97 56	*97 56
{ 101.001	86 52	*86 52
{ $001.\bar{1}01$	38 9	38 10
{ 101.101	54 59	55 8
101.110	47 5	*47 5
011.001	74 57	
{ 110.011	57 39	57 32
{ $011.\bar{1}01$	91 10	90 40
{ $\bar{1}01.\bar{1}\bar{1}0$	31 11	31 10
{ $1\bar{1}0.101$	55 38	*55 38
{ 101.011	67 50	67 24
{ $011.\bar{1}10$	56 32	56 35
$\bar{1}01.\bar{1}10$	59 58	

Fig. 30.

Vorstehende Figur gibt die Projection auf eine zur Z-Axe senkrechte Ebene.

30. Methylphloramin-Chlorhydrat

$C_7H_9NO_2 . HCl + H_2O$.

Siehe A. Friedl, diese Sitzungsber., Bd. 109, IIb, 1900, S. 346.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 8137 : 1 : 0 \cdot 8893,$$ [1]

$$ac = 111° 58'.$$

Formen: 100, 010, 001, 110, 101, $\bar{1}11$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.110 =	37° 2′	37° 2′
110.010	62 58	
100.001	68 2	68 2
100.101	32 18	32 28
101.001	35 44	
110.001	72 38	72 33
$\bar{1}\bar{1}1$.001	65 40	65 50
$\bar{1}\bar{1}1$.$\bar{1}\bar{1}0$	41 42	41 37
010.$\bar{1}11$	54 54	
$\bar{1}11$.$\bar{1}\bar{1}1$	70 12	
$\bar{1}11$.$\bar{1}00$	59 55	

Fig. 31.

Die honiggelben Krystalle haben die Gestalt langer Nadeln, welche durch das Prisma 110 gebildet und durch die Endfläche 001 geschlossen sind. Untergeordnet finden sich die übrigen angegebenen Formen.

31. 1, 4-Dimethyl-2-Äthyl-6-Acetyl-3, 5-Dibromphlorotriol

$C_6CH_3Br_2OCH_3OC_2H_5, OC_2H_3O$.

Siehe Herzig u. Eisenstein, diese Sitzungsber., Bd. 111, IIb, 1902, S. 352.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 8105 : 1 : 0 \cdot 3905$$

$$ac = 100° 10'.$$

---

[1] Neu gerechnet.

Formen: 100, 010, 110, 210, 111, $\bar{1}11$, $\bar{1}21$.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	51° 25′	*51° 25′
010.210	68 15	68 17
010.111	71 56·5	
111.1$\bar{1}$1	36 7	
010.$\bar{1}$11	69 30	*69 30
010.$\bar{1}$21	53 13	53 26
$\bar{1}\bar{1}$1.1$\bar{1}$1	41 0	40 42
100.111	50 0	
111.$\bar{1}$11	56 7	
$\bar{1}$11.$\bar{1}$00	73 53	*73 53
110.111	52 40	51 52
111.$\bar{1}\bar{1}$1	63 9	
$\bar{1}\bar{1}$1.$\bar{1}\bar{1}$0	64 11	64 34
110.$\bar{1}$11	89 55	
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$0	90 5	90 20
210.111	52 44	
210.$\bar{1}$11	67 17	67 22

Fig. 32.

Die Flächen 111 und $\bar{1}$21 sind immer sehr schmal.

32. 1, 2-Dimethyl-4-Äthyl-6-Acetyl-3, 5-Dibromphlorotriol

$C_6CH_3Br_2OC_2H_5OCH_3, OC_2H_3O$.

Siehe Herzig u. Eisenstein, diese Sitzungsber., Bd. 111, IIb, 1902, S. 351.

Krystallsystem triklinisch.

$$a : c = 1 : 1·070.$$

bc =	92° 22′	010.001 =	88° 20′
ca	105 56	001.100	74 10
ab	86 34	100.010	92 50

Formen: 100, 010, 001, 101, $\bar{1}$01.

	Gerechnet	Beobachtet
100.0$\bar{1}$0 =	87° 10′	*87° 10′
100.101	35 36	35 49
100.001	74 10	*74 10
100.$\bar{1}$01	129 40	*129 40
010.001	88 20	
010.101	90 56	
010.$\bar{1}$01	86 14	*86 14

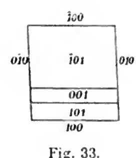


Fig. 33.

Die Krystalle sind lange Prismen parallel der *Z*-Axe. Die beobachteten Flächen genügen nicht zur vollständigen Bestimmung des Axenverhältnisses.

33. 2, 4-Dimethylphloroglucin

$C_6H(CH_3)_2(OH)_3$.

Siehe H. Weidel und F. Wenzel, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 315.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1\cdot0942 : 1 : 0\cdot3686,$$
$$ac = 106° 47'.$$

Formen: 001, 110, 111, 302, 310, 312, $\bar{3}32$, 531.

	Gerechnet	Beobachtet
110.1$\bar{1}$0 =	92° 40′	92° 40′
310.3$\bar{1}$0	28 30	
110.310	27 5	
110.3$\bar{1}$0	65 35	66 —
110.111	54 58	55 30
111.001	23 32	23 —
001.$\bar{3}\bar{3}$2	40 2	39 —
$\bar{3}\bar{3}$2.$\bar{1}\bar{1}$0	60 41	62 —
111.1$\bar{1}$1	33 34	
302.001	22 53	
302.312	8 9	8 15
312.3$\bar{1}$2	16 18	

	Gerechnet	Beobachtet
⎧ 310.312 =	49° 59′	
⎨ 312.001	24 12	
⎩ 310.001	74 11	
310.3$\bar{1}$2	56 39	
110.302	63 51	65° —
110.312	57 28	58 —
⎧ 110.3$\bar{1}\bar{2}$	70 18	69 —
⎨ 110.531	29 20	28 42′
⎩ 110.1$\bar{1}$1	81 30	81 —
531.001	52 6	
531.5$\bar{3}$1	51 20	
531.1$\bar{1}$0	75 46	75 12
$\bar{3}$32.$\bar{3}\bar{3}$2	56 44	
$\bar{3}$32.001	40 2	
111.$\bar{3}$32	43 39	
$\bar{1}\bar{1}$0.332	100 48	

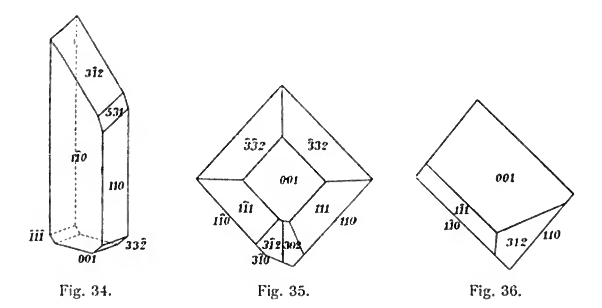


Fig. 34. Fig. 35. Fig. 36.

Die gelblichen, nicht gut messbaren Krystalle haben durch die theilweise Entwickelung aller Formen einen triklinischen Habitus, wie dies in vorstehenden Figuren dargestellt ist. Doch spricht die gleiche Spaltbarkeit nach den beiden Prismenflächen (110, 1$\bar{1}$0), sowie das optische Verhalten für das monokline System. Man sieht nämlich durch die Fläche 001 eine optische

Axe, wobei die Axenebene den spitzen Winkel der beiden Prismenflächen zu halbieren scheint. Demzufolge ist die Ebene der optischen Axen parallel der Symmetrieebene.

34. 2, 4-Dimethylphloroglucin

$C_6H(CH_3)_2(OH)_3+3H_2O.$

Siehe H. Weidel und F. Wenzel, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 316.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a:b = 1\cdot402:1,$$
$$ac = 96°\ 20'.$$

Formen: 100, 010, 001, 110.

	Gerechnet	Gemessen
100.001 =	83° 40′	83° 40′
100.110	54 20	54 20
110.001	86 19	86 —

Die beobachteten Formen reichen nicht hin, die Elemente vollkommen zu bestimmen; übrigens geben auch die vorhandenen Flächen wegen der schnellen Verwitterung der Krystalle und wegen der schuppigen Beschaffenheit der Endfläche 001 nur sehr unsichere Werte. Die Krystalle sind nadelförmig nach der *Z*-Axe, die Flächen 100 und 010 treten dabei nur ganz schmal auf.

35. Trimethylphloroglucin

$C_9H_{12}O_3+3H_2O.$

Krystalle von Dr. Wenzel.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a:b:c = 1\cdot5626:1:1\cdot6286,$$
$$ac = 103°\ 20'.$$

Formen: 100, 001, 110, $\bar{1}01$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	76° 40′	76° 40′
001.1̄01	53 10	53 10
1̄01.1̄00	50 10	
100.110	56 40	
110.1̄10	66 40	66 40
110.001	82 43	
110.101̄	68 23	

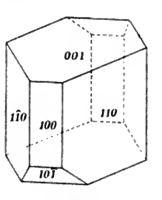


Fig. 37.

Die Messungen wurden an 1 *mm* großen lichtgelben Krystallen ausgeführt, andere waren bis zu 5 *mm* groß und braunroth, eigneten sich aber nicht zur Messung. Die Krystalle sind sehr gut spaltbar nach der Fläche 001. Auf Spaltungsstücken sieht man beide Axen in der Symmetrieebene vollkommen symmetrisch liegen, auch war keine geneigte Dispersion zu constatieren. Die sehr starke Doppelbrechung ist negativ, der scheinbare Winkel etwa 80°.

36. Tribromtrimethyl-Phloroglucin

$C_6Br_3(CH_3)_3O_3$.

Siehe K. Rohm, diese Sitzungsber., Bd. 109, II b, 1900, S. 276.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0\cdot9911 : 1 : 1\cdot5517,$$
$$ac = 107° \; 57'.$$

Formen: 100, 001, 110, 120, 1̄02, 011.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	72° 3′	*72° 3′
001.1̄02	44 28	44 14
1̄02.1̄00	63 29	63 48
100.110	43 19	*43 19
100.120	62 4	
110.120	18 45	18 20
110.1̄10	93 22	
210.2̄10	55 52	55 44

Fig. 38.

	Gerechnet	Beobachtet
011.001 =	55° 53′	*55° 53′
⎧ $\bar{1}$02.011	66 24	66 58
⎨ 011.120	35 40	
⎩ 120.10$\bar{2}$	77 56	
110.011	46 5	46 9
1$\bar{1}$0.011	63 45	

Die gut ausgebildeten Krystalle sind nach der *Z*-Axe verlängert, ihr Habitus ist wesentlich durch die Flächen 110, 001 und 011 bedingt.

Die Krystalle sind zweiaxig, die Ebene der optischen Axe ist parallel der Symmetrieebene.

37. Monobromtrimethylphloroglucin

$C_6H_2Br(CH_3)_3O_3$.

Siehe J. Herzig und F. Theuer, diese Sitzungsber., Bd. 109, II b, 1900, S. 791.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1·373 : 1 : 1·116,$$
$$ac = 94° 50'.$$

Formen: 100, 001, 102, 111, $\bar{1}$11.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	85° 10′	*85° 10′
100.102	85 47	
⎧ 100.111	59 0	*59 0
⎨ 111.$\bar{1}$11	57 0	
⎩ $\bar{1}$11.$\bar{1}$00	64 0	63 32
001.102	29 4	*29 4
⎧ 001.111	52 10	
⎨ 111.11$\bar{1}$	71 56	
⎩ 11$\bar{1}$.00$\bar{1}$	55 54	
111.$\bar{1}$1$\bar{1}$	100 40	
$\bar{1}$11.11$\bar{1}$	95 58	
102.111	32 18	
102.$\bar{1}$11	35 10	35 2

Fig. 39.

Die zuerst erhaltenen Krystalle waren etwa 2 *mm* groß, gelblich und durchsichtig und zeigten auf der Fläche 001, welche nahezu senkrecht zur ersten Mittellinie ist, Kreuzung der Ebenen der optischen Axen für die verschiedenen Farben. Während die Ebene der Axen für roth und gelb parallel der Symmetrieaxe ist, steht sie für blau darauf senkrecht. Der optische Charakter ist negativ, was man bei Lithium- und Natriumlicht leicht erkennt. Für Thalliumlicht fallen die Axen schon in die andere Ebene.

Später erhaltene, bedeutend größere (4 *mm*) Krystalle zeigten die Kreuzung der Axenebenen nicht. Alle Farben hatten dieselbe Lage wie blau. Für roth war der Axenwinkel schon 20 bis 30° und für blau so groß, dass die Axen nicht mehr sichtbar waren. Die letzteren Krystalle waren auch dunkel gelbbraun und die Fläche 101 weniger hervortretend.

38. Acetyltrimethylphloroglucin

$C_6(CH_3)_3(OC_2H_3O)_3$.

Siehe H. Weidel und F. Wenzel, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 305.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0\cdot7706 : 1 : 0\cdot9824,$$
$$ac = 100° 30'.$$

Formen: 100, 001, 110, $\bar{1}11$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	79° 30′	
001.$\bar{1}$00	100 30	*100° 30′
100.110	37 19	*37 19
110.010	52 51	54 —
110.$\bar{1}$10	105 42	105 56
110.001	81 40	82 3
001.$\bar{1}\bar{1}$1	64 7	64 18
$\bar{1}\bar{1}$1.$\bar{1}\bar{1}$0	34 13	*34 13

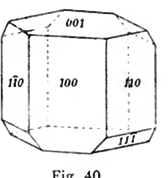


Fig. 40.

		Gerechnet	Beobachtet
{	$\bar{1}11.010$ =	56° 40′	
{	$\bar{1}11.\bar{1}\bar{1}1$	66 40	
{	$\bar{1}00.\bar{1}11$	51 35	51° 12′
{	$\bar{1}11.110$	99 7	100 —

Die Fläche 010 ist äußerst schmal, die Flächen 110, besonders aber die Flächen $\bar{1}11$ geben immer Doppelbilder. Fläche 100 ist stark entwickelt, weniger die Flächen 100 und 101.

Betrachtet man die Krystalle durch die Fläche 100 im Polarisationsapparat bei Na-Licht, so erkennt man, dass die Ebene der optischen Axe parallel der Symmetrieebene ist. Die optischen Axen selbst sind nicht zu sehen, die zur Normale von 100 wenig geneigte Mittellinie hat positiven Charakter.

39. Triacetyloxydiamidotrimethylbenzol

$C_6(CH_3)_3(OC_2H_3O)(NHC_2H_3O)_2$.

Siehe H. Weidel und F. Wenzel, diese Sitzungsber., Bd. 107, IIb, 1898, S. 299.

Krystallsystem rhombisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 9136 : 1 : 0 \cdot 6326.$$ [1]

Formen: 100, 010, 011, 101, 110, 210, 120, 520, 250, 255, 235.

	Gerechnet	Beobachtet
010.250 =	23° 39′	
010.120	28 41	
010.110	47 35	
010.210	65 27	
010.520	69 55	69° 22′
$110.1\bar{1}0$	84 50	*84 50
110.250	23 56	23 48
110.120	18 54	18 42
110.210	17 52	17 30

Fig. 41.

[1] Neu berechnet.

	Gerechnet	Beobachtet
$100.101 =$	55° 18′	
$101.\bar{1}01$	69 24	
$011.0\bar{1}1$	64 38	*64° 38′
011.101	45 59	45 49
$2\bar{5}5.0\bar{1}1$	13 10	13 20
$2\bar{5}5.100$	76 50	
$2\bar{5}5.101$	36 7	
$2\bar{5}5.2\bar{5}0$	55 22	
$2\bar{5}5.1\bar{1}0$	58 38	
110.011	68 52	68 49
$011.\bar{2}35$	18 28	18 26
$\bar{2}35.\bar{1}01$	27 31	
$\bar{1}01.\bar{1}\bar{1}0$	65 9	64 45

Die Krystalle sind nach der Z-Axe verlängert; von den Formen 255 und 235 wurde nur eine Fläche, $2\bar{5}5$ und 235, beobachtet, letztere ganz untergeordnet.

Auf der Prismenfläche sieht man im Polarisationsapparat eine optische Axe am Rande. Die Ebene derselben ist daher senkrecht zur Z-Axe. Die erste Mittellinie ist parallel der X-Axe. Die Dispersion der optischen Axen ist so stark, dass die Krystalle für roth beinahe einaxig sind.

40. Methylpentachlortriketo-R-hexylen

$C_7H_3Cl_5O_3$.

Siehe M. Schneider, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIb, 1899, S. 130.

Krystallsystem rhombisch.

$$a : b : c = 0{\cdot}9490 : 1 : 0{\cdot}5774.$$

Formen: 010, 001, 101, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
010.011 =	30° 0′	30°
011.001	60 0	
010.110	46 30	46 1/2
110.1̄10	97 —	
011.111	27 47	
010.111	63 45	
001.111	39 59	
111.110	50 1	
110.101	69 52	

Fig. 42.

Sämmtliche Flächen dieser Krystalle waren verwittert und daher konnten nur die zwei angegebenen Winkel näherungsweise bestimmt werden. Doch dürfte wenigstens das Krystallsystem richtig sein, da auch die optischen Verhältnisse hiefür sprechen. Die Krystalle sind nämlich ziemlich gut spaltbar parallel der Fläche 001. Solche Theilungsstücke zeigen beide optischen Axen ziemlich symmetrisch gegen die Mitte gelegen, wobei die Axenebene parallel den Flächen (011) ist, also der spitzen Winkel des Prismas (110) halbiert. Der optische Charakter ist positiv, der scheinbare Winkel der optischen Axen ungefähr 45°. Dispersion der Axen war nicht zu bemerken. Das Schema der optischen Orientierung wird bac.

41. Dimethyltetrachlortriketo-R-hexylen

$C_8H_6Cl_4O_3$.

Siehe M. Schneider, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIb, 1899, S. 140.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b = 0 \cdot 9969 : 1,$$
$$ac = 107° \, 50'.$$

Formen: 100, 001, 110, 120.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	72° 10′	*72° 10′
110.100	43 30	*43 30
110.$\bar{1}$10	93 0	93 22
120.100	62 13	
120.110	18 43	
120 $\bar{1}$10	74 17	74 48
110.001	77 10	77 12
120.001	81 48	

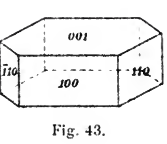


Fig. 43.

Die aufgezählten Formen genügen nicht, das Krystallsystem vollkommen zu bestimmen. Die hinteren Kanten der Fläche 001 (siehe Figur) sind zwar häufig staffelförmig abgestumpft, doch konnten keine Messungen ausgeführt werden. Überhaupt sind die ziemlich großen Krystalle schlecht ausgebildet. Auch von der Form (120) wurde ein einzigesmal nur eine Fläche beobachtet.

Auf Fläche 100 erkennt man bei Na-Licht, dass die Ebene der optischen Axen parallel der Symmetrieebene ist. Die erste Mittellinie ist nahezu senkrecht zur Fläche 001 und zeigt positiven Charakter; diese Lage der ersten Mittellinie spricht auch für das monokline System.

42. Trimethyltrichlortriketo-R-hexylen

$C_9H_9O_3Cl_3$.

Siehe M. Schneider, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIb, 1899, S. 149.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1\cdot0003 : 1 : 0\cdot977,$$
$$ac = 107° \, 35'.$$

Formen: 100, 001, 110, 120, 101, 111, 121.

	Gerechnet	Beobachtet
⎧ 100.101 =	36° 45′	*36° 45′
⎨ 101.001	35 40	
⎩ 100.001	72 25	*72 25
⎧ 100.110	43 43	43 32
⎨ 100.120	62 24	*62 24
⎩ 110.120	18 41	
⎧ 101.111	30 19	31 —
⎨ 101.121	49 28	
⎩ 111.121	19 9	20 —
⎧ 110.001	77 23	
⎨ 111.001	45 28	
⎩ 111.110	31 55	
111.100	46 14	
111.1$\bar{1}$0	81 19	
111.120	39 3	
111.1$\bar{2}$0	96 47	
⎧ 120.001	81 57	
⎨ 121.001	58 8	
⎩ 121.120	23 49	
121.110	25 37	
121.100	58 37	
121.1$\bar{1}$0	98 34	
121.1$\bar{2}$0	115 37	
101.110	54 37	
101.120	68 13	

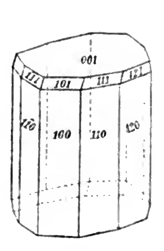


Fig. 44.

Die Formen 101, 111, 121 wurden nur einmal an dem abgebildeten Krystalle und da nur schlecht ausgebildet beobachtet, es bleibt daher das angegebene Verhältnis $a:c$ unsicher. Sonst war bei den Krystallen die Fläche 100 meist stärker entwickelt, ihr Habitus daher mehr plattenförmig.

Eine Platte parallel der Fläche 001 zeigt zwei optische Axen in ungleicher Entfernung von der Mitte. Die Ebene derselben ist parallel der Symmetrieebene, der optische Charakter negativ und der scheinbare Axenwinkel beiläufig 60°.

43. 2, 4-Dimethyl-1, 1, 3, 5-Tetrachlor-Phlorodiol-6-on.

Siehe H. Kaserer, diese Sitzungsber., Bd. 111, IIb, 1902. S. 585.

Krystallsystem rhombisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 8456 : 1 : 0 \cdot 5692.$$

Formen: 010, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	49° 47′	*49° 47′
110.1̄10	80 26	80 48
010.111	64 43	
111.11̄1	50 34	
110.111	48 35	*48 35
111.1̄1̄1	82 50	83 8
11̄0.111	83 41	83 58
111.11̄1	60 42	60 46

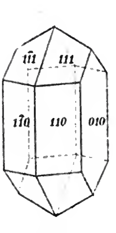


Fig. 45.

Die Krystalle sind etwas verlängert nach der *Z*-Axe und verkürzt nach der *Y*-Axe. Sie sind spaltbar nach der stark entwickelten Fläche 010.

Diese Fläche ist senkrecht zur negativen Mittellinie der optischen Axen, während ihre positive Mittellinie parallel der *Z*-Axe ist. Letztere ist erste Mittellinie, wie eine Platte zeigte, die senkrecht zur *Z*-Axe herzustellen versucht wurde. Dieselbe hatte allerdings nicht vollkommen die beabsichtigte Lage, zeigte aber doch beide Axen mit einem scheinbaren Winkel von etwa 90°.

Das Schema der optischen Orientierung wird $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\underset{+}{\mathfrak{c}}$.

44. Tetramethylphloroglucinmonomethyläther $C_6H(CH_3)_4(OCH_3)O_2$.

Siehe M. Reisch, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIb, 1899, S. 252.

Krystallsystem triklinisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 9644 : 1 : 0 \cdot 7039.$$

$bc = 79° 6'$		010.001 =	100° 44'
ca	92 1	001.100	89 30
ab	98 6	100.010	82 8

Formen: 100, 010, 001, 011, 110, 310. 111.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	89° 30'	*89° 30'
100.110	40 36	*40 36
110.010	41 32	*41 32
100.310	23 22	23 52
110.310	17 14	16 44
010.011	61 54	*61 54
011.001	38 50	*38 50
001.110	96 41	96 50
001.111	50 52	50 7
110.111	45 49	46 38
001.310	93 50	
100.011	84 52	85 10
100.111	53 12	52 58
011.111	31 40	32 12
010.111	63 14	

Fig. 46.

Die Krystalle sind Prismen, welche durch die Flächen 010, 110, 100 gebildet und durch die Fläche 001 geschlossen sind.

45. Hexamethyl-Phloroglucin

$C_6(CH_3)_6O_3$.

Siehe R. Reisch, diese Sitzungsber., Bd. 108, IIb, 1899, S. 226.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 6862 : 1 : 0 \cdot 4063,$$
$$ac = 96° 37'.$$

Formen: 100, 010, 110, 120, 101.

	Gerechnet	Beobachtet
{ 010.110 =	48° 38′	*48° 38′
{ 010.120	29 35	29 47
010.011	68 1	*68 1
100.011	84 41	*84 41
011.110	71 0	71 6
011.120	67 51	67 38
011.1̄10	80 23	
011.1̄20	74 10	

Fig. 47.

Die Krystalle sind nach der *Z*-Axe verlängert, wobei die Fläche 010 vorherrscht.

Die Ebene der optischen Axen ist parallel der Symmetrieebene, eine optische Axe ist nahezu senkrecht zur Fläche 100.

46. Normetahemipinsäure

$C_8H_6O_6 + H_2O$.

Siehe O. Rossin, diese Sitzungsber., Bd. 100, IIb, 1891, S. 464.

Krystallsystem rhombisch.

$$a : b : c = 0·8837 : 1 : 0·5879.$$

Formen: 100, 010, 001, 111.

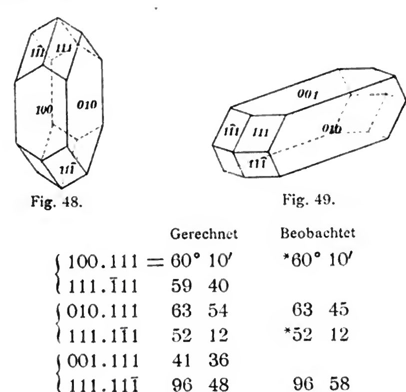


Fig. 48. Fig. 49.

	Gerechnet	Beobachtet
{ 100.111 =	60° 10′	*60° 10′
{ 111.1̄11	59 40	
{ 010.111	63 54	63 45
{ 111.11̄1	52 12	*52 12
{ 001.111	41 36	
{ 111.111̄	96 48	96 58

Von den Endflächen ist immer 010 stark entwickelt, je nachdem nun die Fläche 100 oder die Fläche 001 mehr hervortritt, entstehen die durch vorstehende Figuren dargestellten Formen.

Die Krystalle sind spaltbar parallel 100. Auf solchen Spaltungsstücken sieht man die beiden optischen Axen am Rande des Gesichtsfeldes, wobei die zweite Mittellinie parallel der Axe *c* und die erste Mittellinie negativen Charakter hat. Das Schema der optischen Orientierung wird daher $(ba\underline{c})$.

47. 3-Methoxy-2, 6-Dimethyl-Phentriol

$C_9H_{12}O_4$.

Siehe C. Bosse, diese Sitzungsber., Bd. 109, IIb, 1900, S. 830.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 6123 : 1 : 0 \cdot 6230,$$
$$ac = 125° \, 22'.$$

Formen: 010, 001, 110, 011, 021, $\bar{1}11$.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	63° 28′	*63° 28′
$110.1\bar{1}0$	53 4	53 3
010.021	44 32	44 50.
010.011	63 4	*63 4
011.021	18 32	
011.001	26 56	26 58
$010.\bar{1}11$	61 15	
$\bar{1}11.\bar{1}\bar{1}1$	57 30	
$1\bar{1}0.001$	58 48	58 34
$001.\bar{1}11$	65 28	66 —
$\bar{1}11.\bar{1}10$	55 44	
011.110	48 24	48 12
$011.\bar{1}10$	105 2	105 5
$011.\bar{1}11$	53 58	
110.021	47 2	*47 2
$021.\bar{1}11$	49 52	52 —
$\bar{1}10 \cdot 021$	92 33	92 36

Fig. 50.

Die Krystalle sind nach der Z-Axe etwas verlängert, nach der Symmetrieaxe verkürzt. Die Flächen der Form $\bar{1}11$ waren nur angedeutet und kaum messbar. Die Symmetrieebene dürfte die Ebene der optischen Axe sein, wie Beobachtungen auf der Fläche 010 bei Natriumlicht zeigen.

48. Äthyläther des Triphenylcarbinols.

Siehe J. Herzig und P. Wengraf, diese Sitzungsber., Bd. 110, IIb, 1901, S. 528.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 0{\cdot}6257 : 1 : 0{\cdot}5056,$$
$$ac = 120° \; 41'.$$

Formen: 010, 001, 110, 011.

	Gerechnet	Beobachtet
{ 010.110 =	61° 43′	*61° 43′
{ 110.1$\bar{1}$0	56 34	
{ 010.011	66 30	*66 30
{ 011.001	23 30	
110.001	63 18	*63 18
110.011	53 3	
$\bar{1}$10.011	102 53	102 41

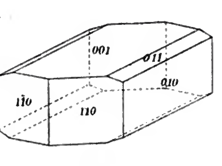


Fig. 51.

Die Krystalle kommen in zweierlei Formen vor: entweder als dicke Platten durch das Vorherrschen der Fläche 001 oder in gipsähnlichem Habitus, indem die genannte Fläche fast vollständig verschwindet und die Krystalle nach der Z-Axe verlängert sind.

49. Tetramethylhämatoxylin.

Krystalle von Prof. J. Herzig.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 2{\cdot}1865 : 1 \cdot 1{\cdot}2473,$$
$$ac = 90° \; 46'.$$

Formen: 100, 101, 10$\bar{1}$, 110.

	Gerechnet	Beobachtet
⎧ 100.101 =	59° 43′	59° 40′
⎨ 101.$\bar{1}$01	59 24	*59 24
⎩ $\bar{1}$01.$\bar{1}$00	60 53	60 28
100.110	65 25	65 20
110.$\bar{1}$10	49 10	*49 10
110.101	77 53	*77 53
110.10$\bar{1}$	78 19	78 11

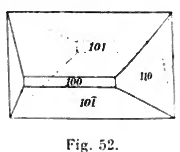


Fig. 52.

Die Krystalle sind nach der Symmetrieaxe verlängert. Fläche 100 immer schmal. Die Ebene der optischen Axen ist parallel der Symmetrieebene.

50. Peucedanin.

Siehe M. Popper, diese Sitzungsber., Bd. 107, 1898, S. 335.

Krystallsystem rhomboedrisch.

$$bc = ca = ab = 149° 17'.$$

Formen: 100, 12$\bar{2}$, 1$\bar{1}$0.

	Gerechnet	Beobachtet
⎧ 010.100 =	23° 40′	24° 10′
⎩ 100.1$\bar{1}$0	78 10	
100.2$\bar{1}\bar{1}$	76 18	76 30
100.11$\bar{2}$	83 12	
1$\bar{1}$0.10$\bar{1}$	60 0	60 8

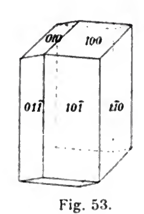


Fig. 53.

Die Krystalle sind Combinationen des Deuteroprismas 1$\bar{1}$0 und des Rhomboeders 100; sie sind nach der Symmetrieaxe verlängert. Ganz schmal tritt auch das Protoprisma 2$\bar{1}\bar{1}$ auf.

Die Flächen des Rhomboeders sind schuppig.

Der optische Charakter ist negativ.

51. Anthraphenon

$C_{14}H_9COC_6H_5$.

Siehe Ed. Lippmann und P. Keppich, Ber. d. d. chem. Ges., J. 33, 1900, S. 3086.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1·1704 : 1 : 0·8623,$$
$$ac = 94° 34'.$$

Formen: 100, 110, 101, 011, $\bar{1}$11.

	Gerechnet	Beobachtet
100.101	= 50° 45′	
100.110	49 24	*49° 24′
110.$\bar{1}$10	81 12	81 2
011.0$\bar{1}$1	81 28	
100.011	86 32	*86 32
011.$\bar{1}$11	30 8	29 24
$\bar{1}$11.$\bar{1}$00	63 20	
$\bar{1}$10.$\bar{1}$11	42 40	
101.011	51 28	50 —
011.$\bar{1}$10	62 53	
$\bar{1}$10.$\bar{1}$0$\bar{1}$	65 39	66 —
011.110	57 42	*57 42
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$1	70 46	

Fig. 54.

Die lichtgelben Krystalle sind nach der *Z*-Axe stark verlängert, die Formen 100, 101, $\bar{1}$11 treten nur untergeordnet auf.

52. Pyridin-β-sulfosaures Ammon

$C_5H_4SO_3(NH_4)N$.

Siehe H. Weidel und E. Murmann, diese Sitzungsber., Bd. 104, IIb, 1895, S. 611.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1·5866 : 1 : 2·2897,$$
$$ac = 101° 42'.$$

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	78° 18′	78° 20′
$\bar{1}$00.001	101 42	101 42
001.$\bar{1}$01	63 26	63 26
$\bar{1}$01.$\bar{1}$00	38 18	38 6
100.110	57 14	
110.1$\bar{1}$0	114 28	114 28
110.$\bar{1}$10	65 32	
001.110 =	83 42	
001.$\bar{1}$10	96 18	96 18
$\bar{1}$10.$\bar{1}$01	64 52	

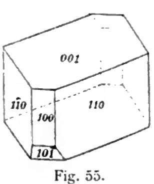


Fig. 55.

Sehr gut spaltbar parallel der Fläche 100 und der nicht beobachteten Symmetrieebene 010. Letztere Fläche ist senkrecht zur ersten Mittellinie, die Axenpunkte liegen aber schon außerhalb des Gesichtsfeldes: optischer Charakter negativ. Die zweite Mittellinie ist nahezu senkrecht zur Kante [100, 110].

53. Picolinsäure-Chlorhydrat

$C_5H_4NCOOH, HCl.$

Siehe H. Meyer, diese Sitzungsber., Bd. 103, IIb, 1894, S. 131.

Nach den Messungen von L. Ditscheiner gehören diese Krystalle ins rhombische System, wobei

$$a : b : c = 1 : 0 \cdot 8993 : 0 \cdot 5635.$$

Dieselben sind vollkommen spaltbar nach der Fläche 010 und zeigen auf derselben die optischen Axen mit einem scheinbaren Winkel von beiläufig 70°, wobei derselbe für roth kleiner ist als für violett. Da die Doppelbrechung sehr stark ist, so wurde die Bestimmung des negativen Charakters bei Na-Licht vorgenommen. Die zweite Mittellinie ist parallel der *Z*-Axe, daher das Schema der optischen Orientierung $\mathfrak{bac}$.

Die drei Hauptbrechungsquotienten werden ermittelt, indem einerseits der scheinbare Axenwinkel, anderseits die Minimalablenkung beider Strahlen durch das von den Flächen 101 und 10$\bar{1}$ gebildete Prisma von 58° 36′ gemessen wurde. Es wurde so gefunden:

	α	β	γ (ger.)	2 H	2 E (ger.)
Li	1·4438	1·6947	1·7411	72° 40′	40° 56′
Na	4482	7050	7540	73 52	41 16
Th	4514	7131	7642	75 12	41 54

54. γ-Pyridincarbonsäure- Salzsäure- Platinchlorid

$(C_6H_5NO_2)_2 . 2HCl . PtCl_4 + 2H_2O.$

Siehe L. Ternájgó, diese Sitzungsber., Bd. 109, IIb, 1900, S. 362.

Die Messungen stimmen vollkommen mit den von A. Brezina für Isonicotinsäure-Platinchlorid gefundenen (diese Sitzungsber., Bd. 80, II, 1879, S. 853), nach welchen das Krystallsystem monoklinisch und $a : b : c = 1·5124 : 1 : 1·8564$, $ac = 124° 48'$ ist. Die von mir untersuchten gut spiegelnden braunrothen Krystalle waren aber flächenreicher, indem sie auch die Formen 011 und $\bar{2}11$ zeigten, für welche folgende Winkel gemessen wurden:

	Beobachtet	Berechnet
001.011 =	56° 51′	56° 44′
011.$\bar{1}$01	81 12	81 1
$\bar{1}$01.$\bar{2}\bar{2}$1	44 12	44 45
$\bar{2}\bar{2}$1.$\bar{1}\bar{1}$0	22 15	22 6

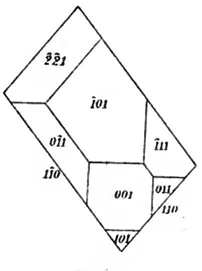


Fig. 56.

Auch wurde die vollkommene Spaltbarkeit nach (110) bestätigt. Für den Winkel zweier Spaltungsflächen wurde gefunden:

	Beobachtet	Berechnet
110.$\bar{1}$10 =	101° 45′	102° 19′

55. Isonicotinsäuremethylbetaïn-Chloroplatinat

$C_{14}H_{16}O_4N_2Cl_6Pt + H_2O.$

Siehe L. Ternájgó, diese Sitzungsber., Bd. 109, IIb, 1900, S. 367.

Krystallsystem triklinisch.

$a : b : c = 1 : 0·8593 : 1·1856.$

bc =	94°	56′	010.001 =	84°	27′
ca	92	20	001.100	86	32
ac	102	14	100.010	77	30

Formen: 100, 010, 001, 011, 01̄2, 101, 1̄01, 11̄0, 1̄11, 11̄1, 2̄11.

	Gerechnet		Beobachtet	
010.011 =	33°	27′	*33°	27′
011.001	51	0	*51	0
001.01̄2	36	38		
01̄2.01̄0	58	55	60	—
100.011	38	13	38	17
101.001	48	19	48	24
001.1̄01	52	26		
1̄01.1̄00	41	2	41	6
001.1̄00	93	28	*93	28
100.010	77	30	*77	30
010.11̄0	45	49	*45	49
11̄0.1̄00	56	41	56	46
100.011	78	19	78	—
011.1̄11	36	16	37	—
11̄1.12̄1	23	39		
12̄1.1̄00	40	46	41	—
010.101	77	11	77	4
101.11̄1	46	31	46	38
11̄1.01̄0	56	18	56	20
010.1̄11	50	35		
1̄11.1̄01	45	38		
1̄01.01̄0	83	47		
11̄0.11̄1	31	53	31	52
11̄1.001	60	19	60	16
001.1̄11	57	5	56	50
1̄11.1̄10	30	43	30	58
11̄0.101	87	13	87	21
101.011	57	13	57	9
011.1̄10	55	34	55	32

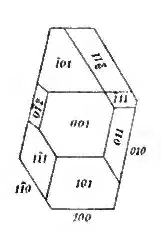


Fig. 57.

	Gerechnet	Beobachtet
$1\bar{1}0.\bar{1}01$ =	117° 29′	117° 17′
$\bar{1}01.\bar{2}11$	32 39	32 42
$\bar{2}11.\bar{1}10$	29 52	29 58
$100.0\bar{1}2$	94 27	

Die lichtgelbrothen, stark glänzenden Krystalle sind nadelförmig parallel der *Z*-Axe. Die Flächen gaben gute Bilder, nur die untergeordneten Flächen $1\bar{1}1$, $1\bar{2}1$ eigneten sich schlecht zur Messung.

56. Salzsaures Isocarbostyril.

Siehe A. Fernau, diese Sitzungsber., Bd. 102, IIb, 1893, S. 22.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 1\cdot8500 : 1 : 1\cdot2595,$$
$$ac = 93° 22'.$$

Formen: 100, 001, 110, $\bar{1}01$, 121, $\bar{1}21$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	86° 38′	
$001.\bar{1}01$	35 18	*35° 18′
$\bar{1}01.\bar{1}00$	58 4	*58 4
110.001	87 2	
100.110	61 35	
$110.\bar{1}10$	56 50	
100.121	74 43	
$121.\bar{1}21$	28 14	27 58
$\bar{1}21.\bar{1}00$	77 3	77 2
001.121	68 15	68 8
$121.12\bar{1}$	41 59	42 12
$12\bar{1}.00\bar{1}$	69 46	69 41
$121.\bar{1}2\bar{1}$	52 34	
$10\bar{1}.110$	75 24	75 27
110.121	23 57	
$121.\bar{1}01$	80 39	80 33

Fig. 58.

	Gerechnet	Beobachtet
110.$\bar{1}$21 =	46° 37′	
110.$\bar{1}$2$\bar{1}$	47 40	48° 0′
110.12$\bar{1}$	25 25	25 14
{ $\bar{1}$01.$\bar{1}$21	64 56	*64 56
{ $\bar{1}$21.$\bar{1}$21	50 8	50 4

Die Krystalle sind nadelförmig, Längsaxe parallel der Axe *b*. Die vorstehende Figur gibt eine Projection auf die Symmetrieebene.

57. Dichinolyl

$C_{18}H_{12}N_2$.

Siehe H. Schmoek, Inaug. Diss., Rostok, 1898.

Krystallsystem monoklinisch.

$$a : b : c = 2 \cdot 9826 : 1 : 7 \cdot 1361,$$
$$ac = 97° \, 3'.$$

Formen: 100, 001, $\bar{1}$01, 110.

	Gerechnet	Beobachtet
{ 001.100 =	82° 57′	*82° 57′
{ 100.10$\bar{1}$	23 37	*23 37
{ 10$\bar{1}$.00$\bar{1}$	73 26	
100.110	71 20	*71 20
110.$\bar{1}$10	37 20	37 27
110 001	87 45	87 42
110.10$\bar{1}$	72 57	72 52

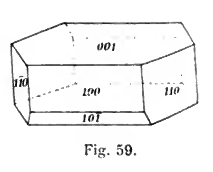


Fig. 59.

Die Krystalle sind nach der Symmetrieaxe verlängert und bisweilen durch die starke Entwickelung der Form 001 plattenförmig.

Die erste Mittellinie steht nahezu senkrecht auf der Fläche 001, die zweite ist parallel der Symmetrieebene. Die eigentlichen Axen fallen schon außerhalb des Gesichtsfeldes, doch

erkennt man bei Na-Licht, dass der Charakter der ersten Mittellinie positiv ist.

Die krystallographische und optische Untersuchung bestätigt die Identität dieser Krystalle mit den von H. Weidel dargestellten, diese Sitzungsber., Bd. 84, 1881, S. 454, an welchen jedoch die Form 110 fehlte, so dass damals nicht die vollständigen Elemente bestimmt werden konnten.

XX. SITZUNG VOM 16. OCTOBER 1902.

Geheimrath Prof. Emil Fischer in Berlin und John William Baron Rayleigh in Witham, Essex, sprechen den Dank für ihre Wahl zu correspondierenden Mitgliedern im Auslande aus.

Prof. Dr. Ladislaus Weinek in Prag übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Zur Theorie des Spiegel-Sextanten«.

Prof. Dr. Egon Ritter v. Oppolzer in Innsbruck übersendet eine Mittheilung: »Über die Sternzahl auf einer photographischen Platte«.

Das w. M. Prof. F. Becke berichtet über den Fortgang der geologischen Beobachtungen am Nordende des Tauerntunnels.

Versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität sind eingelangt:

I. von k. k. Polizei-Agent Andreas Grassmugg in Wien mit der Aufschrift: »Trichter«,

II. von k. u. k. Regimentsarzt Dr. Hermann Mayer in Wien mit der Aufschrift: »Teleakust und Akustometer«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Comitato per le Onoranze à Francesco Brioschi: Opere matematiche di Francesco Brioschi; Tomo II. Mailand, 1902. 4°.

XXI. SITZUNG VOM 23. OCTOBER 1902.

Herr G. Herglotz in München übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit drei ungleichen Hauptachsen«.

Das c. M. Prof. C. Doelter berichtet über seine Arbeiten am Monzoni in Südtirol.

Das w. M. Prof. F. Becke überreicht im Anschlusse an diesen Bericht eine Mittheilung von Dr. J. A. Ippen: »Analyse eines nephelinporphyritischen Gesteines (Allochetit) von Allochet (Monzoni)«.

Das w. M. k. u. k. Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung von Custos Friedrich Siebenrock, betitelt: »Zur Systematik der Schildkrötenfamilie *Trionychidae* Bell nebst der Beschreibung einer neuen *Cyclanorbis*-Art.«

Das w. M. Hofrath A. Lieben legt folgende drei Arbeiten vor:

I. »Über einige Derivate des *m*-Acetamidobenzaldehyds«, von P. Friedländer und R. Fritsch.
II. »Über einige Derivate des *o*- und *p*-Amidobenzaldehyds«, von Paul Cohn und Ludwig Springer.
III. »Untersuchung des Absorptionsspectrums von Indigotin, Amidoindigo und Diazoindigo«, von Hofrath J. M. Eder in Wien.

Dr. Franz Schaffer legt einen vorläufigen Bericht über eine Reise im Istrandscha Dagh vor.

Dr. Oscar Frankl in Wien legt eine Abhandlung vor, welche den Titel führt: »Ligamentum uteri rotundum.«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Alleghany Observatory: Miscellaneous scientific papers, No 5, 6, 7. By F. L. O. Wadsworth.

Koch, K. R.: Relative Schweremessungen, ausgeführt im Auftrage des königl. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens. II. Stuttgart, 1902. 8°.

West Hendon House Observatory in Sunderland: Publications, No II. By T. W. Backhouse. Sunderland, 1902. 4°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXII. SITZUNG VOM 6. NOVEMBER 1902.

Chefgeolog der k. k. Geologischen Reichsanstalt Georg Geyer übersendet einen weiteren Bericht über den Fortgang der geologischen Untersuchungen beim Baue der Alpen-Tunnels.

Das c. M. Prof. Karl Exner und Dr. W. Villiger in Innsbruck übersenden eine Abhandlung, betitelt: »Über das Newton'sche Phänomen der Scintillation«. (I. Mittheilung.)

Herr S. Kantor übersendet folgende drei von ihm verfasste Abhandlungen:

I. »Über eine neue Classe gemischter Gruppen und eine Frage über die birationalen Transformationen.«
II. »Neue Grundlagen für die Theorie und Weiterentwicklung der Lie'schen Functionengruppen.«
III. »Functionengruppen in Bezug auf eine alternierende bilineare Differentialquotientenform.«

Stud. phil. Victor Weiss in Wien übersendet eine Arbeit mit dem Titel: »Eine Construction einer quadratischen Verwandtschaft zweier ebener Punktfelder aus sieben Paaren entsprechender Punkte«.

Herr Isidor Pollak in Stadlau bei Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Stärke«.

Der Secretär, Hofrath V. v. Lang, legt Heft 1 von Band III_3 der »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen« vor.

Das w. M. Hofrath Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung von Prof. J. Herzig und F. Wenzel, betitelt: »Über Carbonsäureester der Phloroglucine III«.

Dr. Robert Clauser legt eine in dem chemisch-technologischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit vor, betitelt: »Beitrag zur Kenntnis des Katechins«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Duparc Louis et Francis Pearce: Recherches géologiques et pétrographiques sur l'Oural du Nord dans la Rastesskaya et Kizelowskaya-Datcha (Gouvernement de Perm). Première partie. Genève, 1902.

Universität in Zürich: Akademische Publicationen, 1901 bis 1902.

Vergara y Velasco, F. J.: Nueva Geografía de Colombia, escrita por regiones naturales. Tomo I. Bogota, 1901.

XXIII. SITZUNG VOM 13. NOVEMBER 1902.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXIII, Heft VIII (August 1902).

Die Direction des ungarischen Nationalmuseums in Budapest übersendet eine Einladung zu dem am 26. und 27. November l. J. abzuhaltenden Feste des hundertjährigen Bestandes dieses Institutes.

Das c. M. Prof. D. Doelter in Graz übersendet einen zweiten Bericht über seine Arbeiten am Monzoni.

Das c. M. Hofrath L. Boltzmann legt eine Abhandlung von Dr. Fritz Hasenöhrl mit dem Titel: »Über die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für bewegte Körper« vor.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung von Dr. E. v. Schweidler vor, betitelt: »Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität XI. Luftelektrische Beobachtungen zu Mattsee im Sommer 1902«.

Das w. M. Hofrath G. Ritter v. Escherich legt eine Abhandlung von Prof. Otto Biermann in Brünn vor, welche den Titel führt: »Über die Discriminante einer in der Theorie der doppelt periodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung« (III. Mittheilung).

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Alleghany Observatory: Miscellaneous scientific papers. New series, No 8 by F. L. O. Wadsworth; No 9 by Frank W. Very. 1902.

General-Commissariat, k. k. österreichisches: Bericht über die Weltausstellung in Paris 1900. Erster Band (Administrativer Bericht) mit Beilagenband I und II; zweiter Band (Einleitung zu den Fachberichten). Wien, 1902. 4⁰.

Universität in Basel: Akademische Publicationen 1901 und 1902.

XXIV. SITZUNG VOM 20. NOVEMBER 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 111. Abth. I, Heft IV und V (April und Mai 1902).

Dr. Franz Kossmat übersendet einen Bericht über die im Sommer 1902 vorgenommenen Besichtigungen des Wocheiner-Tunnels.

Das c. M. Prof. G. Haberlandt übersendet eine im botanischen Institut der Universität Graz ausgeführte Arbeit von Hermann R. v. Guttenberg jun.: »Zur Entwicklungsgeschichte der Krystallzellen im Blatte von *Citrus*«.

Herr Johann Meissner in Budapest übersendet eine Mittheilung über einen von ihm construierten flugtechnischen Apparat.

Das w. M. Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Wissenschaftliche Ergebnisse der südarabischen Expedition in den Jahren 1898 bis 1899. Fische von Südarabien und Socotra«.

Das w. M. Prof. R. v. Wettstein überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. Franz v. Höhnel, betitelt: »Fragmente zur Mykologie I«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung von Dr. H. Mache vor: »Über die Schutzwirkung von Gittern gegen Gasexplosionen«.

Derselbe legt ferner eine Abhandlung von H. Steindler vor: »Über die Temperaturcoefficienten einiger Jodelemente«.

Derselbe legt weiters eine Abhandlung von H. Ehrenhaft vor: »Prüfung der Mischungsregeln für die Dielektricitätsconstante der Gemische von Hexan und Aceton«.

Dr. J. Holetschek, Adjunct der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über die scheinbaren Beziehungen zwischen den heliocentrischen Perihelbreiten und den Periheldistanzen der Kometen«.

Das w. M. Prof V. Uhlig überreicht eine Arbeit mit dem Titel: »Eine untermiocäne Fauna aus dem Teplitzer Braunkohlenbecken von Max Schlosser mit Bemerkungen über die Lagerungs- und Altersverhältnisse der Braunkohlengebilde im Teplitzer Becken von J. E. Hibsch«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Anderlind, Leo: Darstellung des Kaiserlichen Canals von Aragonien nebst Ausblick auf ein in Preußen herzustellendes Canalnetz. Leipzig und Breslau, 1902. 8°.

Hoernes, Hermann: Lenkbare Ballons, Rückblicke und Aussichten. Leipzig, 1902. 8°.

Über die Schutzwirkung von Gittern gegen Gasexplosionen

von

Dr. **Heinrich Mache.**

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem II. physikalischen Institute der Wiener Universität.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. November 1902.)

Es ströme von rechts her ein homogenes Knallgas mit der Geschwindigkeit u durch ein Drahtnetz. Links vom Netze werde es entzündet. Dann wird zunächst die Explosion im Knallgas mit der ihm charakteristischen Explosionsgeschwindigkeit c fortschreiten und sich hiebei dem Drahtnetze nähern oder sich von demselben entfernen, je nachdem $u \lesseqgtr c$ ist. Wir betrachten nur den ersten Fall, in dem sich dann die Brennfläche zunächst mit der Geschwindigkeit $c—u$ dem Drahtgitter nähert, erfahrungsgemäß aber noch vor demselben zum Stillstande kommt, obwohl auch hier die Strömungsgeschwindigkeit des Gases unter der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion bleibt. Die Flamme schlägt nicht durch. Wir wollen versuchen uns von diesem Vorgange Rechenschaft zu geben.

In der Flamme eines Knallgases stoßen zwei Gasschichten fast unmittelbar aneinander, von welchen die eine die durch die frei werdende Verbindungswärme resultierende hohe Verbrennungstemperatur besitzt, die zweite hingegen die wesentlich niedrigere dem Gasgemenge eigenthümliche Entzündungstemperatur τ. Diesem jähen Temperaturgefälle entsprechend — dessen Continuität nur innerhalb molekularer Dimensionen erhalten bleibt — wird somit die Brennfläche ein ganz

bestimmter Wärmestrom W passieren, der dem zuströmenden Gase durch Leitung zugeführt und dazu verwendet wird, um dieses auf die Entzündungstemperatur τ zu bringen.[1]

Ist nun kein Drahtnetz vorhanden, so führt das in die Brennfläche einströmende Gas genau soviel Wärme mit sich, als es zuvor aus der Brennfläche empfangen hat. Sind ρ und γ Dichte und specifische Wärme des Knallgases und ist t seine Anfangstemperatur, so ist diese Wärmemenge W offenbar auch gleich $c\rho\gamma\ (\tau-t)$, worin dann $c\rho$ diejenige Masse des Gases ausdrückt, welche der Flächeneinheit der Brennfläche in der Zeiteinheit zugeführt wird.

Hieraus folgt die Explosionsgeschwindigkeit

$$c = \frac{W}{\rho\gamma(\tau-t)},$$

eine Formel, die zugleich die Abhängigkeit dieser Größe von der Vorwärmung des Knallgases darstellt. Je stärker diese Vorwärmung, d. h. je größer t ist, desto schneller explodiert das Gas. Für $t = \tau$ wird $c = \infty$; die Explosion findet dann nämlich in allen Theilen der Gasmasse gleichzeitig statt.

Anders liegen aber die Verhältnisse, wenn ein Theil der dem zuströmenden Gase von der Brennfläche zugeführten Wärmemenge durch Leitung und Strahlung an ein Drahtnetz verloren geht, welches das Gas passiert, ehe es zur Verbrennung gelangt. Ist dieser Verlust gleich W', so wird nur der Betrag $W-W'$ dazu verwendet, um das zuströmende Gas auf die Entzündungstemperatur τ zu bringen. Die Explosionsgeschwindigkeit c' ist dementsprechend kleiner und bestimmt sich aus der Gleichung

$$c' = \frac{W-W'}{\rho\gamma(\tau-t)}.$$

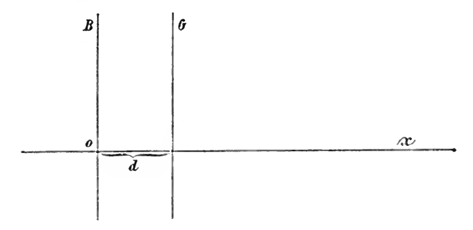
Es dürfte jetzt ohneweiters verständlich sein, warum die Explosion vor dem Drahtnetz zum Stillstand kommt. Das tritt

[1] Vergleiche: »Über die Temperaturverhältnisse in der Flamme« diese Sitzungsber. 108, S. 1152, 1899.

Die dem Gase durch Strahlung zugeführte Wärmemenge wird vernachlässigt.

offenbar dann ein, wenn die Wärmeabgabe an das Netz so groß geworden ist, dass hiedurch die Explosionsgeschwindigkeit des Knallgases bis auf jene Geschwindigkeit herabgesetzt wurde, mit welcher es zuströmt. Dies wird in einer ganz bestimmten Distanz vom Gitter der Fall sein, nämlich dort, wo der Wärmeverlust an das Gitter $W' = W - u\rho\gamma(\tau - t)$ ist. Hiebei bleibt die Temperatur der Brennfläche durchaus dieselbe und es ist somit nicht correct von einer kühlenden Wirkung des Drahtgitters auf die Flamme selbst zu sprechen, wie dies häufig geschieht. Vielmehr beruht die Schutzwirkung des Drahtgitters darauf, dass das noch nicht entzündete Gas gekühlt wird und hiedurch die Explosionsgeschwindigkeit bis zur Strömungsgeschwindigkeit des Gases herabsinkt, d. h. die Explosion selbst stationär wird.

In welcher Entfernung vom Gitter dieses Stationärwerden der Explosion eintritt, hängt offenbar in erster Linie von der Strömungsgeschwindigkeit des Gases ab. Sie wird ceteris paribus umso größer sein, je rascher das Gas strömt. Auf Grund der hier und l. c. entwickelten Anschauung gelingt es unter gewissen, beschränkenden Voraussetzungen leicht, einen Ausdruck für diese Entfernung d zu entwickeln. Zu diesem Behufe wollen wir zunächst die Größe W' durch d ausdrücken.



Hiebei setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass die von der Brennfläche dem Gitter durch Strahlung übermittelte Wärmemenge gegenüber der durch Leitung zugeführten vernachlässigt werden könne. Ferner nehme das Gitter alle durch Leitung dahingelangende Wärme auf, leite sie aber so schnell ab, dass es selbst, wie auch das in seiner Ebene befindliche Gas sich

nicht erwärmt, sondern constant auf der Anfangstemperatur t bleibt. Die zwischen der Brennfläche B und dem Gitter G herrschende Temperaturvertheilung ergibt sich dann aus der Differentialgleichung: [1]

$$\frac{k}{\gamma}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\rho c\frac{\partial U}{\partial x}=o$$

mit den Nebenbedingungen

$$U=\tau \text{ für } x=o$$

und

$$U=t \text{ für } x=d.$$

Es ist hierin k die Wärmeleitungsconstante des Knallgases. Weiters ist die zum Gitter gelangende und nach unserer Voraussetzung ganz an dieses abgegebene Wärmemenge $W=-k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=d}$. Bedenken wir zunächst, dass das Product ρc wegen der Continuität des Vorganges nicht von der Temperatur abhängt, dass ferner γ, die specifische Wärme des Knallgases bei constantem Druck nach allem, was wir von der specifischen Wärme der Gase überhaupt wissen, nur wenig mit der Temperatur variiert, so hätten wir nur noch die Wärmeleitungsconstante k als Function der Temperatur auszudrücken. Misst man die Temperatur absolut und setzt etwa übereinstimmend mit den Schlüssen der Gastheorie $k=K\sqrt{U}$, so gelingt es leicht, die Lösung anzuschreiben. Da aber dann die Berechnung der Constanten auf transcendente Gleichungen führt und es sich uns hier nicht um numerische Rechnungen sondern nur um die Demonstration des Gedankenganges handelt, wollen wir uns begnügen, auch das k constant zu setzen. Dann ist

$$x=-\frac{k}{c\rho\gamma}\log\text{nat}\left(-\frac{c\rho\gamma}{k}U+C_1\right)+C_2$$

[1] l. c.

und nach Einsetzen der Werte

$$C_1 = \frac{c\rho\gamma}{k} \, \frac{t - \tau e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}{1 - e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}$$

$$C_2 = \frac{k}{c\rho\gamma} \log \text{nat} \, \frac{c\rho\gamma}{k} \, \frac{t - \tau}{1 - e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}$$

$$x = \frac{k}{c\rho\gamma} \log \text{nat} \, \frac{\tau - t}{U - t + (\tau - U)\, e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}.$$

Man findet dann

$$W' = -k \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=d} = c\rho\gamma \, \frac{(\tau - t)\, e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}{1 - e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}.$$

Die Kenntnis der Größe W' setzt uns zunächst in den Stand, die durch die Abgabe dieser Wärmemenge an das Gitter veränderte Explosionsgeschwindigkeit c' zu berechnen. Wir fanden $c' = \frac{W - W'}{\rho\gamma(\tau - t)}$. Setzen wir hierin für W' seinen Wert und $W = c\rho\gamma(\tau - t)$, so ergibt sich

$$c' = c \left(1 - \frac{e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}{1 - e^{-\frac{c\rho\gamma d}{k}}}\right).$$

Wollen wir endlich die Distanz berechnen, in welcher die Explosion vor dem Gitter zum Stillstand kommt, so haben wir nach den obigen Auseinandersetzungen $c' = u$, gleich der Strömungsgeschwindigkeit des Gases zu setzen und die Gleichung nach d aufzulösen. Wir erhalten die einfache Formel:

$$d = \frac{k}{c\rho\gamma} \log \text{nat} \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{u}{c}}\right).$$

Ist $u = c$, so ist $d = \infty$, d. h. die Brennfläche nähert sich überhaupt nicht dem Gitter, da sie ja durch jeden noch so kleinen Wärmeverlust zurückgetrieben wird. Ist $u = o$, so verlöscht die Flamme wegen Mangel an frischer Gaszufuhr in der Distanz $d = \frac{k}{c\rho\gamma}$ log nat 2. Dies ist zugleich unter den gemachten Voraussetzungen die Minimaldistanz, bis zu welcher sich die Flamme überhaupt dem Gitter nähern kann. Durchschlagen wird die Flamme nur dann, wenn $c = \frac{W}{\rho\gamma(\tau - t)}$ unendlich groß wird. Das tritt ein, wenn t, die Temperatur des Gitters und des Gases in der Gitterebene bis auf die Entzündungstemperatur τ gestiegen ist.

Über die Absorption elektrischer Wellen in einem Gas

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juni 1902.)

In der vorliegenden Arbeit sind die Veränderungen berechnet, welche eine ebene, geradlinig polarisierte Welle elektrischer Kraft erfährt, wenn sie ein Medium durchsetzt, das aus im Mittel gleichförmig vertheilten Kugeln besteht, deren elektromagnetische Constanten von denen des umgebenden Äthers verschieden sind. Für ein solches Medium ist im Titel zur Kürze der Terminus Gas gebraucht.

Das erwähnte Problem dürfte wohl an und für sich ein gewisses Interesse beanspruchen. Dasselbe wird jedoch wesentlich dadurch erhöht, dass es von vornherein nicht unmöglich scheint, einen Zusammenhang zwischen den Resultaten dieser Berechnungen und den beobachteten Thatsachen der Spectralanalyse aufzufinden.

Der Verlauf freier elektrischer Schwingungen in einer Kugel ist von Lamb[1] und J. J. Thomson[2] berechnet worden; ferner nach einer anderen Methode von Koláček.[3] Vom mathematischen Standpunkt analog ist das Problem der elastischen Schwingungen einer Kugel, das von Jaerisch,[4] Lamb[5]

---

[1] Philos. Trans., Part II, 1883, p. 519 (von nun ab mit l. c. bezeichnet).

[2] Recent Researches on Elektricity and Magnetism, p. 361 (von nun ab mit l. c. bezeichnet).

[3] Wied. Ann., 58, S. 271.

[4] Inauguraldissertation, Breslau 1879 (l. c.); ferner Crelle's Journ., 88, S. 131; 117, S. 291.

[5] Proc. London math. soc., 13, p. 189.

und kürzlich von Kohl[1] untersucht wurde. Alle diese Untersuchungen führen auf transendente Gleichungen, etwa

$$f_n(x) = 0; \quad n = 1, 2, 3 \ldots \infty, \tag{1}$$

deren Wurzeln die möglichen Schwingungszahlen liefern. (Natürlich haben diese Gleichungen bei den einzelnen Autoren infolge anderer Betrachtungsweise oder verschieden eingeführter Näherungen verschiedene Formen.) Mit Hinblick auf den Vergleich mit den Spectren wurden diese Gleichungen untersucht von Loschmidt,[2] Koláček (l. c.) und Kohl (l. c.). Während die Abhandlung des ersteren mehr den Charakter einer Voruntersuchung trägt, haben die beiden letztgenannten Autoren die erwähnten Gleichungen für die niedrigen Werte von n (1, respective 1 und 2 discutiert).

Man stößt bei der Untersuchung der freien Schwingungen in einer Kugel auf verschiedene Schwierigkeiten. Die erste ist mathematischer Natur und besteht darin, dass die Wurzeln der Gleichungen (1) complex sind, da ja die freien Schwingungen infolge der Ausstrahlung (eventuell auch der Wärmeentwickelung) gedämpft sind. (Durch gewisse Näherungen kann allerdings der reelle Bestandtheil gesondert betrachtet werden.) Dies erschwert natürlich die Auffindung der Wurzeln beträchtlich. So hat sich auch Koláček (l. c.) wegen der »außerordentlichen Umständlichkeit der Rechnung« auf die Discussion der Gleichungen $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = 0$ beschränkt. (In der letztgenannten Abhandlung sind ganz andere mathematische Hilfsmittel verwendet als in denen der anderen Autoren, die vorliegende Arbeit eingeschlossen. Die obige Schematisierung ist daher natürlich cum grano salis zu verstehen.)

Einer weiteren Schwierigkeit begegnet man, wenn man die Schwingungszahlen einer frei schwingenden Kugel mit den Schwingungszahlen der Spectrallinien vergleichen will. Es gibt ja unendlich viele Wurzeln der Gleichungen (1), und man kann nicht ohneweiters erkennen, welche von ihnen für die Licht-

[1] Drude Ann., 7, p. 516 (l. c.).

[2] Diese Berichte, 93, Abth. II a, S. 434; 1886.

emission vorzugsweise maßgebend sind. Denn über die Intensität der einzelnen Schwingungen erfahren wir hier nichts. Kohl schließt (l. c.) aus der Größe der Dämpfung, welche zu jeder möglichen Schwingungszahl gehört, dass vor allem die Wurzeln der Gleichung $f_1(x) = 0$ für die Lichtemission maßgebend sein dürften. Diese Schlussweise scheint mir jedoch nicht sicher richtig zu sein. Man hat ja vorläufig keine Vorstellung über die Art der Erregung der einzelnen Schwingungen. Und so wäre es doch z. B. möglich, dass gerade die rasch abklingenden Schwingungen öfter und intensiver angeregt werden als die anderen und infolge dessen doch eine wesentliche Rolle im Spectrum spielen. (Gegen das erstere spricht allerdings wieder die relativ große Cohärenz des Lichtes.)

Endlich würden den Schwingungszahlen einer frei schwingenden Kugel mathematisch feine Linien entsprechen. Die endliche Breite der Spectrallinien kann man also nur durch weiter ad hoc gemachte Hypothesen[1] erklären, die zwar das Qualitative der Erscheinung sehr plausibel wiedergeben, jedoch schwerlich zu quantitativen Schlüssen führen können.

Um diesen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, habe ich in der vorliegenden Arbeit statt der Emission die Absorption elektrischer Wellen durch eine Kugel studiert. Der größeren Allgemeinheit zuliebe habe ich anfangs diese Kugel als leitendes Dielektricum gewählt. Später jedoch nehme ich an, dass dieselbe ein vollständiger Isolator mit großer Dielektricitätsconstante sei; d. h. ich nehme wenigstens an, dass die Ohm'schen Leitungsströme gegenüber den Verschiebungsströmen zu vernachlässigen sind, was bei der hohen Frequenz der Lichtschwingungen wohl gerechtfertigt ist.[2] Abgesehen davon wäre ja auch die Annahme einer Wärmeentwickelung im Molecül, die ja Ohm'sche Ströme zur Folge haben, nicht zweckmäßig. Auf eine solche Kugel soll also eine ebene, plan-polarisierte, elektrische Welle treffen. Ein Theil der Energie der letzteren wird reflectiert, ein anderer regt die Kugel zum

---

[1] Siehe Koláček, l. c. S. 305; Kohl, l. c. S. 543; Fußnote 2.

[2] Siehe Koláček, l. c. S. 280.

Mitschwingen an und wird dann von derselben nach allen Richtungen ausgestrahlt. Die Kugel absorbiert also einen Theil der in bestimmter Richtung fortschreitenden Energie, der natürlich umso größer ausfällt, je näher die Periode der auffallenden Welle mit der Periode einer Eigenschwingung der Kugel übereinstimmt. Denkt man sich statt einer sehr viele solche Kugeln, die gleichmäßig in einem Raume vertheilt, sämmtlich von der auffallenden Welle getroffen werden, so hat man einen Vorgang, der vielleicht mit der Absorption des Lichtes durch ein Gas eine gewisse Ähnlichkeit hat. Das Resultat der Rechnung ist, um mich kurz auszudrücken, ein Absorptionsspectrum, dessen Linien durch die Wurzeln transscendenter Gleichungen vom Typus (1) gegeben sind, die jetzt, wie zu erwarten, bloß reelle Wurzeln haben. Und zwar gehört jetzt zu jeder Linie eine bestimmt angebbare Breite und Intensität, worin eben meines Erachtens der Vortheil dieser Betrachtungsweise liegt. Und zwar kommt hier, wie wir sehen werden, den Wurzeln der verschiedenen Gleichungen (1) und damit den durch sie definierten Linien eine andere Bedeutung zu, als ihnen von den anderen, eingangs genannten Autoren eingeräumt worden zu sein scheint. Hauptsächlich spielen auch die durch die Wurzeln der Gleichungen (1) mit höherem Index n definierten Linien eine wesentliche Rolle, wodurch natürlich der ganze Charakters unseres »Spectrums« verändert wird.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in folgende Abschnitte:

In §. 1 werden die von Lamb (l. c.) in rechtwinkeligen Coordinaten angegebenen Integrale der Maxwell'schen Gleichungen für eine Kugel auf Polarcoordinaten transformiert.

In §. 2 werden die elektromagnetischen Vorgänge berechnet, welche in einer Kugel durch eine auffallende Welle elektrischer Kraft angeregt werden. Die letztere ist durch

$$X_0 = Ae^{i(pt+qz)} \tag{12}$$

gegeben, schreitet also nach der negativen Z-Richtung fort und ist in der X-Richtung polarisiert. Die Rechnung hat infolge des Bestehens der einfachen Relation (13),[1] die bereits Lord

[1] Siehe weiter unten S. 1240.

Ragleih[1] bei dem analogen Problem der Akustik benützt, keine Schwierigkeit. Für eine leitende Kugel hat J. J. Thomson[2] das Problem behandelt, jedoch gerade die Größen, auf welche es hier ankommt, vernachlässigt (er setzt den Widerstand der Kugel gleich Null), so dass seine Resultate hier nicht verwendet werden können.

In §. 3 werden die Componenten der elektrischen Kraft außerhalb der Kugel wieder auf rechtwinkelige Coordinaten umgerechnet und damit die Störung angegeben, welche die auffallende Welle durch das kugelförmige Hindernis erlitt. Die dort mit X, Y, Z bezeichneten Größen sind die Componenten der elektrischen Kraftwelle, welche die durch die auffallende Welle erregte Kugel nach außen ausstrahlt.

In §. 4 nehmen wir statt der einen Kugel sehr viele an, welche auf einer unendlichen, zur Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle senkrechten Ebene gleichförmig vertheilt sind. Wir setzen diese Kugeln (wenigstens im Vergleich zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes) als ruhend voraus und nehmen an, dass sie so weit voneinander entfernt sind, dass ihre gegenseitige Beeinflussung vernachlässigt werden darf. Wir haben nun die früher (§. 3) mit X, Y, Z bezeichneten Größen für alle Kugeln zu summieren. Wir stoßen dabei auf ein bestimmtes Integral, dessen Auswertung

in §. 5 durchgeführt wird.

In §. 6 ist das Resultat der Rechnungen der vorigen Paragraphen angegeben: Sämmtliche von der auffallenden Welle erregten Kugeln strahlen eine Welle elektrischer Kraft aus, welche (in einer Distanz von der Ebene, welche groß gegen den Abstand der Kugeln ist) nur nach der X-Richtung wirkt, d. h. eben und eben polarisiert in derselben Ebene wie die auffallende Welle ist. Diese elektrische Kraft ist dort mit H bezeichnet (Gleichung 23).

Da die Discussion dieses Ausdruckes sehr schwierig wäre, führen wir folgende Näherung ein: Wir nehmen an, dass der Radius der Kugeln gegenüber der Wellenlänge der auffallenden

[1] Theorie des Schalles, deutsch von Neesen, II, S. 312.

[2] L. c. S. 437.

Welle klein sei; eine Annahme, die wohl gerechtfertigt ist, wenn es sich um Gasmolecüle und Lichtschwingungen handelt.[1] Ist a der Radius, λ die Wellenlänge der auffallenden Welle, so muss also $\frac{a}{\lambda} = 2\pi q a$ klein gegen 1 sein; also auch:

$$qa \text{ klein gegen } 1. \tag{2}$$

Unter dieser Voraussetzung finden wir nunmehr leicht, dass der Ausdruck II im allgemeinen verschwindet (bis auf kleines von der Ordnung qa) und nur an bestimmten Stellen (für bestimmte Werte der Schwingungszahl der einfallenden Welle) und deren unmittelbaren Umgebung von Null verschieden ist.

In §. 7 definieren wir den Absorptionsindex eines Mediums, das aus sehr vielen parallel übereinander gelegten Ebenen besteht, die, wie in §. 4 angegeben, mit Kugeln besetzt sind, also des Mediums, das im Titel kurz als Gas bezeichnet ist. Derselbe hat ganz denselben Verlauf wie II. Wäre also die auffallende Welle (12) nicht homogen, sondern gleichmäßig aus Strahlen aller Wellenlängen zusammengesetzt, so würde man ein »Absorptionsspectrum« erhalten, das aus Linien besteht, deren Breite und Intensität genau angegeben werden kann.

Die Berechnung der Lage der einzelnen Linien ist jedoch sehr mühsam, so dass ich sie erst in einem sehr kleinen Bereiche der Schwingungszahlen durchführen konnte, daher ich auch jetzt noch nicht sagen kann, ob man so auf irgendeine Ähnlichkeit mit den beobachteten Spectren der Elemente stößt. Die Entscheidung dieser Frage werde ich vielleicht in einer späteren Mittheilung näher kommen können. Doch hoffe ich, wie gesagt, dass das hier behandelte Problem auch an und für sich ein gewisses Interesse verdient, das sein Studium rechtfertigen mag.

§. 1.

Wir bestimmen die Lage eines Punktes durch die rechtwinkeligen Coordinaten xyz oder durch die Polarcoordinaten r, ϑ, φ, in der durch die Figur angegebenen Weise. Wir bezeichnen mit XYZ respective α, β, γ die Componenten der

[1] Siehe etwa Kohl, l. c. S. 540.

elektrischen respective magnetischen Kraft in der Richtung xyz; mit P, Θ, Φ respective LMN die Componenten derselben Kräfte in der Richtung r, d, φ.

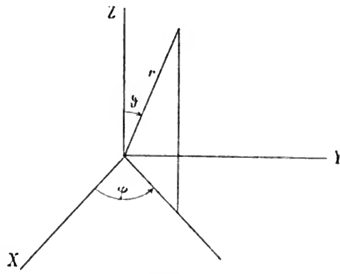


Fig. 1.

Sei μ die Permenbilität, k die Dielektricitätsconstante, σ der specifische Widerstand und nehmen wir ferner an, das alle hier vorkommenden Variabelen die Zeit nur in einem Factor e^{ipt} enthalten, so lauten bekanntlich die Maxwell'schen Gleichungen (im elektromagnetischen Maßsystem):

$$X\left(\frac{4\pi}{\sigma} + kip\right) = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \ldots \text{etc.}$$

$$-i\mu p\alpha = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \ldots \text{etc.}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = o$$

wozu noch die Grenzbedingungen kommen, welche die Stetigkeit der zur Grenzfläche tangentialen Kraftcomponenten fordern.

Betrachten wir jedoch die Componenten der Kräfte nach den Richtungen der Polarcoordinaten, so gelten für die letzteren folgende Differentialgleichungen:[1]

---

[1] Die auf orthogonale Coordinaten transformierten Maxwell'schen Gleichungen sind von M. Abraham (Die elektrischen Schwingungen um einen

$$P\cdot\left(\frac{4\pi}{\sigma}+kip\right)=\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta N)-\frac{\partial}{\partial\varphi}rM\right\}$$

$$\Theta\cdot\left(\frac{4\pi}{\sigma}+kip\right)=\frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta N)\right\}$$

$$\Phi\cdot\left(\frac{4\pi}{\sigma}+kip\right)=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rM)-\frac{\partial L}{\partial\vartheta}\right\}$$

$$-i\mu pL=\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\Phi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\Theta)\right\}$$

$$-i\mu pM=\frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial P}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta\Phi)\right\}\qquad(4)$$

$$-i\mu pN=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\Theta)-\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\right\}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2P)}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\Theta)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2L)}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta M)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial N}{\partial\varphi}=0$$

Das allgemeinste Integral der Gleichungen (3) für einen von einer Kugelfläche begrenzten Raum ist von Lamb[1] angegeben worden.

Man kann daraus natürlich mit Hilfe der Substitutionen

$$P=X\sin\vartheta\cos\varphi+Y\sin\vartheta\cos\varphi+Z\cos\vartheta\qquad(5)$$

...........etc.

auch die allgemeinsten Integrale der Gleichungen (4) erhalten.

Ich will hier nicht die etwas complicierten Ausdrücke angeben, die Lamb für die hier mit $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichneten Größen ableitet, sondern bloß das etwas einfachere Resultat der Substitutionen (1) mittheilen. Ich erhalte also:

---

stabförmigen Leiter etc., Wied. Ann., 66, S. 438) angegeben. Durch die entsprechende Specialisierung erhält man die folgengen Gleichungen (4).

[1] Lamb, On electrical motions in a spherical conductor. Phil. Trans., Part II, 1883. p. 519.

$$P = e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n \cdot n+1}{r} f_n(q'r) \cdot \omega_n \right]$$

$$\Theta = e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r f_n(q'r))}{\partial r} \frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta} - f_n(q'r) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d \chi_n}{d \varphi} \right]$$

$$\Phi = e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r f_n(q'r))}{\partial r} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \omega_n}{\partial \varphi} + f_n(q'r) \frac{\partial \chi_n}{\partial \vartheta} \right]$$

$$ip\mu L = e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n \cdot n+1}{r} f_n(q'r) \cdot \chi_n \right] \qquad (6)$$

$$ip\mu M = e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-q'^2 f_n(q'r) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \omega_n}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r f_n(q'r))}{\partial r} \frac{\partial \chi_n}{\partial \vartheta} \right]$$

$$ip\mu N = e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \left[q'^2 f_n(q'r) \frac{\partial \omega_n}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r f_n(q'r))}{\partial r} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \chi_n}{\partial \varphi} \right],$$

wobei n alle Werte von 1 bis ∞ annehmen kann (für $n=0$ verschwinden die Ausdrücke).

Hierin verstehen wir unter ω_n und χ_n zwei beliebige Kugelflächenfunctionen (Lamb verwendet räumliche Kugelfunctionen); unter $f_n(x)$ ein Integral der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n \cdot n+1}{x^2}\right) z = 0 \qquad (7)$$

$f_n(q'r)$ genügt also:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \left(q'^2 - \frac{n \cdot n+1}{r^2}\right) f = 0. \qquad (8)$$

Wir werden hier mit zwei particulären Integralen von (2) zu thun haben, die wir mit eigenen Symbolen bezeichnen wollen:

$$\left.\begin{aligned} S_n(x) &= x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\sin x}{x} \qquad (a)\\ E_n(x) &= x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{e^{-ix}}{x}.^{1} \qquad (b)\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

q' ist zur Kürze eingeführt:

$$q'^2 = -\left(\frac{4\pi}{\sigma}+Kip\right)i\mu p. \qquad 10)$$

Man kann sich natürlich auch direct überzeugen, dass die Integrale (6) die Differentialgleichungen (4) identisch befriedigen. (Hiebei sind nur die Gleichung (9*b*), sowie die Differentialgleichung der Kugelfunctionen zu berücksichtigen.)

Die Integrale (6) der Maxwell'schen Gleichungen haben wir nun für den Raum innerhalb und außerhalb der Kugel zu specialisieren; und zwar haben wir in beiden Fällen sowohl f_n durch ein bestimmtes particuläres Integral von (8) zu ersetzen, als auch den Wert der Constante q' für beide Räume festzulegen.

Innerhalb der Kugel kann r verschwinden, daher ist für f_n hier S_n einzusetzen; außen haben wir es offenbar mit Wellen zu thun, welche sich von der Kugel fortbewegen, daher wir hier das particuläre Integral E_n wählen müssen.[2] Ferner hat

[1] Diese Bezeichnungsweise stimmt mit der von J. J. Thomson (Recent Researches on Elektricity and magnetism, p. 362) gewählten überein. Dortselbst (p. 364) finden sich auch die wichtigsten Eigenschaften dieser Functionen übersichtlich zusammengestellt. Lamb verwendet (l. c.) eine Function

$$\psi_n(x) = (-)^n\frac{1.3\ldots 2n+1}{x^n}S_n(x).$$

Heine gebraucht (Handbuch der Kugelfunctionen, I, S. 240) die Bezeichnung:

$$\psi_n(\Theta) = 2(-)^n S_n(\Theta).$$

Die Bezeichnungsweise von Jaerisch l. c. siehe Anmerkung 1 auf Seite 26 dieser Arbeit. (Im wesentlichen sind diese Functionen Cylinderfunctionen mit nicht ganzzahligem Index; siehe Heine l. c.)

[2] Siehe J. J. Thomson, l. c. S. 362.

q' im Inneren der Kugel den durch (10) definierten Wert, während außen (im Äther) $\sigma = \infty$; $\mu = 1$; $k = \frac{1}{\mathfrak{v}^2}$ wird; durch diese Substitutionen wird die rechte Seite von (10) gleich $\frac{p^2}{\mathfrak{v}^2}$; wenn wir also den Wert von q' außen mit q bezeichnen, so wird

$$q = \frac{p}{\mathfrak{v}} \tag{11}$$

Die Kugelfunctionen ω_n und φ_n werden endlich auch in beiden Räumen verschiedene Werte haben; und zwar wollen wir sie außen mit ω_n, φ_n, innen mit ω'_n, φ'_n bezeichnen. (In unserem Falle unterscheiden sie sich blos durch einen constanten Factor). Wir setzen also in (6) für:

innerhalb der Kugel: f_n, q', ω_n, φ_n,

S_n, q', ω'_n, φ'_n.

außerhalb der Kugel: E_n, q, ω_n, φ_n

ein und erhalten so die Kraftcomponenten für beide Räume, die wir im folgenden durch die Indices i (innen) und a (außen) unterscheiden, hier jedoch nicht noch explicite hinschreiben wollen.

§. 2.

Die einfallende erregende Welle schreite in der negativen Z-Richtung fort und sei nach der X-Richtung polarisiert; wir machen die auf sie bezüglichen Buchstaben durch den Index 0 kenntlich; also:

$$\begin{gathered} X_0 = A . e^{i(pt+qz)} \\ Y_0 = Z_0 = 0 \\ ip\beta_0 = -iqAe^{i(pt+qz)} = -iqX_0 \\ a_0 = \gamma_0 = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

(Die Größen p und q des vorigen Paragraphen sind offenbar den hier vorkommenden gleichbezeichneten Größen gleich zu setzen.)

Der Wert, den X_0 an der Oberfläche der Kugel $(r=a)$ annimmt, muss nach Kugelfunctionen entwickelt werden; und zwar ist:

$$X_{0\ \text{für}\ r=a} = A e^{i(pt+qa\cos\vartheta)} =$$

$$= e^{ipt} A \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) S_n(qa) P_n(\cos\vartheta),^1 \quad (13)$$

worin S_n dieselbe Bedeutung hat wie früher, P_n die zonale Kugelfunction ist.

Aus (12) erhalten wir sofort die sphärischen Componenten der erregenden Welle:

$$\begin{aligned} P_0 &= X_0 \sin\vartheta \cos\varphi & ipL_0 &= -iqX_0 \sin\vartheta \sin\varphi \\ \Theta_0 &= X_0 \cos\vartheta \cos\varphi & ipM_0 &= -iqX_0 \cos\vartheta \sin\varphi \quad (14) \\ \Phi_0 &= -X_0 \sin\varphi & ipN_0 &= -iqX_0 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Innerhalb der Kugel sind die Kraftcomponenten durch $P_i \ldots$ etc. gegeben; außen haben wir $P_a + P_0; \ldots$ etc., da sich ja hier die erregende und die reflectierte, respective durchgelassene Welle summieren. Die Grenzbedingungen lauten also:

$$\Theta_i = \Theta_a + \Theta_0; \quad \Phi_i = \Phi_a + \Phi_0$$

und (15)

$$M_i = M_a + M_0; \quad N_i = N_a + N_0$$

für $r = a$.

Für die in diesen Gleichungen vorkommenden Größen setzen wir nun ihre Werte aus (6), (12), (13) und (14) ein, ordnen beiderseits nach Kugelfunctionen und setzen die Kugelfunctionen gleicher Ordnung auf beiden Seiten einander gleich. So erhält man:

[1] Siehe etwa Heine. Handbuch der Kugelfunctionen, S. 82, Gleichung (14); dabei zu berücksichtigen Anmerkung 1 auf Seite 1229 dieser Arbeit.

$$\frac{q'^2}{\mu} S_n(q'a)\,\omega'_n - q^2 E_n(qa)\,\omega_n = (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n.n+1} A q S_n(qa) \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \cos\varphi$$

$$\frac{d(aS_n(q'a))}{da}\,\omega'_n - \frac{d(aE_n(qa))}{da}\,\omega_n = (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n.n+1} A \frac{1}{q} \frac{d(aS_n(qa))}{da} \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \cos\varphi$$

$$S_n(q'a)\,\chi'_n - E_n(qa)\,\chi_n = (-i)^n \frac{2n+1}{n.n+1} A S_n(qa) \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \sin\varphi \qquad (16)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d(aS_n(q'a))}{da}\,\chi'_n - \frac{d(aE_n(qa))}{da}\,\chi_n = (-i)^n \frac{2n+1}{n.n+1} A \frac{d(aS_n(qa))}{da} \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \sin\varphi.$$

Hierin ist zur Kürze $\frac{d(aS_n(qa))}{da}$ für $\left|\frac{d(rS_n(qr))}{dr}\right|_{r=a}$ gesetzt. Daraus ergibt sich:

$$\omega_n = A_n \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \cos\varphi; \quad \chi_n = B_n \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \sin\varphi$$

$$\omega'_n = C_n \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \cos\varphi; \quad \chi'_n = D_n \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \sin\varphi, \qquad (17)$$

wobei die Constanten folgende Werte haben:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_n &= (-i)^{n+1}\frac{2n+1}{n.n+1}\frac{A}{q}\frac{q^2 S_n(qa)\dfrac{d(aS_n(q'a))}{da}-\dfrac{q'^2}{\mu}S_n(q'a)\dfrac{d(aS_n(qa))}{da}}{q^2E_n(qa)\dfrac{d(aS_n(q'a))}{da}-\dfrac{q'^2}{\mu}S_n(q'a)\dfrac{d(aE_n(qa))}{da}}\\
B_n &= (-i)^{n+2}\frac{2n+1}{n.n+1}A\frac{\dfrac{1}{\mu}S_n(qa)\dfrac{d(aS_n(q'a))}{da}-S_n(q'a)\dfrac{d(aS_n(qa))}{da}}{\dfrac{1}{\mu}E_n(qa)\dfrac{d(aS_n(q'a))}{da}-S_n(q'a)\dfrac{d(aE_n(qa))}{da}}\\
C_n &= (-i)^{n-1}\frac{2n+1}{n.n+1}Aq\frac{S_n(qa)\dfrac{d(aE_n(qa))}{da}-E_n(qa)\dfrac{d(aS_n(qa))}{da}}{\dfrac{q'^2}{\mu}S_n(q'a)\dfrac{d(a(E_n(qa))}{da}-q^2E_n(qa)\dfrac{d(aS_n(q'a))}{da}}\\
D_n &= (-i)^{n}\frac{2n+1}{n.n+1}A\frac{S_n(qa)\dfrac{d(aE_n(qa))}{da}-E_n(qa)\dfrac{d(aS_n(qa))}{da}}{S_n(q'a)\dfrac{d(aE_n(qa))}{da}-\dfrac{1}{\mu}E_n(qa)\dfrac{d(aS_n(q'a))}{da}}.
\end{aligned}
\right\}\quad(18)
$$

Hier nimmt nach dem Vorhergehenden n die Werte von 1 bis ∞ an. Setzen wir jetzt die Werte von ω_n... etc. in (6) ein, so ist die erste Aufgabe gelöst.

§. 3.

Wir wollen die rechtwinkeligen Componenten der elektrischen Kräfte für den Außenraum berechnen. Es geschieht dies mit den Formeln:

$$X = \sin\vartheta\cos\varphi\, P_a + \cos\vartheta\cos\varphi\,\Theta_a - \sin\varphi\,\Phi_a$$
$$Y = \sin\vartheta\sin\varphi\, P_a + \cos\vartheta\sin\varphi\,\Theta_a + \cos\varphi\,\Phi_a$$
$$Z = \cos\vartheta\, P_a - \sin\vartheta\,\Theta_a.$$

(Eigentlich sollten auch die Größen $X\ldots$ mit dem Index a versehen werden.) Man erhält auf diese Weise:

$$X = e^{ipt}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{A_n\Big[\frac{n.n+1}{r}E_n\frac{dP_n}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos^2\varphi + \frac{1}{r}\frac{d(rE_n)}{dr}\Big(\frac{d^2P_n}{d\vartheta^2}\cos\vartheta\cos^2\varphi + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dP_n}{d\vartheta}\sin^2\varphi\Big)\Big]$$
$$-B_nE_n\Big[\frac{dP_n}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos^2\varphi + \frac{d^2P_n}{d\vartheta^2}\sin^2\varphi\Big]\Big\}$$

$$Y = e^{ipt}\sin\varphi\cos\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{A_n\Big[\frac{n.n+1}{r}E_n\frac{dP_n}{d\vartheta}\sin\vartheta + \frac{1}{r}\frac{d(rE_n)}{dr}\Big(\frac{d^2P_n}{d\vartheta^2}\cos\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dP_n}{d\vartheta}\Big)\Big] \qquad (19)$$
$$-B_nE_n\Big[\frac{dP_n}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} - \frac{d^2P_n}{d\vartheta^2}\Big]\Big\}$$

$$Z = e^{ipt}\cos\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{A_n\Big[\frac{n.n+1}{r}E_n\frac{dP_n}{d\vartheta}\cos\vartheta - \frac{1}{r}\frac{d(rE_n)}{dr}\frac{d^2P_n}{d\vartheta^2}\sin\vartheta\Big] + B_nE_n\frac{dP_n}{d\vartheta}\Big\}.$$

In diesen Ausdrücken ist das Argument qr der Function E_n, ebenso das Argument $\cos\vartheta$ der Function P_n zur Kürze fortgelassen worden.

Man könnte sich durch allerdings etwas mühsame Transformationen überzeugen, dass sich diese Ausdrücke als $e^{ipt}\Sigma E_n(qr).L_n(\vartheta,\varphi)$ darstellen lassen, wo L_n eine Kugelflächenfunction der Ordnung n ist, dass also die Componenten XYZ der Differentialgleichung

$$\nabla^2 X = \frac{1}{\mathfrak{v}^2}\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{p^2}{\mathfrak{v}^2}X = -q^2X$$

genügen. Das elektrische Feld außerhalb der Kugel ist jetzt durch die Summe dieser (von der erregten Kugel ausgestrahlten) Kraftcomponenten und der Componenten der ursprünglichen, erregenden Welle gegeben, also durch die Componenten:

$$X_0 + X;\ Y;\ Z.$$

§. 4.

Wir denken uns nun den Mittelpunkt der Kugel statt wie bisher im Ursprung im Punkte M der XY Ebene befindlich,

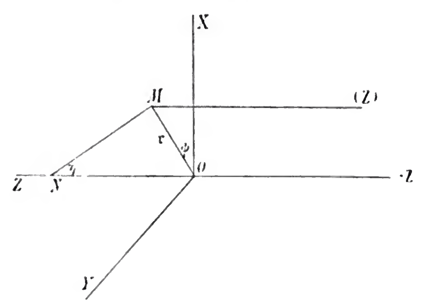


Fig. 2.

dessen Lage durch die Polarcoordinaten $\mathfrak{r}$ und ψ (Fig. 2) gegeben sein mag. ($NO = l$; $\sphericalangle MNO = \gamma_1$; $\sphericalangle MOX = \psi$). Durch die entsprechende Transformation von (19) findet man natürlich

leicht die nunmehrigen Werte der Kraftcomponenten; wir wollen dieselben jedoch bloß im Punkte N der negativen Z-Achse bestimmen. Dazu haben wir in (19) bloß zu setzen:

$$r^2 = l^2 + \mathfrak{r}^2;\ \vartheta = \sphericalangle ZMN = 180 - \eta;\ \varphi = 180 + \psi. \quad (20)$$

Nun seien statt der einen Kugel unendlich viele gleichbeschaffene auf der XY-Ebene gleichmäßig vertheilt, derart, dass ν auf die Flächeneinheit kommen. Alle werden von der erregenden Welle getroffen und emittieren ihrerseits wieder Wellen elektrischer Kraft, deren Componenten durch (19) mutatis mutandis gegeben sind. Die gegenseitige Beeinflussung vernachlässigen wir, wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde. Dann herrscht im Punkte N ein Schwingungszustand, den wir bestimmen können, wenn wir (19) mittels (20) für jede Kugel transformieren und dann die Summe über alle diese Ausdrücke bilden. Ist l gegenüber dem mittleren Abstand zweier solcher Kugeln genügend groß, so können wir diese Summe durch das Doppelintegral nach $\mathfrak{r}$ und φ ersetzen.

Wir führen also gemäß (20) in (19) $\mathfrak{r}$ und ψ als Variable ein $\left(\eta = \arccos \frac{l}{r}\right)$, multiplicieren mit $\nu \mathfrak{r} d\mathfrak{r} d\psi$ und bilden das Integral von 0 bis 2π und 0 bis ∞ respective.

Man erkennt sofort, dass

$$\int_0^{2\pi} Y d\psi = \int_0^{2\pi} Y d\varphi = 0;\ \text{ebenso} \int_0^{2\pi} Z d\psi = 0$$

ist, d. h. der Polarisationszustand der erregenden Welle bleibt ungeändert. Wir haben also nur mehr zu bilden

$$\nu \int_0^{\infty} \mathfrak{r} d\mathfrak{r} \int_0^{2\pi} d\varphi X = \Pi.$$

Da $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$ ist, so erhalten wir

$$\Pi = e^{i p t} \pi \nu \int_0^{\infty} \mathfrak{r} d\mathfrak{r} \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ A_n \Big[\frac{n \cdot \overline{n+1}}{r} E_n \frac{dP_n}{d\vartheta} \sin \vartheta +$$
$$+ \frac{1}{r} \frac{d(rE_n)}{dr} \left(\frac{d^2 P_n}{d\vartheta^2} \cos \vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dP_n}{d\vartheta} \right)$$
$$- B_n E_n \left[\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dP_n}{d\vartheta} + \frac{d^2 P_n}{d\vartheta^2} \right] \Big\} \quad (21)$$

Innerhalb der geschlungenen Klammer haben wir uns natürlich r und ϑ durch $\mathfrak{r}$ ausgedrückt zu denken. Wir wollen aber diesen Ausdruck erst noch im Sinne der Bemerkung (S. 1244, all: 4) transformieren. Zu benützen sind hier die Relationen:

$$\frac{E_n(qr)}{r} = -\frac{q}{2n+1}\,(E_{n-1}(qr)+E_{n+1}(qr))$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{d[rE_n(qr)]}{dr} = \frac{q}{2n+1}\,(nE_{n+1}(qr)-(n+1)E_{n-1}(qr))$$ [1]

ferner:

$$nP_n(\zeta) = n\zeta P_{n-1}(\zeta) - (1-\zeta^2)\frac{dP_{n-1}(\zeta)}{d\zeta}$$

$$(n+1)P_n(\zeta) = (n+1)\zeta P_{n+1}(\zeta) + (1-\zeta^2)\frac{dP_{n+1}(\zeta)}{d\zeta}$$

welch letztere sich leicht aus den Definitionsgleichungen der Kugelfunction einer Variabeln ergeben.

Man erhält dann:

$$\begin{aligned}\Pi = e^{ipt}\pi\nu\int_0^\infty \mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{&A_n q\,\frac{n\,.\,n+1}{2n+1}\,.\\ &.\,[E_{n-1}(qr)P_{n-1}(\cos\vartheta)\,.\,(n+1)-E_{n+1}(qr)P_{n+1}(\cos\vartheta)\,.\,n]\\ &+n\,.\,n+1\,B_n E_n(qr)P_n(\cos\vartheta)\Big\}\end{aligned} \tag{22}$$

§. 5.

Wir haben jetzt vor allem zu berechnen

$$\int_0^\infty \mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}\,E_n(qr)\,P_n(\cos\vartheta) = J_n.$$

Nach (14) ist $\cos\vartheta = -\cos\tau_1 = -\frac{l}{r}$; also $P_n(\cos\vartheta) = (-)^n P_n\left(\frac{l}{r}\right)$.

[1] Diese Relationen ergeben sich leicht aus J. J. Thomson, l. c. S. 364, Gleichung (101) u. f.

Als Integrationsvariabeln führen wir r ein mittels der Relation $r^2 = \mathfrak{r}^2 + l^2$; also wird

$$J_n = (-)^n \int_l^\infty r\,dr\,E_n(qr) P_n\left(\frac{l}{r}\right).$$

Nun führen wir noch $\rho = qr$, und $b = lq$ ein, so wird

$$J_n = (-)^n \frac{1}{q^2} \int_b^\infty E_n(\rho) P_n\left(\frac{b}{\rho}\right) \rho\,d\rho.$$

Die Berechnung dieses Integrales ist mir nur in der folgenden, recht umständlichen Weise gelungen: Wir setzen für $P_n\left(\frac{b}{\rho}\right)$ seinen Wert ein, setzen das betreffende Summenzeichen gleich vor das Integralzeichen und erhalten:

$$J_n = (-)^n \frac{1}{q^2} \frac{1}{2^n} \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-)^h \frac{(2n-2h)!}{h!\,(n-h)!\,(n-2h)!}\, b^{n-2h} \int_b^\infty \rho^{2h-n+1} E_n(\rho)\,d\rho \qquad (\alpha)$$

worin $\left[\frac{n}{2}\right] = n/2$ oder $(n-1)/2$ je nachdem n gerade oder ungerade ist).

Das Integral

$$Y = \int_b^\infty \rho^{2h-n+1} E_n(\rho)\,d\rho$$

behandeln wir, indem wir $\rho^2 = \sigma$ als neue Variabeln einführen und beachten, dass

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} = 2\frac{d}{d\sigma},$$

dass also nach ($3b$)

$$E_n(\rho) = 2^n \sigma^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{d\sigma^n}\left(\frac{e^{-i\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{β}$$

ist. Also wird

$$Y = \int_{b^2}^{\infty} 2^{n-1}\sigma^h \frac{d^n}{d\sigma^n}\left(\frac{e^{-i\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{\sigma}}\right) d\sigma,$$

und wenn wir h mal partiell integrieren und im Resultat mutatis mutandis (β) berücksichtigen, so wird

$$Y = \left| \sum_{\varkappa=0}^{h} (-)^{\varkappa} \frac{h!}{(h-\varkappa)!} \rho^{2h-\varkappa-n+1} \cdot 2^{\varkappa} E_{n-\varkappa-1}(\rho) \right|_b^{\infty}.$$

Setzen wir dieses Resultat in (a) ein und vertauschen gleich die Reihenfolge der beiden Summationen, so wird

$$J_n = (-)^n \frac{1}{q^2} \frac{1}{2^n} \left| \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-)^{\varkappa} \rho^{1-\varkappa} 2^{\varkappa} E_{n-\varkappa-1}(\rho) \sum_{h=\varkappa}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-)^h \frac{(2n-2h)!}{(n-h)!\,(n-2h)!\,(h-\varkappa)!} \left(\frac{b}{\rho}\right)^{n-2h} \right|_b^{\infty}. \tag{γ}$$

Führen wir in der zweiten Summe $\mu = h - \varkappa$ als neue Summationsvariabeln ein, so wird dieselbe, wenn wir zur besseren Übersicht etwa noch $(n-\varkappa) = m$ setzen:

$$= (-)^{\varkappa} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-\varkappa} (-)^{\mu} \left(\frac{b}{\rho}\right)^{m-2\mu-\varkappa} \frac{(2m-2\mu)!}{(m-\mu)!\,(m-2\mu)!\,\mu!}$$
$$\cdot (m-2\mu)(m-2\mu-1)\ldots(m-2\mu-\varkappa+1)$$
$$= (-)^{\varkappa} 2^{m} P_m^{(\varkappa)}\left(\frac{b}{\rho}\right) = (-)^{\varkappa} 2^{n-\varkappa} P_{n-\varkappa}^{(\varkappa)}\left(\frac{b}{\rho}\right),$$

worin $P_m^{(\varkappa)}(x) = \frac{d^{\varkappa}}{dx^{\varkappa}}(P_m(x))$ gesetzt ist. Setzen wir dies in (γ) ein, so erhalten wir

$$J_n = (-)^n \frac{1}{q^2} \left| \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \rho^{1-\varkappa} E_{n-\varkappa-1}(\rho)\, P_{n-\varkappa}^{(\varkappa)}\left(\frac{b}{\rho}\right) \right|_b^{\infty}. \qquad (\delta)$$

Betrachten wir erst den Wert dieser Summe an der oberen Grenze ∞. Es ist, wenn ρ sehr groß ist,

$$\lim E_n(\rho) = (-i)^n \frac{e^{-i\rho}}{\rho}.$$

Somit verschwinden gewiss alle Glieder von (δ) für $\rho = \infty$ außer dem ersten; dieses hat den Wert

$$\lim_{\rho=\infty} (-i)^n e^{-i\rho} P_n(o). \qquad (\varepsilon)$$

Wenn n ungerade ist, so verschwindet auch dieser Ausdruck, ist n aber gerade, so ist $P_n(o)$ von Null verschieden und (ε) wird unbestimmt, d. h. wenn die von den Kugeln bedeckte Ebene zwar sehr groß, aber nicht unendlich ist, so hängt (ε) von den Dimensionen derselben ab.

Im Ausdrucke für II (16) liefert (ε) ein Glied von der Form:

$$e^{ipt} \times \text{constante},$$

also eine stehende Welle von jedenfalls endlicher Amplitude. Die physikalische Bedeutung derselben konnte ich mir bisher

nicht klar machen. Für die fortschreitende durchgelassene Welle ist sie aber wohl belanglos. Wenn wir also nunmehr unter II nur mehr den einer fortschreitenden Welle entsprechenden Bestandtheil von (16) verstehen, können wir (ε) unberücksichtigt lassen. Unter dieser Einschränkung ist also:

$$J_n = -(-)^n \frac{1}{q^2} \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b^{1-\varkappa} E_{n-\varkappa-1}(b) P^{(\varkappa)}_{n-\varkappa}(1)$$

$$= (-)^{n+1} \frac{1}{q^2} \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b^{1-\varkappa} E_{n-\varkappa-1}(b) \cdot \frac{n!}{2^\varkappa \varkappa! (n-2\varkappa)!}$$

Setzen wir nun:

$$E_n(x) = \frac{e^{-ix}}{x} (-i)^n \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{1}{(2x)^\lambda} \frac{(n+\lambda)!}{\lambda! (n-\lambda)!}$$

ein und führen $(\lambda+\varkappa) = \nu$ als neue Summationsvariabele ein, so erhalten wir

$$J_n = i^{n+1} \frac{e^{-ib}}{q^2} n! \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^\varkappa}{\varkappa! (n-2\varkappa)!} \sum_{\nu=\varkappa}^{n-1} \frac{1}{2^\nu (ib)^\nu} \frac{(n-1-2\varkappa+\nu)!}{(n-1-\nu)! (\nu-\varkappa)!},$$

und wenn wir die Reihenfolge der Summationen vertauschen:

$$J_n = i^{n-1} \frac{e^{-ib}}{q^2} n! \left[\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{(ib)^\nu} \frac{1}{(n-1-\nu)!} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} (-)^\varkappa \frac{(n-1-2\varkappa+\nu)!}{\varkappa!(n-2\varkappa)!(\nu-\varkappa)!} \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{(ib)^\nu} \frac{1}{(n-1-\nu)!} \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-)^\varkappa \frac{(n-1-2\varkappa+\nu)!}{\varkappa!(n-2\varkappa)!(\nu-\varkappa)!} \right].$$

Die erste der beiden Summen nach $\varkappa$ ist aber, wie man sich leicht überzeugen kann, gleich

$$\frac{1}{\nu^2} \left| \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left[x^{n-1+\nu} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^\nu \right] \right|_{x=1} = 0,$$

außer wenn $\nu = 0$. Ebenso verschwindet die zweite Summe nach $\varkappa$ stets. Es bleibt also nur das erste Glied der Summe nach ν übrig und es wird also:

$$J_n = i^{n-1} \frac{e^{-ib}}{q^2} n! \frac{1}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$= i^{n-1} \frac{e^{-ib}}{q^2} = i^{n-1} \frac{e^{-iql}}{q^2}.$$

§. 6.

Setzen wir nun in (22) diesen Wert ein und berücksichtigen noch, dass $l = -z$ ist, so wird

$$\Pi = -e^{i(pt+qz)} \frac{\pi\nu}{q^2} \sum_{n=1}^{\infty} n.\overline{n+1}.[A_n q i^n + B_n i^{n+1}]$$

und wenn wir jetzt aus (18) die Werte von A_n und B_n einsetzen:

$$\Pi = e^{i(pt+qz)} A \frac{\pi\nu}{q^2} i \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[\frac{q^2 S_n(qa) \frac{d(aS_n(q'a))}{da} - \frac{q'^2}{\mu} S_n(q'a) \frac{d(aS_n(qa))}{da}}{q^2 E_n(qa) \frac{d(aS_n(q'a))}{da} - \frac{q'^2}{\mu} S_n(q'a) \frac{d(aE_n(qa))}{da}} \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{1}{\mu} S_n(qa) \frac{d(aS_n(q'a))}{da} - S_n(q'a) \frac{d(aS_n(qa))}{da}}{\frac{1}{\mu} E_n(qa) \frac{d(aS_n(q'a))}{da} - S_n(q'a) \frac{d(aE_n(qa))}{da}} \right]. \quad (23)$$

Solange wir das Innere der Kugel als leitendes Dielektricum auffassen, ist q' durch Gleichung (10) gegeben; von nun ab wollen wir jedoch (siehe Einleitung) die Kugel als vollständigen Isolator betrachten, also $\sigma = \infty$,

$$q' = p\sqrt{\varkappa\mu} \quad (24)$$

setzen. Ferner wollen wir jetzt die gleichfalls in der Einleitung erwähnte Vernachlässigung:

$$qa \text{ klein gegen } 1 \tag{2}$$

durchführen. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$S_n(qa) = (-)^n \frac{(qa)^n}{3.5\ldots(2n+1)}; \qquad \frac{d(aS_n(qa))}{da} = (n+1)S_n(qa) \qquad (a)$$

$$E_n(qa) = (-)^n \frac{3.5\ldots(2n-1)}{(qa)^{n+1}}; \qquad \frac{d(aE_n(qa))}{da} = -nE_n(qa).^{[1]} \qquad (b)$$

(25)

Es scheint also, dass wir in diesem Falle den Factor $(qa)^{2n+1}$ aus dem Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern in (23) herausheben können, und dass daher alle Summanden dortselbst von dieser Größenordnung, also zu vernachlässigen sind.

Diese Betrachtungsweise wäre aber aus dem folgenden Grunde durchaus nicht immer richtig: Die Nenner der Summanden von (23) sind complex [da ja die Function $E_n(x)$ es ist]; und zwar können der reelle und imaginäre Bestandtheil nicht gleichzeitig verschwinden, die Nenner also nicht Null werden. Macht man aber die Substitution (25), so werden die Nenner reell und verschwinden an gewissen Punkten, für welch letztere also (25) gewiss nicht zulässig ist.

Wir müssen vielmehr folgendermaßen verfahren. Es ist (siehe Gleichung 9)

$$E_n(x) = x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{-ix}}{x};$$

wir trennen hierin den reellen und imaginären Bestandtheil ($qa = x$ ist reell) und erhalten

$$E_n(x) = T_n(x) - iS_n(x), \tag{26}$$

[1] Dies ergibt sich aus den Reihenentwicklungen (28) weiter unten. Siehe etwa auch J. J. Thomson, l. c. S. 447.

worin S_n die durch Gleichung (9) gegebene Bedeutung hat und

$$T_n(x) = x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} \tag{27}$$

gesetzt ist. Für die Functionen S_n und T_n gelten folgende Reihenentwickelungen:

$$S_n(x) = (-)^n x^n \frac{1}{3.5\ldots(2n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2.2n+3} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^4}{2.4.2n+3.2n+5} - + \ldots\right] \quad (a)$$

$$T_n(x) = (-)^n \frac{1}{x^{n+1}} 3.5\ldots(2n-1)\left[1 + \frac{x^2}{2.2n-1} + \right. \quad (28)$$
$$\left. + \frac{x^4}{2.4.2n-1.2n-3} + \ldots\right]. \quad (b)^1$$

Ist x klein gegen 1, so ist S_n klein gegen T_n. Da wir aber den imaginären Bestandtheil von (26) nicht ganz vernachlässigen dürfen, weil sonst die Nenner von (23) verschwinden könnten, behalten wir das erste Glied beider Entwickelungen bei, setzen also näherungsweise:

$$E_n(qa) = (-)^n \frac{1}{(qa)^{n+1}} 3.5\ldots(2n-1) -$$
$$-i(-)^n (qa)^n \frac{1}{3.5\ldots(2n+1)}$$
$$= (-)^n \frac{1}{(qa)^{n+1}} 3.5\ldots(2n-1) \cdot$$
$$\cdot \left[1 - i(qa)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1).3^2.5^2\ldots(2n-1)^2}\right] \tag{29}$$

[1] Die erste dieser Entwickelungen findet sich bei Lamb, l. c. S. 526; beide bei Jaerisch, l. c. S. 29; die dort mit g_n und h_n bezeichneten Functionen haben in unserer Bezeichnungsweise den Wert:

$$g_n(x) = (-)^n x.3.5\ldots(2n+1) S_n(x); \quad h_n(x) = (-)^n x \frac{1}{3.5\ldots(2n-1)} T_n(x).$$

und ebenso:

$$\frac{d[a E_n(qa)]}{da} = -n(-)^n \frac{1}{(qa)^{n+1}} 3.5\ldots(2n-1)\left[1 + i\,\frac{n+1}{n}\,\frac{(qa)^{2n+1}}{(2n+1).3^2.5^2\ldots(2n-1)^2}\right]. \qquad (29a)$$

Setzen wir nun im Nenner der Summanden von (23) die Werte (29) und (29a) ein, im Zähler jedoch (dessen Verschwinden ja erlaubt ist) die Näherung (25a), so erhalten wir:

$$\Pi = e^{i(pt+qz)} A \frac{\pi\nu}{q^2} i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(qa)^{2n+1}}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2}\,.$$

$$\cdot\left[\frac{q^2 \frac{d(aS_n(q'a))}{da} - (n+1)\frac{q'^2}{\mu} S_n(q'a)}{\left[q^2 \frac{d(aS_n(q'a))}{da} + n\frac{q'^2}{\mu} S_n(q'a)\right] - i\frac{(qa)^{2n+1}}{(2n+1)3^2.5^2\ldots(2n-1)^2}\left[q^2\frac{d(aS_n(q'a))}{da} - (n+1)\frac{q'^2}{\mu}S_n(q'a)\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{\mu}\frac{d(aS_n(q'a))}{da} - (n+1)S_n(q'a)}{\left[\frac{1}{\mu}\frac{d(aS_n(q'a))}{da} + nS_n(q'a)\right] - i\frac{(qa)^{2n+1}}{(2n+1)3^2.5^2\ldots(2n-1)^2}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d(aS_n(q'a))}{da} - (n+1)S_n(q'a)\right]}\right]. \qquad (30)$$

Vor allem sehen wir, dass die Nenner dieser Ausdrücke nicht verschwinden können; denn damit der reelle und imaginäre Bestandtheil derselben gleichzeitig verschwinden könne, müsste gleichzeitig

$$S_n(q'a) = \frac{d(aS_n(q'a))}{da} = 0$$

sein; dies ist aber unmöglich, da ja S_n im wesentlichen eine Cylinderfunction ist (siehe Anmerkung auf Seite 1238 dieser Arbeit) und daher lauter verschiedene Wurzeln hat.

Da nun die Function S_n und ihre Ableitung stets endlich ist, sehen wir, dass die Summanden von (30) im allgemeinen von der Größenordnung $(qa)^{2n+1}$ sein werden; und zwar wird dies eben immer der Fall sein, wenn sowohl

$$q^2 \frac{d(aS_n(q'a))}{da} + n\frac{q'^2}{\mu} S_n(q'a) \qquad (a)$$

als auch (31)

$$\frac{1}{\mu}\frac{d(aS_n(q'a))}{da} + nS_n(q'a) \qquad (b) \quad n = 1, 2, \ldots \infty$$

von Null verschieden ist. (In diesen Fällen kann auch das zweite imaginäre Glied der Nenner vernachlässigt werden.)

Dann ist auch die Summe höchstens von der Größenordnung

$$\sum_1^\infty (qa)^{2n+1} = \frac{qa}{(1-qa)^2}; \qquad (32)$$

wir setzen sie direct $= 0$.

Wenn jedoch einer der beiden Ausdrücke (31) verschwindet, so kommt das zweite imaginäre Glied der Nenner in (30) zur Geltung; es hebt sich dann Zähler und Nenner zum größten Theil gegeneinander auf und der betreffende Summand nimmt den Wert

$$\frac{2n+1}{-i} = +i(2n+1)$$

an. Für verschiedene Werte von n können die Ausdrücke (31 a) und (31 b) nicht gleichzeitig verschwinden; die anderen Summanden bleiben also verschwindend klein, die ganze Summe reduciert sich also auf den Wert (32).

Wir können also sagen:

Der Ausdruck II (30) ist im allgemeinen gleich Null; nur an den Stellen, wo einer der Ausdrücke (31) verschwindet, hat er den Wert

$$e^{i(pt+q^2} A\frac{\pi\nu}{q^2} i.i(2n+1) = -e^{i(pt+q^2} A\frac{\pi\nu}{q^2}(2n+1). \qquad (33)$$

§. 7.

Wir können auch setzen:

$$\Pi = -e^{i(pt+qz)}A.L,$$

wobei also L im allgemeinen gleich Null, an den eben erwähnten Stellen aber

$$= \frac{\pi\nu}{q^2}(2n+1) \tag{34}$$

ist. Wenn der Abstand der Kugeln gegen die Wellenlängen der auffallenden Welle groß ist, was wir annehmen wollen, so ist auch (34) klein gegen 1; also ist L immer klein gegen 1. Die gesammte elektrische Kraft jenseits der der von Kugeln besetzten Ebene ist dann

$$X_0 + \Pi = e^{i(pt+qz)}A(1-L).$$

Die auffallende Welle hat also ihre Amplitude von A auf $A(1-L)$ vermindert, ohne jedoch sonst irgendwie alteriert worden zu sein. Hätte die auffallende Welle m solche mit Kugeln bedeckte Ebenen zu passieren, so würde ihre Amplitude gleich

$$A(1-L)^m$$

oder, wenn m sehr groß ist,

$$Ae^{-Lm}$$

werden. Sind diese Ebenen äquidistant im Abstand $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ von einander angeordnet und bilden eine Schichte von der Dicke d, so ist $m = d\sqrt{\nu}$. Der Absorptionsindex dieses Mediums ist also

$$k = \sqrt{\nu}.L.$$

Derselbe ist also im allgemeinen $=0$ und hat blos an den Stellen, wo einer der Ausdrücke (31) verschwindet, den Wert:

$$\frac{\pi}{q^2}\nu^{\frac{3}{2}}(2n+1)$$

$$= \frac{\pi}{q^2}N.(2n+1) \tag{35}$$

wobei $N = \nu^{\frac{3}{2}}$, die Zahl der Kugeln in der Raumeinheit eingeführt ist.[1] Diese Punkte, an denen k von Null verschieden ist, wollen wir zur Kürze die Linien des Absorptionsspectrums nennen. Den Ausdruck (31 a) können wir vereinfachen; es muss ja q' groß gegen q sein, da wir ja $q'a$ nicht als klein gegen eins betrachten. Wir können also den ersten Summanden von (31 a) vernachlässigen. Thun wir das und setzen etwa noch $q'a = x$, so sind die Linien durch die Wurzeln der Gleichungen:

$$S_n(x) = 0 \tag{36a}$$

und

$$\frac{d(xS_n(x))}{dx} + \mu n S_n(x) = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \infty$$

gegeben. Die letztere Gleichung transformieren wir noch in[2]

$$-xS_{n-1}(x) + n(\mu - 1) S_n(x) = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \infty \tag{36b}$$

Ist x_λ eine Wurzel der Gleichungen (36 a) oder (36 b), so ist die Schwingungszahl der betreffenden Linie durch

$$\frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{k\mu}} = \frac{1}{2\pi a\sqrt{k\mu}} x_\lambda \tag{37}$$

gegeben.[3]

Die Ausdrücke (33), (34), (35) gelten auch für unendlich große n, und da hat es den Anschein, als ob sie dann selbst unendlich groß würden. Dies ist jedoch nicht der Fall. Diese Ausdrücke sind ja nur für Punkte giltig, welche durch die Wurzeln der Gleichungen (36) gegeben sind. Nun werden wir aber sofort sehen, dass die kleinste Wurzel von $S_n(x) = 0$ größer als $\sqrt{2n+3}$ ist, da nun q proportional p, daher auch

[1] Diese Einführung des Absorptionsindex ist nicht ganz einwandfrei; man könnte natürlich auch den Ausdruck II direct discutieren, wobei man zum selben Resultat gelangen würde. Das Resultat der vorliegenden Arbeit lässt sich aber auf diese Weise klarer und anschaulicher darstellen.

[2] Dabei ist benutzt J. J. Thomson, l. c. S. 364, Gleichung 100.

[3] Wir wollen hier dieses Resultat mit den Schwingungszahlen der freien Schwingungen in einer Kugel vergleichen. Die allgemeinen Integrale (6) des §. 1 sind natürlich auch hier giltig. In den Grenzbedingungen (16) ist die Amplitude A der einfallenden Welle $= 0$ zu setzen, so dass also die

(siehe 37) proportional dem Betrage der betreffenden Wurzel ist und q^2 im Nenner der Ausdrücke (33), (34), (35) steht, so können diese Ausdrücke nicht unendlich groß werden. Außerdem müssen wir bemerken, dass für unendlich große x (oder p oder q) unsere ganze Betrachtungsweise ungiltig wird, da ja dann die Voraussetzung, dass qa klein gegen 1 sei, nicht erfüllt sein kann.

Um nun unsere Behauptung über die untere Grenze der Wurzeln von $S_n = 0$ zu beweisen, bemerken wir, dass nach (28 a)

---

rechten Seiten dieser Gleichungen verschwinden. Die Bestimmung der unbekannten Functionen ω_n, ω'_n, φ', φ'_n ist jetzt nur möglich, wenn eine der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \frac{q'^2}{\mu} S_n(q'a) & q^2 E_n(qa) \\ \frac{d(aS_n(q'a))}{da} & \frac{d(aE_n)}{da} \end{vmatrix} = 0$$

und $$\begin{vmatrix} S_n(q'a) & E_n(qa) \\ \frac{1}{\mu}\frac{d(aS_n(q'a))}{da} & \frac{d(aE_n(qa))}{da} \end{vmatrix} = 0 \qquad (a)$$

erfüllt sind. Diese Gleichungen liefern also die möglichen Schwingungszahlen. Führt man in ihnen die Näherung (25 b) ein, was hier auf keinen Widerspruch führen kann, so erhält man genau die Ausdrücke (31) gleich Null gesetzt. Also im »Emissionsspectrum« dieselben Linien wie im Absorptionsspectrum. J. J. Thomson hat l. c. S. 368, Gleichung 108 eine andere Gleichung für die Schwingungszahlen abgeleitet; er führt nämlich als Näherung ein, dass $q'a$ (in unserer Bezeichnungsweise) sehr groß ist, also gewissermaßen das dem hier verwendeten entgegengesetzte Verfahren. Die Gleichungen, die wir erhalten, haben reelle Wurzeln (im Gegensatz zu den strengen Gleichungen [α]); durch diese Näherung geht also die Bestimmung des Decrementes der Dämpfung verloren. Es ist wohl von vornherein nicht einzusehen, dass die hier bei Bestimmung der Schwingungszahlen freier Schwingungen angewandte Näherung mit der bei Berechnung der Absorption eingeführten gleichwertig ist. Denn so können wir ja die beiden Arten des Verfahrens nennen, da wir identische Emissions- und Absorptionslinien erhielten. Dass unser Näherungsverfahren zum Decrement Null führt, darüber vergl. Koláček, l. c. S. 280 oben. — Die Gleichungen (α), respective (36) a und b sind hier die Gleichungen, die anfangs schematisch mit $f_n(x) = 0$ (1) bezeichnet wurden.

$$(-)^n S_n(x) > \frac{x^n}{3.5\ldots(2n+1)}\left[1-\frac{x^2}{2.2n+3}-\frac{x^4}{2.4.2n+3.2n+5}-\ldots\right]$$

$$> \frac{x^n}{3.5\ldots(2n+1)}\left[1-\frac{x^2}{2.2n+3}-\frac{x^4}{2^2.(2n+3)^2}-\ldots\right]$$

falls nun $x^2 < 2.(2n+3)$, haben wir weiter:

$$(-)^n S_n(x) > \frac{x^n}{3.5\ldots 2n+1}\left[1-\frac{\frac{x^2}{2.2n+3}}{1-\frac{x^2}{2.2n+3}}\right]$$

$$> \frac{x^n}{3.5\ldots(2n+1}\,\frac{1-\frac{x^2}{2n+3}}{1-\frac{x^2}{2\,(2n+3)}},$$

wenn also $x^2 < (2n+3)$, ist $(-)^n S_n(x) > 0$; $S_n(x)$ kann also nicht verschwinden, solange $0 < x < \sqrt{2n+3}$, was zu beweisen war.

Für die Gleichung (36 *b*) kann natürlich eine ganz ähnliche Betrachtung durchgeführt werden.

Betrachten wir die den Wurzeln einer Gleichung

$$S_n(x) = 0$$

(bei festgehaltenem n) entsprechenden Linien und beachten wir, dass sich $S_n(x)$ mit wachsendem n immer mehr dem Ausdruck

$$\frac{\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{x}$$

nähert,[1] so sehen wir, dass die den größeren Wurzeln entsprechenden Linien nahe äquidistant stehen werden; die kleineren Wurzeln sind schwer zu bestimmen, in grober

[1] Ergibt sich leicht aus der Tafel der ersten Functionen S_n bei J. J. Thomson, l. c. S. 365.

Annäherung können wir sie aber auch als äquidistant (Abstand π) bezeichnen.

Den Wurzeln einer Gleichung $S_n(x) = 0$ entspricht also eine Reihe ungefähr äquidistant stehender Linien. (Diese Reihe hat mit den beobachteten Serien, wie ich glaube, nichts zu thun.) Je größer n, desto später (bei desto größerem x oder p) beginnt die Reihe.

Untersuchen wir also das Spectrum von kleinen Werten des x (vom »rothen Ende«) ausgehend, so stoßen wir anfangs nur auf Wurzeln von $S_n(x) = 0$, wo n einen kleinen Wert hat, später aber auch auf solche von $S_n(x) = 0$ mit großem Index. Die Liniendichte nimmt also gegen das Violette hin zu, und zwar in allererster Annäherung proportional der Schwingungszahl.

Die »Intensität« einer Linie ist dem Ausdruck (35) proportional. In einer bestimmten Reihe nimmt sie also mit der Schwingungszahl ab, ist aber bei späteren Reihen (mit größeren n) größer als bei früheren.

Endlich wollen wir noch die »Breite« der Linien einer ganz angenäherten Discussion unterziehen. Der Absorptionscoefficient ist ja nicht nur in dem mathematischen Punkt, der der Wurzel einer der obigen Gleichungen entspricht endlich, sondern auch in dessen Umgebung. (Er steigt stetig von Null zum Wert (35), um dann wieder zum Werte Null zu sinken.) Die Größe dieser Umgebung hängt von der Größe des im allgemeinen vernachlässigten Ausdruckes

$$\frac{(q a)^{2n+1}}{2n+1 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \ldots (2n-1)^2} \tag{38}$$

in Gleichung (30) ab. (Wäre $qa = 0$, so hätten wir es mit mathematisch feinen Linien und einer Unstetigkeit des Absorptionsindex zu thun.) In einer Reihe (bei festgehaltenem n) nimmt also die Breite der Linien mit der Schwingungszahl zu; die späteren Reihen haben aber schärfere Linien als die früheren.

In einem nicht allzu großen Bereich des Spectrums (1 bis 2 Octaven etwa) wird das Hinzutreten der neuen Reihen für die Breite maßgebender sein, als die Veränderung der anfangs vor-

handenen; d. h. der Einfluss der Veränderung des n größer sein, als der Zunahme der Schwingungszahlen. Wir werden also sagen können, dass im großen Ganzen Liniendichte und Schärfe gegen das violette Ende hin zunehmen, die Intensitäten dagegen eher abnehmen. (Der Einfluss des n ist ja im Ausdruck (35) viel geringer als in (38).) Alle diese Betrachtungen sind aber natürlich nicht mehr als ein beiläufiger Überschlag.

Die Gleichung (36 b) enthält noch eine unbekannte Constante μ. Der allgemeine Verlauf der Function auf der linken Seite ist jedoch stets ähnlich dem von $S_n(x)$. Wenn μ sehr nahe gleich 1 ist, so lautet (36 b) annähernd:

$$S_{n-1}(x) = 0 \qquad n = 1, 2 \ldots . \infty$$

wenn dagegen μ sehr groß ist:

$$S_n(x) = 0 \qquad n = 1, 2 \ldots . \infty$$

Diese Gleichungen liefern dann in beiden Fällen im Verein mit (36 a) Doubletten, d. h. also Linienpaare, deren Abstände desto geringer sind, je besser die obigen Voraussetzungen über μ erfüllt sind. Die Intensität der beiden Componenten verhält sich dann im ersten Falle wie $2n-1$ zu $2n+1$; im zweiten Falle sind die Intensitäten gleich.

Vor allen wären jetzt natürlich die Wurzeln der Gleichung $S_n(x) = 0$ zu berechnen. Ich habe sie jedoch bisher nur im Intervall 0 bis 4π bestimmt; und zwar sind da die Wurzeln

von $S_1(x) = 0$: 4·4933; 7·7252; 10·9041
» $S_2(x) = 0$: 5·7636; 9·0949; 12·3229.

Diese Zahlen sind von Lamb angegeben.
Ich finde weiter die Wurzeln

von $S_3(x) = 0$: 6·9879; 10·4171
» $S_4(x) = 0$: 8·1825; 11·7050
» $S_5(x) = 0$: 9·3648;
» $S_6(x) = 0$: 10·5129;
» $S_7(x) = 0$: 11·6550;

Der Größe nach sind also die Wurzeln von $S_n(x) = 0$ $(n = 1, 2 \dots . \infty)$ im Intervall von 0 bis 4π $(= 12 \cdot 5664)$:

4·4933; 5·7636; 6·9879; 7·7252; 8·1825; 9·0949; 9·3648; 10·4171; 10·9041; 10·5129; 11·6550; 11·7050; 12·3229.[1]

Zwischen diesen Werten werden sich aber noch die Wurzeln der Gleichung (36 *b*) in einer von der Wahl der Constanten μ abhängigen Weise lagern.

---

[1] Diese Zahlenwerte kann man zum Theil aus der semiconvergenten Entwicklung:

$$x_i^{(\nu)} = \pi\left(i + \frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu(\nu+1)}{\pi(2i+\nu)} - \frac{\nu(\nu+1)[7\nu(\nu+1)-6]}{3.\pi^3(2i+\nu)^3} - \frac{2\nu(\nu+1)[83\nu^2(\nu+1)^2 - 204\nu(\nu+1) + 180]}{3.5.\pi^5(2i+\nu)^5}$$

erhalten, worin $x_i^{(\nu)}$ die i^{te} Wurzel der Gleichung $S_\nu(x) = 0$ bedeutet. Diese Formel lässt sich leicht ableiten, wenn man den Gedankengang einschlägt, den Stockes (Cambr. Phil. Trans. IX) zur Berechnung der Wurzeln der Cylinderfunctionen J_0 und J_1 angegeben hat. Sie liefert aber nur brauchbares, wenn ν nicht zu groß im Verhältnis zu i ist. Für $\nu = 1$, also zur Berechnung der Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$ ist die Formel sehr gut verwendbar. Bei größeren Werten von ν aber kann man sie nur zur Berechnung späterer Wurzeln brauchen.

Über das Newton'sche Phänomen der Scintillation

(Erste Mittheilung)

von

Karl Exner (c. M. k. Akad.) und **W. Villiger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. November 1902.)

Lichtstrahlen, die von einem Fixsterne zur Erde gelangen, erfahren beim Durchgange durch die Atmosphäre beständig kleine, unregelmäßig wechselnde Ablenkungen durch Luftschlieren, so dass sie eine Art Schlangenlinie beschreiben;[1] die Größe der Ablenkungen beträgt nach dem Durchgange durch die Atmosphäre im allgemeinen wenige Secunden.

Betrachtet man daher einen Fixstern durch ein Instrument von hinreichend verkleinerter Öffnung, so scheint der Stern beständig unregelmäßige Schwingungen innerhalb einer begrenzten Fläche auszuführen (Zitterbewegung). Verwendet man eine Blende mit mehreren solchen Öffnungen und schiebt das Ocular etwas ein, um die einzelnen Bündel getrennt beobachten zu können, so erhält man so viele Bilder des Sternes, als Öffnungen vorhanden sind. Liegen letztere einander nicht zu nahe, so vollführen die Bilder ihre Bewegungen völlig unabhängig voneinander. Man ersieht hieraus leicht, was sich ergeben muss, wenn ein Fixstern durch ein Instrument von hinreichend großer Öffnung betrachtet wird: Das Zusammen-

---

[1] Diese Sitzungsberichte, 1881. — Repertorium der Experimentalphysik von F. Exner, XXIII, 1887.

bestehen aller jener Bewegungen hat zur Folge, dass das punktförmige Bild des Fixsternes sich in eine helle und völlig ruhige Scheibe von einigen Secunden Durchmesser verwandelt. Dies ist das von Newton beschriebene und erklärte Phänomen.[1]

Die Wirkung der Atmosphäre bei Beobachtung der Fixsterne durch Instrumente von großer Öffnung ist also analog der Wirkung einer ungenauen Einstellung des Oculars und kann nicht beseitigt werden. Daher müssen ausgedehnte Objecte wie die Planeten um so undeutlicher erscheinen, je größer jene Scheibchen sind, als welche die Fixsterne erscheinen.

Man könnte demnach, analog zu Foucault's Definition des optischen Vermögens des Instrumentes, den reciproken Wert der durchschnittlichen Durchmesser der Sternscheibchen an einem gegebenen Beobachtungsorte als das optische Vermögen dieses Ortes bezeichnen oder das optische Vermögen eines Ortes durch jenen reciproken Wert messen. Diese Erwägung gab den Ausgangspunkt zu messenden Studien über das Newton'sche Phänomen, die in den Jahren 1901 und 1902 an der königl. Sternwarte zu München mittels des $10\,^1/_2$ zölligen Refractors dieser Sternwarte ausgeführt wurden.

Im folgenden sind unter I bis VI die durch Messung erhaltenen Zahlen der besseren Übersicht wegen meist in erster oder zweiter Annäherung gegeben. Eine vollständige Zusammenstellung sämmtlicher Messungen findet sich am Schlusse der Abhandlung (Anhang). Hiebei wurden die folgenden Bezeichnungen angewendet:

Horizontaler Durchmesser eines Fixsternscheibchens ...... D
Größe der Wellenbewegung am Mondrande (doppelte Amplitude) .... W
Wahre Zenithdistanz des Sternes .... ζ

[1] Newton, Principia, lib. III. — Optice, lib. I, 1719.

I.

Abhängigkeit des horizontalen Sterndurchmessers des Fixsternscheibchens von der Zenithdistanz.

a) 29. September 1901.

Es wurde bei sehr guter und ruhiger Luft der Durchmesser eines Fixsternes in verschiedenen Höhen gemessen. Es ergab sich:

ζ	D	ζ	D
69°45	1"46	75°80	2"55
71·03	1·67	79·02	3·21
72·65	2·09	80·18	3·47
73·37	2·11	80·99	4·24
75·35	2·48		

D wächst mit ζ. Dasselbe Resultat zeigen die folgenden Messungen.

b) 16. December 1901.

Es wurden verschiedene Sterne in verschiedenen Höhen bei ganz besonders schlechter Luft gemessen.

ζ	D	ζ	D
13°89	2"75	71°44	4"32
13·91	2·66	74·30	3·59
18·25	2·02	84·17	4·28
32·26	2·69	84·66	4·34
33·61	2·81	88·64	3·84
61·78	3·42	89·84	5·63
63·88	3·88		

c) 8. Januar 1902.

Es wurden Sterne von gleicher Größe in verschiedenen Höhen gemessen.

Größe	ζ	D	Größe	ζ	D
4	35°	1"	6	35°	1"
4	45	3	6	42	2
4	68	3	6	67	3
4	83	4	6	83	4

Gleicherweise wurde gemessen:

d) 10. Januar 1902.

Größe	ζ	D	Größe	ζ	D	Größe	ζ	D
4	79°	4"	5	11°	0"8	7	45°	1"0
4	82	4	5	14	0·8	7	63	1·5
4	84	5	5	36	0·9			
			5	47	0·8			
			5	64	1·4			

Die Wellenbewegung am Mondrande entsteht gleicherweise durch die unregelmäßigen Ablenkungen der Strahlen in der Atmosphäre. Es soll daher auch diese Wellenbewegung mit ζ wachsen.

Eine Messung ergab:

e) 11. Januar 1902.

ζ	W am unteren Mondrande
82°	3"7
83	4·0
84	4·7

Weitere Messungen ergaben:

f) **24. Januar 1902.**

ζ	*W* am unteren Rande
74°	2'5
78	2·53
79	2·97
79·7	3
80	3·6
81	3·5
81·4	4
84	5·8
84·6	6
85	6·05
86	7
87	9
88	10

g) **22. Februar 1902.**

ζ	*W* am unteren Rande
83°	5'
84	7
86	9

h) **23. Februar 1902.**

ζ	*W* am verticalen Rande
83°	2'5
84	2·6
85	3·1
85·3	3·3
86	4·1
88	4·7

i) **24. Februar 1902.**

ζ	*W* am verticalen Rande	ζ	*W* am verticalen Rande	ζ	*W* am verticalen Rande
82°	4'	85°	4'	85°6	3'8
84	5	87	5	86·1	4·2
88	6				

Alle unter I angeführten Beobachtungen entsprechen dem Satze:

Mit der Zenithdistanz wachsen die Sterndurchmesser *D* und die Wellenbewegung *W* am Mondrande *(A)*.

Man kann den Satz *(A)* auch anders ausdrücken. Da nämlich die Scintillation durch kleine unregelmäßige

Ablenkungen der Strahlen beim Durchgange durch die Atmosphäre entsteht, wird man füglich den Grad oder die Größe der Scintillation durch die maximale Größe dieser Ablenkungen, also durch den horizontalen Sterndurchmesser D bestimmen. Der verticale Sterndurchmesser ist wegen der atmosphärischen Dispersion, die sich in verticaler Richtung geltend macht, nicht geeignet. Ist also D das Maß für die Größe, Stärke oder den Grad der Scintillation, so kann der Satz *(A)* auch so ausgedrückt werden:

Die Scintillation wächst mit der Zenithdistanz *(A')*.

II.

Bei Abhandensein der Scintillation erscheint das Bild des Fixsternes gleichwohl nicht punktförmig, da die Öffnung des Instrumentes ein Beugungsbild hervorbringt. Dieses besteht aus einer centralen hellen Scheibe, die von lichtschwachen Ringen umgeben ist. Schon bei schwacher Scintillation zeigt sich dieses Beugungsphänomen nicht mehr.

a) 10. Februar 1902.

Es wurde bei günstigen Luftverhältnissen der Durchmesser des centralen Beugungsscheibchens bei verschiedenen Objectivöffnungen des $10^1/_2$ zölligen Refractors gemessen.

Object	Objectivöffnung	ζ	Durchmesser des centralen Beugungsscheibchens
α Aurigae (Capella)	284 *mm* (volle Öffnung)	10°62	0"82
» » »	148	10·62	1·46
» » »	90	10·62	2·59
» » »	30	10·62	5·60

b) 5. December 1901.

Bei sehr schwacher Scintillation konnten die centralen hellen Scheibchen der Beugungsbilder der vollen Öffnung des

Instrumentes ($10^1/_2$ Zoll = 284 *mm*) gemessen werden. Bei neun Sternen verschiedener Größe und Zenithdistanz ergab sich:

ζ	D	ζ	D
28°	0"9	52°	0"9
30	0·9	61	0·9
33	0·8	62	1·0
50	1·0	67	1·0
51	0·9		

Obgleich hier die Zenithdistanzen sehr verschieden sind, bleiben die Durchmesser der centralen Beugungsscheibchen doch fast constant, da nahezu wirkliche Beugungsbilder gemessen wurden.

III.

Die Sterndurchmesser wurden in allen Fällen, wo das Gegentheil nicht bemerkt ist, in horizontaler Richtung gemessen, da in verticaler Richtung die regelmäßige Dispersion im Sinne einer von ζ abhängigen Verlängerung wirkt, wie die folgenden Messungen zeigen.

a) **16. December 1901.**

Stern	ζ	D	D vertical
Potsdam I, 1072	76°	—	5"7
Potsdam I, 1072	89	3"8	—

Der verticale Durchmesser erscheint beträchtlich größer trotz der kleineren Zenithdistanz. Ebenso verhält es sich im folgenden Falle.

b) **8. Januar 1902.**

Stern	ζ	D	D vertical
Sirius	86°	—	14'
Sirius	87	6'	—

Es folgt aus den unter III angeführten Messungen:

Der verticale Sterndurchmesser ist größer als der horizontale *(B)*.

IV.

Da die Zitterbewegung eines Fixsternes, die sich bei Anwendung einer Blende von hinreichend kleiner Öffnung zeigt, von der Größe des Sternes unabhängig sein soll, sollen auch die horizontalen Durchmesser *D* von Sternen verschiedener Größe unter sonst gleichen Umständen gleich groß erscheinen.

Messungen ergaben in erster Annäherung:

a) **27. December 1901.**
Die Sterne nahe benachbart.

Stern	Größe	D
Mizar (Hauptstern)	2	3'
Alkor	5	3

b) **28. December 1901.**
Die Sterne nahe benachbart.
Nebelig.

Stern	Größe	D
Mizar (Hauptstern)	2	4'
Mizar (Begleiter) ..	$4^1/_2$	3
Alkor	5	$2^1/_2$

c) **8. Januar 1902.**
Die Sterne nahe benachbart.

Stern	Größe	D
Mizar (Hauptstern).......	2	3'
Mizar (Begleiter)..........	$4^1/_2$	3
Alkor..................	5	3

d) **10. Januar 1902.**

Die Sterne nicht benachbart, doch von nahe gleicher Zenithdistanz.

	Größe des Sternes	D		Größe des Sternes	D
$\zeta = 11-14°$	5	1'	$\zeta = 63-64°$	5	1'
	5	1		7	$1\frac{1}{2}$
	8	1			
	8	1			

	Größe des Sternes	D
$\zeta = 82-83°$	4	4'
	6	3

Die Messungen bestätigen genügend die angenäherte Gleichheit der D für Sterne von verschiedener Größe oder Helligkeit bei sonst gleichen Umständen. Die Beobachtungen *d)* sind ungenauer, da hier die verglichenen Sterne sich nicht in Nachbarschaft befanden und nur in der Zenithdistanz übereinstimmten. Es scheint übrigens, dass der Sterndurchmesser bei abnehmender Helligkeit sich doch etwas verkleinert. So wird *c)* in zweiter Annäherung:

Größe des Sternes	D
2	3'4
$4\frac{1}{2}$	2·8
5	2·8

Sterne ungleicher Größe zeigen, unter sonst gleichen Umständen angenähert gleiche Durchmesser *D (C).*

V.

Es wurde die Abhängigkeit des gemessenen *D* von der Genauigkeit der Oculareinstellung geprüft.

4. Januar 1902.

Unter sonst gleichen Umständen wurde gemessen:

Oculareinstellung	*D*
2·7	6″5
3·5	5·9
5·8	6·2

Der Einfluss der Genauigkeit der Oculareinstellung auf die Genauigkeit der Messungen ist gering *(D)*.

VI.

Die Zitterbewegung (Doppelamplitude), die ein Fixstern bei hinreichend reducierter Öffnung des Instrumentes zeigt, soll von derselben Größe sein wie der Sterndurchmesser *D* bei weiter Öffnung. Es wurde beobachtet:

5. März 1902.

Stern	Zitterbewegung	*D*
ζ Can. maj.	5″6	5″2
α Columbae.........	6·5	6·3

Die Zitterbewegung eines Fixsternes bei hinreichend reducierter Öffnung des Instrumentes stimmt genügend überein mit dem Durchmesser *D* des Sternes bei voller Öffnung *(E)*.

Steht der Fixstern in der Nähe des Mondes, so soll ferner auch der Sterndurchmesser D gleich sein der Wellenbewegung W des verticalen Mondrandes. Es wurde gemessen:

a) **7. September 1902.**

	Object	Öffnung	W	D
$\zeta = 75$—$77°$	Mondrand vertical	30 *mm*	3'4	—
	» »	30	3·6	—
	» »	30	3·1	—
	γ Librae	284	—	3'2

b) **8. September 1902.**

	Object	Öffnung	W	D
$\zeta = 73$—$75°$	ν Scorpii	284 *mm*	—	3'7
	Mondrand vertical	30	3'1	—
	ν Scorpii	284	—	3·4
	SD—18°, 4249	284	—	3·0
	Mondrand vertical	30	2·9	—
	SD—18°, 4249	284	—	3·3

Steht ein Fixstern in der Nähe des Mondes, so ist der Sterndurchmesser D gleich der Wellenbewegung W des verticalen Mondrandes *(F)*.

Will man für einen gegebenen Ort das optische Vermögen $\frac{1}{D_m}$ bestimmen, wo D_m den mittleren Sterndurchmesser an dem gegebenen Orte bedeutet, so ist zu beachten, dass D mit der Zenithdistanz ζ und mit der Zeit variiert. ζ lässt sich eliminieren, wenn man, wie E. Ritter v. Oppolzer vorschlägt,[1] D auf eine passende Zenithdistanz, etwa 75°, bezieht. Es ist dann das

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CX, 1901.

Mittel aus einer Reihe zeitlich getrennter (und etwa auch dem Azimut nach verschiedener) Messungen zu nehmen.

Es liegt den Verfassern die angenehme Pflicht ob, dem Herrn Prof. H. Seeliger für die Erlaubnis zur Benützung der Sternwarte, und der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen für die Bewilligung einer Subvention den wärmsten Dank auszusprechen.

Anhang.

Scintillationsmessungen, angestellt mit dem $10^1/_2$ zolligen Refractor der königl. Sternwarte in München.

Zur Erklärung der folgenden Zusammenstellung der Messungen mögen einige Bemerkungen vorangeschickt werden. Die gemessenen Sterne sind zum größten Theile der Potsdamer photometrischen Durchmusterung entnommen, und zwar bedeutet ein:

»I«: Photometrische Durchmusterung etc. Theil I, Zone 0° bis 20° Declination;[1]

»II«: Photometrische Durchmusterung etc. Theil II, Zone 20° bis 40° Declination.[2]

Die Rectascensionen und Declinationen der Objecte sind genähert auf 1902·0 angegeben, um ein Bild über die gegenseitige Lage derselben abzugeben. Die Größenangaben der Sterne sind ebenfalls, wo dies möglich war, der »Photometrischen Durchmusterung« entnommen. Für ζ und g Urs. maj. η Virginis sind die Werte von Pritchard[3] angeführt. Unter »T« sind die Ablesungen an der Mikrometertrommel des Repsold'schen Fadenmikrometers angegeben. Die Messungen sind nach der Methode der doppelten Distanzen ausgeführt. Dementsprechend

---

[1] Publicationen des Astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam, Bd. IX.

[2] Ebenda, Bd. XIII.

[3] Uranometria nova oxoniensis etc. by C. Pritchard, Oxford 1886.

enthält die erste Reihe unter »*T*« die Ablesung der Einstellungen, falls der bewegliche Faden links vom festen steht, für die zweite Reihe ist der bewegliche Faden rechts vom festen Faden. Unter diesen Ablesungen sind noch die Mittelwerte derselben angegeben, aus welchen nach Berücksichtigung der periodischen Schraubenfehler[1] und Umrechnung in Bogensecunden[1] die Werte unter »*D*« hervorgehen. Den zur Beobachtung benützten Ocularen III, IV, V, VI entsprechen die Vergrößerungen 230, 332, 450, 700. »*Oc*« bedeutet die Ablesung der Millimeterscala zur Focusierungseinstellung, welche am Auszuge des Fadenmikrometers angebracht ist. Für die Beurtheilung des Zustandes von Luft und Bild ist die fünftheilige Scala gewählt, und zwar bedeutet I sehr gute Luft.

»*D*« bedeutet bei der Messung von Sternen, wenn nicht Gegentheiliges bemerkt ist, den horizontalen Durchmesser des Sternscheibchens; für die Messungen am Mondrand ist darunter die Größe der Wellenbewegungen zu verstehen. Die volle wirksame Öffnung des Refractors beträgt 284 *mm* und wurde dieselbe durch Vorsetzen von Cartonblenden auf die angegebenen Öffnungen reduciert.

---

[1] Hilfstafeln der Münchener Sternwarte (Tafel VIII, IX); Neue Annalen der Münchener Sternwarte, Bd. II.

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
1901 September 29.												
SD—3°3891	16ʰ 6ᵐ	—3°50'	6ᵐ5	19ʰ 39ᵐ	7ʳ·752	7ʳ·875	V	I—II	69°45	1ʳ46	2·84	
					764	886	5·0 *mm*	II				
					772	882						
					7·7627	8810						
»	»	»	»	19 49	7·750	7·886	»	»	71·03	1·67	»	
					762	886						
					762	908						
					7580	9000						
»	»	»	»	19 58	7·743	7·912	»	»	72·56	2·09	»	
					734	911						
					739	915						
					7387	9127						
»	»	»	»	20 5	7·742	7·903	»	»	73·37	2·11	»	
					739	915						
					731	914						
					7373	9107						

»	»	»	»	20 18	7·733	7·915	»	»	75·35	2·48	»	
					725	926						
					702	932						
					7200	9243						
»	»	»	»	20 21	7·723	7·946	»	»	75·80	2·55	»	
					729	918						
					724	929						
					7253	9310						
»	»	»	»	20 42	7·699	7·950	»	»	79·02	3·21	»	
					674	972						
					677	958						
					6833	9600						
»	»	»	»	20 49	7·692	7·972	»	»	80·18	3·47	»	
					678	965						
					677	960						
					6823	9657						
»	»	»	»	20 54	7·660	7·995	»	»	80·99	4·24	»	
					662	978						
					635	993						
					6523	9887						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
1901 December 5.												
Potsdam—*D* II 213	1h 9m	+24° 4'	4m85	23h 17m	16r940	17r015	VI	II	32°89	0"84	284	Es wird der horizontale Durchmesser des centralen Beugungsscheibchens gemessen
					951	012						
					947	016	5·0 *mm*	II—I				
				23 18	945	013						
					9458	0140						
Potsdam—*D* II 211	1 8	+25 56	7·83	23 23	16·941	17·008	»	»	29·99	0·87	»	
					943	012						
					942	016						
				23 27	941	011						
					9418	0118						
Potsdam—*D* II 215	1 9	+28 2	6·48	23 28	16·947	17·013	VI	II	27·69	0·86	»	
					942	016						
					945	014	5·0 *mm*	II—I				
				23 32	947	015						
					9452	0145						

Potsdam—*D*	3 39	+23 59	5·94	23 43	16·936	17·013	»	II	51·76	0·88	»	
II 671					948	010						
16 Tauri					943	016		II—III				
				23 45	942	015						
					9423	0135						
Potsdam—*D*	3 39	+23 48	4·08	23 47	16·938	17·012	»	»	51·04	0·91	»	
II 672					942	014						
17 Tauri					939	016						
				23 51	945	016						
					9410	0145						
Potsdam—*D*	3 41	+23 36	7·53	23 55	16·939	17·016	»	»	50·11	0·96	»	
II 683					945	018						
					947	021						
				0 1	935	031						
					9415	0190						
Potsdam—*D*	5 23	+20 22	7·46	0 10	16·942	17·017	»	»	67·30	0·97	»	
II 1028					936	015						
					935	010						
				0 15	932	015						
					9362	0142						
Potsdam—*D*	5 23	+25 4	5·72	0 20	16·932	17·012	»	II	61·90	0·97	»	118 Tauri ist Doppelstern. Hauptstern Größe = 6ᵐ0, Begleiter Größe = 6ᵐ5.
II 1030			(6·0)		935	017						
118 Tauri,					938	015		III				
Hauptstern				0 25	938	012						
					9358	0140						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Potsdam—*D*	5ʰ 23ᵐ	+25° 4'	5ᵐ72	0ʰ 26ᵐ	$\overset{r}{9}$·938	$\overset{r}{17}$·021	VI	III	61°00	0ʳ95	284	118 Tauri ist Doppel-
II 1030			(6·0)		945	012						stern. Hauptstern
118 Tauri,					933	015	5·0 *mm*					Größe = 6ᵐ0, Be-
Begleiter				0 30	942	016						gleiter Größe=6ᵐ5
					9395	0160						
1901 December 16.												
Potsdam—*D*	7ʰ 2ᵐ	+ 7°38'	5ᵐ76	1ʰ 2ᵐ	$\overset{r}{16}$·819	$\overset{r}{17}$·160	VI	III	84°17	4ʳ28	284	Luft nebelig. Bild sehr
I 1047					790	142						schlecht. Beobach-
					794	135	4·8 *mm*	IV				tung nach plötz-
				1 5	814	157						lichem Aufklären.
					8043	1485						Auch bei geringer
Potsdam—*D*	7 2	+ 5 4	6·42	1 10	16·800	17·163	»	»	84·66	4·34	»	Zenithdistanz ist
I 1046					785	151						bei hellen Sternen
					816	162						keine Spur des cen-
				1 12	838	162						tralen Beugungs-
					8098	1595						scheibchens zu

Potsdam—*D* I 1072	7 12	+16 43	3·83	1 17	16·831	17·110	»	»	88·64	3·84	»	bemerken, und es sind die Sternbilder im Zenith so schlecht wie bei guter Luft in der Nähe des Horizontes.
					832	147						
					802	116						
				1 20	820	151						
					8212	1310						
Potsdam—*D* I 1072	7 12	+16 43	3·83	1 20	16·719	17·173	»	»	88·56	5·65[1]	»	
					735	182						
					746	196						
				1 23	728	198						[1] Verticaler Sterndurchmesser.
					7320	1872						
Potsdam—*D* I 942	6 27	+ 4 55	6·06	1 37	16·832	17·102	»	»	74·30	3·59	»	
					856	140						
					798	098						
				1 42	816	120						
					8255	1150						
Potsdam—*D* I 943	6 28	+ 7 25	4·74	1 45	16·813	17·142	»	»	71·44	4·32	»	
					809	148						
					770	158						
				1 47	816	152						
					8020	1500						
Potsdam—*D* I 757 ω Orionis	5 34	+ 4 4	4·78	1 55	16·818	17·120	»	»	63·88	3·88	»	Durch Nebel beobachtet.
					819	142						
					840	144						
				1 57	832	153						
					8273	1398						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Potsdam—D	5h 33m	+ 5°57'	7·30	1h 58m	16·830	17·129	VI	III	61°78	3'42	284	
I 755					852	116						
					836	112	4·8 mm	IV				
				2 0	838	103						
					8390	1150						
Potsdam—D	3 58	+23 50	5·72	2 10	16·868	17·074	»	»	32·26	2·69	»	
II 753					873	079						
36 Tauri					864	093						
				2 12	868	093						
					8682	0848						
Potsdam—D	3 59	+21 48	4·50	2 14	16·853	17·103	»	»	33·61	2·81	»	
II 755					853	072						
A Tauri					850	079						
				2 15	868	075						
					8560	0822						
Potsdam—D	2 30	+34 15	5·65	2 30	16·883	17·086	»	»	13·91	2·66	»	
II 447					848	102						
15 Trianguli					873	079						
				2 32	878	073						
					8705	0850						

Potsdam—*D*	2 30	+34 17	7·02	2 33	16·858	17·097	»	»	13·89	2·75	»	
II 448					872	17·090						
					862	084						
				2 35	868	075						
					8650	0865						
Potsdam—*D*	9 36	+10 20	3·88	3 30	16·751	17·212	»	»	89·84	5·63	»	
I 1395					728	208						
o Leonis					756	195						
				3 31	755	190						
					7475	2012						
Potsdam—*D*	5 7	+38 22	5·00	3 40	16·883	17·063	»	»	18·25	2·02	»	
II 974					896	055						
μ Aurigae					900	062						
				3 42	902	053						
					8953	0583						
1901 December 27.												
ζ Urs. maj.	13h 20m	+55°27'	2m09	0h 17m	r 16·684	r 16·920	VI	IV	75°62	3'15	284	Beobachtung durch
Mizar,					664	944						leichte Wolken.
Hauptstern				0h 20m	662	920	5·0 *mm*	IV				Bild sehr unruhig.
					684	918						
					6735	9255						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ'	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
g Urs. maj. Alkor	$13^h 21^m$	$+55°30'$	4^m02	$0^h 22^m$	$16^r\cdot703$	$16^r\cdot888$	VI	IV	75°72	2ʳ52	284	Beobachtung durch leichte Wolken.
					700	902						
					694	896	5·0 *mm*	IV				Bild sehr unruhig.
				0 26	692	910						
					6973	8990						
1901 December 28.												
ζ Urs. maj. Hauptstern	$13^h 20^m$	$+55°27'$	2^m09	$2^h 45^m$	$16^r\cdot643$	$16^r\cdot948$	VI	II	74°72	3ʳ70	284	Luft nebelig.
					641	932						
				2 47	653	946	5·0 *mm*	IV				
					6457	9420						
ζ Urs. maj. Begleiter	13 20	+55 27	4·5	2 48	16·690	16·902	»	»	74·65	2·66	»	
					692	917						
				2 50	700	901						
					6940	9067						

g Urs. maj. Alkor	13 21	+55 30	4·02	2 56 2 57	16·523 544 536 5344	16·734 733 737 7347	»	»	74·82	2·51	»	
1902 Januar 4.												
β Columbae	5ʰ 47ᵐ	35°48'	2ᵐ0	6ʰ 5ᵐ 6 7	$\overset{r}{15}$·790 16 090 072 027 9948	$\overset{r}{17}$·430 260 250 222 2905	V 4·0 *mm*	I—II IV	84°12	16°05	284	Luft sehr durchsichtig. Föhnwind. Sternbild sehr schlecht und unruhig, ändert fortwährend den Durchmesser. Beobachtung nach Süden über die Stadt.
»	»	»	»	6 11 6 13	16·128 082 210 1400	17·108 132 008 0827	»	»	84·17	11·74	148	
»	»	»	»	6 14 6 16	16·243 233 208 2280	17·002 072 050 0413	»	»	84·20	10·11	90	

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Potsdam—D	12h 42m	+12°30'	6m32	6h 55m	16r·330	16r·882	V	I II	78°36	6°47	284	Messung unsicher,
I 1696					372	915						da der Sterndurch-
34 Virginis				6 59	412	872	2·7 *mm*	IV				messer abwechselnd
					3713	8897						größer und kleiner
»	»	»	»	7 1	16·418	16·889	V	»	77·47	5·94	»	wird.
					363	845	3·5 *mm*					
				7 4	368	844						
					3830	8593						
»	»	»	»	7 6	16·372	16·912	V	»	76·83	6·17	»	
					410	875						
				7 7	416	895	5·8 *mm*					
					3997	8940						
1902 Januar 8.												
ζ Urs. maj.	13h 20m	+55°27'	2m09	1h 21m	16r·457	16r·782	V	II	76°40	4°20	284	Etwas nebelig.
Hauptstern					465	807						
				1 23	461	802	3·9 *mm*	III—IV				
					4610	7970						

ζ Urs. maj. Begleiter	13 20	+55 27	4·5	1 24	16·508	16·764	»	»	76·38	3·38	»	
					503	773						
				1 26	493	778						
					5013	7716						
g Urs. maj. Alkor	13 21	+55 30	4·02	1 27	16·508	16·754	»	»	76·32	2·89	»	
					504	742						
				1 30	532	742						
					5147	7460						
ζ Urs. maj. Hauptstern	13 20	+55 27	2·09	1 36	16·522	16·745	V	II	76·31	2·69	»	Sternbild ist bedeutend besser geworden, ruhiger.
					542	735						
				1 38	527	750	3·7 *mm*	II—III				
					5303	7453						
ζ Urs. maj. Begleiter	13 20	+55 27	4·5	1 39	16·537	16·721	»	»	76·28	2·19	»	
					544	719						
				1 41	554	720						
					5450	7200						
g Urs. maj.	13 21	+55 30	4·02	1 42	16·513	16·741	»	»	76·23	2·73	»	
					528	739						
				1 44	533	748						
					5247	7427						
»	»	»	»	1 47	16·541	16·716	»	»	76·20	2·10	148	
					554	712						
				1 50	550	721						
					5483	7163						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
ζ Urs. maj. Haupstern	13h 20m	+55°27'	2m09	1h 52m	16r 531	16r·732	V	II	76°16	2r51	148	
					528	731						
				1 54	534	732	3·7 *mm*	II—III				
					5310	7317						
»	»	»	»	1 57	16·527	16·748	»	»	76·06	2·69	90	
					523	736						
				2 0	516	730						
					5220	7367						
g Urs. maj. Alkor	13 21	+55 30	4·02	2 1	16·538	16·713	»	»	75·98	2·22	»	
					548	721						
				2 3	541	727						
					5427	7203						
ζ Urs. maj. Hauptstern	13 20	+55 27	2·09	2 6	16·520	16·742	»	»	75·71	3·29	30	Stern sehr schwach, Messung schwierig.
					490	772						
				2 8	498	772						
					4993	7620						
Sirius	6 41	—16 35	1	2 17	16·387	16·845	»	»	86·95	6·31	284	
					383	905						
				2 21	377	915						
					3823	8883						

»	»	»	1	2 23	16·078	17·250	V	II	86·16	13·63[1]	»	[1] Verticaler Durchmesser.
					16·000	147	3·7 *mm*	II—III				
				2 26	150	128						
					0760	1750						
»	»	»	»	2 28	16·295	16·960	»	»	85 49	7·76	»	
				29	362	943						
					3285	9515						
»	»	»	»	2 30	16·153	17·100	»	»	84·88	10·66	»	
				37	240	008						
					1965	0540						
»	»	»	»	2 40	16·300	16·940	»	»	83·90	7·79	148	
				41	328	938						
					3140	9390						
»	»	»	»	2 42	16·364	16·845	»	»	83·62	6·73	90	
				43	320	919						
					3420	8820						
»	»	»	»	2 48	16·364	16·880	»	»	82·80	6·25	30	Bei Abblendung auf 30 *mm* ist das Sternscheibchen scharf begrenzt und macht nur in unruhigen Momenten größere Schwingungen.
				49	394	880						
					3790	8800						
»	»	»	»	2 52	16·268	16·975	»	»	82·25	7·91	284	
				53	312	875						
					2900	9250						
Potsdam—*D*	10 28	+ 9 49	4·04	4 26	16·484	16·789	»	II	82·81	3·80	»	
I 1485				4 29	486	789		IV				
ρ Leonis					4850	7890						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Potsdam—D	$10^h 30^m$	+ 9°11'	5·94	$4^h 32^m$	16·495 r	16·742 r	V	II	82°72	3·09	284	
I 1487				4 33	501	748	3·7 *mm*	IV				
					4980	7450						
Potsdam—D	9 36	+10 20	3·88	4 40	—	—[1]	»	»	74·02	[1]	»	[1] Mittleres Beugungsscheibchen gut sichtbar.
I 1395												
Potsdam—D	9 36	+ 9 28	7·07	4 42	16·548	16·710	V	»	73·11	1·83	»	
I 1396					561	701						
				4 44	562	698	3·9 *mm*					
					5570	7030						
Potsdam—D	10 28	+ 9 49	4·04	4 49	16·504	16·726	»	»	78·92	2·89	»	
I 1485					518	742						
ρ Leonis				4 52	498	746						
					5067	7380						
Potsdam—D	10 30	+ 9 11	5·94	4 54	16·519	16·740	»	»	78·85	2·42	»	
I 1487					536	729						
				4 56	537	702						
					5307	7237						

Potsdam—*D* I 1212	8 12	+ 9 11	6·49	5 3	16·582	16·684	VI	II	34°59	1·02	»	Centrales Beugungsscheibchen gemessen.
					592	678						
				5 5	593	673	3·9 *mm*	I—II				
					5890	6784						
Potsdam—*D* I 1210	8 11	+ 9 29	3·74	5 7	16·590	16·662	VI	»	34·76	0·99	»	
					592	668						
				5 10	589	678	3·7 *mm*					
					5903	6693						
Potsdam—*D* I 1487	10 30	+ 9 11	5·94	5 17	16·496	16·740	»	II	67·25	2·70	»	
					522	732						
				5 20	536	730		IV				
					5180	7340						
Potsdam—*D* I 1485	10 28	+ 9 49	4·04	5 22	16·532	16·725	»	»	68·36	2·65	»	
					523	742						
				5 26	512	735						
					5223	7340						
ζ Urs. maj. Hauptstern	13 20	+55 27	2·09	5 35	—	—[1]	»	II I—II	63·50	—[1]	»	[1] Beugungsbild deutlich sichtbar.
g Urs. maj.	13 21	+55 30	4·02	5 35	—	—[1]	»	»	63·59	—[1]	»	

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft bild	Wahre Zenithdistanz z	D	Objectiv-öffnung in Millimetern	Bemerkungen
					1902 Januar 10.							
Potsdam—D II 278	1h 35m	+40° 5'	5m27	0h 56m	16r·602	16r·662	VI	II—III	10°52	0'82	284	Bei Sonnen-Untergang warm, an mehreren Stellen leichte Wolken.
					594	668						
				0·58	598	662	4·5 mm	II				
					5980	6640						
Potsdam—D II 279	1 35	+37 46	8·24	1 1	16·585	16·674	»	»	12·19	1·11	»	Keine Beugungsringe sichtbar.
					583	662						
				1 5	583	681		»				
					5837	6724						
Potsdam—D II 348	2 2	+37 24	4·96	1 11	16·603	16·658	»	»	14·35	0·80	»	
				1 13	596	669						
					5995	6635						
Potsdam—D II 349	2 2	+38 53	7·88	1 16	16·603	16·678	»	»	12·43	0·97	»	»
				1 18	598	678						
					6005	6780						
Potsdam—D II 905	4 43	+37 19	4·96	1 30	16·602	16·668	»	»	36·29	0·86	»	
					600	670						
				1 32	606	675						
					6027	6710						

Potsdam—*D*	4 21	+14 31	5·00	1 37	16·598	16·668	VI	II—III	47·49	0·79	284	
I 515				1 39	609	665	4·5 *mm*	II				
					6035	6665						
Potsdam—*D*	4 21	+16 49	7·04	1 41	16·600	16·670	»	»	45·03	0·98	»	
I 516				1 43	598	685						
					5990	6775						
Potsdam—*D*	5 22	+ 3 1	4·90	1 48	16·583	16·697	»	II—III	63·99	1·38	»	Beugungsringe nicht
I 714				1 50	588	694		III				sichtbar.
					5855	6955						
Potsdam—*D*	5 22	+ 3 45	7·16	1 52	16·577	16·698	»	»	62·82	1·48	»	
I 715				1 54	580	695						
					5785	6965						
Potsdam—*D*	8 11	+ 9 29	3·74	2 2	16·450	16·800	»	»	84·21	5·13	»	Luft etwas nebelig.
I 1210					413	877						Bild sehr verwa-
				2 5	434	842						schen.
					4323	8430						
Potsdam—*D*	8 12	+ 9 11	6·49	2 12	16·472	16·788	»	»	82·93	3·47	»	
I 1212					502	765						
				2 15	508	762						
					4940	7717						
Potsdam—*D*	8 11	+ 9 29	3·74	2 18	16·506	16·772	»	»	81·68	3·64	»	
I 1210				2 19	472	772						
					491	809						
					4897	7843						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Potsdam—*D* I 1212	8h 12m	+ 9°11'	6m49	2h 25m	16r·482	16r·748	VI	II—III	80°78	3'12	284	
					509	762						
				2 28	529	758	4·5 *mm*	III				
					5067	7560						
Potsdam—*D* I 1210	8 11	+ 9 29	3·74	2 32	16·472	16·792	»	»	79·16	4·03	»	
					481	795						
				2 36	475	808						
					4760	7983						
Potsdam—*D* I 1210	8 11	+ 9 29	3·74	2 51	16·413	16·835	»	»	77·72	4·96	»	Bild sehr unruhig gegen vorhin. Sterndurchmesser wechselt fortwährend und die Scheibe ist sehr verwaschen. Wahrscheinlich durch leichte Wolken beobachtet.
					415	818						
				2 54	4190	8265						

1902 Januar 11.												
Mondrand (unten), horizontaler	20h 51m	—12°26'	—	1h 0m	16·506 r	16·772 r	V	III	82°39	3'74	284	Himmel ganz bewölkt, nur am Westhorizonte in der Gegend des Mondes ist eine freie Lücke.
				1 5	470	802	4·3 *mm*	—				
					4880	7870						
»	20 51	—12 25	—	1 7	16·506	16·785	III	»	83·17	3·95	»	
				1 9	460	813	4·3 *mm*					
					4830	7990						
»	20 52	—12 24	—	1 14	16·468	16·834	»	»	84·07	4·66	»	[1] Mond wird durch Wolken verdeckt.
				1 15[1]	445	824						
					4565	8290						
1902 Januar 24.												
Mondrand (unten), horizontaler	8h 57m	+12° 3'	—	2h 14m	16·205 r	17·080 r	III	III[1]	88°19	9'89	284	[1] Stellenweise leichte Wolken.
				16	285	000	4·0 *mm*	—				
					2450	0400						
»	»	+12 2	—	2 19	16·285	17·000	»	»	87·11	8·70	»	
				24	289	16·972						
					2875	9860						
»	»	+12 1	—	2 25	16·310	16·942	»	»	86·29	7·43	»	
				30	354	914						
					3320	9280						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Mondrand (unten), horizontaler	$8^h 57^m$	+12° 0'	—	$2^h 32^m$ 35	$16^r\cdot384$ 400 3920	$16^r\cdot882$ 872 8770	III 4·0 mm	III	85°28	6'05	284	
»	»	+11 59	—	2 37 39	16·376 382 3790	16·859 867 8630	»	»	84·59	6·04	»	
»	»	+11 59	—	2 41 42	16·428 395 4115	16·898 850 8740	»	»	84·04	5·77	»	
»	8 58	+11 56	—	2 57 58	16·470 489 4795	16·806 754 7800	»	»	81·45	3·76	»	
»	8 58	+11 56	—	3 0 2	16·475 490 4825	16·748 769 7585	»	»	80·98	3·45	»	
»	8 59	+11 55	—	3 4 5	16·472 489 4805	16·762 776 7690	»	»	80·45	3·61	»	

»	»	+11 54	—	3 9	16·502	16·748	»	»	79·66	2·95	»	
				10	516	742						
					5090	7450						
»	»	»	—	3 13	16·526	16·761	IV	»	79·02	2·97	»	
				14	522	762	4·0 *mm*					
					5240	7615						
Mondrand (unten)	»	+11 52	—	2 21	16·523	16·737	»	»	77·75	2·53	»	
				22	546	736						
					5345	7365						
»	»	»	—	2 24	16·532	16·742	»	»	76·73	2·51	»	
				26	540	731						
					5360	7365						
1902 Februar 10.												
α Aurigae	$5^h\ 9^m$	+45°54′	0^m08	3^h58^m	$\overset{r}{16}$·597	$\overset{r}{16}$·669	V	II	10°62	0°82	284	Messung des centralen Beugungsscheibchens.
					602	665						
				4 0	607	668	4·0 *mm*	II				
					6020	6674						
»	»	»	»	4 4	16·572	16·692	»	»	»	1·46	148	
					587	692						
				4 7	576	698						
					5784	6947						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T		Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectiv-öffnung in Millimetern	Bemerkungen
α Aurigae	5h 9m	+45°54′	0m08	4h 10m	16ʳ·545	16ʳ·750	V	II	10°62	2'59	90	
					534	743						
				4 12	528	736	4·0 *mm*	II				Messung des centralen Beugungsscheibchens.
					5357	7430						
»	»	»	»	4 16	16·413	16·850	»	»	»	5·61	30	
					412	864						
				4 18	406	865						
					4104	8597						
1902 Februar 22.												
Mondrand (unten), horizontaler	10h 22m	+ 5°24′	—	4h 19m	16ʳ 308	17ʳ·020	III	III[1]	86°43	8'80	284	[1] Leichte Wolken.
				21	295	16·995						
				22	284	995	4·0 *mm*	II				
				24	298	17·000						
					2962	0025						
»	10 22	+ 5 22	—	4 35	16·3650	16·9400	»	»	84·27	7·23	»	

Mondrand (links), verticaler	10 23	+ 5 20	—	4 37	16·430	16·842	»	»	83·56	4·93	»	
				38	447	847						
				39	446	817						
					4410	8353						
Mondrand (unten), horizontaler	10 23	+ 5 20	—	4 41	16·393	16·846	»	»	83·07	5·21	»	
				43	437	838						
				44	410	818						
					4133	8340						
1902 Februar 23.												
Mondrand (links), verticaler	11h 15m	+ 0°50′	—	5h 19m	16·412 r	16·840 r	III	I	88°11	4'66	284	
				22	448	810						
				23	453	800	5·9 *mm*	II				
				25	443	799						
					4390	8123						
»	11 15	+ 0 49	—	5 27	16·444	16·778	»	»	87·14	4·12	»	
				28	459	795						
				29	482	783						
				30	456	802						
					4602	7895						
Mondrand (unten), horizontaler	11 15	+ 0 48	—	5 34	16·410	16·808	»	»	86·40	5·24	»	
				35	423	868						
				35·5	424	840						
					4190	8387						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T	T	Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Mondrand (links), verticaler	$11^h 15^m$	+ 0°47′	—	$5^h 39^m$	$16\overset{r}{\cdot}494$	$16\overset{r}{\cdot}775$	III	I	85°31	3°31	284	
				40	492	756						
				41	512	762	5·9 *mm*	II				
					4993	7643						
»	11 16	+ 0 46	—	5 42	16·500	16·765	V	»	84·73	3·11	»	
				44	512	758						
				45	523	758	5·9 *mm*					
					5117	7603						
»	11 16	+ 0 45	—	5 49	16·526	16·750	»	»	83·72	2·65	»	
				50	528	740						
				51	532	742						
					5320	7410						
»	11 16	+ 0 44	—	5 55	16·533	16·735	»	»	82·78	2·53	»	
				56	531	738						
				57	538	736						
					5340	7364						

1902 Februar 24.

Mondrand (links), verticaler	12ʰ 6ᵐ	− 3°41′	—	6ʰ 36ᵐ	r 16·380	r 16·846	III	I—II	87°66	5°81	284	
					354	856						
				6 37	408	837	5·0 *mm*	II				
					3807	8463						
»	12 6	− 3 42	—	6 40	16·422	16·825	»	»	87·04	5·03	148	
					414	819						
				6 41	432	832						
					4227	8253						
»	12 6	− 3 42	—	6 42	16·426	16·810	»	»	86·65	4·61	90	
					442	808						
				6 44	452	808						
					4400	8087						
»	12 6	− 3 43	—	6 46	16·442	16·785	»	»	86·05	4·19	30	
					453	803						
				6 48	474	792						
					4563	7933						
»	12 6	− 3 43	—	6 49	16·472	16·790	»	»	85·63	3·84	30	
					474	795						
				6 50	475	778						
					4737	4810						
»	12 6	− 3 44	—	6 51	16·442	16·797	»	»	85·32	4·12	90	
					465	795						
				6 52	474	779						
					4603	7903						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T	T	Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
Mondrand (links), verticaler	12ʰ 7ᵐ	— 3°44′	—	6ʰ 53ᵐ	16ʳ·470	16ʳ·800	III	I—II	84°92	3°93	148	
					472	778						
				6 55	465	772	5·0 *mm*	III				
					4690	7830						
»	12 7	— 3 44	—	6 56	16·432	16·808	»	»	84·54	4·57	284	
					454	825						
				6 57	460	810						
					4487	8143						
η Virginis	12 15	— 0 8	3ᵐ82	7 7	16·442	16·828	V	I—II	81·37	4·57	»	
					447	812						
				7 8	462	809	5·0 *mm*	IV				
					4503	8163						
Mondrand (links), verticaler	12 7	— 3 47	—	7 11	16·483	16·793	»	»	82·13	3·88	»	
					478	788						
				7 13	480	791						
					4803	7907						

1902 März 5.

ζ Can. maj.	6h 16m	—30° 1′	3m2[1]	6h 10m	r 16·422	r 16·852	V	I	78°18	5′18	284
				11	.422	834					
				12	430	832	5·0 *mm*	I—II			
					4247	8393					
»	»	»	»	6 15	16·400	16·855	»	»	»	5·56[2]	30
					422	856					
				6 17	428	875					
					4167	8620					
»	»	»	»	6 19	16·453	16·783	»	»	»	4·00	30
					482	796					
				6 21	485	800					
					4733	7930					
α Columbae	5 36	—34 8	2·51	6 25	16·442	16·810	»	»	83·12	4·73	30
				30	433	822					
				31	430	809					
					4350	8137					
»	»	»	»	6 27	16·380	16·890	»	»	83·12	6·50[2]	30
					342	903					
				6 30	368	860					
					3630	8843					
»	»	»	»	6 33	16·363	16·876	»	»	83·15	6·33	284
					388	875					
				6 35	383	905					
					3780	8853					

[1] Gould, Generalcatalog.

[2] Größe der Bewegung des Sternscheibchens wurde gemessen.

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T	T	Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
1902 September 7.												
Mondrand (verticaler)	15h 14m5	-15°48'1	—	18h 12m	r 14·132	r 14·428	III	I—II	75°18	3'41	30	Mondrand, doppelte Amplitude der Wellenbewegung gemessen.
					162	421		II				
				18 14	159	435	5·0 *mm*	gut				
					14·1510	14·4280						
γ Librae	15 30·0	-14 27·8	4m3	18 15	14·098	14·482	»	»	72·83	4·54	30	Doppelte Amplitude gemessen. Messung unsicher.
					102	468						
				18 19	106	482						
					14·1020	14·4707						
γ Librae	15 30·0	-14 27·8	4·3	18 21	14·154	14·402	»	»	73·54	4·30	284	Durchmesser gemessen.
					160	410						
				18 25	162	411						
					14·1587	14·4077						
Mondrand (verticaler)	15 15·0	-15 49·5	—	18 27	14·128	14·431	»	»	77·12	3·62	30	Doppelte Amplitude.
					144	452						
				18 30	162	434						
					14·1447	14·4390						

Mondrand (verticaler)	15 15·2	-15 50·1	—	18 34	14·164	14·401	»	»	77·33	3·10	30	Doppelte Amplitude. Bild etwas ruhiger,
					152	438						
				18 36	169	429						
					14·1616	14·4227						
γ Librae	15 30·0	-14 27·8	4·3	18 40	14·060	14·470	»	»	75·68	4·69	30	Doppelte Amplitude. Messung unsicher.
					100	465						
				18 42	102	462						
					14·0872	14·4657						
γ Librae	15 30·0	-14 27·8	4·3	18 45	14·162	14·425	»	»	76·30	3·22	284	Durchmesser.
					152	408						
				18 47	162	430						
					14·1587	14·4210						
α Librae	14 45·5	-15 38·1	2·3	18 57	14·034	14·532	»	I II	84·90	6·26	284	Durchmesser.
					023	528						
				19 0	021	544		IV				
					14·0267	14·5347						
Mondrand (verticaler)	15 15·3	-15 52·9	—	19 4	14·095	14·490	»	I—II	81·90	4·59	30	Doppelte Amplitude.
					109	450						
				19 7	086	468		III				
					14·0967	14·4693						

Object	AR.	Declination	Größe	Sternzeit	T	T	Ocular Oc	Luft Bild	Wahre Zenithdistanz ζ	D	Objectivöffnung in Millimetern	Bemerkungen
1902 September 8.												
Mondrand (verticaler)	16ʰ 4ᵐ1	−17°38ʹ2	—	18ʰ 12ᵐ	14^r188	14^r405	III	I—II	71°83	2ʳ73	30	Doppelte Amplitude.
					186	415						
				18 14	183	403	5·0 *mm*	III				
					14·1857	14·4077						
ν Scorpii	16 6·3	−19 12·4	4·2	18 19	14·165	14·438	»	»	73·74	3·70	284	Durchmesser.
					132	452						
				18 21	126	435						
					14·1410	14·4417						
Mondrand (verticaler)	16 4·6	−17 39·0	—	18 25	14·172	14·422	»	»	73·04	3·13	30	Doppelte Amplitude.
					172	422						
				18 27	168	431						
					14·1707	14·4250						
ν Scorpii	16 6·3	−19 12·4	4·2	18 29	14·152	14·432	»	»	74·69	3·40	284	Durchmesser.
					158	425						
				18 31	158	440						
					14·1560	14·4323						

$S'D$ –18°4249	16 9·0	–18 16·9	6·5	18 36	284	14·178	14·430	»	»	74·25	3·00	Durchmesser.
						172	411					
				18 38		180	420					
						14·1767	14·4203					
Mondrand (verticaler)	16 5·1	–17 40·0	—	18 41	30	14·158	14·406	»	»	74·57	2·94	Doppelte Amplitude.
						180	409					
				18 43		181	421					
						14·1730	14·4120					
$S'D$ –18°4249	16 9·0	–18 16·9	6·5	13 45	284	14·140	14·415	»	»	75·16	3·35	Durchmesser.
						153	448					
				18 47		172	418					
						14·1550	14·4270					
ν Scorpii	16 6·3	–19 12·4	4·2	18 49	30	14·130	14·445	»	»	76·68	3·81	Durchmesser.
						133	438					
				18 51		138	446					
						14·1337	14·4430					

Genauigkeit der Messungen.

Um über die Genauigkeit der Messungen ein Urtheil zu gewinnen, wurden die Differenzen der einzelnen Einstellungen *(T)* gegen die jeweiligen Mittel gebildet. Diese Differenzen sind nach Zenithdistanzen (ζ) und Güte der Bilder geordnet. Daraus ergaben sich die in folgender Zusammenstellung angegebenen mittleren Fehler einer Einstellung *(T)*. Die in Klammer beigefügte Zahl gibt die Anzahl der Differenzen an, aus denen der mittlere Fehler abgeleitet wurde.

Mittlere Fehler einer Einstellung *(T)* und eines Sterndurchmessers *D*.

ζ / Bild	0 bis 20°	20 bis 40°	40 bis 60°	60 bis 70°	70 bis 75°	75 bis 80°	80 bis 85°	85 bis 90°
I	—	±0ᵀ10 (12)	—	—	—	±0ᵀ25 (18)	0±ᵀ29 (18)	—
II	±0ᵀ11 (50)	±0ᵀ06 (30)	±0ᵀ10 (32)	±0ᵀ13 (14)	±0ᵀ12 (30)	±0ᵀ26 (37)	±0ᵀ53 (15)	—
III	—	—	—	±0ᵀ07 (23)	±0ᵀ22 (30)	±0ᵀ15 (10)	±0ᵀ42 (30)	—
IV	±0ᵀ25 (24)	±0ᵀ21 (16)	—	±0ᵀ25 (28)	±0ᵀ29 (40)	±0ᵀ29 (111)	±0ᵀ32 (74)	±0ᵀ60 (40)

Ein Sterndurchmesser *D* ist im Mittel aus 2×3 Einstellungen abgeleitet, und es werden demnach die Werte der Tabelle auch die mittleren Fehler eines Sterndurchmessers angeben.

Eine Betrachtung der mittleren Fehler lässt eine deutliche Abhängigkeit derselben von der Zenithdistanz erkennen. Sie werden, vom Zenithe ausgehend, zuerst kleiner, erreichen etwa bei $\zeta = 30°$ einen Minimalwert, um dann bei 60° insbesondere von $\zeta = 70°$ ab stetig zu wachsen. Bei geringer

Zenithdistanz ($<30°$) werden die Messungen in sehr unbequemer Stellung des Beobachters (Blick nach oben) angestellt, und scheint dadurch die Genauigkeit der Einstellungen verringert zu werden, wie das die mittleren Fehler andeuten.

Eine Zunahme der mittleren Fehler mit der »Bild«-Scala ist ebenfalls erkennbar; es zeigt sich da von »III« auf »IV« ein deutlicher Sprung um 0ᵛ1, und scheint dabei ein großer Einfluss des Bildzustandes auf die Genauigkeit der Messungen erst da einzutreten, wo die Bilder als ganz schlecht, »verwaschen«, bezeichnet werden und unter gewöhnlichen Verhältnissen überhaupt nicht mehr gemessen wird. Bei den obigen Messungen, wo es gerade auf die Ermittelung des Einflusses des Luftzustandes auf das Aussehen der Bilder ankam, war es nothwendig, schlechte Bilder bei den Messungen zu bevorzugen.

Über die Temperaturcoefficienten einiger Jod-elemente

von

Olga Steindler.

Aus dem II. physikalischen Institute der Wiener Universität.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. November 1902.)

In der Abhandlung von Exner »Über galvanische Elemente, die nur aus Grundstoffen bestehen, und das elektrische Leitungsvermögen von Brom und Jod«[1] wurden die elektromotorischen Kräfte einiger Jodelemente bestimmt. Da es aber zur Prüfung der Helmholtz'schen Formel erforderlich ist, auch deren Temperaturcoefficienten zu kennen, wurden dieselben an Jodelementen in den Combinationen mit Ag, Zn, Mg, Cd, Al, Hg gemessen.

Zu diesem Zwecke wurde ein Thomson'sches Quadrantelektrometer benützt. Die Ablesung an demselben geschah mit Scala und Fernrohr. Zur Aichung der Scalentheile, die bei jeder Messung wiederholt wurde, diente ein Cd-Normalelement, dessen elektromotorische Kraft von 1·017 Volt einen Ausschlag von etwa 75 Theilstrichen ergab. Bei sämmtlichen Elementen befand sich in einem Kohlentiegel festes Jod, in welches das betreffende Metall, ein Thermometer und ein Kohlenstück, das als zweite Elektrode verwendet wurde, eingeschmolzen war. Das Ganze befand sich in einem bis auf eine kleine Öffnung im Deckel geschlossenen Glasgefäß, welches in einem Ölbade erwärmt werden konnte. Die Ablesungen geschahen erst, nachdem sich die Temperatur längere Zeit als constant erwies.

[1] Wiener Akad. Berichte, Bd. 84, 1881.

1. Ag|J|C.

Ein Silberdraht, die negative Elektrode, war in das Jod eingeschmolzen und in directer Verbindung mit dem Elektrometer, die andere Elektrode war zur Erde abgeleitet. Durch eine Wippe konnte zwischen dem Normalelemente und dem Jodelemente leicht commutiert werden.

Tabelle I gibt eine Übersicht über die bei den verschiedenen Temperaturen beobachteten Werte der elektromotorischen Kraft E und über die Größe der Übereinstimmung der einzelnen Ablesungen.

Tabelle I.

Temperatur	E Mittelwert in Volt	Einzelablesungen
— 8 °C.	0·618	0·616, 0·617, 0·618, 0·620...
— 2·5	0·621	0·620, 0·623, 0·621, $0·620_9$...
+ 6·5	0·625	0·625, 0·623, 0·622, 0·629...
20	0·631	0·631, 0·632, 0·630, 0·634...
37·5	0·639	0·639, 0·638, 0·640, 0·637...
44·5	0·642	0·642, 0·643 0·640...
48	0·644	0·644, 0·643, 0·645...
51	0·645	0·645, $0·644_8$...
78·5	0·657	0·657, 0·656...
89	0·661	0·661, 0·660, 0·662...

Hier sei bemerkt, dass die sich wiederholenden Werte der Einzelablesungen nur einmal verzeichnet wurden.

Die elektromotorische Kraft nimmt mit der Temperatur fast ganz linear zu oder ab, da die Temperaturcoefficienten nahezu constant sind.

2. Zn|J|C.

Zn war ebenfalls in das Jod eingeschmolzen, musste aber sorgfältig isoliert werden, da sich die entstandene Verbindung der beiden hygroskopisch erwies,

Tabelle II.

Temperatur	Mittelwert in Volt	Einzelablesungen
— 17°	1·056	1·056, 1·054, 1·055, 1·057, 1·058, 1·060...
— 11	1·048	1·048, 1·053, 1·052, 1·051, 1·047, 1·046, 1·045, 1·042...
0	1·033	1·030, 1·033, 1·036...
10	1·020	1·020, 1·018, 1·017, 1·022, 1,023...
20	1·007	1·007, 1·006, 1·009...
33	0·990	0·990, 0·995, 0·985, 0·989...
55	0·964	0·964, 0·965, 0·962...
60	0·957	0·957, 0·959, 0·956...
76	0·937	0·937, 0·939, 0·934...
90	0·920	0·920, 0·921...

3. Mg | J | C.

Tabelle III.

Temperatur	Mittelwerte	Einzelablesungen
15°	1·585	1·585, 1·584, 1·576, 1·566, 1·594, 1·596, 1·597.
20	1·560	1·560, 1·564, 1·558, 1·554, 1·562, 1·563...
37	1·475	1·475, 1·474, 1·476, 1·478...
47	1·423	1·423, 1·418, 1·414, 1·425, 1·430...
60	1·355	1·355, 1·360, 1·362, 1·358, 1·349 1·345, 1·344, 1·342...
65	1·331	1·330, 1·332. .
80	1·250	1·250, 1·252, 1·250...

Mg-Band wurde mittels eines Ebonitstäbchens an das Jod gedrückt und musste nach jeder Bestimmung erneuert werden, da das Verbindungsproduct sehr stark hygroskopisch war und sich bei längerer Berührung löste.

4. Cd|J|C.

Cd war in das Jod eingeschmolzen und musste ebenfalls aus obigem Grunde häufig gereinigt werden.

Tabelle IV.

Temperatur	Mittelwerte	Einzelablesungen
0°	0·410	0·410, 0·420, 0·400, 0·402, 0·418...
10	0·457	0·458, 0·456, 0·455...
18	0·495	0·500, 0·455, 0·495, 0·496, 0·513, 0·492...
37	0·584	0·584, 0·582, 0·580, 0·586...
57	0·675	0·675, 0·672, 0·674, 0·677, 0·679...
85	0·820	0·820, 0·826, 0·814, 0·821...

5. Al|J|C.

Hier gilt für die Anordnung des Elementes dasselbe wie für das Mg-Element.

Tabelle V.

Temperatur	Mittelwerte	Einzelablesungen
17°	0·792	0·794, 0·789, 0·791, 0·792...
35	0·760	0·760, 0·761..
51	0·731	0·731, 0·730, 0·728, 0·736...
60	0·715	0·715, 0·712, 0·713, 0·722...
74	0·691	0·691, 0·692...
85	0·672	0·672, 0·673...

6. Hg|J|C.

Chemisch reines Hg wurde in ein Glasröhrchen gegossen, welches im Jod eingeschmolzen war. In das Hg tauchte ein Kupferdraht ein, der den Contact mit dem Elektrometer herstellte. Nach einigen Bestimmungen musste das Hg im frisch eingeschmolzenen Glasröhrchen erneuert werden, da sich eine ziemlich dicke Schichte von HgJ_2 und Hg_2J_2 gebildet hatte, so dass kein Contact mehr vorhanden war.

Tabelle VI.

Temperatur	Mittel	Einzelablesungen
7°	0·334	0·336, 0·331, 0·329...
21	0·495	0·495, $0·495_9$...
30	0·595	0·595, 0·590, 0·498...
40	0·709	0·709, 0·700, 0·718...

Für die Elemente Cu|J|C und Pb|J|C konnte kein Ausschlag am Elektrometer erzielt werden, da sich eine nichtleitende Schichte von Kupferjodid, respective Bleijodid bildete, welche eine weitere Verbindung der Substanzen verhinderte.

Zur Prüfung der Helmholtz'schen Gleichung erweist es sich zweckmäßig, in nachfolgender Tabelle VII eine Zusammenstellung der hiezu nöthigen Daten zu geben. Zur Vergleichung befinden sich in derselben nebst den bei Zimmertemperatur gemessenen elektromotorischen Kräften E_1 die aus der Helmholtz'schen Gleichung

$$E = T\frac{dE}{dT} + Q$$

sich für diese Temperatur ergebenden Werte.

Den Bildungswärmen wurden die von J. Thomsen bestimmten Werte zugrunde gelegt, wobei für die Substanzen Zn und Mg wegen der starken Hygroskopie die Bildungswärmen für wässerige Lösung verwendet wurden.

Tabelle VII.

Metall	Elektromotorische Kraft in Volt		Q = Bildungswärme in Calorien	Procent der Abweichung
	E_1 gemessen	E berechnet		
Ag	0·631	0·6003	13.800 c.	6
Zn	1·007	0 9389	60.540 c.	6
Mg	1·560	1·4700	134.630	6
Cd	0·495	2·4960	48.830	.
Al.	0·770	0·5430	140.780	26
Hg	0·495	4·2460	34.310	.

Da die Helmholtz'sche Gleichung unter der Annahme abgeleitet ist, dass sich die Bildungswärme mit der Temperatur nicht ändert, was nach Nernst[1] für feste Substanzen hinreichend zutrifft, können wir nun das Integral derselben bilden, wodurch eine genauere Prüfung des Verlaufes der elektromotorischen Kraft im beobachteten Temperaturintervalle ermöglicht wird. Die Gleichung

$$E = \frac{E_0 - Q}{T_0} T + Q$$

stellt eine Gerade dar, deren Neigung $\frac{dE}{dT}$ durch $\frac{E_0 - Q}{T_0}$ gegeben ist. In nachfolgender Tabelle VIII wird dieser berechnete Wert mit dem aus den Messungen sich ergebenden verglichen.

[1] Theoretische Chemie, S. 548.

Tabelle VIII.

Substanz	Temperaturcoefficient	
	gemessen	berechnet
Ag	+ 0·0004	+ 0·00011
Zn	— 0·0013	— 0·0011
Mg	— 0·005	— 0·0047
Cd	+ 0·0048	— 0·002
Al	— 0·0017	— 0·00093
Hg	+ 0·0119	— 0·00086

Während sich also die Helmholtz'sche Gleichung qualitativ und quantitativ bei den Elementen Ag, Zn, Mg und Al bewährt, ist die Nichtübereinstimmung beim Cd-Elemente umso auffallender, als gerade bei diesem Elemente die Beobachtungen ohne besondere Störungen vor sich giengen und die Resultate der einzelnen Ablesungen an den verschiedenen Tagen vollständig übereinstimmten.

Die Abweichung bei dem Hg-Elemente ist wohl zum großen Theile darauf zurückzuführen, dass sich sowohl HgJ_2, als auch HgJ gleichzeitig in unbekannten Mengen bildete, weshalb sich die in Rechnung zu ziehende Wärmetönung nicht genau angeben lässt.

Zur Theorie des Spiegelsextanten

von

Prof. Dr. **L. Weinek**,

Director der k. k. Sternwarte in Prag.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. October 1902.)

Es dürfte keinem Zweifel unterliegen, dass in der Theorie der astronomischen Instrumente geeignete Zeichnungen, welche den Übergang von den charakteristischen Linien desselben und seiner Aufstellung zur Sphäre plastisch veranschaulichen, wesentlich zur Klarheit dieser Theorie beizutragen vermögen; auch lassen solche Abbildungen die Zeichen der in die Formeln eingeführten Fehlergrößen jederzeit leicht und sicher erkennen. Einen bezüglichen Versuch habe ich bereits in den »Astronomischen Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag in den Jahren 1885, 1886 und 1887« (Prag 1890) auf Tafel II hinsichtlich der Theorie des Passagen-Instrumentes im Meridiane und im ersten Vertical gemacht und möchte nun eine ähnliche Zeichnung zur Theorie des Spiegelsextanten veröffentlichen, welche in einfacher und instructiver Weise die allgemeine Encke'sche Formel, wie sie im Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1830, S. 292, als Formel B gegeben ist, abzuleiten gestattet.

Führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Der bewegliche, mit der Alhidade und dem Index verbundene, ganz belegte Spiegel werde Indexspiegel oder Spiegel I genannt (siehe Fig. 1), sein Perpendikel P. Der feste, nur zur Hälfte

belegte Spiegel, über welchen hinweg bei Sonnenhöhenbeobachtungen zur See der Meereshorizont anvisiert wird, heiße der Horizontspiegel oder Spiegel *II*, sein Perpendikel *p*. Die Gesichtslinie des kleinen, festen Fernrohres treffe den Punkt *A*, hier den Horizont. Der zweite Gegenstand, dessen Winkeldistanz von *A* mit Hilfe des Sextanten gemessen werden soll,

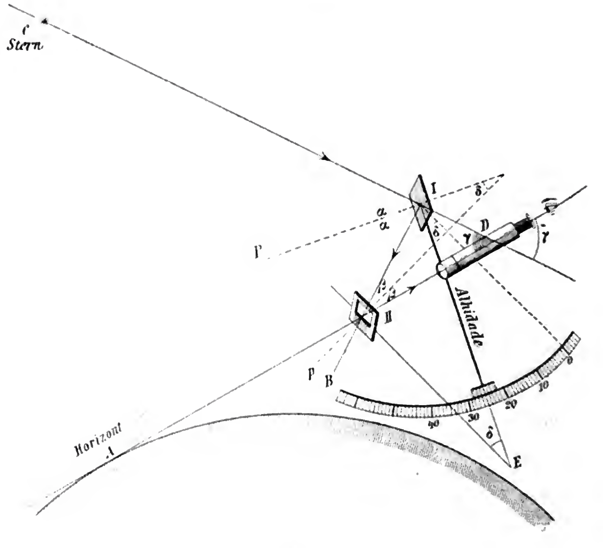


Fig. 1.

heiße *C*. Dieser wird durch entsprechende Drehung von *I* zur Coincidenz mit *A* gebracht, worauf die Ablesung an der Kreistheilung des Instrumentes erfolgt. In diesem Falle ist, wenn wir den Einfallswinkel an *I* mit α, an *II* mit β und den Winkel zwischen den Richtungen nach *A* und *C* mit γ, endlich den Winkel zwischen den beiden Spiegelebenen, beziehungsweise ihren Perpendikeln mit δ bezeichnen, aus den Dreiecken *I II D* und *I II E*:

$$180°-2\alpha+\gamma+2\beta = 180°,$$
$$90°+\beta+\delta+90°-\alpha = 180°,$$

also:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{\gamma}{2}+\beta \\ \alpha = \delta+\beta,\end{array}\right\}$$

somit:

$$\frac{\gamma}{2} = \delta.$$

δ ist nichts anderes als die Ablesung am Sextanten-Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in I liegt, von jener Stelle aus, wo beide Spiegel parallel zu einander stehen, d. i., wo ein und derselbe Gegenstand in unendlicher Entfernung mit seinem Bilde zur Deckung gelangt. Indem $\gamma = 2\delta$ ist, wären die Ablesungen δ stets mit 2 zu multiplicieren, um aus ihnen den gesuchten Winkel γ zu erhalten. Dieser Multiplication ist man enthoben, wenn am Sextanten-Limbus gleich die doppelten Werte angesetzt werden. In diesem Falle zeigt das Limbusende nicht die Zahl 60, wie es sein sollte, sondern 120.

Diese einfache Ermittelung von γ setzt voraus, dass beide Spiegel senkrecht zur Sextanten- oder Limbusebene und die Gesichtslinie parallel zu dieser liegen, anderseits auch, dass der Indexspiegel planparallele Flächen besitze, während eine etwaige prismatische Form des festen Horizontspiegels (wegen der Differenz der Ablesungen für die Coincidenz beider Objecte und jener für die Nullpunktsermittlung) ohne Einfluss erscheint.

Nehmen wir nun die nachstehenden Fehlergrößen an:

1. Das Perpendikel P des Spiegels I liege nicht in der Sextantenebene, beziehungsweise parallel zu dieser, sondern habe gegen dieselbe die Winkelneigung l.

2. Das Perpendikel p des Spiegels II habe die gleiche Neigung l gegen die Sextantenebene. Encke führt dieselbe vorerst verschieden von l ein und nennt sie k; später setzt er aber $k = l$, da man diese Supposition immer machen darf, weil es leicht gelingt, den Spiegel II durch Coincidenz eines nicht

zu hellen Sternes mit seinem Bilde völlig parallel zum Spiegel *I* zu stellen.

3. Die Gesichtslinie des kleinen Fernrohres sei ebenfalls nicht parallel zur Sextantenebene, sondern bilde mit dieser den Winkel i.[1]

Übertragen wir jetzt die charakteristischen Linien der beiden Sextantenspiegel auf einen und denselben Punkt, etwa

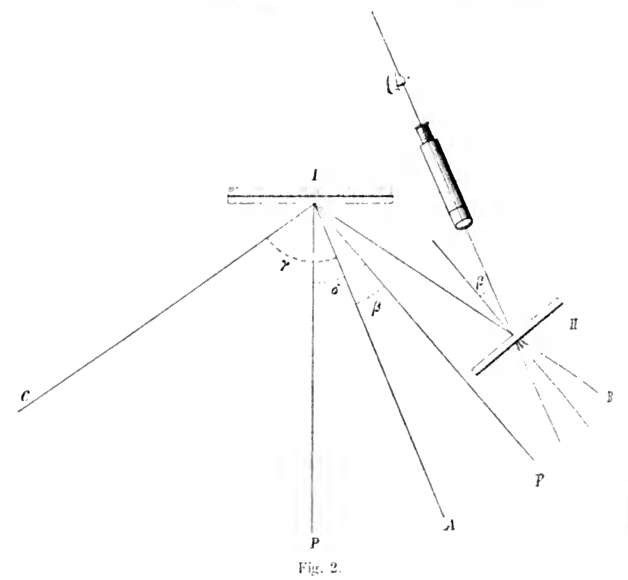


Fig. 2.

den Mittelpunkt der Limbustheilung oder des Spiegels *I*, und schlagen wir um diesen die Sphäre mit beliebigem Radius. Zur Erläuterung diene zunächst die schematische Figur 2. Von *I* ziehen wir eine Parallele zur Gesichtslinie des Fernrohres,

[1] Von der prismatischen Gestalt des Spiegels *I* kann insoferne abgesehen werden, als vollkommen planparallele Glasplatten für kleine Spiegel unschwer von hervorragenden optischen Werkstätten zu beschaffen sind.

ebenso zum Perpendikel des Spiegels *II*, letztere nach der Rückseite desselben. Wo diese die Sphäre treffen, seien nun die Punkte *A* und *p*. Auch *P*, *C* und *B* seien Projectionspunkte der betreffenden Richtungen an der Sphäre. Man erkennt sofort, dass für *A* und *B* die Symmetrielinie in *p*, für *B* und *C* in *P* liegt, d. h., dass $Ap = Bp$ und $BP = CP$ ist. Auch hieraus folgt

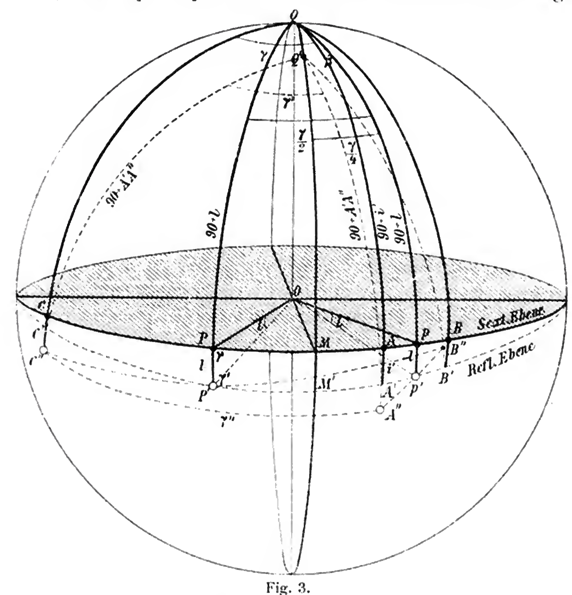


Fig. 3.

(wegen $CA = CP + PA = PB + PA = PA + 2Ap + PA =$ $= 2(PA + Ap) = 2Pp$) als Winkel zwischen den beiden Gegenständen *C* und *A* der doppelte Betrag des Winkels zwischen beiden Perpendikeln *P* und *p*, d. i. zwischen den beiden Spiegelebenen.

In Fig. 3 möge die Sphäre mit der Sextantenebene, in welcher die Limbustheilung sich befindet, und der Reflexionsebene, in der die Perpendikel beider Spiegel liegen, dargestellt

werden. Die Durchschnitts- oder Knotenlinie beider Ebenen werde der Einfachheit halber in der Ebene des Papieres gedacht, so dass senkrecht dazu die größte Neigung beider Ebenen gegen einander zum Ausdrucke kommt. Es sei ferner Q der Pol der Sextantenebene, Q' der Pol der Reflexionsebene. Der größte Kreis durch Q und Q', d. i. $QQ'MM'$, steht senkrecht zu demjenigen größten Kreise, welcher die Knotenlinie beherbergt, und es ist naturgemäß $QQ' = MM'$. Symmetrisch zu M, beziehungsweise M' finden nach rechts und links gleich große Neigungen der Reflexionsebene gegen die Sextantenebene statt (die aber sämmtlich kleiner als $M'M$ sind). Insoferne müssen auch die Perpendikel P' und p' gleich weit entfernt von M', ebenso die Projectionen P und p von M gezeichnet werden. Dann ist $PP' = pp'$, welcher Abstand gleich l gesetzt wurde. Nehmen wir noch den Ort an der Sphäre, wohin die Gesichtslinie des Fernrohres trifft, in A'', also außerhalb der Reflexions- und Sextantenebene, an. Ziehen wir weiter durch A'' und Q' einen größten Kreis, so gibt $A''A'$ den Abstand der Gesichtslinie von der Reflexionsebene, beziehungsweise die Neigung der ersteren gegen die letztere. Es kommen nun hauptsächlich die drei Punkte P', p' und A'' in Betracht.

Um den Gegenstandsort C'' desjenigen Objectes zu finden, welches bei dieser fehlerhaften Lage von P', p' und A'' mit A'' in Coincidenz erscheint, wird zuerst der Symmetriepunkt zu A'' bezüglich des Perpendikels p' gesucht. Dieser läge in B'', so dass

$$A''p' = p'B'' \quad \text{und} \quad A''A' = B''B'$$

ist. Von B'' wird weiter bezüglich des Perpendikels P' der Symmetriepunkt gesucht. Dieser befinde sich in C'', so dass

$$B''P' = P'C'' \quad \text{und} \quad B''B' = C''C' = A''A'$$

ist. Projicieren wir noch die Punkte C' und A' der Reflexionsebene nach C und A in der Sextantenebene, so ist $C''A'' = \gamma''$ der gesuchte Winkel zwischen beiden Objecten und $CA = \gamma$ der dafür abgelesene Winkel. Es ist nun die Größe $\gamma''-\gamma$, d. i. die Correction der Ablesung γ, um daraus den richtigen Winkel γ'' zu erhalten, zu finden. Hierzu verwenden wir als

Mittelglied den Winkel $C'A' = \gamma'$ in der Reflexionsebene, indem wir erst $\gamma''-\gamma'$, dann $\gamma'-\gamma$ suchen und schließlich beide Ausdrücke addieren.

1. Ermittelung von $\gamma''-\gamma'$.

Aus dem sphärischen Dreiecke $Q'C''A''$, in welchem die Seiten $C''Q'$ und $A''Q'$ gleich $90°+A'A''$ sind und der Winkel an Q' gleich γ' ist, folgt

$$\begin{aligned}\cos\gamma'' &= \cos^2(90+A'A'')+\sin^2(90+A'A'')\cos\gamma' \\ &= \sin^2 A'A''+\cos^2 A'A''\cos\gamma'\end{aligned}$$

und hieraus

$$\cos\gamma''-\cos\gamma' = \sin^2 A'A''(1-\cos\gamma'),$$

somit

$$-2\sin\frac{\gamma''+\gamma'}{2}\sin\frac{\gamma''-\gamma'}{2} = \sin^2 A'A''.\ \sin^2\frac{\gamma'}{2}$$

und, wenn die supponierten Instrumentalfehler klein angenommen werden,

$$\sin\gamma'.\ \frac{\gamma''-\gamma'}{2}\sin 1'' = -A'A''^2\sin^2 1''.\ \sin^2\frac{\gamma'}{2},$$

somit

$$2\sin\frac{\gamma'}{2}\cos\frac{\gamma'}{2}.\frac{\gamma''-\gamma'}{2} = -A'A''^2\sin 1''\sin^2\frac{\gamma'}{2},$$

also

$$\gamma''-\gamma' = -A'A''^2\sin 1''\operatorname{tg}\frac{\gamma'}{2}. \qquad (a)$$

2. Ermittelung von $\gamma'-\gamma$.

In dem sphärischen Dreiecke $QP'p'$ sind die Seiten QP' und Qp' einander gleich und zwar $90°+l$. Ferner ist $P'p' = \frac{\gamma'}{2}$, während der Winkel an Q durch $Pp = \frac{\gamma}{2}$ gemessen wird. Somit ist

$$\begin{aligned}\cos\frac{\gamma'}{2} &= \cos^2(90+l)+\sin^2(90+l)\cos\frac{\gamma}{2} \\ &= \sin^2 l+\cos^2 l\cos\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

und verfährt man hiemit ganz so, wie dies soeben geschehen ist, so folgt

$$\frac{\gamma'}{2}-\frac{\gamma}{2}=-l^2\sin 1''.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4},$$

also

$$\gamma'-\gamma=-2l^2\sin 1''.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}. \qquad (b)$$

Addiert man jetzt (a) und (b), so wird

$$\gamma''-\gamma=-2l^2\sin 1''\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}-A'A''^2\sin 1''\operatorname{tg}\frac{\gamma'}{2}. \qquad (c)$$

Nehmen wir an, dass Q' nicht weit entfernt von Q liege, d. h., dass die Reflexionsebene nur eine geringe Neigung gegen die Sextantenebene habe, so können die Richtungen $A''A'$ und $A'A$ als zusammenfallend betrachtet werden. Es heiße dann der Winkelabstand des Visierpunktes A'' von der Sextantenebene i, des Punktes A' hingegen i', so dass

$$A'A''=A''A-A'A=i-i'$$

ist. Hiemit ergibt sich, wenn noch in der Formel (c) im zweiten kleinen Gliede der rechten Seite für $\gamma'\ldots\gamma$ gesetzt wird:

$$\gamma''-\gamma=-2l^2\sin 1''\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}-(i'-i)^2\sin 1''\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (d)$$

Wir benöthigen noch die Größe $i'=A'A$, welche mit dem Winkel γ veränderlich ist. Dazu benützen wir die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $QM'A'$ und $QM'p'$. Wie oben, heiße der constante Winkel zwischen der Gesichtslinie und dem Perpendikel zum festen Spiegel $II\ldots\beta=Ap$. Dann ist wegen $Mp=MP=\frac{\gamma}{4}$:

$$\sphericalangle M'QA'=\frac{\gamma}{4}-\beta \quad \text{und} \quad \sphericalangle M'Qp'=\frac{\gamma}{4},$$

daher

$$\operatorname{tg}M'Q=\operatorname{tg}(90+A'A)\cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right)=\operatorname{tg}(90+l)\cos\frac{\gamma}{4},$$

also

$$-\operatorname{cotg} i' \cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right) = -\operatorname{cotg} l \cos\frac{\gamma}{4}$$

und reciprok geschrieben:

$$\frac{\operatorname{tg} i'}{\cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right)} = \frac{\operatorname{tg} l}{\cos\frac{\gamma}{4}},$$

somit

$$\operatorname{tg} i' = \operatorname{tg} l \cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right) \sec\frac{\gamma}{4}$$

und genähert:

$$i' = l \cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right) \sec\frac{\gamma}{4}. \qquad (e)$$

Wird (e) in (d) substituiert, so folgt:

$$\gamma''-\gamma = -2l^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} -$$
$$-\left[l \cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right) \sec\frac{\gamma}{4} - i\right]^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$
$$= -2l^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} - \left[l \cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right) \sec\frac{\gamma}{4} - i\right]^2 \sin 1''.$$
$$.2 \sin\frac{\gamma}{4} \cos\frac{\gamma}{4} \sec\frac{\gamma}{2}$$

und, indem rechts im zweiten Gliede $\sec^2\frac{\gamma}{4}$ herausgehoben wird,

$$\gamma''-\gamma = -2l^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} -$$
$$-\sec^2\frac{\gamma}{4}\left[l \cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right) - i \cos\frac{\gamma}{4}\right]^2 \sin 1''.2 \sin\frac{\gamma}{4} \cos\frac{\gamma}{4} \sec\frac{\gamma}{2}$$
$$= -2l^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} -$$
$$-2 \sin 1'' \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} \sec\frac{\gamma}{2}\left[l \cos\left(\frac{\gamma}{4}-\beta\right) - i \cos\frac{\gamma}{4}\right]$$

somit schließlich

$$\gamma''-\gamma = -2 \sin 1'' \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} \left\{ l^2 + \sec \frac{\gamma}{2} \left[l \cos\left(\frac{\gamma}{4} - \beta\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - i \cos \frac{\gamma}{4} \right]^2 \right\}. \qquad (f)$$

Und diese Formel stimmt völlig mit der Encke'schen überein; nur ist bei Encke für $\gamma \ldots 2\alpha = s$, für $\gamma'' \ldots 2\alpha' = s'$ gebraucht, anderseits fehlt bei Encke der Homogenitätsfactor $\sin 1''$ auf der rechten Seite.

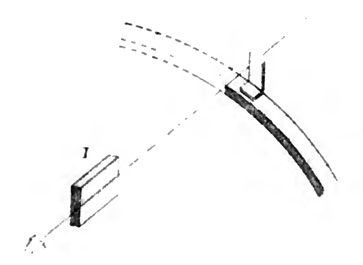


Fig. 4.

Um das Senkrechtstehen des Indexspiegels *I* zur Sextantenebene zu prüfen, hat man bekanntlich eine einfache Methode (neben anderen mit Diopter-Vorrichtungen), die im folgenden besteht. Man stellt die Alhidade etwa in die Mitte des Limbusbogens, bringt das Auge sehr nahe zur Sextantenebene und zum Indexspiegel, blickt in den letzteren und sieht zu, ob das reflectierte Bild der Kreistheilung in die wahre ohne die geringste Abbiegung übergeht. Die spiegelnde Fläche von *I* neigt nach vorwärts oder rückwärts, je nachdem das reflectierte Bild anzusteigen oder sich zu senken scheint. Diese Methode ist ziemlich roh, könnte aber dadurch verfeinert werden, dass man einen kleinen Metallwinkel auf die Kreistheilung stellt (Fig. 4) und dessen Spiegelbild mit dem Originale vergleicht. Ist die verticale Kante dieses Winkels, auf welche es hauptsächlich

ankommt, nicht vollkommen senkrecht zur Limbusfläche, so erscheint es nothwendig, auch das Spiegelbild des um 180° gedrehten Winkels zu betrachten und zum Originale in Beziehung zu bringen. Fig. 5 gibt die Verhältnisse dieser Prüfung. I sei die spiegelnde, nach rechts gekehrte Fläche des Indexspiegels, v_1 die obere linke, nahezu verticale Kante des kleinen Winkels, S die Sextantenebene, N die Normale dazu. Der Winkel IN wurde l genannt; dagegen heiße der Winkel $Nv_1 \ldots \lambda$. Im ersten Versuche liegt das Spiegelbild von v_1 in v_1' (wenn durch geeignete kleine Drehung der Alhidade die untere Kante

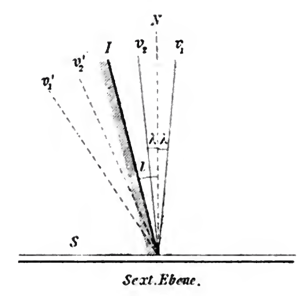


Fig. 5.

des Winkels mit ihrem Spiegelbilde zur Coincidenz gebracht wird), im zweiten nach Umdrehung des Winkels und Überführung von v_1 nach v_2 in v_2'. Man hat dann, wenn man die Abstände $v_1 v_1'$ und $v_2 v_2'$ misst oder schätzt (letzteres, indem man auf der verticalen Fläche des Metallwinkels eine oder mehrere Parallellinien markiert):

$$\left.\begin{aligned} v_1 v_1' &= 2(l+\lambda) \\ v_2 v_2' &= 2(l-\lambda), \end{aligned}\right\} \quad \text{also:} \quad \begin{aligned} l &= \frac{1}{4}(v_1 v_1' + v_2 v_2') \\ \lambda &= \frac{1}{4}(v_1 v_1' - v_2 v_2'). \end{aligned}$$

Eine zweite Methode würde dadurch erhalten werden, dass man den kleinen Metallwinkel in der ersten Lage unverändert lässt, dafür aber den Indexspiegel I um 180° dreht (wobei es

nothwendig wird, die Alhidade durch eine Unterlage zu stützen) und in beiden Lagen des Spiegels I den Winkel mit seinem Bilde vergleicht. Diese zweite Methode, welche durch Fig. 6 illustriert erscheint, setzt aber voraus, dass die Umdrehungsaxe des Indexspiegels genau senkrecht zur Sextantenebene stehe.

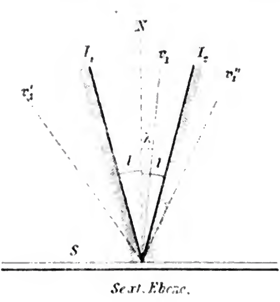


Fig. 6.

Heißt jetzt nach Drehung des Spiegels I um 180° das Spiegelbild von $v_1 \ldots v_1''$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} v_1 v_1' &= 2(l+\lambda) \\ v_1 v_1'' &= 2(l-\lambda) \end{aligned}\right\} \quad \text{also:} \quad \begin{aligned} l &= \frac{1}{4}(v_1 v_1' + v_1 v_1'') \\ \lambda &= \frac{1}{4}(v_1 v_1' - v_1 v_1''). \end{aligned}$$

Da das Senkrechtstehen der Umdrehungsaxe des Indexspiegels von vornherein nicht angenommen werden kann, wird es zweckmäßig sein, zunächst die erste Methode (mit Umdrehung des Winkels) anzuwenden und ihr entsprechend den Spiegel I senkrecht zur Sextantenebene zu stellen. Ist dies geschehen, so gibt die zweite Methode (mit Umdrehung des Indexspiegels) eine Prüfung für die normale Lage der Umdrehungsaxe des Spiegels I.

Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit drei ungleichen Hauptaxen

von

G. Herglotz in München.

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. October 1902.)

Die Helligkeitsschwankungen des am 13. August 1898 entdeckten Planeten (433) Eros wurden zuerst im Februar des Jahres 1901 von Herrn Dr. E. v. Oppolzer[1] beobachtet, nachdem derselbe bereits im December des vorangehenden Jahres gelegentlich photometrischer Messungen auf einen etwaigen Lichtwechsel aufmerksam wurde, die Schwankungen aber damals noch für innerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtung gelegen hielt.

Bald wurden jetzt die Helligkeitsänderungen von anderen Beobachtern ebenfalls bestätigt und ihr Verlauf untersucht. So gab Herr Prof. Deichmüller ihre Periode zu $2^h 37^m$ an, wobei er die Möglichkeit offen ließ, dass die Periode auch ein Multiplum dieser Größe sein könne. Dies haben auch thatsächlich die Beobachtungen der Herren Luizet, Le Cadet, Guillaume[2] dargethan, welche eine Periode von $5^h 16^m$ angeben und zwei nahe congruente Maxima und Minima innerhalb einer solchen finden. Während man im allgemeinen diesen Lichtwechsel durch eine Rotation des Planeten, verbunden mit unregelmäßiger Gestalt oder ungleich vertheilter Reflexionsfähigkeit,

[1] A. N., Nr. 3687.

[2] Comptes rendus, CXXXII, 4. März.

erklärte, nahm Herr Ch. André[1] in Analogie zu den veränderlichen Doppelsternsystemen zwei Körper an, die sich wechselweise verdecken, und leitete aus den Lyoner Beobachtungen einzelne Daten über ihre Gestalt und relative Lage ab. Gegen diese Annahme machte Herr Prof. H. Seeliger[2] geltend, dass man unter Annahme kugelförmiger Gestalt den beiden Körpern sehr verschiedene Albedowerte zusprechen müsse und selbst dann die Thatsache zweier congruenter Maxima und Minima nicht gut erklären könne. Ferner müsse man die beiden Körper ganz ungewöhnlich nahe beisammen annehmen, was also von selbst zur Annahme eines einzigen Körpers von unregelmäßiger Gestalt hinüberleite. Herr Prof. Seeliger hob hervor, dass man sich dabei keineswegs auf eine Rotation um eine fixe Axe beschränken müsse, sondern ähnlich, wie es Gyldén[3] in der Theorie der veränderlichen Sterne gethan hat, eine allgemeine Rotationsbewegung bei drei ungleichen Trägheitsaxen voraussetzen könne, wodurch man einen auch complicierteren Verlauf der Lichtcurve jedenfalls werde darstellen können. Im folgenden ist nun auf Anregung Herrn Prof. H. Seeliger's hin der Versuch gemacht worden, den Lichtwechsel eines frei rotierenden Körpers mit unregelmäßiger Gestalt zu behandeln, jedoch von vornherein unter Beschränkung auf Oberflächen mit durchaus positivem Krümmungsmaße, die sich also nicht selbst beschatten können.

Die Darstellung der Lichtcurve beruht auf der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwickelung:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X_0(\vartheta\varphi)+X_1(\vartheta\varphi)+X_2(\vartheta\varphi)+\ldots,$$

worin Γ die Reflexionsfähigkeit, k^2 das Krümmungsmaß eines Punktes der Oberfläche bezeichnen und, wenn n, A, B, C die Richtungen der Flächennormale und der drei Hauptträgheitsaxen sind, gesetzt ist:

---

[1] Comptes rendus, CXXXIII, 29. Juli, 5. August; A. N., Nr. 3698.

[2] A. N., 3701.

[3] Mathemat. Theorie der veränderl. Sterne. Stockholm, 1881.

$$\cos(nA) = \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$\cos(nB) = \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$\cos(nC) = \cos\vartheta.$$

Dabei ist identisch $X_1 = 0$, wenn $\Gamma =$ Const wird.

Die Lichtintensität setzt sich nun additiv aus den einzelnen Functionen $X_0, X_1, X_2 \ldots$ entsprechenden Formen zusammen. Man kann daher einerseits die Beleuchtung einer willkürlich vorgegebenen Fläche durch Ermittlung der zugehörigen $X_i(\vartheta, \varphi)$ bestimmen, anderseits aber auch so verfahren, dass man die Oberfläche gerade dadurch definiert, dass obige Reihe bloß eine endliche Anzahl von Gliedern enthalten soll und daher das Endresultat bei Mitnahme derselben ein völlig strenges wird. Wählt man z. B. $\Gamma =$ const und setzt:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X_0 + X_2,$$

so enthält dieser Ausdruck $1+5 = 6$ Constante, man hat daher dieselbe Allgemeinheit wie bei Annahme eines dreiaxigen Ellipsoides, dessen Hauptaxen nicht mit den geometrischen Axen zusammenfallen, kann aber für diese Fläche die Beleuchtung exact bestimmen.

Die Bewegung eines frei[1] rotierenden Körpers hängt nun bekanntlich von zwei der Zeit proportional veränderlichen Winkeln: $N_1 t$, $N_2 t$ ab, von denen der erste im wesentlichen die Präcessionsbewegung der Hauptaxe C um die Axe der invariablen Ebene, der zweite aber die Rotation des Körpers um die Hauptaxe C selbst bestimmt. Entgegen dem Falle der Erdbewegung ist hier N_1 groß gegen N_2, daher man sich die Bewegung so vorstellen kann, dass die Rotationsaxe des Körpers im Raume fix ist, nämlich normal zur invariablen Ebene, während sich ihre Lage im Inneren des Körpers fortwährend ändert. Mit Rücksicht auf dies Verhältnis zwischen N_1, N_2 wird sich also die Lichtcurve in der Form darstellen:

---

[1] Es könnte freilich noch die Anziehung der Sonne diese Bewegung erheblich modificieren, worauf zurückzukommen sich vielleicht später einmal Gelegenheit bieten wird.

$$L = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos N_1 t + C_2 \cos 2 N_2 t + \ldots$$
$$+ S_1 \sin N_1 t + S_2 \sin 2 N_1 t + \ldots$$

wo C_i S_i noch von $N_2 t$ und den mittleren Längen der Sonne und des Planeten abhängen, also langsam veränderlich sind. Dabei bricht diese Reihe mit $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} n N_1 t$ ab, wenn die Reihe für $\frac{\Gamma}{k^2}$ bei $X^{(n)}(\vartheta\varphi)$ abbricht. Wegen des Verschwindens von X_1 bei constantem Γ folgt hieraus, dass man selbst im einfachsten Falle, nämlich bei Beschränkung auf X^0 X^2, zwei Maxima und Minima innerhalb einer Periode $\tau_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ erhalten wird. Man erkennt bereits hier einen einfachen Fall, in dem der Lichtwechsel zeitweilig aussetzen wird, wenn nämlich der Körper bezüglich irgendeiner Axe symmetrisch ist und die Axe der invariablen Ebene bei ihrer Bewegung im Inneren des Körpers einmal mit der ersteren zusammenfällt. Es ergibt sich in diesem Falle, dass die Lichtcurve, je flacher sie wird, desto mehr sich einer einfachen Sinuscurve mit einem Maximum und einem Minimum nähert, wie viel Glieder man in $\frac{\Gamma}{k^2}$ auch genommen hat. Zur Zeit des größten Lichtwechsels aber und bei der Annahme

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X^0 + X^2$$

hat sie nahe die Gestalt einer Sinuscurve mit zwei Maxima und zwei Minima innerhalb einer Periode, und dies wird auch noch der Fall sein, wenn Γ schwach veränderlich, also X^1 klein ist.

Im besonderen lässt sich durch Symmetrie um die mittlere Trägheitsaxe ein Wegfallen des Lichtwechsels für längere Zeit erzeugen unter Hinzuziehung der weiteren Annahme, dass diese Axe zur Zeit $t = 0$ nahe senkrecht zur invariablen Ebene stand. Ist nämlich ζ der Winkel der Normale dieser Ebene gegen die mittlere Trägheitsaxe und ζ_0 sein Wert für $t = 0$, so oscilliert ζ zwischen ζ_0 und $\pi - \zeta_0$ hin und her und hat ein sehr

rasch ansteigendes und abfallendes Maximum $= \frac{\pi}{2}$. Es enthält nun ferner C_i und S_i je den Factor $\sin^i \zeta$, wird also nur beim Durchgange des Winkels ζ durch $\frac{\pi}{2}$ bemerkbar.

Die in VI abgeleiteten Formeln geben für ζ folgende Näherungswerte: Sind N_1, N_2, λ, $0 < S < \frac{\pi}{2}$ willkürliche Constanten, so ist $\tau_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ die kurze Periode des Lichtwechsels, $\tau_2 = \frac{\pi}{N_2}$ die Zeit von einem Auftreten desselben bis zum nächsten und die Trägheitsmomente:

$$\frac{C-A}{C} = \frac{2N_2\lambda}{\sin 2S \left\{ N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} + N_2\lambda \operatorname{tg} S \right\}}$$

$$\frac{C-B}{C} = \frac{N_2\lambda \operatorname{ctg} S}{N_2 - \frac{2N_2 S}{\pi}},$$

und für ζ_0 und ζ hat man:

$$\sin \zeta_0 = 4e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} \sin S \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\zeta = e^{-N_2\lambda t} \sqrt{\frac{1+e^{4N_2\lambda t - 2\pi\lambda}}{1+e^{4N_2\lambda t - 6\pi\lambda}}}.$$

Setzt man z. B. $N_2\lambda = 0{\cdot}07$, $S = \frac{\pi}{4}$, $N_1 = 30$, also $\tau_1 = 5^h02$, so ist:

für $t =$ 0 Tage	$\sin \zeta = 1{\cdot}00$
10	0·80
20	0·46
30	0·24
40	0·14
50	0·06

Dabei ist für $\lambda = 2\frac{1}{3}$ sowohl wie für $\lambda = 3\frac{1}{2}$:

$$\frac{C-A}{C} = 0{\cdot}00466 \qquad \frac{C-B}{C} = 0{\cdot}00233$$

und für

$$\lambda = 2\frac{1}{3} \qquad \tau_2 = 104^d73 \qquad \zeta_0 = 4°\,9'$$

$$\lambda = 3\frac{1}{2} \qquad \tau_2 = 157.08 \qquad \zeta_0 = \quad 40'$$

Was nun die umgekehrte Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Rotationselemente aus der beobachteten Lichtcurve angeht, so dürfte hiezu der Umstand eine Handhabe bieten, dass für

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X^{(0)} + X^{(2)},$$

also die Lichtcurve:

$$L = \frac{1}{2}C_0 + C_1 \cos N_1 t + C_2 \cos 2 N_1 t$$
$$+ S_1 \sin N_2 t + S_2 \sin 2 N_1 t$$

man erhält:

$$C_1^2 + S_1^2 = \varphi_1 \psi_1 \qquad C_2^2 + S_2^2 = \varphi_2 \psi_2, \tag{z}$$

wo $\varphi_1 \varphi_2$ bloß von der Lage der invariablen Ebene abhängen, und zwar ganze Functionen der Richtungscosinus ihrer Normalen sind, deren Coefficienten sich aus dem Sonnen- und Planetenort sofort numerisch bestimmen lassen, während $\psi_1 \psi_2$ periodische Functionen des Winkels $N_2 t$ sind, deren Coefficienten noch die übrigen Unbekannten enthalten.

Hätte man nun beobachtet, dass der Lichtwechsel immer nach der Zeit τ_2 am stärksten wird, so würde man unter der Annahme, dass er durch die eben geschilderte Bewegung zustande kommt, sofort $N_2 = \frac{\pi}{\tau_2}$ kennen. Da nun:

$$\psi_1\left(t + \frac{2\pi}{N_2}\right) = \psi_1(t) \qquad \psi_2\left(t + \frac{2\pi}{N_2}\right) = \psi_2(t)$$

ist und man einerseits $C_1^2 + S_1^2$, $C_2^2 + S_2^2$ durch numerische Integration aus der beobachteten Lichtcurve für jede Zeit bestimmen kann, anderseits aber für dieselben Zeiten $\varphi_1\ \varphi_2$ als ganze Functionen der Richtungscosinus der Axe der invariablen

Ebene bestimmen kann, deren Coefficienten bekannte Zahlen sind, so erkennt man leicht, dass man durch Division der entsprechenden Gleichungen α) für t und $t+\frac{2\pi}{N_2}$ zwei Gleichungen höheren Grades zwischen den drei Richtungscosinussen erhält. Durch verschiedene Wahl des t lassen sich beliebig viele solche Gleichungen bilden, aus denen man dann die Richtungscosinusse rational ableiten kann.

Ist dies geschehen, so kennt man $\psi_1\psi_2$ oder die in IV auftretenden PQ für jeden Zeitpunkt, daher auch die numerischen Coefficienten der trigonometrischen Entwickelung dieser Größen nach den Vielfachen von $N_2 t$. Die Vergleichung dieser Werte mit den analytischen Ausdrücken derselben wird dann die Gleichungen zur Bestimmung der übrigen Elemente liefern.

Zum Schlusse möchte ich noch meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. H. Seeliger, dem ich mich tief verpflichtet fühle, meinen aufrichtigsten Dank aussprechen dürfen.

I.

Rücksichtlich der Beleuchtungsverhältnisse treten die geschlossenen Flächen in zwei Gruppen auseinander, deren Behandlung eine wesentlich verschiedene sein muss. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass die Fläche sich zum Theile selbst beschattet, und zwar wird dies dann eintreten, wenn die Fläche nicht überall convex nach außen hin ist. Es soll nun im folgenden der weitaus einfachere Fall der Beleuchtung eines Körpers mit durchaus convexer, im übrigen beliebig gestalteter Oberfläche behandelt werden, wenn Lichtquelle und Auge in die Unendlichkeit rücken. Es sei:

$$\Gamma . f(\cos i, \cos \varepsilon) do$$

die Lichtmenge, die ein Oberflächenelement do unter dem Winkel ε ausstrahlt, wenn es selbst unter dem Winkel i beleuchtet wird, Γ sei eine Function des Ortes auf der Fläche. Dann ist die in das Auge gelangende Lichtmenge

$$H = \int \Gamma f(i,\varepsilon) do,$$

wobei die Integration über jenen Theil der Fläche zu erstrecken ist, in dem die nach außen gezogenen Normalen mit den Richtungen Körper—Lichtquelle und Körper—Auge spitze Winkel bilden. Diese Integrationsgrenzen, die hier durch Aufsuchung der beiden Tangentialcylinder zu bestimmen wären, kann man einfacher gestalten, wenn man die Fläche sphärisch abbildet, d. h. eine Einheitskugel construiert, und diejenigen Punkte der Kugel und Fläche einander zuordnet, welche parallele Normalen besitzen. Im Falle einer convexen Fläche wird diese Abbildung die Kugel einfach überdecken, während sonst das Bild der parabolischen Curve gleichsam eine Falte der Abbildung liefern würde, derart, dass die Kugel auf der einen Seite derselben mindestens zweifach überdeckt wäre. Die Abbildung des Integrationsgebietes auf der Fläche aber wird ein sphärisches Zweieck auf der Kugel, begrenzt von zwei größten Kreisen, deren Axen den Richtungen Kugel—Auge und Kugel—Lichtquelle beziehungsweise parallel sind, und i, ε werden die Winkel, welche der Kugelradius mit diesen zwei Richtungen bildet. Ist ferner $d\omega$ ein Element der Kugelfläche, so wird nach der Gauss'schen Definition der Krümmung k^2:

$$do = \frac{1}{k^2}\, d\omega,$$

somit

$$H = \int \frac{\Gamma}{k^2}\, d\omega \,.\, f(i, \varepsilon), \tag{1}$$

d. h. man kann die Fläche ersetzen durch eine Einheitskugel, für die das Beleuchtungsgesetz aber

$$\frac{\Gamma}{k^2}\, f(\cos i \cos \varepsilon)\, d\omega$$

ist. Es ergeben also alle jene convexen Flächen, für die das Krümmungsmaß dieselbe Function der Richtungscosinusse des bezüglichen Flächenpunktes ist, genau dieselben Beleuchtungsverhältnisse. Solcher Flächen gibt es aber unendlich viele, denn die Bestimmung derjenigen, die zu einer bestimmten Function k^2 gehören, kann leicht abhängig gemacht werden von einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Variabeln.

Sind nun $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ die Richtungscosinus der Normalen in irgendeinem Punkte der Fläche, so soll sein:

$$\cos(nx) = \sin\Theta\cos\varphi \quad \cos(ny) = \sin\Theta\sin\varphi \quad \cos(nz) = \cos\Theta$$

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_\nu (a_\nu^n \cos\nu\varphi + C_\nu^n \sin\nu\varphi) P_\nu^n(\cos\Theta)$$

$$P_\nu^n(\cos\Theta) = (-1)^{n+\nu}\sin^\nu\Theta \Big\{ \cos^{n-\nu}\Theta - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-\nu-2}\Theta + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-\nu-4}\Theta \ldots \Big\} \qquad 2)$$

(P_ν^n ist hier gleich dem von Heine gebrauchten Ausdruck mal $i^{\nu+2n}$.)

Hiebei sind die $a_\nu^n b_\nu^n$ bestimmt durch folgende über die ganze Oberfläche des beleuchteten Körpers zu erstreckende Integrale:[1]

$$\left.\begin{aligned} a_\nu^n &= \frac{2n+1}{2\pi}\cdot\frac{(1.3..2n-1)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}\int \Gamma P_\nu^n(\cos\Theta)\cos\nu\varphi\, do \\ b_\nu^n &= \frac{2n+1}{2\pi}\cdot\frac{(1.3..2n-1)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}\int \Gamma P_\nu^n(\cos\Theta)\sin\nu\varphi\, do \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Man hat speciell für $n = 0, 1, 2$ folgende Werte:

$$a_0^0 = \frac{1}{4\pi}\int\Gamma\, do \qquad a_0^1 = -\frac{3}{4\pi}\int\Gamma\cos(nz)\, do$$

$$a_1^1 = \frac{3}{4\pi}\int\Gamma\cos(nx)\, do$$

$$a_0^2 = \frac{45}{16\pi}\int\Gamma\left(\cos^2(nz) - \frac{1}{3}\right) do$$

$$a_1^2 = -\frac{15}{4\pi}\int\Gamma\cos(nx)\cos(nz)\, do \qquad 3a)$$

$$a_2^2 = \frac{15}{16\pi}\int\Gamma(\cos^2(nx) - \cos^2(ny))\, do$$

$$b_1^1 = \frac{3}{4\pi}\int\Gamma\cos(ny)\, do \qquad b_1^2 = -\frac{15}{4\pi}\int\Gamma\cos(ny)\cos(nz)\, do$$

$$b_2^2 = \frac{15}{8\pi}\int\Gamma\cos(nx)\cos(ny)\, do.$$

[1] Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, I, S. 328.

Man sieht also, dass, im Falle $\Gamma = \text{const}$, $a_0^1 = a_1^1 = b_1^1 = 0$ wird. Dies tritt somit stets ein, wenn die Oberfläche in allen Punkten gleich stark reflectiert.

Es werden ferner die $a_\nu^n b_\nu^n$ stets der Bedingung genügen müssen, dass der Ausdruck:

$$\Phi = \sum_n \sum_\nu (a_\nu^n \cos\nu\varphi + b_\nu^n \sin\nu\varphi) P_\nu^n(\cos\Theta)$$

durchgehends positiv bleibt.

Die Frage nach der Beleuchtung der gegebenen Oberfläche ist also jetzt darauf zurückgeführt, die Beleuchtung einer Kugel zu finden, auf der das Beleuchtungsgesetz gilt:

$$\Phi . f(i, \varepsilon) d\omega$$

oder zu bestimmen:

$$H = \int \Phi . f(i, \varepsilon) d\omega,$$

wo die Integration über ein von zwei größten Kreisen begrenztes Zweieck zu erstrecken ist. Diese lässt sich leicht ausführen, wenn man vorerst den Ausdruck von Φ auf ein Coordinatensystem transformiert, dessen Z-Axe die Durchschnittslinie der genannten zwei Kugelkreise ist. Hiezu ist nun eine Hilfsformel nützlich, die zunächst abgeleitet werden soll.

II.

Bezeichnet man mit l, p die Länge und Poldistanz eines Punktes der Kugel, so handelt es sich darum, den Ausdruck:

$$X_n(p, l) = \sum_0^n (a_\nu^n \cos\nu l + b_\nu^n \sin\nu l) . P_\nu^n(\cos p) \qquad 1)$$

so zu transformieren, dass darin die Coordinaten $l'p'$ desselben Punktes, bezogen auf ein anderes Coordinatensystem, auftreten. Da die Definition der allgemeinen n^{ten} Kugelfunction unabhängig vom Coordinatensystem ist, so folgt, dass X_n in einen ebensolchen Ausdruck übergehen wird:

$$X_n'(p, l) = \sum_0^n (\bar{a}_\nu^n \cos\nu l' + \bar{b}_\nu^n \sin\nu l') P_\nu^n(\cos p'). \qquad 1a)$$

Die Bestimmung der $\overline{a_\nu^n}\ \overline{b_\nu^n}$ als lineare Functionen der $a_\nu^n\ b_\nu^n$ wird erleichtert durch eine kleine Umformung von X_n, indem man statt p, l einführt:

$$\xi = \operatorname{ctg}\frac{p}{2}e^{li} \qquad \eta = \operatorname{ctg}\frac{p}{2}e^{-li}. \tag{2}$$

Man leitet nämlich aus der Gleichung:

$$\pi . P_\nu^n(\cos p) =$$
$$= i^{2n+\nu}\frac{2^n\Pi(n+\nu)\Pi(n-\nu)}{\Pi(2n)}\int_0^\pi(\cos p+i\sin p\cos\varphi)^n\cos\nu\varphi\, d\varphi$$

durch die Zerlegung:

$$\cos p+i\sin p\cos\varphi = \sin^2\frac{p}{2}\left(ie^{\varphi i}+\operatorname{ctg}\frac{p}{2}\right)\left(ie^{-\varphi i}+\operatorname{ctg}\frac{p}{2}\right)$$

und nachherige Entwickelung der n^{ten} Potenz leicht ab, dass

$$P_\nu^n(\cos p) =$$
$$= \frac{2^n\Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)}\sin^{2n-\nu}\frac{p}{2}\cos^\nu\frac{p}{2}F\left(-n, -(n-\nu), \nu+1, -\operatorname{ctg}^2\frac{p}{2}\right)$$
$$= (-1)^{n-\nu}\frac{2^n\Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)}\sin^\nu\frac{p}{2}\cos^{2n-\nu}\frac{p}{2}F\left(-n, -(n-\nu), \nu+1-\operatorname{tg}^2\frac{p}{2}\right). \tag{3}$$

Man kann daher $X_n(p, l)$ in die Form setzen:

$$X_n(pl) =$$
$$= \frac{1}{(1+\xi n)^n}\sum_0^n(A_\nu^n\xi^\nu+B_\nu^n\eta^\nu)F(-n, -(n-\nu), \nu+1, -\xi\eta), \tag{4}$$

wo aber

$$A_\nu^n = 2^n\frac{\Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)}\,\frac{a_\nu^n-ib_\nu^n}{2}$$
$$B_\nu^n = 2^n\frac{\Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)}\,\frac{a_\nu^n+ib_\nu^n}{2} \tag{4a}$$

gesetzt ist.

Es sei nun die Lage des neuen Systems $X' Y' Z'$ gegen das frühere XYZ durch die Euler'schen Winkel $\varphi \psi \vartheta$ der Figur gemäß bestimmt. Es sind dann die verschiedenen Richtungs-cosinus des Schemas:

	X'	Y'	Z'
X	a_1	a_2	a_3
Y	b_1	b_2	b_3
Z	c_1	c_2	c_3

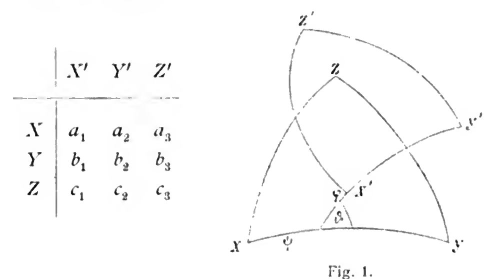


Fig. 1.

gegeben durch:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\vartheta \\
a_2 &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\vartheta \\
a_3 &= \sin\psi \sin\vartheta \\
b_1 &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\vartheta \\
b_2 &= -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\vartheta \\
b_3 &= -\cos\psi \sin\vartheta \\
c_1 &= \sin\varphi \sin\vartheta \\
c_2 &= \cos\varphi \sin\vartheta \\
c_3 &= \cos\vartheta
\end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man nun:

$$X = \sin p \cos l \qquad Y = \sin p \sin l \qquad Z = \cos p$$
$$X' = \sin p' \cos l' \qquad Y' = \sin p' \sin l' \qquad Z' = \cos p',$$

so ergibt sich mit Hilfe der zwischen XYZ und $X'Y'Z'$ obigem Schema gemäß bestehenden Gleichungen, dass die Größen:

$$\xi = \operatorname{ctg}\frac{p}{2} e^{li} \qquad \eta = \operatorname{ctg}\frac{p}{2} e^{-li}$$

und

$$\xi' = \operatorname{ctg}\frac{p'}{2} e^{l'i} \qquad \eta' = \operatorname{ctg}\frac{p'}{2} e^{-l'i}$$

verknüpft sind miteinander durch die einfache Beziehung:

$$\xi = \frac{\alpha\xi' + \beta}{\gamma\xi' + \delta} \qquad \eta = \frac{\alpha_0\eta' + \beta_0}{\gamma_0\eta' + \delta_0} \text{ [1]} \tag{6}$$

wenn man setzt:

$$\alpha = \cos\frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \qquad \gamma = i\sin\frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}$$

$$\beta = i\sin\frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \qquad \delta = \cos\frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}}. \tag{6a}$$

und mit $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0$ die conjugierten Größen bezeichnet.

Man sieht, dass:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1$$

und dass:

$$\gamma = -\beta_0 \qquad \delta = \alpha_0$$

ist.

Diese Werte von ξ, η hat man also einfach in $X_n(pl)$ einzusetzen, und es muss sich die Identität ergeben:

$$\sum_\nu \frac{A_\nu\xi^\nu + B_\nu\eta^\nu}{(1+\xi\eta)^n} F_\nu(-\xi\eta) = \sum_\mu \frac{\overline{A}_\mu\xi'^\mu + \overline{B}_\mu\eta'^\mu}{(1+\xi'\eta')^n} F_\mu(-\xi'\eta')$$

für:

$$\xi = \frac{\alpha\xi' + \beta}{-\beta_0\xi' + \alpha_0} \qquad \eta = \frac{\alpha_0\eta' + \beta_0}{-\beta\eta' + \alpha},$$

wenn man zur Kürze setzt:

$$F_\nu(-\xi\eta) = F(-n, -n+\nu, \nu+1 -\xi\eta).$$

Da diese Gleichung identisch für ξ', η' bestehen muss, so kann man $\eta' = 0$ setzen und ersieht hieraus, dass:

$$\overline{A}_\mu = \sum_0^n (\rho_\nu A_\nu + \sigma_\nu B_\nu) \tag{7}$$

[1] Näheres über diese Parameter $\alpha\beta\gamma\delta$ ist enthalten in: Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, 1. Heft, S. 21.

sein wird, wo ρ_ν und σ_ν die Coefficienten von ξ'^{μ} in den Entwickelungen von:

$$\frac{\xi'^{\nu}}{(1+\xi\eta)^{n}}F_{\nu}(-\xi\eta),\quad \text{beziehungsweise}\quad \frac{\eta^{\nu}}{(1+\xi\eta)}F_{\nu}(-\xi\eta)$$

für:

$$\xi = \frac{\alpha\xi'+\beta}{-\beta_0\xi'+\alpha_0}\qquad \eta = \frac{\beta_0}{\alpha}$$

sind.

Setzt man $x = \frac{\beta}{\alpha}$, $y = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ und schreibt ξ statt ξ', so hat man also nach ξ Potenzen zu entwickeln:

$$\varphi = (\xi+x)^{\nu}.(\xi-y)^{n-\nu}F\left(-n\;\; -n+\nu\;\; \nu+1\;\; \frac{\xi+x}{\xi-y}\right)$$

$$\psi = (\xi-y)^{\nu}.(\xi-y)^{n-\nu}F\left(-n\;\; -n+\nu\;\; \nu+1\;\; \frac{\xi+x}{\xi-y}\right).$$

Um mit ψ zu beginnen, so ist zunächst:

$$\psi = \sum_{0}^{n-\nu}{}_{\tau}\frac{\Pi(n)\Pi(\nu)\Pi(n-\nu)}{\Pi(\tau)\Pi(n-\tau)\Pi(n-\nu-\tau)\Pi(\nu+\tau)}(\xi-y)^{n-\tau}(\xi+x)^{\tau},$$

also der Coefficient von ξ^{μ}:

$$(\psi)_{\mu} = (-y)^{n-\mu}\Pi(n)\Pi(\nu)\Pi(n-\nu)\sum_{0}^{n-\nu}{}_{\tau}\sum_{\sigma_1}^{\sigma_2}{}_{\sigma}\frac{\left(-\frac{x}{y}\right)^{\sigma}}{\Pi(\sigma)\Pi(\tau-\sigma)\Pi(n-\mu-\sigma)\Pi(\mu+\sigma-\tau)\Pi(n-\nu-\tau)\Pi(\nu+\tau)},$$

worin:

$\sigma_1 = 0$ für $\tau < \mu$ $\qquad \sigma_2 =$ die kleinere der Zahlen:

$\sigma_1 = \tau - \mu$ $\quad \tau > \mu$ $\qquad \tau$ und $n - \mu$.

Vertauscht man hier die Summationsordnung bezüglich τ und σ und bemerkt die beiden Gleichungen:

$$\sum_{\sigma}^{\mu+\sigma \mid n-\nu} \frac{1}{\Pi(\tau-\sigma)\,\Pi(n-\sigma-\tau)\,\Pi(\mu+\sigma-\tau)\,\Pi(\nu+\tau)} =$$

$$= \frac{\Pi(n+\mu)}{\Pi(n-\nu-\sigma)\,\Pi(n)\,\Pi(\mu)\,\Pi(\mu+\nu+\sigma)} \qquad 8)$$

$$\sum_{0}^{n-\nu \mid n-\mu} \frac{\left(-\frac{x}{y}\right)^{\sigma}}{\Pi(\sigma)\,\Pi(n-\nu-\sigma)\,\Pi(n-\mu-\sigma)\,\Pi(\mu+\nu+\sigma)} =$$

$$= \frac{F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, -\frac{x}{y}\right)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu+\nu)},$$

wo von den beiden oberen Summationsgrenzen stets die kleinere zu nehmen ist, so folgt:

$$(\psi)_\mu = \frac{(-y)^{n-\mu}\,\Pi(\nu)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(\mu+\nu)\,\Pi(\mu)\,\Pi(n-\mu)}\,F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, -\frac{x}{y}\right). \qquad 9)$$

Was nun φ angeht, so bemerke man, dass φ und ψ ineinander übergehen, wenn man $-y$, $-x$ statt x, y schreibt, also:

$$(\varphi)_\mu = \frac{(x)^{n-\mu}\,\Pi(\nu)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(\mu+\nu)\,\Pi(\mu)\,\Pi(n-\mu)}\,F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, -\frac{y}{x}\right). \qquad 10)$$

Damit ist aber sofort:

$$\frac{\Pi(n+\mu)}{\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu)}\,\bar{A}_\mu^n = (-1)^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-\mu} (\alpha\beta_0)^n \sum_0^n A_\nu^n \frac{\Pi(\nu)}{\Pi(\mu+\nu)} \left(-\frac{\alpha}{\beta_0}\right)^\nu F\left(-n+\nu,\, -n+\mu,\, \nu+\mu+1,\, -\frac{\alpha\alpha_0}{\beta\beta_0}\right)$$
$$+(-1)^\mu \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^{n-\mu} (\alpha\beta_0)^n \sum_0^n B_\nu^n \frac{\Pi(\nu)}{\Pi(\mu+\nu)} \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^\nu F\left(-n+\nu,\, -n+\mu,\, \nu+\mu+1,\, -\frac{\beta\beta_0}{\alpha\alpha_0}\right) \qquad 11)$$

und offenbar wird $\bar{B}_\mu^n$ das conjugierte dieses Ausdruckes sein.

Setzt man nun weiter:

$$\bar{a}_\mu^n - i\bar{b}_\mu^n = 2^{n+1}\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(2n)\,\Pi(\mu)}\,\bar{A}_\mu^n, \qquad \bar{a}_\mu^n + i\bar{b}_\mu^n = 2^{n+1}\frac{\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(2n)\,\Pi(\mu)}\,\bar{B}_\mu^n, \qquad 12a)$$

so wird:

$$X_n = \sum_\mu (\bar{a}_\mu^n \cos\mu l' + \bar{b}_\mu^n \sin\mu l')\,P_\mu^n(\cos p'). \qquad 12)$$

Man kann daher, wenn man für $\alpha\beta$ ihre Werte einsetzt und der einfacheren Darstellung halber die Bedeutung von ψ und φ ein wenig abändert, folgendes Resultat aussprechen:

I. Führt man in der Function:

$$X_n(l, p) = \sum (a_\nu^n \cos\nu l + b_\nu^n \sin\nu l)\,P_\nu^n(\cos p)$$

neue Coordinaten $l'p'$ ein, die sich auf ein System $X'Y'Z'$ beziehen, dessen Lage gegen das frühere durch $\varphi\psi\vartheta$ derart bestimmt wird, dass in der Figur:

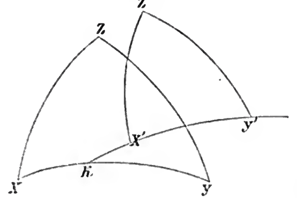


Fig. 2.

$$\text{arc } XK = \psi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc } KX' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sphericalangle\, X'KY = \vartheta$$

ist, so geht $X_n(l, p)$ über in den Ausdruck:

$$\overline{X}_n = \sum_0^n{}' \left(\overline{a_\mu^n} \cos \mu(l'+\varphi) + \overline{b_\mu^n} \sin \mu(l'+\varphi)\right) P_\mu^n (\cos p'),$$

wobei Σ' bedeutet, dass für $\mu = 0$ die Hälfte des Summanden zu nehmen ist, und wenn man noch setzt:

$$a_\nu^n = c_\nu^n \cos \gamma_\nu^n \qquad b_\nu^n = c_\nu^n \sin \gamma_\nu^n,$$

so sind die $\overline{a_\mu^n}\, \overline{b_\mu^n}$ dann gegeben durch

$$\overline{a_\mu^n} = \sum_0^n{}' c_\nu^n \cos (\nu\psi - \gamma_\nu^n)\, U_{\nu\mu}^n (\vartheta)$$

$$-\overline{b_\mu^n} = \sum_0^n{}' c_\nu^n \sin (\nu\psi - \gamma_\nu^n)\, V_{\nu\mu}^n (\vartheta). \qquad 13)$$

Dabei sind unter $U_{\nu\mu}^n\, V_{\nu\mu}^n$ folgende Functionen von $x = \cos \vartheta$ zu verstehen:

$$U_{\nu\mu}^n = \frac{2^{-n}\, \Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\mu)\, \Pi(\mu+\nu)} \left\{(-1)^n Z_{\nu\mu}^n(x) + (-1)^{\mu+\nu} Z_{\nu\mu}^n(-x)\right\}$$

$$V_{\nu\mu}^n = \frac{2^{-n}\, \Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\mu)\, \Pi(\mu+\nu)} \left\{(-1)^n Z_{\nu\mu}^n(x) - (-1)^{\mu+\nu} Z_{\nu\mu}^n(-x)\right\}. \qquad 14)$$

$$Z_{\nu\mu}^n(x) =$$

$$= (1-x)^{n-\frac{\mu+\nu}{2}} (1+x)^{\frac{\mu+\nu}{2}} F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, \frac{x+1}{x-1}\right). \qquad 15)$$

Dieser Ausdruck von $Z^n_{\nu\mu}$ kann noch durch einen vielfachen Differentialquotienten ersetzt werden, den man erhält, indem man beachtet, dass $Z^n_{\nu\mu}(x)$ ein Zweig der Riemann'schen P-Function:

$$P\begin{Bmatrix} -1 & +1 & \infty & \\ \frac{\mu+\nu}{2} & \frac{\mu-\nu}{2} & -n & x \\ -\frac{\mu+\nu}{2} & -\frac{\mu-\nu}{2} & n+1 & \end{Bmatrix} =$$

$$= P\begin{Bmatrix} \frac{\mu-\nu}{2} & \frac{\mu+\nu}{2} & n+1 & \frac{1-x}{2} \\ -\frac{\mu-\nu}{2} & -\frac{\mu+\nu}{2} & -n & \end{Bmatrix}$$

ist, welcher, $\nu > \mu$ vorausgesetzt, mit $(1-x)^{\frac{\mu-\nu}{2}}(1+x)^{\frac{\mu+\nu}{2}}$ multipliciert eine ganze Function vom Grade $n+\mu$ wird. Die Darstellung der zweiten P-Function durch hypergeometrische Reihen[1] gibt dann:

$$Z^n_{\nu\mu} = \text{Const}\,(1-x)^{-\frac{\mu-\nu}{2}}(1+x)^{-\frac{\mu+\nu}{2}}\,F\left(-n+\nu, n+\nu+1, \nu-\mu+1, \frac{1-x}{2}\right)$$

und hierauf, die Jacobi'sche[2] Formel angewandt, nach Bestimmung der Constanten C:

$$Z^n_{\nu\mu} = \frac{\Pi(\nu+\mu)}{\Pi(n+\mu)}(1-x)^{\frac{\mu-\nu}{2}}(1+x)^{-\frac{\mu+\nu}{2}}\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}(1-x)^{n-\mu}(1+x)^{n+\mu} \qquad 15a)$$

$$\nu > \mu$$

Der späteren Anwendung wegen bemerke man ferner noch folgende Formeln, in denen $P^n_\nu(x)$ die früher definierte Bedeutung hat:

---

[1] Riemann, Werke, S. 82.

[2] Crelle, Journal, Bd. 56. Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

$$U^{n}_{\nu 0} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{\Pi(2n)}{\Pi^{2}(n)} P^{n}_{\nu}(x) \qquad V^{n}_{\nu 0}(x) = 0$$

$$P^{n}_{0} = (-2)^{n} \frac{\Pi^{2}(n)}{\Pi(2n)} P_{n}(x)$$

$$U^{n}_{\nu\mu}(-x) = (-1)^{n+\nu+\mu} U^{n}_{\nu\mu}(x) \qquad V^{n}_{\nu\mu}(-x) = -(-1)^{n+\nu+\mu} V^{n}_{\nu\mu}(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} U^{n}_{\nu\mu}(1) = 0 \\ V^{n}_{\nu\mu}(1) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{wenn} \\ \nu \neq \mu\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} = (-1)^{\nu} \\ = (-1)^{\nu} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{wenn} \\ \nu = \mu \neq 0\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} = 2 \\ = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{wenn} \\ \nu = \mu = 0\end{array}$$

Obiger Ausdruck von $Z^{n}_{\nu\mu}$ gestattet eine leichte Bildung der $U^{n}_{\nu\mu}\, V^{n}_{\nu\mu}$. Die Werte der ersten 28 Functionen sind in folgender Tabelle enthalten:

n	μ	$\nu = 0$		$\nu = 1$		$\nu = 2$	
		$U^{n}_{\nu\mu}$	$V^{n}_{\nu\mu}$	$U^{n}_{\nu\mu}$	$V^{n}_{\nu\mu}$	$U^{n}_{\nu\mu}$	$V^{n}_{\nu\mu}$
0	0	2	0	—	—	—	—
1	0	$2x$	0	$-2\sqrt{1-x^2}$	0	—	—
1	1	$-\sqrt{1-x^2}$	0	$-x$	-1	—	—
2	0	$(3x^2-1)$	0	$-3x\sqrt{1-x^2}$	0	$3(1-x^2)$	0
2	1	$-2x\sqrt{1-x^2}$	0	$1-2x^2$	$-x$	$2x\sqrt{1-x^2}$	$2\sqrt{1-x^2}$
2	2	$\frac{1}{2}(1-x^2)$	0	$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}(1+x^2)$	x

Endlich mag zum Schlusse noch folgendes Additionstheorem der $U^{n}_{\nu\mu}\, V^{n}_{\nu\mu}$ Platz finden, das für das spätere dienlich sein wird und dessen Beweis der Kürze halber unterdrückt werden mag:

II. Bezeichnet man mit ABC die Winkel, mit abc die Seiten irgendeines sphärischen Dreieckes, mit $\alpha\beta$ aber ganz willkürliche Größen, so gilt folgende Gleichung:

$$U^n_{\nu\mu}(\cos C)\cos(\mu a+\alpha)\cos(\nu b+\beta)+$$
$$+V^n_{\nu\mu}(\cos C)\sin(\mu a+\alpha)\sin(\nu b+\beta)$$

$$=(-1)^{n+\nu+\mu}\sum_0^n{}_\rho'(-1)^\rho\{U^n_{\nu\rho}(\cos A)U^n_{\rho\mu}(\cos B)\cos\alpha\cos\beta-$$
$$-V^n_{\nu\rho}(\cos B)V^n_{\rho\mu}(\cos B)\sin\alpha\sin\beta\}\cos\rho c$$

16)

$$-(-1)^{n+\nu+\mu}\sum_0^n{}_\rho'(-1)^\rho\{U^n_{\nu\rho}(\cos A)V^n_{\rho\mu}(\cos B)\sin\alpha\cos\beta+$$
$$+V^n_{\nu\rho}(\cos A)U^n_{\rho\mu}(\cos B)\cos\alpha\sin\beta\}\sin\rho c.$$

Durch diese beiden Hilfssätze I und II sind die später nöthigen Entwickelungen bereits jetzt geleistet, und es erübrigt zur Erledigung der Vorbereitungen noch die Ausdrücke für die Bewegung eines frei rotierenden Körpers mit drei ungleichen Hauptträgheitsaxen aufzustellen. Dieselben sind unter anderem im 2. Bande von Halphén's Traité des fonctions elliptiques in sehr ausführlicher Weise entwickelt, für die praktische Ausrechnung empfiehlt es sich aber, ein von dem dort gegebenen speciellen System etwas abweichendes anzuwenden.

III.

Es habe der betrachtete Körper die durch seinen Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxen ABC, die ihrer Größe nach der Bedingung genügen:

$$A < B < C.$$

Rotiert dieser Körper frei um seinen Schwerpunkt, so wird seine lebendige Kraft h und seine Flächengeschwindigkeit G constant bleiben. Wählt man also ein durch den Schwerpunkt gelegtes und im Raume fixes Coordinatensystem XYZ so, dass die XY-Ebene mit der invariablen Ebene zusammenfällt, und sind die neun Richtungscosinus in der folgenden Weise bezeichnet:

	X	Y	Z
A	a_1	b_1	c_1
B	a_2	b_2	c_2
C	a_3	b_3	c_3

so werden, wenn pqr die momentanen Drehungsgeschwindigkeiten um die Axen ABC sind, die Gleichungen gelten:

$$Ap = G.c_1 \qquad Bq = G.c_2 \qquad Cr = G.c_3. \tag{1}$$

Ferner hat man aber, wenn man ein Rechtssystem zugrunde legt, die Euler'schen Gleichungen:

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr \qquad B\frac{dq}{dt} = (C-A)pr$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq; \tag{2}$$

führt man hier die $c_1 c_2 c_3$ nach Obigem ein, so wird:

$$\frac{dc_1}{dt} = \left(\frac{G}{C} - \frac{G}{B}\right)c_2 c_3 \qquad \frac{dc_2}{dt} = \left(\frac{G}{A} - \frac{G}{C}\right)c_1 c_3$$
$$\frac{dc_3}{dt} = \left(\frac{G}{B} - \frac{G}{A}\right)c_1 c_2. \tag{3}$$

Um diese Gleichungen zu integrieren, hat man Folgendes zu beachten: Aus dem Princip der Constanz der lebendigen Kraft und des Flächenmomentes folgt:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$$
$$A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2 = 2h. \tag{4}$$

Da nun vorausgesetzt wurde: $A < B < C$, so folgt aus diesen Gleichungen, dass stets sein muss:

$$G^2 - 2Ah > 0 \qquad G^2 - 2Ch < 0.$$

Man hat also noch zu unterscheiden die Fälle $G^2 . 2Bh \gtrless 0$.

Es möge für das Folgende $G^2 - 2Bh > 0$ vorausgesetzt werden, dann ist:

$$\frac{G}{A} > \frac{G}{B} > \frac{2h}{G} > \frac{G}{C}.$$

Wählt man jetzt ω reell ω' rein imaginär mit positivem Factor von i, setzt: $\omega'' = \omega + \omega'$ und bildet:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu}{}' \left(\frac{1}{(u - \omega_{\mu\nu})^2} - \frac{1}{\omega_{\mu\nu}^2} \right) \qquad \omega_{\mu\nu} = \mu\omega + \nu\omega',$$

so sind:

$$e_1 = p(\omega) \qquad e_2 = p(\omega'') \qquad e_3 = p(\omega')$$

drei reelle positive Zahlen mit der Eigenschaft $e_1 > e_2 > e_3$.

Setzt man weiterhin:

$$\sigma(u) = u \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right) e^{\frac{u}{\omega_{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right)^2}$$

$$\sigma_1(u) = \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} e^{-\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega).u} \qquad \sigma_2(u) = \frac{\sigma(u+\omega'')}{\sigma(\omega'')} e^{-\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'').u}$$

$$\sigma_3(u) = \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma(\omega')} e^{-\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega').u},$$

so wird, wenn man s auf das Intervall $0, -\omega' i$ beschränkt, sein:

$$i\frac{\sigma'}{\sigma}(is) > i\frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(is) > i\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(is) > i\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(is).$$

Man kann also setzen:

$$\frac{G}{A} = R - i\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(is) \qquad \frac{G}{B} = R - i\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(is)$$

$$\frac{G}{C} = R - i\frac{\sigma'}{\sigma}(is) \qquad \frac{2h}{G} = R - i\frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(is). \tag{5}$$

Wäre $G^2-2Bh<0$, so hätte man hier σ_1 und σ_2 zu vertauschen. Man erhält daher die diesem Falle entsprechenden Formeln, indem man in allen folgenden Gleichungen $\omega+\omega'$ statt ω setzt, wobei gleichzeitig $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ in $\sigma_2\sigma_1\sigma_3$ übergehen.

Aus diesen vier Gleichungen folgt umgekehrt:

$$k^2 = \frac{B-A}{C-A}\,\frac{2hC-G^2}{G^2-2Ah} \qquad k'^2 = \frac{C-A}{C-B}\,\frac{G^2-2Bh}{G^2-2Ah}$$

$$e_1-e_3 = \alpha^2 = \frac{(C-B)(G^2-2Ah)}{ABC}$$

$$\alpha\omega = K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{6}$$

$$\alpha\omega' = Ki' = i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$\alpha s = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \qquad \xi^2 = \frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}$$

Für später mögen gleich folgende Größen eingeführt werden:

$$q = e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = e^{-\frac{\pi s}{2\omega}} = e^{-\frac{\alpha\pi s}{2K}}$$

$$N_1 = \frac{s}{\omega}\,\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega)+R \qquad N_2 = \frac{\pi}{2\omega}$$

oder auch:

$$N_1 = \frac{2h}{G}+\alpha^2 s\frac{E}{K}-\alpha k'^2\int_0^\xi \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$
$$N_2 = \frac{\alpha\pi}{2K}. \tag{6a}$$

Man bemerke, dass aus dem vorigen System die Ungleichungen folgen:

$$\sqrt{q}\,\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}<1 \qquad \sqrt{q}\,\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}<1,\ \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}<1,$$

[1] Die angewandten Formeln findet man in: Schwarz, Formelsamml. z. Gebr. d. ellipt. Funct. Berlin, 1893.

wodurch die Convergenz der späteren Reihen gesichert ist. Führt man die eben gewonnenen Ausdrücke von $\frac{G}{A}, \frac{G}{B}, \frac{G}{C}$ in die Gleichungen für $c_1 c_2 c_3$, so kann man ihnen mit Rücksichtnahme auf die bereits fixierten zwei Integrationsconstanten genügen durch $3\,\sigma$-Quotienten mit gemeinsamen Nenner. Es möge folgendes System gewählt werden:

$$c_1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}(is)\,\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t) \qquad c_2 = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(is)\,\frac{\sigma}{\sigma_3}(t)$$

$$c_3 = -i\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma}{\sigma_1}(is)\,\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t) \tag{7}$$

Zur Orientierung mögen gleich angemerkt werden die beiden Fälle:

$$A = B \qquad k = 0$$

$$c_1 = \sin\varepsilon\cos N_2 t \qquad c_2 = \sin\varepsilon\sin N_2 t \qquad c_3 = \cos\varepsilon \tag{7a}$$

$$2Bh = G^2 \qquad k = 1$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\,\frac{2}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}} \qquad c_2 = \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}} \tag{7b}$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}\,\frac{2}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}} \qquad \alpha = \frac{G}{B}\sqrt{\frac{(B-A)(C-B)}{A.C}}.$$

Nach Auffindung der $c_1 c_2 c_3$ können nunmehr die übrigen sechs Richtungscosinusse durch Quadratur gefunden werden.

Man setze zu diesem Zwecke:

$$\alpha = a_1 + ib_1 \qquad \beta = a_2 + ib_2 \qquad \gamma = a_3 + ib_3 \tag{8}$$

und bezeichne mit $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ die beziehungsweise conjugiert complexen Größen. Es gelten dann die drei kinematischen Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma \qquad \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha \qquad \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta \tag{9}$$

und dieselben Gleichungen für $\alpha_0\beta_0\gamma_0$. Aus ihnen folgt:

$$\alpha_0 \frac{d\alpha}{dt_0} - \alpha \frac{d\alpha_0}{dt} = r(\alpha_0\beta - \alpha\beta_0) - q(\alpha_0\gamma - \alpha\gamma_0).$$

Es ist aber:

$$\alpha_0\beta - \alpha\beta_0 = 2ic_3 \qquad \alpha\alpha_0 = 1 - c_1^2$$
$$\alpha_0\gamma - \alpha\gamma_0 = -2ic_2,$$

so dass man hat:

$$\frac{d}{dt}\log\frac{\alpha}{\alpha_0} = 2i\,\frac{qc_2 + rc_3}{1 - c_1^2}$$

und wegen $\alpha\alpha_0 = 1 - c_1^2$ folgt:

$$\frac{d}{dt}\log\alpha = i\,\frac{qc_2 + rc_3}{1 - c_1^2} + \frac{d}{dt}\log\sqrt{1 - c_1^2}.$$

Es ist nun:

$$\frac{qc_2 + rc_3}{1 - c_1^2} = \frac{1}{1 - c_1^2}\left\{\frac{2h}{G} - \frac{G}{A}c_1^2\right\} = \frac{2h}{G} - \left(\frac{G}{A} - \frac{2h}{G}\right)\frac{c_1^2}{1 - c_1^2}$$

Somit ist also:

$$\log\alpha = \frac{2h}{G}it - i\left(\frac{G}{A} - \frac{2h}{G}\right)\int\frac{c_1^2}{1 - c_1^2}dt + \frac{1}{2}\lg(1 - c_1^2)$$

und analog:

$$\log\beta = \frac{2h}{G}it - i\left(\frac{G}{B} - \frac{2h}{G}\right)\int\frac{c_2^2}{1 - c_2^2}dt + \frac{1}{2}\lg(1 - c_2^2)$$

$$\log\gamma = \frac{2h}{G}it - i\left(\frac{G}{C} - \frac{2h}{G}\right)\int\frac{c_3^2}{1 - c_3^2}dt + \frac{1}{2}\lg(1 - c_3^2) \qquad 10)$$

Führt man hier die Werte der $c_1c_2c_3$ ein und führt die Integration durch Zerlegung in ζ-Summen in bekannter Weise durch, so wird

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(t+is)}{\sigma_1(is)\sigma_3(t)}\,e^{iRt} \\
\beta &= \frac{\sigma_1(t+is)}{\sigma_1(is)\sigma_3(t)}\,e^{iRt} \\
\gamma &= i\,\frac{\sigma_3(t+is)}{\sigma_1(is)\sigma_3(t)}\,e^{iRt}.
\end{aligned}
\qquad 11)
$$

Dabei wurden die Integrationsconstanten so bestimmt, dass für $t = 0$ die X-Axe in die AB-Ebene fällt.

Bezeichnet man jetzt in üblicher Weise mit $\psi\varphi\vartheta$ die Euler-schen Winkel, welche die Lage des Systems der Hauptaxen gegen das fixe System XYZ bestimmen, so folgt aus den in II angegebenen Werten der neun Cosinusse, dass man hat

$$
\cos\vartheta = c_3 \qquad \varphi = \frac{1}{2i}\log\frac{c_2+ic_1}{c_2-ic_1}
$$
$$
\psi = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2i}\log\frac{\gamma}{\gamma_0}. \qquad 12)
$$

Setzt man die Werte der $c_1c_2c_3$ ein und drückt alles durch σ-Producte aus, so erhält man:

$$
\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = -\eta' si +
$$
$$
+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_2\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)}{\sigma_2\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)}
$$

$$
\varphi = \frac{\pi}{2}+\frac{\eta'}{i}t+ \qquad 13)
$$
$$
+\frac{1}{2i}\log\frac{\sigma_2\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)}{\sigma_2\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)}
$$

$$
\psi = Rt+\frac{1}{2i}\log\frac{\sigma_3(t+is)}{\sigma_3(t-is)}.
$$

Diese drei Ausdrücke können nun sofort in trigonometrische Reihen entwickelt werden; es ergibt sich:[1]

$$\log \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \log \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} + $$
$$+2\sum \frac{1}{m}\,\frac{q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m}\left(\operatorname{tg}^m\frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos mN_2t$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - N_2 t - \tag{13a}$$
$$-2\sum \frac{1}{m}\,\frac{q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m}\left(\operatorname{tg}^m\frac{\varepsilon}{2} + \operatorname{ctg}^m\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin mN_2t$$

$$\psi = N_1 t - 2\sum \frac{1}{m}\,\frac{q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m}\left(\operatorname{tg}^m\frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin mN_2t$$

wo zu summieren ist über $m = 2, 4, 6, 8, \ldots$

Es werden ferner in der Folge zwei Winkel auftreten ζ und χ, definiert durch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin\zeta\cos\chi &= \cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\zeta\sin\chi &= \sin\varphi \\ \cos\zeta &= \sin\vartheta\cos\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

Für diese beiden Winkel lassen sich nun genau ebensolche Entwickelungen aufstellen wie für $\varphi\vartheta$. Es ergibt sich zunächst:

$$\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta = \eta t +$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma\left(\frac{t+is+\omega}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is-\omega}{2}\right)\sigma\left(\frac{t-is-\omega}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is-\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{t-is+\omega}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is+\omega}{2}\right)\sigma\left(\frac{t+is+\omega}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is+\omega}{2}\right)} \tag{15}$$

$$\Psi = \psi+\chi = \frac{\pi}{2} + Rt + \frac{1}{2i}\log\frac{\sigma_1(t+is)}{\sigma_1(t-is)}.$$

[1] Die hiezu nöthigen Formeln findet man etwa: Halphén, Fonctions elliptiques, tome I, Chap. XIII.

Entwickelt man diese beiden Functionen wieder in Reihen, so folgt:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\zeta = \frac{1}{2} \log \frac{2K}{\pi\alpha} \frac{1-\sin\varepsilon \sin N_2 t}{1+\sin\varepsilon \sin N_2 t} +$$

$$+2\sum \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n} \frac{q^n}{1-q^n}\left(\operatorname{tg}^n \frac{\varepsilon}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin nN_2 t \tag{15a}$$

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + N_1 t - \operatorname{arctg}(\cos\varepsilon \operatorname{tg} N_2 t) +$$

$$+2\sum \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m} \frac{q^m}{1-q^m}\left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin mN_2 t,$$

wobei zu summieren ist über $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, $m = 2, 4, 6, 8, \ldots$

Man kann leicht auch $\operatorname{arctg}(\cos\varepsilon \operatorname{tg} N_2 t)$ und

$$\log \frac{1-\sin\varepsilon \sin N_2 t}{1+\sin\varepsilon \sin N_2 t}$$

in eine trigonometrische Reihe entwickeln, wodurch man einen einheitlicheren Ausdruck erhält, aber die Convergenz verlangsamt.

Weiter soll jetzt folgende Curve bestimmt werden: Man sehe $c_1 c_2 c_3$ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes an, so wird dieser eine auf der Kugel $x^2+y^2+z^2 = 1$ liegende Curve beschreiben, und diese projiciere man stereographisch auf die XY-Ebene. Es ist dann:

$$X+iY = \frac{c_1+ic_2}{1-c_3}$$

oder: 16)

$$X+iY = \frac{i}{\alpha}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right) - \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\right),$$

also entwickelt:

$$C^2.X = \sum \frac{\left(\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1-q^{2n}} \left(1-q^n\,\mathrm{tg}^{2n}\,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos nN_2 t$$

$$C^2.Y = \sum \frac{\left(\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1-q^{2n}} \left(1+q^n\,\mathrm{tg}^{2n}\,\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin nN_2 t \qquad 16a)$$

$$n = 1, 3, 5, 7 \ldots$$

$$C = q^{\frac{1}{4}}(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{K.k}{\pi}.$$

Eine geschlossene Curve ohne Doppelpunkt, symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

In den vorhergehenden Ausdrücken der ψ, φ, ϑ, Ψ, χ erscheinen statt der mechanischen Constanten A, B, C, $2h$, G die Elemente q, N_1, N_2, ε. Es erübrigt also noch, jene rückwärts durch diese auszudrücken. Die früher gegebenen Ausdrücke liefern sofort:

$$\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}$$

$$\xi = \sin \mathrm{am}\left(\frac{2K}{\pi}\,\mathrm{lgctg}\,\frac{\varepsilon}{2}, k'\right)$$

$$\frac{2h}{G} = N_1 + N_2 \frac{4KE}{\pi^2} \log \mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ N_2 \frac{2Kk'^2}{\pi} \int_0^\xi \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \qquad 17)$$

$$\frac{G}{A} = \frac{2h}{G} + N_2 \frac{2K\xi}{\pi} \sqrt{\frac{1-k'^2\xi^2}{1-\xi^2}}$$

$$\frac{G}{B} = \frac{2h}{G} + N_2 \frac{2Kk'^2\xi}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-k'^2\xi^2}}$$

$$\frac{G}{C} = \frac{2h}{G} - N_2 \frac{2K}{\pi\xi} \sqrt{(1-\xi^2)(1-k'^2\xi^2)}$$

In Reihen entwickelt, geben diese Ausdrücke:

$$\frac{2h}{G} = N_1 - N_2 \cos\varepsilon - 2N_2 \sum \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} q^m}{1-q^m}\left(\mathrm{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \mathrm{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{G}{A} = N_1 \qquad -2N_2 \sum \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m}\left(\mathrm{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \mathrm{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{G}{B} = N_1 \qquad -2N_2 \sum \frac{(-q)^{\frac{m}{2}}}{1-q^m}\left(\mathrm{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \mathrm{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{18}$$

$$\frac{G}{C} = N_1 - \frac{N_2}{\cos\varepsilon} - 2N_2 \sum \frac{q^m}{1-q^m}\left(\mathrm{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \mathrm{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$m = 2, 4, 6, \ldots$$

Oder:

$$\frac{2h}{G} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} \qquad - N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{q_1^{\frac{m}{2}}}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'}$$

$$\frac{G}{A} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} + N_2 \frac{K}{K'} \,\mathrm{tg}\, \frac{\pi \alpha s}{2K'} -$$

$$- N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} q_1^m}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'} \tag{18a}$$

$$\frac{G}{B} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} \qquad - N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{(-q_1)^{\frac{m}{2}}}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'}$$

$$\frac{G}{C} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} - N_2 \frac{K}{K'} \,\mathrm{ctg}\, \frac{\pi \alpha s}{2K'} -$$

$$- N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{q_1^m}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'}$$

Hier ist: $\lg\frac{1}{q}\,\lg\frac{1}{q_1}=\pi^2$, $\frac{K}{K'}=\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{q_1}$, so dass man $N_1\,N_2\,q_1\,\frac{\pi\alpha s}{2K'}$ als die gegebenen Elemente ansehen kann. Da stets $q<1$ sein muss, so wird immer q oder q_1 kleiner als

$$e^{-\pi}=0\cdot04321.$$

IV.

Die bisher gewonnenen Resultate mögen zunächst angewandt werden auf den bereits von Gyldén[1] behandelten Fall eines selbstleuchtenden rotierenden Körpers.

Es kann zunächst bemerkt werden, dass das vorhin gebrauchte Coordinatensystem, dessen XY-Ebene die invariable Ebene war, um irgendeinen Winkel ω in negativem Sinne gedreht werden kann um die Z-Axe, wenn man gleichzeitig den Winkel ω zu dem Ausdrucke von ψ hinzufügt. Dieser Winkel ω soll nun so gewählt werden, dass die X-Axe in die Knotenlinie der invariablen Ebene und des Erdäquators zu liegen kommt. Es sei dann Ω, i die Knotenlänge und Neigung der invariablen Ebene des Sternes, bezogen auf den Erdäquator und die Frühlingsnachtgleichenlinie. Ferner sei α, δ Rectascension und Declination des Sternes und endlich p, l Poldistanz und Länge der Erde, bezogen auf das System der Axen XYZ.

Dann hat man auf der von außen her betrachteten Himmelskugel der Erde folgendes, von den Punkten: Stern, Pol des Äquators, Pol der invariablen Ebene gebildetes Dreieck:

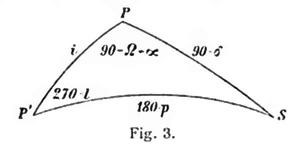


Fig. 3.

und hienach:

$$\begin{aligned}-\cos p &= \cos i\sin\delta+\sin i\cos\delta\sin(\alpha-\Omega)\\ -\sin p\sin l &= \sin i\sin\delta+\cos i\cos\delta\sin(\alpha-\Omega)\\ -\sin p\cos l &= \cos\delta\cos(\alpha-\Omega)\end{aligned}\qquad 1)$$

[1] H. Gyldén, Math. Theorie d. veränderl. Sterne. Stockholm, 1881.

$$
\begin{aligned}
-\sin\delta &= \cos i\cos p+\sin i\sin p\sin l \\
-\cos\delta\sin(\alpha-\Omega) &= -\sin i\cos p+\cos i\sin p\sin l \qquad (2) \\
-\cos\delta\cos(\alpha-\Omega) &= \sin p\cos l
\end{aligned}
$$

Die so bestimmten Größen p und l sind Constanten, die bloß abhängen von dem Orte des Sternes und der Lage seiner invariablen Ebene.

Es sei nun die Oberfläche des Sternes wieder durchaus convex, und es mögen k^2 und Γ die Krümmung, beziehungsweise Leuchtkraft eines Elementes derselben bezeichnen. Verführt man nun ebenso wie in I bei einer beleuchteten Fläche, so erkennt man augenblicklich, dass man die Oberfläche als Kugel annehmen darf, deren Leuchtkraft in den einzelnen Punkten aber $\frac{\Gamma}{k^2}$ ist. Es seien nun l, p Länge und Poldistanz eines Punktes der Kugel bezüglich der Hauptaxen und:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_n \sum_\nu (a_\nu^n \cos\nu l + b_\nu^n \sin\nu l) P_\nu^n(\cos p) \qquad 3)$$

und für das Folgende werde gesetzt:

$$a_\nu^n = c_\nu^n \cos\left(\gamma_\nu^n - \nu\frac{\pi}{2}\right) \quad b_\nu^n = c_\nu^n \sin\left(\gamma_\nu^n - \nu\frac{\pi}{2}\right) \quad \gamma_0^n = 0. \qquad 3a)$$

Die Helligkeit eines Sternes beim Ausstrahlungsgesetze: $f(\cos\varepsilon)$ ist dann:

$$H = \int \frac{\Gamma}{k^2} f(\cos\varepsilon)\, d\omega, \qquad 4)$$

integriert über die der Erde zugewandte Halbkugel.

Führt man nun ein Coordinatensystem ein, dessen Z-Axe gegen die Erde hin zeigt, und beziehen sich $l\,p$ auf dieses, so wird:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma}{k^2} &= \sum_n \sum_\nu{}' (A_\nu^n \cos\nu l + B_\nu^n \sin\nu l) P_\nu^n(\cos p) \\
&\qquad\qquad 5) \\
H &= \int_0^{2\pi} dl \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma}{k^2} f(\cos p)\sin p\, dp.
\end{aligned}
$$

Bei der Integration nach l' bleiben bloß die Glieder mit A_0^n stehen. Das A_0^n ergibt sich aber aus den Formeln von I, wenn $p'l'$ Poldistanz und Länge der Erde bezüglich der Hauptaxen sind, zu:

$$A_0^n = \sum_0^n {}_\nu (a_\nu^n \cos \nu l' + b_\nu^n \sin \nu l') U_{\nu 0}^n(\cos p'). \qquad 6)$$

Mit Rücksicht auf den angegebenen Wert von $U_{\nu 0}^n$ wird also:

$$H = \sum_n k_n \sum_\nu (a_\nu^n \cos \nu l' + b_\nu^n \sin \nu l\,) P_\nu^n (\cos p')$$

$$k_n = 2\pi \int_0^1 P_n(x) f(x) dx. \qquad [1] \quad 7)$$

Es erübrigt jetzt noch, die $p'l'$ zu ersetzen durch die eingangs definierten Constanten pl. Hiezu bemerke man, dass der anfangs gemachten Bemerkung zufolge die Lage von ABC gegen XYZ definiert ist durch die Euler'schen Winkel $\psi+\omega$, φ, ϑ, also umgekehrt die Lage von XYZ gegen ABC durch $-\varphi$, $-(\psi+\omega)$, $-\vartheta$. Daher hat man in den früher aufgestellten Ausdrücken der $\overline{a_\mu^n}$, $\overline{b_\mu^n}$ zu ersetzen ψ, φ, ϑ durch: $-\varphi-\frac{\pi}{2}$, $-\psi-\omega-\frac{\pi}{2}$, $-\vartheta$ und erhält hiedurch, wenn:

$$\gamma = \omega + l + \frac{\pi}{2}$$

gesetzt wird:

$$H = \sum_n \sum_\mu' k_n (\overline{a_\mu^n} \cos \mu(\psi+\gamma) - \overline{b_\mu^n} \sin \mu(\psi+\gamma)) P_\mu^n (\cos p) \qquad 8)$$

$$\overline{a_\mu^n} = (-1)^{\mu+\nu} \sum_0^n {}_\nu c_\nu^n \cos (\nu\varphi + \eta_\nu^n) U_{\nu\mu}^n (\cos \vartheta)$$

$$\overline{b_\mu^n} = (-1)^{\mu+\nu} \sum_0^n {}_\nu c_\nu^n \sin (\nu\varphi + \eta_\nu^n) V_{\nu\mu}^n (\sin \vartheta), \qquad 8a)$$

[1] Vergl. Bruns H., Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus.

und dies kann man schließlich schreiben:

$$H = \sum_{0}^{\infty}{}'_{\mu} (C_\mu \cos \mu(\psi+\gamma) + S_\mu \sin \mu(\psi+\gamma)) \qquad 9)$$

$$(-1)^\mu C_\mu = \sum_{\mu}^{\infty}{}_n k_n P_\mu^n(\cos p) \sum_{0}^{n}{}_\nu (-1)^\nu c_\nu^n \cos(\nu\varphi+\gamma_\nu^n) U_{\nu\mu}^n(\cos\vartheta)$$

$$(-1)^\mu S_\mu = \sum_{\mu}^{\infty}{}_n k_n P_\mu^n(\cos p) \sum_{0}^{n}{}_\nu (-1)^{\nu+1} c_\nu^n \sin(\nu\varphi+\gamma_\nu^n) V_{\nu\mu}^n(\cos\vartheta) \qquad 9a)$$

Da nun N_1 groß gegen N_2 ist, so kann man H ansehen als eine periodische Function der Periode $T_1 = \frac{2\pi}{N_1}$, deren Coefficienten aber langperiodischen Veränderungen der Periode $T_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ unterworfen sind.

Daher kann hier der Fall eintreten, dass die Lichtcurve zu verschiedenen Zeiten ganz verschiedene Gestalten annehmen kann.

Insbesondere wird daher der größte Wert der Lichtschwankung während der Periode T_1 selbst veränderlich sein und zu gewissen Zeiten gleich Null werden können.

Hievon kann man sich in jedem speciellen Falle etwa dadurch Rechenschaft geben, dass man sich die Function:

$$F(\vartheta,\varphi) = C_1^2+S_1^2+C_2^2+S_2^2+\ldots+C_n^2+S_n^2$$

auf eine Ebene dadurch ausgebreitet denkt, dass man setzt:

$$x = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi \qquad y = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi$$

und jetzt die in III dargestellte Curve: $X+iY = \frac{c_1+ic_2}{1-c_3}$ sich gezeichnet denkt. Man kann es so einrichten, dass $F(\vartheta,\varphi)$ wirklich an gewissen Punkten Nullstellen besitzt, durch welche die Curve hindurchläuft. Da der Lichtwechsel für die Beobachtung wegfällt, wenn $F(\vartheta,\varphi)$ unter einer gewissen Grenze bleibt, so

wird für ein gewisses, obige Nullstelle umgebendes Stück der Curve, also für ein bestimmtes, möglicherweise recht kleines Zeitintervall $H =$ Const sein.

Beschränkt man sich auf die Werte $n = 0, 1, 2$, so wird:

$$H = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos(\psi+\gamma) + C_2 \cos 2(\psi+\gamma)$$
$$+ S_1 \sin(\psi+\gamma) + S_2 \sin 2(\psi+\gamma) \qquad \gamma = \omega + l + \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

$$C_0 = 2\pi a_0^0 - \frac{2\pi}{3} \cos p [a_0^1 \cos\vartheta + c_1^1 \sin\vartheta \cos(\varphi+\eta_1^1)]$$
$$+ \frac{3\pi}{4}\left(\cos^2 p - \frac{1}{3}\right)\left[a_0^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} c_1^2 \sin 2\vartheta \cos(\varphi+\eta_1^2) + c_2^2 \sin^2\vartheta \cos(2\varphi+\eta_2^2)\right]$$

$$C_1 = \frac{\pi}{3} \sin p [a_0^1 \sin\vartheta - c_1^1 \cos\vartheta \cos(\varphi+\eta_1^1)]$$
$$- \frac{\pi}{8} \sin 2p [a_0^2 \sin 2\vartheta - c_1^2 \cos 2\vartheta \cos(\varphi+\eta_1^2) -$$
$$- c_1^2 \sin 2\vartheta \cos(2\varphi+\eta_2^2)]$$

$$C_2 = \frac{\pi}{8} \sin^2 p \left[a_0^2 \sin^2\vartheta - \frac{1}{2} c_1^2 \sin 2\vartheta \cos(\varphi+\eta_1^2) + \right. \tag{10a}$$
$$\left. + c_2^2 \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \cos(2\varphi+\eta_2^2)\right]$$

$$S_1 = \frac{\pi}{3} c_1^1 \sin p \sin(\varphi+\eta_1^1)$$
$$- \frac{\pi}{8} \sin 2p [c_1^2 \cos\vartheta \sin(\varphi+\eta_1^2) + 2c_2^2 \sin\vartheta \sin(2\varphi+\eta_2^2)]$$

$$S_2 = \frac{\pi}{8} \sin^2 p [c_1^2 \sin\vartheta \sin(\varphi+\eta_1^2) - 2c_2^2 \cos\vartheta \sin(2\varphi+\eta_2^2)]$$

Im Falle zweier gleicher Hauptaxen $A = B$ ist:

$$\vartheta = \varepsilon = \text{const} \qquad \psi = N_1 t \qquad \varphi = -N_2 t$$

V.

In derselben Weise soll nun die Beleuchtung eines frei rotierenden Planeten behandelt werden. Hiezu lege man zunächst durch den Mittelpunkt des Planeten ein Coordinatensystem A parallel dem Äquatorealsystem der Erde. Ein zweites System J lege man derart, dass seine XY-Ebene die invariable Ebene des Planeten ist und seine X-Axe in den Erdäquator fällt. Die Lage der drei Hauptaxen des Körpers gegen dieses System J ist dann dem eingangs von IV Gesagten zufolge bestimmt durch die drei Euler'schen Winkel $\psi+\omega$, φ, ϑ, wo ψ, φ, ϑ durch III, $3a$) gegeben sind. Nun markiere man auf der scheinbaren Himmelskugel des Planeten erstens jenen Punkt H, der genau in der Mitte zwischen den scheinbaren Örtern von Sonne und Erde steht, und zweitens jenen Punkt N, der von diesen beiden Örtern um je 90° absteht und den ein Beobachter im Zenith hat, wenn er die Sonne und Erde im Horizont zur Rechten, beziehungsweise Linken hat. Die Richtungen Planet—H und Planet—N nehme man jetzt als X-, beziehungsweise Z-Axe eines dritten Coordinatensystemes H.

Hierauf mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

α_1, δ_1 geocentrische Rectascension und Declination der Sonne;

α_2, δ_2 geocentrische Rectascension und Declination des Planeten;

α, δ planetocentrische Rectascension und Declination des Punktes H;

a, d planetocentrische Rectascension und Declination des Punktes N;

i, Ω Neigung und Knotenlänge der invariablen Ebene gegen den Erdäquator;

$\Omega_1, \frac{\pi}{2}-\omega_1, i_1$ die drei Euler'schen Winkel, welche die Lage des Systemes H gegen das System J bestimmen. (Es sind also $\omega_1 i_1$ Länge und Poldistanz des Poles P der invariablen Ebene im System H.) (Vergl. Fig. 1 und 2.)

r die Entfernung Sonne—Erde;
r' die Entfernung Sonne—Planet;
Δ die Entfernung Erde—Planet;
A der Winkel am Planeten im Dreieck Planet—Sonne—Erde.

Entnimmt man jetzt dem Jahrbuche die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, r$ $r_1 \Delta$, so hat man zur Bestimmung von A, α, δ, a, d folgendes System:

$$2 \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(r+r_1-\Delta)(r-r_1+\Delta)}{\Delta_1 r_1}} \qquad 1)$$

$$\begin{aligned}
2\cos\frac{A}{2}\cos\delta\cos\alpha &= \frac{r}{r_1}\cos\delta_1\cos\alpha_1 - \left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right)\cos\delta_2\cos\alpha_2 \\
2\cos\frac{A}{2}\cos\delta\sin\alpha &= \frac{r}{r_1}\cos\delta_1\sin\alpha_1 - \left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right)\cos\delta_2\sin\alpha_2 \qquad 2) \\
2\cos\frac{A}{2}\sin\delta &= \frac{r}{r_1}\sin\delta_1 - \left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right)\sin\delta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin A\cos d\cos a &= \frac{r}{r_1}(\ \sin\delta_1\cos\delta_2\sin\alpha_2 - \cos\delta_1\sin\delta_2\sin\alpha_1) \\
\sin A\cos d\sin a &= \frac{r}{r_1}(-\sin\delta_1\cos\delta_2\cos\alpha_2 + \cos\delta_1\sin\delta_2\cos\alpha_1) \qquad 3) \\
\sin A\sin d &= \frac{r}{r_1}\cos\delta_1\cos\delta_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)
\end{aligned}$$

Die folgenden drei Größen $\Omega_1 \omega_1 i_1$ hängen jetzt von den beiden Unbekannten Ωi ab. Man hat für sie:

$$\begin{aligned}
\sin i_1\cos\omega_1 &= \cos i\sin\delta - \sin i\cos\delta\sin(\alpha-\Omega) \\
\sin i_1\sin\omega_1 &= \cos i\cos\delta\cos d\sin(\alpha-a) - \\
&\quad -\sin i(\sin d\cos\delta\cos(\alpha-\Omega) - \cos d\sin\delta\cos(a-\Omega)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 4) \\
\cos i_1 &= \cos i\sin d - \sin i\cos d\sin(a-\Omega) \\
\sin i_1\cos\Omega_1 &= -\sin i\sin d - \cos i\cos d\sin(a-\Omega) \\
\sin i_1\sin\Omega_1 &= +\cos d\cos(a-\Omega)
\end{aligned}$$

Die Bedeutung der Größen $i_1 \omega_1 \Omega_1$ mag endlich noch durch zwei Figuren veranschaulicht werden:

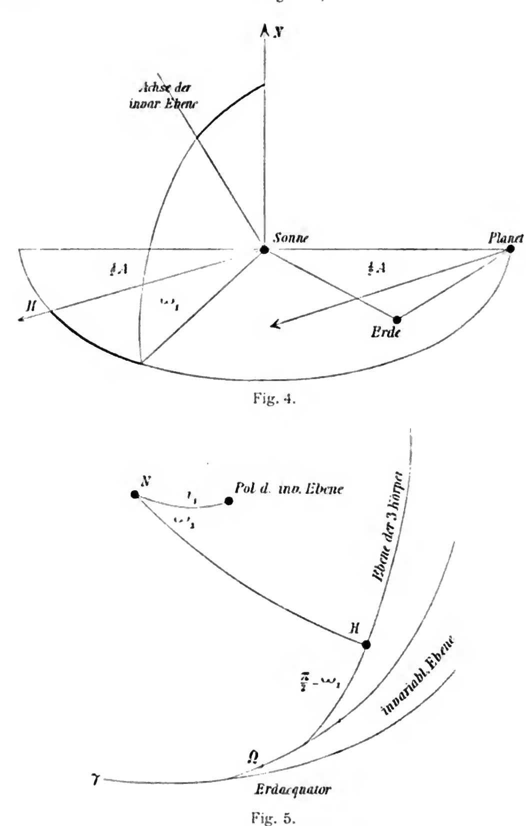


Fig. 4.

Fig. 5.

Um jetzt die Helligkeit des Planeten zu finden, werde mit Rücksicht auf das in I gewonnene Resultat gesetzt:

$$\frac{1}{k^2}\,\Gamma = \sum_n \sum_\nu c_\nu^n \cos(\nu l - \gamma_\nu^n)\, P_\nu^n(\cos p) \qquad \gamma_0^n = 0 \qquad 5)$$

und für später:

$$\gamma_\nu^n + \nu \frac{\pi}{2} = \eta_\nu^n.$$

Hiebei beziehen sich pl auf die Hauptaxen des Planeten; ferner sei das Beleuchtungsgesetz:

$$f(\cos i, \cos \varepsilon) d\omega,$$

so dass die Helligkeit:

$$H = \int \frac{1}{k^2} \Gamma f(\cos i, \cos \varepsilon) d\omega. \tag{6}$$

Man beschränke sich nun der Kürze halber auf das Glied:

$$\frac{1}{k^2} \Gamma = \sum_0^n c_\nu^n \cos(\nu l - \gamma_\nu^n) P_\nu^n(\cos p).$$

Transformiert man, um die Integration auszuführen, diesen Ausdruck auf das Coordinatensystem H, so wird er, wenn sich pl jetzt auf dieses beziehen, übergehen in:

$$\sum_\mu^{0\,n}{}' (A_\mu^n \cos \mu l + B_\mu^n \sin \mu l) P_\mu^n(\cos p).$$

In dem System H wird aber sein:

$$\cos i = \sin p \cos\left(l - \frac{A}{2}\right) \qquad \cos \varepsilon = \sin p \cos\left(l + \frac{A}{2}\right)$$
$$d\omega = \sin p\, dp\, dl, \tag{7}$$

und die Integration hat zu gehen bezüglich p von 0 bis π, bezüglich l von $-\frac{\pi - A}{2}$ bis $+\frac{\pi - A}{2}\cdot$ Setzt man also:

$$H_\mu^n = \int_0^\pi dp \int_{-\frac{\pi-A}{2}}^{\frac{\pi-A}{2}} dl\, P_\mu^n(\cos p) \sin p\, f(\cos i, \cos \varepsilon) \cos \mu l$$
$$K_\mu^n = \int_0^\pi dp \int_{-\frac{\pi-A}{2}}^{\frac{\pi-A}{2}} dl\, P_\mu^n(\cos p) \sin p\, f(\cos i, \cos \varepsilon) \sin \mu l, \tag{8}$$

so hat man sofort für H:

$$H = \sum_{\mu}{}' (A''_{\mu} H''_{\mu} + B''_{\mu} K''_{\mu}). \tag{9}$$

Um jetzt die $A''_{\mu} B''_{\mu}$ zu finden, bestimme man dem ersten Hilfssatze von II gemäß die Lage des Systemes H gegen die

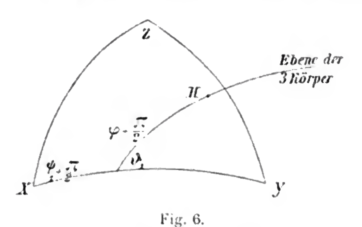


Fig. 6.

Axen ABC durch die drei Winkel $\varphi_1 \psi_1 \vartheta_1$ (vergl. die Figur), so ergibt der erste Hilfssatz von π die fertigen Ausdrücke der $A''_{\mu} B''_{\mu}$ in der Gestalt:

$$A''_{\mu} = \sum_{0}^{n} c''_{\nu} X''_{\nu\mu} \qquad B''_{\mu} = \sum_{0}^{n} c''_{\nu} Y''_{\nu\mu}$$

$$\begin{aligned} X''_{\nu\mu} &= U''_{\nu\mu}(\vartheta_1) \cos(\nu\psi_1 - \gamma''_{\nu}) \cos \mu\varphi_1 - \\ &\qquad - V''_{\nu\mu}(\vartheta_1) \sin(\nu\psi_1 - \gamma''_{\nu}) \sin \mu\varphi_1 \\ Y''_{\nu\mu} &= U''_{\nu\mu}(\vartheta_1) \cos(\nu\psi_1 - \gamma''_{\nu}) \sin \mu\varphi_1 + \\ &\qquad + V''_{\mu\nu}(\vartheta_1) \sin(\nu\psi_1 - \gamma''_{\nu}) \cos \mu\varphi_1 \end{aligned} \tag{10}$$

Somit:

$$H'' = \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \sum_{0}^{n}{}'_{\mu} c''_{\nu} (H''_{\mu} X''_{\nu\mu} - K''_{\mu} Y''_{\nu\mu}). \tag{11}$$

In diesem Ausdrucke sollen nun statt der $\psi_1 \varphi_1 \vartheta_1$ eingeführt werden die im früheren bestimmten Winkel $\psi, \varphi, \vartheta, i_1, \omega_1, \Omega_1$. Dies ist sofort geschehen mit Hilfe des in II angeführten Additionstheoremes der $U''_{\nu\mu} V''_{\nu\mu}$. Es erscheinen nämlich die genannten neun Winkel zusammen in folgendem sphärischen Dreieck,

dessen Kanten die Knotenlinien der XY-Ebenen der drei Systeme HJ und ABC sind:

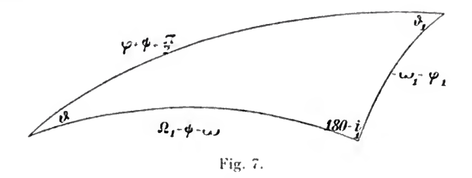


Fig. 7.

Setzt man also dementsprechend in der genannten Gleichung von II:

$$A = \vartheta \qquad a = -\omega_1 - \varphi_1$$
$$B = 180 - i_1 \qquad b = \varphi + \psi_1 + \frac{\pi}{2}$$
$$C = \vartheta_1 \qquad c = \Omega_1 - \psi$$

und das einemal:

$$\alpha = \mu\omega_1 \qquad \beta = -\nu\varphi - \eta_\nu'',$$

das anderemal:

$$\alpha = \mu\omega_1 + \frac{\pi}{2} \qquad \beta = -\nu\varphi - \eta_\nu'',$$

so erhält man dadurch sofort:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^\nu X_{\nu\mu}^n &= \sum_0^n{}'_\rho (\Theta_1 J_1 \cos\mu \cos\nu + \Theta_2 J_2 \sin\mu \sin\nu) \cos\rho(\psi+\gamma) \\ &\quad -(\Theta_1 J_2 \sin\mu \cos\nu + \Theta_2 J_1 \cos\mu \sin\nu) \sin\rho(\psi+\gamma) \\ (-1)^{\nu+1} Y_{\nu\mu}^n &= \sum_0^n{}'_\rho (\Theta_1 J_1 \sin\mu \cos\nu + \Theta_2 J_2 \cos\mu \sin\nu) \cos\rho(\psi+\gamma) \\ &\quad (\Theta_1 J_2 \cos\mu \cos\nu - \Theta_2 J_1 \sin\mu \sin\nu) \sin\rho(\psi+\gamma),\end{aligned}\right\} \quad 12)$$

worin der Kürze halber gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} U_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta) &= \Theta_1 \qquad U_{\rho\mu}^n(\cos i_1) = J_1 \qquad \mu.\omega_1 = \mu \\ V_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta) &= \Theta_2 \qquad V_{\rho\mu}^n(\cos i_1) = J_2 \qquad \nu\varphi + \eta_\nu'' = \nu \\ \gamma &= \omega - \Omega_1. \end{aligned}\right\} \quad 12a)$$

Nun war aber:

$$H'' = \sum_0^n \sum_0^n{}'_{\mu} c''_{\nu} (H''_{\mu} X''_{\nu\mu} - K''_{\mu} Y''_{\nu\mu}),$$

so dass man schreiben kann:

$$H'' = \sum_0^n{}'_{\rho} (C_{\rho} \cos \rho(\psi+\gamma) + S_{\rho} \sin \rho(\psi+\gamma)), \qquad 13)$$

und darin ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} C_{\rho} &= \sum_0^n{}' \sum_0^n{}_{\nu} [(-1)^{\nu} c''_{\nu} \Theta_1 \cos \nu][J_1(\quad H''_{\mu} \cos \mu + K''_{\mu} \sin \mu)] \\ &+ \sum_0^n{}'_{\mu} \sum_0^n{}_{\nu} [(-1)^{\nu} c''_{\nu} \Theta_2 \sin \nu][J_2(-H''_{\mu} \sin \mu + K''_{\mu} \cos \mu)] \\ S_{\rho} &= \sum_0^n{}'_{\mu} \sum_0^n{}_{\nu} [(-1)^{\nu} c''_{\nu} \Theta_1 \cos \nu][J_2(-H''_{\mu} \sin \mu + K''_{\mu} \cos \mu)] \\ &- \sum_0^n{}'_{\mu} \sum_0^n{}_{\nu} [(-1)^{\nu} c''_{\nu} \Theta_2 \sin \nu][J_1(\quad H''_{\mu} \cos \mu + K''_{\mu} \sin \mu)]. \end{aligned} \qquad 13a)$$

Hier hängen aber die [ ] immer bloß vom Index μ oder ν allein ab. Mit Rücksicht hierauf kann man also folgendes Resultat aussprechen:

Ist die Oberfläche des Planeten durchaus convex nach außen hin, bezeichnet man ferner mit Γ und k^2 die Reflexionsfähigkeit, beziehungsweise Krümmung des Punktes, in dem die Flächennormale die Richtungscosinusse:

$$\sin p \cos l \qquad \sin p \sin l \qquad \cos p$$

hat, und ist:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_0^n{}_{\nu} c_{\nu} \cos\left(\nu l - \gamma''_{\nu} + \nu \frac{\pi}{2}\right)(P''_{\nu} \cos p) \qquad \gamma''_{0} = 0, \qquad 14)$$

so wird die Helligkeit des Planeten:

$$H = \sum_{0}^{n}{}'_{\rho}(C_{\rho}^{n} \cos \rho(\psi+\gamma)+S_{\rho}^{n} \sin \rho(\psi+\gamma)) \qquad \gamma = \omega - \Omega_1, \tag{15}$$

wobei:

$$\begin{aligned} C_{\rho}^{n} &= P_{\rho}^{n} p_{\rho}^{n} + Q_{\rho}^{n} q_{\rho}^{n} \\ S_{\rho}^{n} &= P_{\rho}^{n} q_{\rho}^{n} - Q_{\rho}^{n} p_{\rho}^{n} \end{aligned} \tag{15a}$$

und:

$$\begin{aligned} P_{\rho}^{n} &= \sum_{0}^{n}{}_{\nu} (-1)^{\nu} c_{\nu}^{n} U_{\nu\rho}^{n}(\cos \vartheta) \cos (\nu\varphi+\gamma_{\nu}^{n}) \\ Q_{\rho}^{n} &= \sum_{0}^{n}{}_{\nu} (-1)^{\nu} c_{\nu}^{n} V_{\nu\rho}^{n}(\cos \vartheta) \sin (\nu\varphi+\gamma_{\nu}^{n}) \end{aligned} \tag{15b}$$

$$\begin{aligned} p_{\rho}^{n} &= \sum_{0}^{n}{}'_{\mu} (H_{\mu}^{n} \cos \mu\omega_1 + K_{\mu}^{n} \sin \mu\omega_1) U_{\rho\mu}^{n} (\cos i_1) \\ q_{\rho}^{n} &= -\sum_{0}^{n}{}'_{\mu} (H_{\mu}^{n} \sin \mu\omega_1 - K_{\mu}^{n} \cos \mu\omega_1) V_{\rho\mu}^{n} (\cos i_1), \end{aligned} \tag{15c}$$

wo $H_{\mu}^{n} K_{\mu}^{n}$ durch das angenommene Beleuchtungsgesetz bestimmte Functionen des Phasenwinkels A sind und die im vorigen angegeben wurden.

$P_{\rho}^{n} Q_{\rho}^{n}$ hängen bloß von der Bewegung des Körpers gegen die invariable Ebene ab, es sind nämlich $\varphi \psi \vartheta$ die durch III, 3 gegebenen Ausdrücke.

$p_{\rho}^{n} q_{\rho}^{n}$ aber hängen bloß ab von der Stellung von Sonne, Erde, Planet gegen die invariable Ebene, es können nämlich (die Lage der invariablen Ebene als bekannt vorausgesetzt) die drei Winkel $i_1 \omega_1 \Omega_1$ gemäß den am Anfange dieses Abschnittes abgeleiteten Formeln aus den Ephemeriden der Sonne und des Planeten berechnet werden.

Sind zwei Hauptaxen einander gleich: $A = B$, so wird:

$$\psi = N_1 t \qquad \varphi = -N_2 t \qquad \vartheta = \text{const},$$

wobei N_1 groß gegen N_2 ist; nämlich in diesem Falle:

$$N_1 = \frac{1}{A} \cdot G \qquad N_2 = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{C-A}{C}(G^2-2Ah)}$$

$$\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}}.$$

Ist aber $A \neq B$, so treten zu diesen Werten die in III bestimmten Glieder der Periode $T_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ hinzu. Es ist also ψ ein rasch veränderlicher Winkel, der in der Zeit $T_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ einen Umlauf vollendet, während $\varphi\vartheta$ langsam veränderlich sind. Es schwingt nämlich ϑ mit der Periode $T_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ zwischen festen Grenzen hin und her, während φ in dieser Zeit um 2π wächst.

Es ist daher H eine kurzperiodische Function der Periode T_1, deren Coefficienten sich langsam ändern, indem die Theile $P_\rho^n Q_\rho^n$ die Periode T_2 haben, während die $p_\rho^n q_\rho^n$ Veränderungen unterworfen sind, die von Örtern der Sonne und des Planeten abhängen. Die Größe der kurzperiodischen Helligkeitsschwankungen kann beurtheilt werden aus folgender Gleichung, in der der obere Index n weggelassen ist, also ^{2} den Potenzexponenten bedeutet:

$$M(H^2) - M^2(H) = \frac{1}{4}\sum_1^n (P_\rho^2+Q_\rho^2)(p_\rho^2+q_\rho^2), \qquad 16)$$

wenn $M(H)$, $M(H^2)$ der Mittelwert von H, beziehungsweise H^2 während der Zeit T_1 ist.

Sind alle drei Hauptaxen gleich, so rotiert der Körper um eine fixe Axe und die invariable Ebene ist alsdann der Äquator des Planeten. Man hat in diesem Falle $\vartheta = 0$, und nach den in II gegebenen Werten von $U_{\rho\mu}^n(1) V_{\rho\mu}^n(1)$ kann man wieder mit Weglassung des oberen Index n schreiben:

$$\begin{aligned} H = &\sum_0^n c_\rho p_\rho \cos(\rho N t - \rho\Omega_1 + \gamma_\rho) \\ &+ \sum_0^n c_\rho q_\rho \sin(\rho N t - \rho\Omega_1 + \gamma_\rho), \end{aligned} \qquad 17)$$

wo $\frac{2\pi}{N}$ der Sterntag des Planeten ist und $p_\rho q_\rho$ ihre frühere Bedeutung haben.

Hängt die Function $\frac{1}{k^2}\Gamma$ bloß von p ab, so erhält man gemäß den früher angegebenen Werten von $U^n_{0\nu} V^n_{0\nu}$:

$$P^n_\rho = c^n_0 \frac{(-1)^{n+\rho}}{2^{n-1}\Pi(n+\rho)} \sin\vartheta^\rho \frac{d^{n+\rho}(1-\cos^2\vartheta)^n}{d\cos\vartheta^{n+\rho}} \qquad 18)$$
$$Q^n_\rho = 0.$$

Endlich erhält man den allgemeinen Ausdruck für H, indem man den vorhin gegebenen Wert nach n summiert und die c^n_ν, η^n_ν bestimmt denkt durch:

$$(-i)^\nu c^n_\nu e^{\eta^n_\nu i} = \\ = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(1.3..2n-1)^2}{\Pi(n+\nu)\Pi(n-\nu)} \int \Gamma(\vartheta\,\varphi) P^n_\nu(\cos\vartheta) e^{\nu\varphi i} do \qquad 19)$$

das Integral erstreckt über die ganze Oberfläche des Planeten, wenn Γ die Reflexionsfähigkeit und ϑ, φ die Richtungswinkel der Normalen.

Unter Annahme des Lambert'schen Gesetzes:

$$f(\cos i, \cos\varepsilon) = \cos i \cos\varepsilon$$

mögen nun die speciellen Werte für $n = 0, 1, 2$ folgen. Zunächst erhält man:

$$H^n_\mu = C^n_\mu . A_\mu \qquad K^n_\mu = 0$$
$$C^n_\mu = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2) P^n_\mu(x)\, dx \qquad 20)$$
$$A_\mu = \int_{-\frac{\pi-A}{2}}^{+\frac{\pi-A}{2}} (\cos A + \cos 2\varphi)\cos\mu\varphi\, d\varphi.$$

Also im einzelnen:

$$H^0_0 = \frac{2}{3}A_0 \quad H^2_0 = -\frac{4}{45}A_0 \quad A_0 = (\pi - A)\cos A + \sin A$$
$$H^1_0 = 0 \quad H^2_1 = 0 \quad A_1 = \frac{8}{3}\cos^3\frac{A}{2} \qquad 20a)$$
$$H^1_1 = \frac{3\pi}{16}A_1 \quad H^2_2 = \frac{S}{15}A_2 \quad A_2 = \frac{1}{2}(\overline{\pi - A} + \sin A\cos A).$$

$A_0 A_1 A_2$ sind stets alle drei positiv, und es ist: $A_2 > \frac{1}{2} A_0$.

Dies und die in II zusammengestellten Werte der $U^n_{\nu\mu} V^n_{\nu\mu}$ geben nun folgende drei Ausdrücke, entsprechend den Werten $n = 0, 1, 2$, wobei aber der obere Index n der Einfachheit halber unterdrückt ist.

I. $n = 0$.

$$H = \frac{2}{3} c_0 (\pi - A \cos A + \sin A).$$

II. $n = 1$.

$$H = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos(\psi+\gamma) + S_1 \sin(\psi+\gamma) \qquad \gamma = \omega - \Omega_1$$

$$C_0 = P_0 \cdot q_0 \qquad C_1 = P_1 p_1 + Q_1 q_1$$
$$S_1 = P_1 q_1 - Q_1 p_1$$

$$P_0 = 2c_0 \cos\vartheta + 2c_1 \cos\vartheta \cos(\varphi+\eta_1)$$
$$P_1 = -c_0 \sin\vartheta + c_1 \cos\vartheta \cos(\varphi+\eta_1)$$
$$Q_1 = c_1 \sin(\varphi+\eta_1)$$

$$p_0 = -\frac{\pi}{2} \cos^3 \frac{A}{2} \cos\omega_1 \sin i_1$$

$$p_1 = -\frac{\pi}{2} \cos^3 \frac{A}{2} \cos\omega_1 \cos i_1$$

$$q_1 = +\frac{\pi}{2} \cos^3 \frac{A}{2} \sin\omega_1.$$

III $n = 2$.

$$H = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos(\psi+\gamma) + C_2 \cos 2(\psi+\gamma)$$
$$+ S_1 \sin(\psi+\gamma) + S_2 \sin 2(\psi+\gamma) \qquad \gamma = \omega - \Omega_1$$

$$C_0 = P_0 p_0 \qquad C_1 = P_1 p_1 + Q_1 q_1 \qquad C_2 = P_2 p_2 + Q_2 q_2$$
$$S_1 = P_1 q_1 - Q_1 p_1 \qquad S_2 = P_2 q_2 - Q_2 p_2$$

$$P_0 = c_0(3\cos^2\vartheta - 1) + \frac{3}{2}c_1 \sin 2\vartheta \cos(\varphi + \eta_{11}) + \\ + 3c_2 \sin^2\vartheta \cos(2\varphi + \eta_{12})$$

$$P_1 = -c_0 \sin 2\vartheta + c_1 \cos 2\vartheta \cos(\varphi + \eta_{11}) + c_2 \sin 2\vartheta \cos(2\varphi + \eta_{12})$$

$$Q_1 = c_1 \cos\vartheta \sin(\varphi + \eta_{11}) + 2c_2 \sin\vartheta \sin(2\varphi + \eta_{12})$$

$$P_2 = \frac{1}{2}c_0 \sin^2\vartheta - \frac{1}{4}c_1 \sin 2\vartheta \cos(\varphi + \eta_{11}) + \\ + \frac{1}{2}c_2(1 + \cos^2\vartheta)\cos(2\varphi + \eta_{12})$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2}c_1 \sin\vartheta \sin(\varphi + \eta_{11}) + c_2 \cos\vartheta \sin(2\varphi + \eta_{12})$$

$$p_0 = -\frac{2}{45}A_0(3\cos^2 i_1 - 1) + \frac{4}{15}A_2 \sin^2 i_1 \cos 2\omega_1$$

$$p_1 = \frac{1}{15}A_0 \sin 2i_1 + \frac{2}{15}A_2 \sin 2i_1 \cos 2\omega_1$$

$$q_1 = -\frac{4}{15}A_2 \sin i_1 \sin 2\omega_1$$

$$p_2 = -\frac{2}{15}A_0 \sin^2 i_1 + \frac{4}{15}A_2(1 + \cos^2 i_1)\cos 2\omega_1$$

$$q_2 = -\frac{8}{15}A_2 \cos i_1 \sin 2\omega_1$$

$$A_0 = (\pi - A)\cos A + \sin A \qquad A_2 = \frac{1}{2}(\pi - A) + \frac{1}{2}\sin A \cos A.$$

VI.

Überblickt man die gefundene Darstellung von H, sowie die Ausdrücke von $\varphi\psi\vartheta$ in III, so erkennt man sofort, dass der Planet im allgemeinen stets Lichtschwankungen der Periode $\frac{2\pi}{N_1}$ aufweisen wird, die aber zu gewissen Zeiten 0 herabsinken können.

Nimmt man etwa die Oberfläche des Planeten gleichmäßig reflectierend an ($\Gamma = \text{Const}$) und beschränkt sich auf die Werte $n = 0, 1, 2$, so fallen die $n = 1$ entsprechenden Glieder fort, und es wird:

$$\Delta = \frac{1}{4}(P_1^2+Q_1^2)(p_1^2+q_1^2)+\frac{1}{4}(P_2^2+Q_2^2)(p_2^2+q_2^2), \qquad 1)$$

wo die $PQpq$ die in V angeführten Werte besitzen. Es war ferner:

$$\psi = \lambda_1 t + F_1(t) \qquad \varphi = -\lambda_2 t + F_2(t)$$
$$\vartheta = F_3(t), \qquad 2)$$

wo $F_1 F_2 F_3$ periodische Functionen der Periode $\frac{\pi}{\lambda_2}$ sind, so dass ϑ zwischen $\vartheta_0 < \vartheta_1$ hin- und hergeht, wo:

$$\cos\vartheta_0 = \sqrt{\frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}} \qquad \cos\vartheta_1 = \sqrt{\frac{C(G^2-2Bh)}{G^2(C-B)}}.$$

Man kann es nun so einrichten, dass $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ als Functionen von $\varphi\vartheta$ oder: $x = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi$, $y = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi$ gemeinsame Nullstellen besitzen und dann die Rotationselemente so wählen, dass die in III bestimmte Curve $X+iY = \frac{c_1+ic_2}{1-c_3}$ durch dieselben hindurchgeht. Man erhält dadurch Zeiten constanter Helle, die regelmäßig im Intervall $\tau = \frac{\pi}{\lambda_2}$ aufeinanderfolgen und bloß entstehen durch eine besondere Lage der Axe der invariablen Ebene relativ zum Körper. Es kann aber auch $\Delta = 0$ werden, wenn etwa

$$p_1 = q_1 = 0 \qquad P_2 = Q_2 = 0.$$

Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn die genannte Curve durch einen gemeinsamen Nullpunkt von $P_2 Q_2$ hindurchgeht und im gleichen Momente die Ebene der drei Körper Sonne, Planet, Erde parallel der invariablen Ebene ist, da dann $i_1 = 0$ wird.

Es könnten ferner diese Zeiten constanter Helligkeit noch dadurch verlängert werden, dass die Curve Schleifen bildet, in deren Innerem sich ein gemeinsamer Nullpunkt von $P_1\, Q_1\, P_2\, Q_2$ befindet, weil dann diese Größen in den Punkten der Schleife klein sein werden. Im Falle der freien Rotation ist aber die Curve schleifenfrei. Sie könnte jedoch solche vielleicht erhalten, wenn man jene Glieder in $\varphi\, \vartheta$ berücksichtigte, die aus der Wirkung der Sonne hervorgehen.

Außer diesem Falle des zeitweilig aussetzenden Lichtwechsels kann nun aber auch ein bloß zeitweilig eintretender Lichtwechsel statthaben. Der Planet zeigt bloß durch eine gewisse Zeit hindurch Lichtschwankungen, die dann während längerer Zeit wieder verschwinden. Es ist dies der Fall, wenn der Modul q in III an 1 heranrückt und der Körper eine gewisse Symmetrie bezüglich der Axe des mittleren Trägheitsmomentes B zeigt. Es soll nämlich angenommen werden, dass längs der Curven:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \text{Const}$$

die Flächennormalen gleich viel gegen die Axe B geneigt seien. Offenbar ist dann:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = f(\sin p \,.\, \sin l). \tag{3}$$

Es sei also f nach Kugelfunctionen entwickelt etwa gleich

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_n C_n P_0^n (\sin p \, \sin l), \tag{3a}$$

worin:

$$P_0^n(x) = \frac{\Pi(n)}{\Pi(2n)} \; \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}.$$

Diesen Ausdruck hat man nun in die Form zu bringen:

$$\sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_\nu\, c_\nu^n \cos(\nu l - \gamma_\nu^n)\, P_\nu^n (\cos p).$$

Diese Entwickelung geben aber sofort die Transformationsformeln in II für: $\psi = 0$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, indem hiedurch die XYZ-Axe beziehungsweise zur ZXY-Axe des neuen Coordinatensystemes wird. Es folgt:

$$c_\nu^n = C_n U_{0\nu}^n(0) \quad \text{(für } \nu = 0 \text{ die Hälfte)}$$

$$\gamma_\nu^n = \nu \frac{\pi}{2}.$$

Daher gehen die $P_\rho^n Q_\rho^n$ in V über in folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} P_\rho^n &= C_n \sum_0^n{}' U_{0\nu}^n(0) U_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta)\cos\nu\varphi \\ Q_\rho^n &= C_n \sum_0^n{}' U_{0\nu}^n(0) V_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta)\sin\nu\varphi \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Diese Ausdrücke summieren sich aber mit Hilfe der Additionsformel in II. Dieselbe ergibt nämlich bei leicht zu ersehender Specialisierung:

$$\left.\begin{aligned} P_\rho^n &= C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\cos\rho\chi \\ Q_\rho^n &= C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\sin\rho\chi, \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

wenn

$$\begin{aligned} \sin\zeta\cos\chi &= \cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\zeta\sin\chi &= \sin\varphi \\ \cos\zeta &= \sin\vartheta\cos\varphi \end{aligned}$$

Es sind also $\chi\zeta$ die in III bereits als Functionen der Zeit bestimmten Winkel. Somit ist, wenn $p_\rho^n q_\rho^n$ wieder die im vorigen Abschnitte angegebenen Größen sind:

$$H = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}'_\rho C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\{p_\rho^n \cos\rho(\Psi+\gamma) + q_\rho^n \sin\rho(\Psi+\gamma)\}.$$

Oder endlich:

$$H = \sum_\rho{}' (C_\rho \cos \rho(\Psi + \gamma) + S_\rho \sin \rho(\Psi + \gamma)) \tag{6}$$

$$C_\rho = \sum_\rho^\infty{}_n C_n U_{0\rho}^n (\cos \zeta)\, p$$

$$S_\rho = \sum_\rho^\infty{}_n C_n U_{0\rho}^n (\cos \zeta)\, q_\rho^n. \tag{6a}$$

Dabei hat man aus II für $U_{0\rho}^n(\cos\zeta)$ unter anderen folgende Darstellungen:

$$U_{0\rho}^n(\cos\zeta) = \frac{(-1)^{n+\rho}}{2^{n-1}\Pi(n+\rho)} \sin^\rho \zeta \frac{d^{n+\rho}(1-\cos^2\zeta)^n}{d\cos\zeta^{n+\rho}}$$

$$= 2\frac{(-1)^\rho \Pi(n)}{\Pi(\rho)\Pi(n-\rho)} \operatorname{tg}^\rho \frac{1}{2}\zeta \cos^{2n}\frac{1}{2}\zeta\, F\left(-n, -n+\rho, \rho+1, -\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\zeta\right). \tag{7}$$

Es enthält hienach C_ρ und S_ρ den Factor $\sin^\rho\zeta$, und es werden daher beide von $\rho = 1$ angefangen mit ζ zugleich sehr klein und desto rascher, je größer ρ ist; gleichzeitig werden dann natürlich die kurzperiodischen Schwankungen von H immer kleiner und kleiner. Rückt man q nahe an 1 heran, so wird ζ ein Winkel, der einer Libration derart unterworfen ist, dass er von $\frac{\pi}{2}$ rasch gegen 0, beziehungsweise π herabsinkt, also $\sin\zeta$ während einer Periode im allgemeinen klein ist und ein rasch ansteigendes Maximum 1 besitzt.

Zunächst haben die in III gegebenen Ausdrücke die Form:

$$\Psi = (N_1 - N_2)t + F(t) \qquad \zeta = F_1(t), \tag{8}$$

wobei $F(t)$ die Periode $\frac{\pi}{N_2}$ und $F_1(t)$ die Periode $\frac{2\pi}{N_2}$ hat. Es folgt ferner aus ihnen, dass ζ zwischen ζ_0 und $\pi - \zeta_0$ hin- und herschwankt derart, dass $\cos\zeta$ die Periode $\frac{2\pi}{N_2}$ und $\sin\zeta$ die Periode $\frac{\pi}{N_2}$ besitzt und wobei man für ζ_0 hat:

$$\sin\zeta_0 = -i\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\sigma}{\sigma_1}(is) = \sqrt{\frac{C(G^2-2Bh)}{G^2(C-B)}}$$ (9)

$$0 < \zeta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Es wird also ζ_0 klein mit G^2-2Bh; dies wieder gibt einen Wert von k also auch von q, der gegen 1 hin strebt.

Bezeichnet jetzt τ_1 die kurze Periode des Lichtwechsels, τ_2 die Zwischenzeit von einem maximalen Lichtwechsel bis zum nächstfolgenden, d. i. die Zeit von einem Durchgange von ζ durch $\frac{\pi}{2}$ bis zum nächsten, endlich τ_3 die Zeit, innerhalb der der Winkel ζ von $\frac{\pi}{2}$ auf ζ oder $\pi-\zeta$ herabsinkt, so ist:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{N_1 - N_2} \doteq \frac{2\pi}{N_1} \qquad \tau_2 = \frac{\pi}{N_2}.$$

und zur Bestimmung von $N_1 N_2 \tau_3$ hat man nach Abschnitt III

$$k^2 = \frac{B-A}{C-B}\cdot\frac{2hC-G^2}{G^2-2Ah} \qquad k'^2 = \frac{C-A}{C-B}\cdot\frac{G^2-2Bh}{G^2-2Ah}$$

$$\xi^2 = \frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}$$

$$\alpha^2 = \frac{(C-B)(G^2-2Ah)}{ABC} \qquad \sin\zeta_0 = \frac{C(G^2-2Bh)}{G^2(C-B)}$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$ (10)

$$N_1 = \frac{2h}{G} + \frac{\alpha}{K}\int_0^{\xi} \frac{(E-k'^2Kx^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$N_2 = \frac{\alpha\pi}{2K}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\cos\zeta}{\cos\zeta_0}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Man kann hieraus ersehen, dass sich zunächst für $N_1 N_2$ beliebige Werte festsetzen lassen, und zwar soll N_1 sehr groß gegen N_2 sein, und sich hinterher G^2-2Bh, also k', so klein wählen lässt, dass nach Ablauf einer beliebig kleinen Zeit τ_3 der Winkel ζ einen ebenfalls beliebig klein vorgeschriebenen Wert $\zeta > 0$ erreicht. Es könnte höchstens der Fall eintreten, dass dabei ein Trägheitsmoment negativ wird, und man müsste $\frac{N_1}{N_2}$ dann vergrößern.

Um dies deutlicher zu machen, wird man die Zwischenelemente N_1, N_2, q, ε einführen. Da aber q nahe an 1 liegen soll, so werden die trigonometrischen Reihen zwar noch immer, aber langsam convergieren. Diesem Übelstande kann dadurch abgeholfen werden, dass man vermöge linearer Periodentransformation der σ-Functionen ganz ebensolche Reihen wie in III ableitet, in denen aber q_1 statt q auftritt, wobei

$$\log\frac{1}{q}\cdot\log\frac{1}{q_1} = \pi^2$$

ist.

Diese Reihen schreiten dann aber nicht nach Kreis-, sondern nach Hyperbelfunctionen fort und convergieren bloß in einem endlichen Intervall. Man kann nun zwar wegen der Periodicitätseigenschaft der zu berechnenden Winkel ihre Bestimmung für jede Zeit ausführen, es bleibt aber dennoch die verlangsamte Convergenz bei Annäherung an die Grenze des Intervalles misslich. Es lassen sich aber beständig convergente Ausdrücke erhalten, wenn man die σ-Functionen nach der Transformation selbst entwickelt, ohne die Quotienten auszuführen. Auf diese Weise folgt sofort:

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \left(N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi}\right)t - \operatorname{arctg} 2 . \frac{q_1 \sin 2S \sinh 2at - q_1^4 \sin 4S \sinh 4at + q_1^9 \sin 6S \sinh 6at \dots}{1 - 2q_1 \cos 2S \cosh 2at + 2q_1^4 \cos 4S \cosh 4at - 2q_1^9 \cos 6S \cosh 6at + \dots} \qquad 11)$$

$$\cos\zeta = \frac{1+2q_1\cos 2S+2q_1^4\cos 4S+2q_1^9\cos 6S+\ldots}{1-2q_1\cos 2S+2q_1^4\cos 4S-2q_1^9\cos 6S+\ldots}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin h.at-q_1^{1\cdot 2}\sin h.3at+q_1^{2\cdot 3}\sin h.5at-\ldots}{\cos h.at+q_1^{1\cdot 2}\cos h.3at+q_1^{2\cdot 3}\cos h.5at+\ldots}. \qquad 12)$$

Dabei ist:

$$\sin h.x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \cos h.x = \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

ferner:

$$S = \frac{\pi\alpha s}{2K'} \qquad a = \frac{\pi\alpha}{2K'}.$$

Da nun $q_1 = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$, so wird, wenn man setzt:

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{q_1},$$

sein:

$$a = N_2\lambda \qquad q_1 = e^{-\pi\lambda} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = e^{-\frac{S}{\lambda}}. \qquad 13)$$

Man kann daher als die vier Elemente nehmen die Größen:

$$N_1,\ N_2,\ S,\quad q_1 \text{ oder } \lambda \qquad 0<S<\frac{\pi}{2}.$$

Durch diese vier Elemente lassen sich dann die mechanischen Constanten:

$$\frac{G}{A} \quad \frac{G}{B} \quad \frac{G}{C} \quad \frac{2h}{G}$$

nach III bestimmen. Vernachlässigt man q_1^4, so geben die Schlussformeln von III:

$$\frac{2h}{G} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi}$$

$$-4N_2\lambda\left(\frac{q_1}{1-q_1^2}\sin 2S + q_1^2 \sin 4S + q_1^3 \sin 6S\right)$$

$$\frac{G}{A} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} + N_2\lambda \operatorname{tg} S + 4N_2\lambda q_1^2 \sin 2S$$

$$\frac{G}{B} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} \tag{14}$$

$$+4N_2\lambda\left(\frac{q_1}{1-q_1^2}\sin 2S - q_1^2 \sin 4S + q_1^3 \sin 6S\right)$$

$$\frac{G}{C} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} - N_2\lambda \operatorname{ctg} S - 4N_2\lambda q_1^2 \sin 2S.$$

Endlich hat man noch für τ_3:

$$\tau_3 = \frac{\pi}{2N_2 K}\int_0^{\frac{\cos\zeta}{\cos\zeta_0}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\sqrt{k'} = 2q_1^{1/4}\frac{1+q_1^2+q_1^6+\ldots}{1+2q_1+2q_1^4+\ldots} \tag{15}$$

$$K' = \frac{\pi}{2}(1+2q_1+2q_1^4+\ldots)^2 \qquad K = \lambda . K'$$

$$\sin\zeta_0 = 4\sqrt{q_1}\,\frac{(1+q_1^6+q_1^6+\ldots)(\sin S - q_1^2 \sin 3C + q_1^6 \sin 5S - \ldots)}{(1+2q_1+2q_1^4+\ldots)(1\;\;2q_1 \cos 2S + 2q_1^4 \sin 4S + \ldots)}.$$

Ferner war schon früher angegeben. dass man die dem Falle:

$$\frac{G}{A} > \frac{2h}{G} > \frac{G}{B} > \frac{G}{C}$$

entsprechenden Formeln dadurch erhält, dass man $\omega+\omega'$ statt ω setzt, wodurch $\sigma\,\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ in $\sigma\,\sigma_2\sigma_1\sigma_3$ übergehen.

Man kann diesen Fall $G^2-2hB<0$ aber auch dadurch erhalten, dass man s, somit auch S negativ nimmt. Nur wird dann nicht mehr $A<B<C$, sondern $A>B>C$ sein.

VII.

Schließlich mögen noch die entwickelten Gleichungen auf ein einfaches numerisches Beispiel Anwendung finden. Es wird dieses aber bei der Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten — es traten ja 12 die Form und Rotation des Körpers bestimmende Constanten auf — eine nur sehr specielle Veranschaulichung bieten können, so dass in Wirklichkeit die Verhältnisse vielleicht ganz verschiedene sein können.

Bezüglich der Form des Körpers soll eine derartige Symmetrie bezüglich einer willkürlichen Axe angenommen werden, dass $\frac{\Gamma}{k^2}$ bloß von der Neigung der Flächennormale gegen eben diese Axe abhängt (z. B. ein Rotationskörper). Allemal, wenn diese Axe bei der Rotationsbewegung des Körpers normal zur invariablen Ebene zu stehen kommt, wird dann der Lichtwechsel aussetzen.

Hat nun diese Axe im System der Hauptaxen des Körpers die Länge α, die Poldistanz ε und ist π die Neigung der Flächennormale gegen dieselbe, so wird zunächst sein:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_{0}^{\infty} {}_n \, C_n P_0^n(\cos \pi), \tag{1}$$

und man wird, um auf die Hauptaxen überzugehen, in den Transformationsformeln zu setzen haben:

$$\psi = \text{willkürlich} \qquad \varphi = \pi - \alpha \qquad \vartheta = -\varepsilon,$$

wodurch man erhält:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_{0}^{\infty} {}_n \sum_{0}^{n}{}' A_\mu^n \cos \mu(l-\alpha) P_\mu^n(\cos \pi) \tag{2}$$

$$A_\mu^n = C_n U_{0\mu}^n(\cos \varepsilon).$$

Also hat man zu nehmen:

$$c_\nu^n = C_n U_{0\nu}^n(\cos \varepsilon) \qquad \gamma_\nu^n = \nu\alpha$$

(für $\nu = 0$ die Hälfte).

Diese Werte geben für die Coefficienten $P_1 Q_1$:

$$P_\rho^n = \sum (-1)^\nu C_n U_{0\nu}^n(\cos\varepsilon) U_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta)\cos\nu\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Q_\rho^n = \sum (-1)^\nu C_n U_{0\nu}^n(\cos\varepsilon) V_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta)\sin\nu\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right).$$

Oder:

$$P_\rho^n = (-1)^{n+\rho} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\cos\rho\chi$$
$$Q_\rho^n = (-1)^{n+\rho} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\sin\rho\chi \qquad 3)$$

worin:

$$\cos\zeta = -\cos\varepsilon\cos\vartheta - \sin\varepsilon\sin\vartheta\sin(\alpha+\varphi)$$
$$\sin\zeta\cos\chi = \cos\varepsilon\sin\vartheta - \sin\varepsilon\cos\vartheta\sin(\alpha+\varphi) \qquad 3a)$$
$$\sin\zeta\sin\chi = \sin\varepsilon\cos(\alpha+\varphi).$$

Mit diesen Ausdrücken lässt sich sofort die Helligkeit H in die Gestalt setzen:

$$H = \sum_n \sum_\rho R_\rho^n (p_\rho^n \cos\rho(\psi-\Omega_1+\chi) + q_\rho^n \sin\rho(\psi-\Omega_1+\chi)) \qquad 4)$$

$$R_\rho^n = (-1)^{n+\rho} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta). \qquad 4a)$$

Beschränkt man sich jetzt auf die Werte $n = 0, 1, 2$ und nimmt die Reflexionsfähigkeit als constant an, wodurch $C_1 = 0$ wird, so hat man:

$$H = \frac{1}{2}c_0 + c_1\cos(\psi-\Omega_1+\chi) + c_2\cos(\psi-\Omega_1+\chi)$$
$$+ s_1\sin(\psi-\Omega_1+\chi) + s_2\sin(\psi+\Omega_1+\chi)$$

$$\frac{1}{2}c_0 = \frac{2}{3}A_0 C_0 + \frac{1}{2}R_0 p_0 \qquad 5)$$

$$c_1 = R_1 p_1 \qquad s_1 = R_1 q_1 \qquad R_0 = C_2(3\cos^2\zeta - 1)$$
$$c_2 = R_2 p_2 \qquad s_2 = R_2 q_2 \qquad R_1 = C_2\sin 2\zeta$$
$$R_2 = \frac{1}{2}C_2\sin^2\zeta.$$

Dabei haben die $p\,q$ die bereits früher angegebenen Werte, und es ist ferner:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = C_0 + C_2\left(\cos^2\pi - \frac{1}{3}\right). \tag{6)}$$

Nimmt man etwa ein Rotationsellipsoid an, so sei:

$$\eta = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

und es wird:

$$\frac{2}{\Gamma a^2}C_0 = 1+(1-\eta)J$$

$$\frac{24}{45\Gamma a^2}C_2 = \frac{(3-\eta)-(3+\eta)(1-\eta)J}{\eta}$$

$$J = \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\log\frac{1+\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}} \tag{6a)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\eta}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\eta}$$

und wenn η sehr klein: $\gamma = \frac{C_2}{C_0} = 2\eta = 4\alpha$, $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

Es muss ferner $\frac{\Gamma}{K^2} > 0$ sein, also: $-\frac{3}{2} < \gamma < 3$.

Endlich möge des weiteren angenommen werden, dass zwei der Hauptaxen gleich sind: $A = B$. Dann wird einfach:

$$\psi = N_1 t \qquad \varphi = -N_2 t \qquad \vartheta = \text{const}$$

$$\frac{C-A}{C} = \frac{N_2}{N_1}\cos\vartheta. \tag{7)}$$

Nun möge gesetzt werden: $\varepsilon = \vartheta = 45°$, also:

$$\cos\frac{\zeta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2} \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Man sieht, dass stets, wenn $\zeta = \pi$ wird, sämmtliche R, also überhaupt der Lichtwechsel, verschwindet, ferner ist nahezu bei $\zeta = \frac{\pi}{2}$ stärkster Lichtwechsel. Hiebei verschwindet aber R_1, beziehungsweise ist es klein wegen des Factors $\cos\zeta$,

d. h. die Lichtcurve weicht wenig von einer Sinuscurve ab, die zwei Maxima und zwei Minima in jeder Periode besitzt. Da endlich $c_2 s_2$ den Factor $\sin^2 \zeta$, dagegen $c_1 s_1$ nur $\sin \zeta$ enthalten, wird beim Verschwinden des Lichtwechsels sich die Lichtcurve immer mehr einer Sinuscurve mit einem Maximum und einem Minimum innerhalb einer Periode nähern.

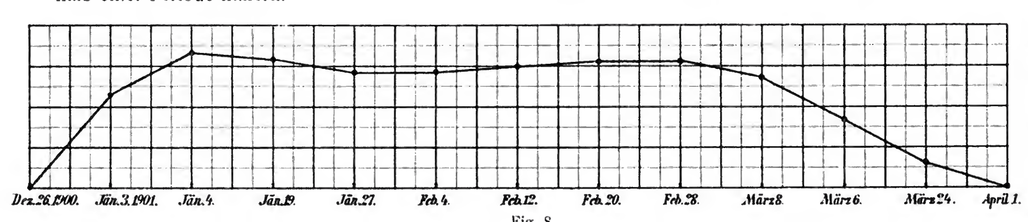


Fig. 8.

Für die numerische Ausrechnung wurde weiter als der beleuchtete Körper der Planet Eros gewählt und seine Coordinaten der Ephemeride von Millosevich (A. N. 3662) entnommen. Da der Erdäquator keinerlei ausgezeichnete Lage gegen die Bahnebenen von Erde und Eros besitzt, so ist $i = 0$ angenommen, d. h. die invariable Ebene ist dem Erdäquator parallel. Für den Winkel φ wurde die Periode von 96 Tagen gewählt und derselbe gleich 0 angenommen für Februar 12. Hieraus und aus den entsprechenden Sonnencoordinaten bestimmten sich die in V auftretenden Größen von acht zu acht Tagen und schließlich folgte daraus die früher eingeführte Größe:

$$\Delta^2 = M(H^2) - (MH)^2,$$

deren Verlauf die gezeichnete Curve veranschaulicht.

	α_1	δ_1	α_2	δ_2	lg r	lg r_1	lg A	A	a
Jänner 3	283°5	−22°9	32°4	37°1	9·9926	0·0660	9·5001	48°5	46°3
11	292·2	−21·9	38·0	34·0	27	14	054	51·2	57·1
19	300·9	−20·4	44·5	30·2	30	0579	144	53·5	67·0
27	309·2	−18·6	51·4	26·9	34	55	271	55·4	76·2
Februar 4	317·5	−16·3	58·8	23·7	39	44	431	56·7	84·5
12	325·4	−13·8	66·2	20·5	45	45	625	57·6	91·8
20	333·2	−11·1	73·7	17·5	52	59	849	58·0	97·6
28	340·8	−8·1	81·1	14·7	60	84	6100	58·1	101·5
März 8	348·2	−5·0	88·4	12·0	69	0621	370	57·8	102·0
16	355·6	−1·9	95·6	9·6	79	69	658	57·2	97·0
24	2·9	+1·2	102·6	7·3	89	0725	958	56·5	83·6
April 1	10·1	+4·4	109·5	5·2	99	89	7265	55·5	64·0

	d	α	δ	i_1	ω_1	φ	ψ	Δ	
Jänner 3	−52°1	242°5	−36°8	142°1	192°9	150°	158°9	0·23	
11	54·9	248·8	−34·6	144·9	189·6	120	138·6	0·33	
19	−57·7	255·5	−32·0	147·8	187·2	90	120·0	0·32	
27	−60·8	262·6	−29·1	150·8	185·6	60	104·5	0·29	
Februar 4	64·1	269·8	25·8	154·0	184·7	30	93·8	0·29	
12	−67·5	276·9	−22·5	157·5	184·8	0	90·0	0·30	
20	−70·9	284·0	19·0	160·9	186·1	330	93·8	0·31	
28	−74·4	291·0	−15·4	164·4	189·2	300	104·5	0·31	
März 8	−77·6	297·8	−11·9	167·6	195·5	270	120·0	0·27	
16	−80·4	304·4	−8·5	170·4	207·1	240	138·6	0·17	
24	82·3	310·8	−5·3	172·3	226·9	210	158·9	0·06	
April 1	82·6	317·0	2·2	172·6	252·9	180	180·0	0·00	

Um über die Größe des Lichtwechsels eine Vorstellung zu gewinnen, bemerke man, dass z. B. für Februar 12 folgt:

$$H = 1{\cdot}33\, C_0 - 0{\cdot}11\, C_2 + 0{\cdot}30\, C_2 \sin 2 N_1 t.$$

Also:

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \frac{1+0{\cdot}14\gamma}{1-0{\cdot}31\gamma} \text{ für } \gamma > 0 \qquad = \frac{1+0{\cdot}31\gamma}{1-0{\cdot}14\gamma} \text{ für } \gamma < 0.$$

Für eine Schwankung von einer Größenclasse folgt:

$$\gamma = 1{\cdot}6 \quad \text{oder} \quad \gamma = -2{\cdot}3,$$

welcher zweite Wert nicht mehr die Bedingung erfüllt:

$$-\frac{3}{2} < \gamma < 3.$$

Versuch einer Theorie der mechanischen und colloidalen Suspensionen

von

Dr. Jean Billitzer.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1902.)

Versuche über die Hydrodiffusion gelöster Körper führten Graham[1] dazu, eine Eintheilung der in Lösung befindlichen Substanzen in »Krystalloide« und in »Colloide« vorzunehmen. »Sie erscheinen wie verschiedene Welten der Materie« schreibt er 1861 und er vergleicht ihren Gegensatz mit demjenigen, »welcher zwischen dem Material eines Minerals und dem einer organisierten Masse besteht«.

Welch richtiger Kern den Gedanken erfüllt, der dem letzten Satze zugrunde liegt, haben erst kürzlich die schönen Bredigschen Arbeiten erwiesen; und dennoch konnte es Graham nicht gelingen, den Gegensatz zu präcisieren: So augenfällig der Unterschied erschien, das Charakteristische der Erscheinung war in keiner wesentlichen, nur in einer graduellen Verschiedenheit zu finden. Und auch heute wissen wir nach 40jähriger Forschung kaum ein scharfes Unterscheidungsmerkmal anzugeben, so eng verwandt erscheinen die Gruppen, deren Gegensatz so offen zutage trat. Nicht an die Substanzen selbst ist er gebunden — gibt es doch Beispiele genug, in denen ein Element oder eine Verbindung von dem einen in den anderen Zustand übergeht, auch ist er nicht in der Beschaffenheit der einzelnen Theilchen begründet, werden die Unterschiede doch

[1] L. Ann. 121, 1, 1862.

erst in Lösungen merklich, d. h. in Berührung mit einem zweiten Körper. Hier allein offenbart sich der Gegensatz und die charakteristischen Verschiedenheiten von den krystalloiden Lösungen geben sich zunächst durch geringe Diffusionsfähigkeit, äußerst kleinen osmotischen Druck u. a. m. zu erkennen, deren eingehendere Besprechung folgen wird.

Die Berührung mit dem Lösungsmittel muss also zu einem anderen Zustande geführt haben, als ihn die Lösung eines Krystalloides vorstellt. Sei es, dass Colloid und Lösungsmittel eine Pseudolösung bilden, sei es, dass das Colloid überhaupt keine Lösung eingeht, sondern eine Art äußerst feiner Suspension vorstellt.

Die letztere Auffassung hat wohl zuerst Faraday, wenn auch noch nicht in allgemeiner Form, ausgesprochen,[1] später wurde sie eingehender von Ostwald,[2] Paternò,[3] Barus und Schneider,[4] van Bemmelen,[5] Bredig,[6] Lottermoser[7] u. a. discutiert und vertreten, während einige Forscher noch der Ansicht sind, dass wir es mit einer Lösung zu thun haben.

Da die Klarlegung dieses Punktes für die später zu ziehenden Schlüsse von entscheidender Wichtigkeit sein wird, dürfte es geboten sein, denselben erst näher zu erläutern. Bevor wir dies aber thun, wird eine Einschränkung des zu betrachtenden Materiales vonnöthen sein. Das nähere Studium der Colloide hat nämlich zu einer abermaligen Theilung in zwei Gruppen — ähnlich der Eintheilung der Krystalloide in krystallinisch und amorph — geführt. So unterscheidet Sabanejew[8] niedere Colloide, welche durch Gefrieren in

[1] Pogg. Ann. 101, 383.

[2] Lehrbuch I. 527; Wissenschaftliche Grundlagen der analyt. Chemie. 2. Aufl., 37.

[3] Zeitschrift für physik. Chemie, 4, 457; 1889.

[4] Zeitschrift für physik. Chemie, 8, 278; 1891.

[5] Zeitschrift für anorgan. Chemie, 13, 233, 1897; 23, 111, 321, 1900; 18, 14, 98; 1898.

[6] Anorgan. Fermente, Leipzig 1901, 11 ff.

[7] Anorgan. Colloide, Stuttgart 1901; 67 ff.

[8] Journ. d. russ. physik.-chem. Ges. 1891, I, 80; Ber. 24 (R.) 666, 1891; Centralbl. 1891, I, 10.

wässeriger »Lösung« nicht verändert werden und nach der Siedepunktsmethode, respective durch die Messung des osmotischen Druckes Moleculargewichte unter 30.000 geben, z. B. Wolframsäure, Molybdänsäure, Arabinsäure, Tannin, Glycogen, Inulin etc. von höheren oder »typischen« Colloiden, welche beim Gefrieren der wässerigen »Lösung« coagulieren und dadurch unlöslich werden, sie geben Moleculargewichte oberhalb 30.000, ihre Vertreter sind die colloidalen Metalle, ferner Kieselsäure, Eisenhydroxyd, Schwefelantimon u. s. f.

Die Unterscheidung wird, glaube ich, schärfer, wenn man das verschiedene Verhalten gegen gelöste Elektrolyte ins Auge fasst und als typische oder »echte« Colloide diejenigen bezeichnet, welche durch geringfügige Elektrolytzusätze ausgefällt werden. Diese sollen allein den Gegenstand unserer ferneren Betrachtungen bilden.

Haupteigenschaften der Colloide.

1. Diffusion.

Der erste Unterschied, welcher uns auffällt, zugleich das erste Charakteristikon, welches Graham (l. c.) für die Colloide angibt, ist ihre träge Diffusion. In Ermangelung zuverlässiger Messungen an echten Colloiden seien hier und im nächsten Abschnitte einige an niederen Colloiden gefundene Zahlen angeführt.

Graham beobachtete die Zeiten, welche zur Erreichung gleich großer Diffusion erforderlich waren und fand so für verschiedene Körper bei 10°:

Krystalloide	Zeit	Colloide	Zeit
Salzsäure	1	Eiweiß	49
Chlornatrium	2·33	Karamel	98
Zucker	7		
Magnesiumsulfat ..	7		

Echte Colloide scheinen noch viel langsamer zu diffundieren.

Eine weitere Eigenthümlichkeit ist die Undurchlässigkeit von Colloiden für fremde Colloide. Entweder es tritt keine oder soviel wie keine Diffusion ein, oder die Colloide fallen aus.

2. Osmotischer Druck.

Ihrer geringen Diffusionsfähigkeit entsprechend, besitzen die Colloide einen außerordentlich kleinen osmotischen Druck, führen eine kaum messbare Depression des Dampfdruckes und eine unmerkliche Siedepunktserhöhung herbei. Bei so kleinen Differenzen können die geringsten Verunreinigungen durch Elektrolyte, Kohlensäure der Luft, gelöstes Glas etc. die Resultate entstellen. Die sicherste Methode besteht daher in der Messung des osmotischen Druckes mit Hilfe von Pergament- oder thierischen Membranen. Diese gestatten gelösten Krystalloiden den Durchgang und vermindern so die Fehlergrenze.

Auch hier muss ich mich damit begnügen, einige an unechten Colloiden gemessene Werte anzugeben, da an echten Colloiden, der Geringfügigkeit des Effectes zufolge,[1] keine verlässlichen Zahlen gewonnen werden konnten.

Messungen an niederen Colloiden hat schon Pfeffer[2] angestellt; sie wurden ergänzt von Linebarger,[3] Sabanejew und Alexandrow,[4] Brown und Morris,[5] Tamann[6] und Paternò.[7]

Einige Zahlen mögen zur Orientierung angeführt werden; zum Vergleiche stelle ich zwei Daten für Rohrzucker voran.

Die Zahlen für das Moleculargewicht sind als untere Grenzwerte aufzufassen.

[1] Coehn, Z. f. Elektrochemie 4.

[2] Osmot. Untersuchungen, Leipzig 1877.

[3] Sill. Journ. [3] 43, 218, 1892.

[4] Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 2, 7—19, 1891. Zeitschrift phys. Chem. (R.) 9, 88; 1892.

[5] Journ. chem. Soc. 1889, 462.

[6] Mem. d. Petersburger Akad. 35, Nr. 9 (1887).

[7] Zeitschrift für physik. Chemie, 4, 457 (1889).

Substanz	Conc.	Temp.	Druck in Millimetern Hg	Moleculargewicht daraus berechnet	Beobachter
Zucker	1%	15°	518		Pfeffer l. c.
	6	15	3108		
Arab. Gummi......	1	15	69	2570	
	6	15	259	4110	
Dextrin...........	1	16	166	1080	
Conglutin	2	16	38	9500	
Leim.............	6	23·3°	237	4900	
Wolframsäure	24, 67 *g/l*	17°	252	1700	Linebarger l. c.

Sabanejew fand, dass eine 44·5procentige Eieralbuminlösung eine Gefrierpunktserniedrigung von nur 0·06° liefert, was etwa ein Moleculargewicht von 14.000 ergibt. Bei Versuchen, die ich selbst an colloidalen Metallösungen anstellte, konnte ich keine sichere Gefrierpunktserniedrigung oder Siedepunktserhöhung nachweisen; dieselbe beträgt höchstens wenige Tausendtel Grade.

Endlich finden sich noch in der Literatur Zahlenangaben von Gefrierpunktserniedrigungen vor, die Paternò[1] an einigen unechten Colloiden gemessen hat. Von diesen seien beispielsweise angeführt:

	Conc.	Erniedrigung	Moleculargewicht
Gummi arabicum	7·49	0·030°	4625
	16 66	0·085	3700
Gallussäure	0·750	0·07	18500
Digallussäure........	13·65	0·125	2055

[1] Zeitschrift für physik. Chemie, 4, 458 (1889).

3. Optische Inhomogenität.

Bei der Betrachtung mit freiem Auge und selbst bei der Untersuchung mit den besten Mikroskopen lassen colloidale Lösungen nicht die Anwesenheit irgend welcher heterogener Partikelchen erkennen. Da wir es also höchstens mit Theilchen zu thun haben können, die nicht größer als die sichtbaren Lichtwellen sind, benützte schon Faraday[1] einen empfindlicheren Versuch, die colloidalen Goldlösungen auf ihre Homogenität zu prüfen. Es ist dies der sogenannte Tyndall'sche Versuch.[2] Lässt eine »Lösung« unter dem Mikroskope keine suspendierten Theilchen erkennen, so wird ein Lichtbündel durch dieselbe geschickt. Hier erfährt es verschiedene Änderungen beim Passieren der Lösung, je nachdem ein Krystalloid. z. B. ein fluorescierender Körper oder ein Colloid in derselben enthalten ist. Im ersten Falle ist das zerstreute Licht unpolarisiert,[3] im zweiten kann man leicht mit Hilfe eines Nicols nachweisen, dass es in der Lösung theilweise polarisiert worden ist.[4] Faraday zog daraus den Schluss, dass die »Lösung« Theilchen enthalten muss, denen noch die Fähigkeit zukommt, Lichtwellen zu spiegeln.

Diese Eigenschaft haben die Colloide neben vielen anderen mit den trüben Medien gemein. In diesen wird ein einfallender Strahl weißen, unpolarisierten Lichtes nach allen Seiten hin diffus reflectiert. Das reflectierte Licht ist theilweise polarisiert, und zwar findet die stärkste Polarisation in einer Ebene statt, die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Primärstrahles steht.

4. Verhalten bei der Filtration.

Wir haben eingangs schon erwähnt, dass die Colloide durch Membranen nicht diffundieren. Um eine (freilich unvoll-

[1] Pogg. Ann. 101, 383.

[2] Tyndall, Die Wärme. 4. Aufl., 595. Vergl. auch Stokes, Phil. Trans. 1852, 463.

[3] G. C. Schmidt, Wied. Ann. 60, 740.

[4] Vergl. Bredig, Zeitschr. f. angew. Chemie, 1898, 954; Z. f. Elektrochemie, 4, 514, 547. Barus und Schneider, Zeitschr. f. phys. Chemie, 8, 273 (1891). Linder und Picton, J. of chem. Soc. 61, 137, 148 (1892); 67, 63 (1895).

ständige) Trennung derselben von Elektrolyten zu erreichen, genügt es also, colloidale Lösungen durch Membranen zu filtrieren, respective sie der Dialyse zu unterwerfen. Mit den gewöhnlichen mechanischen Hilfsmitteln gelingt keine Trennung, dieselbe ist nur in wenigen Fällen bei der Filtration durch poröse Thonzellen unter Druck zu erreichen. So fanden Linder und Picton (l. c.), dass colloidales Eisenoxyd und $As_2S_3\ \gamma$ bei diesem Processe zurückgehalten wurden, während alle übrigen Colloide auf diesem Wege nicht aus der »Lösung« entfernt werden konnten. Eine Trennung durch Filtrierpapier gelingt bei Hydrosolen nicht, da sie ungeändert durch das Filter laufen, ermöglicht aber die Entfernung größerer fremder Partikeln oder gebildeten Sedimentes.

5. Wanderung in einem Stromgefälle.

Colloidale »Lösungen« wandern mit oder gegen den elektrischen Strom, vermögen aber dabei keine Membranen zu durchdringen, sie scheiden sich also an diesen als ein feiner Schlamm ab und unterscheiden sich dadurch von den Ionen. Versuche hierüber wurden von Linder und Picton,[1] Coehn,[2] Zsigmondy,[3] Bredig,[4] Hardy,[5] Billitzer[6] u. a. an colloidalen Metallen, Schwefelarsen, Eisenhydroxyd, Magdalaroth, Hämoglobin, Tannin, Stärke u. s. f. angestellt.

Die Analogie mit suspendierten Körpern ist in die Augen fallend, denn auch diese wandern, wie Quincke[7] nachgewiesen hat, in einem Potentialgefälle, ohne Membranen passieren zu können. Quincke und Helmholtz[8] nehmen zur Erklärung an, dass die Theilchen im elektrischen Gegensatze zu der Lösung stehen. Coehn (l. c.) deutet die Wanderung der Colloidtheilchen auf gleiche Weise.

[1] Journ. chem. Soc. (1892), 61, 160.
[2] Zeitschrift für Elektrochemie, 4, 63.
[3] Zeitschrift für Elektrochemie, 4, 546.
[4] Zeitschrift für angew. Chemie, 1898, 954.
[5] Zeitschrift für physik. Chemie, 33, 385 (1900).
[6] Zeitschrift für Elektrochemie, VIII, 638 (1902).
[7] Pogg. Ann. 113, 583 (1861).
[8] Wied. Ann. 7, 351 (1879).

6. Coagulation.

Eine weitere Analogie mit Suspensionen zeigen colloidale Lösungen in ihrem Verhalten gegen Elektrolyte. Es war schon mehrmals beobachtet worden, dass feine Aufschlämmungen und Suspensionen in reinem Wasser beim Zusatze einer Spur irgend eines Salzes oder einer Säure ausflocken und sich bald absetzen — dieselbe Erscheinung, die wir für Colloide typisch genannt haben. Besonders sorgfältige Untersuchungen hiefür verdanken wir Bodländer.[1] Wir entnehmen denselben folgende Hauptpunkte:

A. Zusätze von Nichtelektrolyten, wie: Methylalkohol, Äthylalkohol, Isobutylalkohol, Äthyläther, Rohrzucker, Acetaldehyd, Paraldehyd, Aceton, Traubenzucker, Milchzucker, Phenol, β-Naphtol, Anilin u. s. f. bewirken keine Klärung. Von einer Lösung, die 1·1088 *g* Kaolin im Liter enthielt, wurden 155 cm^3 mit 6 cm^3 des zu untersuchenden Zusatzes versetzt. Nach 69 Minuten enthielten dann 100 cm^3:

Zusatz	Gehalt in 100 cm^3 nach 69 Minuten
Wasser	0·8900
Methylalkohol	0·8940
Äthylalkohol	0·8975
Isobutylalkohol	0·9445
Äthyläther	0·9285
Rohrzucker (23proc. Lösung)	0·9325

Eine Beschleunigung der Fällung tritt also nicht ein.

B. Zusätze von Elektrolyten bewirken eine Klärung, doch wird dieselbe erst nach Überschreitung einer bestimmten Concentration, des »Schwellenwertes« hervorgerufen.

Eine Aufschlämmung, die 0·8875 *g* Kaolin in 100 cm^3 enthielt, zeigte nach 90 Minuten langem Stehen bei 17·8° in Salzsäure folgenden Titers einen Gehalt:

[1] Jahrb. f. Mineralogie, 1893, II, 147. Göttinger Nachr. 1893, 297. Vergl. auch Barus, Journ. of Science, 37, 122 (1889); Spring, Acad. de Belgique, 483 (1900).

HCl.

	Milligramm Äquivalent	Gehalt an Kaolin
Nullversuch:	0	0·6795
	0·020	0·6585
	0·025	0·6735
	.....	......
	0·027	0·6020
	0·030	0·4415

$\frac{1}{2}$ $Ba(OH)_2$.

Dauer des Versuches 104·5 Minuten, Temperatur 19°

	Milligramm Äquivalent	Gehalt an Kaolin
Nullversuch:	0	0·7280
	0·035	0·7280
	.....	......
	0·0450	0·4235

$\frac{1}{2}$ $ZnSO_4$.

Dauer des Versuches 88·5 Minuten, Temperatur 21·2°

	Milligramm Äquivalent	Gehalt an Kaolin
Nullversuch:	0	0·7395
	0·0184	0·7388
	......	......
	0·0245	0·2900

NH_4NO_3.

Dauer des Versuches 89 Minuten, Temperatur 17·3°

	Milligramm Äquivalent	Gehalt an Kaolin
Nullversuch:	0	0·7975
	0·2	0·764
	......	......
	0·2667	0·6940

Eine Erhöhung der Klärfähigkeit mit der Temperatur ist nur dann deutlich erkennbar, wenn auch geringe Vermehrung des Zusatzes bei gleichbleibender Temperatur stärkere Klärung herbeiführt. Ist der Schwellenwert überschritten, so beschleunigt eine Temperaturerhöhung um 30 bis 40° die Klärung um circa 10%.

C. Ähnliche Versuche hat Hardy[1] mit den Hydrosolen von Mastix, Gold und Ferrihydroxyd vorgenommen. Die Resultate weisen eine durchgehende Parallelität mit den Bodländerischen auf. Hardy bestimmt die Concentration, welche Coagulation hervorrief, während Bodländer die Concentrationen der Mengen angibt, welche die Klärungsgeschwindigkeit seiner Kaolinsuspensionen verdoppelte. Die absoluten Werte weichen daher voneinander ab, ihr Verhältnis bleibt aber dasselbe, wie die nebenstehende Zusammenstellung zeigt.

Einige Regelmäßigkeiten sind zu erwähnen. Für die Fällung eines negativen Hydrosols spielt das positive Ion des zugesetzten Elektrolyten eine vorwaltende Rolle, umgekehrt werden positive Colloide durch das negative Ion gefällt. Im Zusammenhange damit üben gleich starke Säuren eine (innerhalb der Versuchsfehler) annähernd gleiche coagulierende Kraft auf negative Theilchen aus, gleich starke Basen auf positive Colloide. Für die Fällung von elektronegativen Trübungen und Sole durch Basen, von elektropositiven durch Säuren besteht keine so einfache Beziehung. Im übrigen besteht aber annähernde Parallelität zwischen Leitfähigkeit der coagulierenden Lösung und ihrem Fällungsvermögen, eine

[1] Zeitschrift fur physik. Chemie, 33, 385 (1900).

von Hardy und Bodländer unabhängig mitgetheilte Beobachtung, welche in Übereinstimmung steht mit den Versuchsergebnissen von Barus, Spring, E. v. Meyer (l. c.), Lottermoser[1] u. a.

Hardy:

Hydrosol	Zusatz	Erforderl. Concentration zur Coagulation in Gramm-Äquivalent pro Liter	Specifische Leitfähigkeit der coagulierenden Lösung	Temperatur
Gold (elektronegativ)	NaOH	0·08	152	17
	KOH	0·09	189	17
	$Ba(OH)_2$	0·16	—	100
	Ammoniak	∞	—	17—100
	HCl	0·008	29	17
	H_2SO_4	0·0084	26	17
	NaCl	0·013	13	17
	$BaCl_2$	0·004	4·4	17
	K_2SO_4	0·026	28	17
Ferrihydroxyd (elektropositiv)	KOH	0·001	2·2	16
	$Ba(OH)_2$	0·001	2·3	16
	HCl	0·5	1650	16
	HNO_3	0·5	1589	16
	H_2SO_4	0·002	6·8	16
	$C_2H_2O_4$	0·002	3·4	16
	K_2SO_4	0·0006	0·77	16
	$MgSO_4$	0·0005	0·5	16
	$BaCl_2$	0·3	255	16
	NaCl	0·5	28	16

[1] Das hier angeführte Zahlenmaterial würde zur Ableitung einer Beziehung zwischen Fällungsvermögen und coagulierender Kraft nicht genügen, es sei daher hierorts im besonderen auf die Originalabhandlungen verwiesen.

Bodländer:

Zusatz	100 cm^3 Suspension enthielten	
	Milligramm	Milligramm-Äquivalent
HNO_3	0·1008	0·0016
CCl_3CO_2H	0·2595	0·0016
HCl	0·0618	0·0017
$\frac{1}{2}\ H_2SO_4$	0·0980	0·0020
$\frac{1}{2}\ MgCl_2$	0·0758	0·0016
$\frac{1}{2}\ Pb(CH_3CO_2)_2$	0·2622	0·0017
$\frac{1}{2}\ CaCl_2$	0·1634	0·0029
$NaNO_3$	1·1320	0·0133
$\frac{1}{3}\ H_3PO_4$	0·5368	0·0183
$\frac{1}{2}\ Ba(OH)_2$	3·8205	0·3700
$\frac{1}{2}\ C_2H_2O_4$	16·6430	0·3700
$NaOH$	47·3760	1·1856

Das Vermögen der verschiedenen Salze, ein Hydrosol zu fällen, nimmt mit der Wertigkeit des fällenden Iones, das im Salze enthalten ist, rasch zu. Diese Eigenthümlichkeit wurde zuerst von Schulze[1] beschrieben, von Prost,[2] Picton und Linder[3] bestätigt. Hardy (l. c.) zeigte, dass die Zunahme des Coagulationsvermögens eines Metalles mit seiner Wertigkeit ungefähr im Verhältnisse

$$\overset{+}{m'} : \overset{++}{m''} : \overset{+++}{m'''} = k : k^2 : k^3$$

steht, wenn die Coagulierungskraft mit k, die Wertigkeit durch die Indices bezeichnet wird.

7. Adsorption.

Auch die Eigenschaft, Trübungen und gelöste Körper leicht zu adsorbieren, um sie nur schwer wieder abzugeben, haben colloidale Lösungen mit Suspensionen und überhaupt mit allen Körpern gemein, welche der Flüssigkeit eine große Oberfläche darbieten. Auf eine besondere Eigenthümlichkeit soll später mehr Nachdruck gelegt werden.

8. Leitfähigkeit.

Solange man Colloide nur auf chemischem Wege herstellen konnte, war keine sichere Leitfähigkeit der colloidalen Metalle nachzuweisen, da sie spurenweisen Verunreinigungen zugeschrieben werden musste; nun wir aber in der Bredig'schen Darstellungsmethode ein Mittel gewonnen haben, ganz reine colloidale Metalle herzustellen, gelang es mir, sicher nachzuweisen, dass das zerstäubte Metall die Leitfähigkeit des verwendeten Wassers auf das 1·5- bis Dreifache vermehrt. Auch auf diese Eigenthümlichkeit kommen wir noch zurück.

9. Katalyse.

Die katalytischen Wirkungen der Colloide sind von Bredig[4] eingehend beschrieben und untersucht worden, so dass es genügt, hierorts auf diese Arbeiten zu verweisen.

---

[1] Ibid. 25, 431 (1882).

[2] Bull. de l'acad. Roy. de Belg. [3], 14, 312 (1887).

[3] J. chem. Soc. 67, 63 (1895).

[4] L. c. und Zeitschrift für physik. Chemie, 31, 258; 37, 1; 37, 323.

10. Stabilität.

In reinem Wasser verschlossen aufbewahrt, sind Colloide für sich monate-, selbst jahrelang haltbar und nur ganz allmählich setzt sich ein feiner Schlamm coagulierten Metalles ab.

Über die Natur colloidaler Lösungen.

Fassen wir alle charakteristischen Eigenschaften zusammen, so finden wir, dass eine Analogie mit gewöhnlichen Lösungen nur in der Fähigkeit besteht, osmotischen Druck auszuüben, etwas zu diffundieren und ohne spontane Fällung lange aufbewahrt werden zu können, während sämmtliche anderen Eigenthümlichkeiten darauf deuten, dass wir es mit Suspensionen zu thun haben, besonders aber die in Punkt 3 bis 6 beschriebenen Eigenschaften.

Nun ist der osmotische Druck bei echten Colloiden durchaus nicht unzweifelhaft nachgewiesen worden und könnte dann selbst nach Bredig (l. c.) erklärt werden:

1. aus Verunreinigungen mit Krystalloiden (welche nach Punkt 7 sehr schwer zu entfernen sind);

2. aus einer geringen Löslichkeit des Colloides, so dass man einen Theil als Krystalloid in Lösung hätte;

3. aus der Arbeit, welche gegen die Absorption und Benetzung an der ungeheuer entwickelten Oberfläche der Suspensionen zu leisten wäre;

4. aus einem »pseudoosmotischen« Drucke durch elektrische Abstoßungskräfte zwischen den gleich geladenen Theilchen.

Die Diffusion kann aber leicht dadurch erklärt werden, dass sich die Theilchen in Bewegung befinden.

Die Stabilität erklärt J. J. Thomson[1] mit Hilfe der Doppelschicht, die sich um die Theilchen bildet, weil nach den Versuchen von Dorn[2] elektrische Arbeit bei der Ortsveränderung der Theilchen geleistet werden muss.

[1] Hardy, l. c. 398.

[2] Wied. Ann. 10, 70 (1880).

Obgleich nun alle Eigenschaften der Colloide eine ungezwungene Übereinstimmung zeigen, wenn man sie als Suspensionen auffasst, sind doch Gründe dafür angegeben worden, dass colloidale Lösungen wirkliche Lösungen seien, also ein homogenes Gemenge verschiedenartiger Körper vorstellen.

So ist ausgesagt worden, dass die optische Inhomogenität beziehungsweise der Tyndall'sche Versuch von geringer Beweiskraft sei, da Spring[1] gezeigt hat, dass weder destilliertes Wasser, noch auch die Lösungen vieler Metallsalze optisch leer sind. Dabei ist aber übersehen worden, dass es sich erstlich nicht so sehr um die optische Inhomogenität handelt, als vielmehr darum, ob das zerstreute Licht polarisiert ist oder nicht. Gesetzt, auch dies sei der Fall bei gewöhnlichen Lösungen, so kommt es zweitens und hauptsächlich darauf an, dass die Lichtzerstreuung und Polarisation beim Zusatze von Elektrolyten verschwindet, eine Eigenschaft, die den Colloiden allein zukommt.

Auch die Beobachtung von Prange,[2] dass colloidales Silber unter Wärmeentwicklung in gewöhnliches Silber übergeht, ist gegen die Annahme einer Suspension ins Feld geführt worden: doch erhellt es, dass dieser Umstand ebensogut eine Stütze unserer Annahme bilden kann, ja es ist sogar zu erwarten, dass die zur Erreichung einer feinen Vertheilung der Materie geleistete Arbeit auf anderem Wege als Wärme wiedergewonnen werden kann.

Da alle weiteren Einwände ebensowenig schwerwiegend sind, mag ihre Besprechung unterbleiben und es sollen nur einige Gründe vorgebracht werden, die dagegen sprechen, dass wir es in Colloiden mit wirklichen Lösungen zu thun haben.

Colloidale Metalle, z. B. das colloidale Gold, werden durch gewisse Behandlung (Elektrolytzusatz, Elektrolyse durch Membranen etc.) unter Wärmeabgabe gefällt. Dieser Vorgang ist nicht reversibel und es gelingt niemals, Gold wieder in »Lösung« zu bringen. Haben wir es mit einer Lösung zu thun, so trägt sie den Charakter einer übersättigten Lösung;

---

[1] Rec. des trav. chim. des Pays-Bas, 18 (1899).

[2] Prange, Rec. des trav. chim. des Pays-Bas, 9, 125.

sie müsste also in Berührung mit metallischem Golde spontan ausfallen. Stellt man aber den Versuch an, so überzeugt man sich leicht, dass keine Fällung eintritt.

Die Lösung kann aber auch nicht gesättigt oder verdünnt sein, denn es wäre dann nicht einzusehen, warum ausgefälltes Gold nicht wieder ohneweiters in Lösung geht.

Nun ist es nach der Bredig'schen Darstellung colloidaler Metalle möglich, reines Colloid direct aus dem Metalle herzustellen und es wird kaum ernstlich behauptet werden, dass Gold, Platin o. dgl. hiebei vom Wasser angegriffen werden. Haben wir aber reines Metall und ist dasselbe nicht gelöst, so bleibt wohl keine andere Alternative übrig, als anzunehmen, dass es suspendiert ist — will man nicht ganz unbegründeten Hypothesen ein Feld eröffnen.

Hätten wir es ferner mit einer Lösung zu thun, dann müsste sie auch die Eigenschaften einer solchen besitzen, wie Diffusionsfähigkeit, bestimmten osmotischen Druck u. s. f.

Wandert ein Theil, so müsste er Diaphragmen durchdringen können. Die Ausfällung durch Zusätze müsste nach stöchiometrischen Gesetzen erfolgen. Körper, die in Lösung gehen, besitzen eine Lösungstendenz; eine solche ist den colloidal gelösten Körpern fremd, gelingt es doch niemals, solche »direct« vom compacten Körper aus in Lösung zu bringen. Ja, die Bredig'sche Darstellung ist geradezu eine weitere Stütze dafür, sie als Suspensionen aufzufassen, wie es Bredig schon selbst betont hat. Es ist kein Grund vorhanden, weshalb wir annehmen sollten, dass die Zerstäubung unter Wasser eine andere ist wie die, welche man leicht an jeder Kathodenröhre beobachten kann; vielmehr ist sogar die relative Neigung zur Zerstäubung in beiden Fällen dieselbe. Ich habe a. a. O.[1] gezeigt, dass die Darstellung einer Reihe von colloidalen Metallen auf dem von Bredig eröffneten Wege durch dieselben Bedingungen begünstigt oder ermöglicht wird, welche eine Zerstäubung begünstigen müssen.

Auch die katalytischen Eigenschaften colloidaler Metalle, wie des colloidalen Platins, welche ein Seitenstück zu denen

[1] Ber. der deutschen chem. Ges. XXXV, 1929 (1902).

einer großen Platinoberfläche bilden, sprechen viel eher für die Gegenwart einer Suspension als für die einer Lösung.

Nach alledem kann es kaum zweifelhaft erscheinen, dass wir es in colloidalen »Lösungen« mit einer feinen Vertheilung der Materie zu thun haben. Die suspendierten Theilchen sind kleiner wie 0·1 μ,[1] dürften aber ihrem osmotischen Drucke etc. zufolge »Moleculardimensionen« rund 1000mal übertreffen.[2]

Frühere Theorien der colloidalen Lösungen.

An Versuchen, theils recht phantastischer Art, hat es nicht gefehlt, eine Erklärung der scheinbar unzusammenhängenden Erscheinungen zu geben, d. h. eine allgemeine Beziehung zwischen ihnen oder zu einer geläufigeren Erscheinung aufzufinden und es gibt wenige Forscher, die über Colloide gearbeitet haben, ohne eigene Hypothesen aufzustellen. Sollen dieselben daher hierorts besprochen werden, so wird eine Aus-

[1] Bredig: Anorgan. Fermente.

[2] Hiernach könnte man erwarten, dass äußerer Druck die Fällung colloidaler und mechanischer Suspensionen befördern oder herbeiführen möchte; denn die Druckwirkung ist proportional der dargebotenen Oberfläche und begünstigt eine Verkleinerung derselben. Diese Frage war schon aus dem Grunde einer Prüfung wert, da es denkbar war, dass die Elektrostriction, welche ein zugesetzter Elektrolyt ausübt, eine Rolle bei der Coagulation spielt. Eine Stunde lang dem Drucke von, im Mittel, 100 bis 120 Atmosphären ausgesetzt, erlitten aber colloidale Metalle nicht die geringste Veränderung, und feine Kieselsäuresuspensionen zeigten keinen sicheren Unterschied gegen Controllproben. Dagegen scheint der Druck eine Wirkung auszuüben, wenn die Potentialdifferenz der Suspension oder des Colloides gegen die Lösung verschwindet. (Dies steht mit den Anschauungen J. J. Thomsons in Einklang vgl. Seite 13.) Eine recht augenfällige Wirkung beobachtet man, wenn in einem Analogiefalle Glycerin mit Luft so lange geschüttelt wird, bis diese in feinen Blasen durch die ganze Flüssigkeit vertheilt ist; setzt man dann eine solche Probe unter Druck, so beobachtet man schon nach kurzer Zeit (etwa $^1/_4$ bis $^1/_2$ Stunde) und geringem Drucke (15 bis 20 Atm.) eine recht erhebliche Beschleunigung der »Coagulation« der Blasen; doch ist dieser Versuch nicht so rein. Immerhin ist aus den Experimenten zu schließen, dass die Elektrostriction — zumal bei so verdünnten Lösungen — keine wesentliche Rolle bei dem Processe der Ausflockung spielt.

Herr Prof. Kirsch hat es mir in liebenswürdigster Weise ermöglicht, diese Messungen am technolog. Gewerbemuseum auszuführen, wofür ich ihm hier auf das Wärmste danken möchte.

wahl vonnöthen sein und ich muss mich begnügen, die wichtigsten der verschiedenen Deutungen anzuführen.

Barus und Schneider l. c. nehmen an, dass jedes einzelne Theilchen entsprechend seiner Wirkungssphäre von einer Wasserhülle umgeben ist. Stabilität soll nun vorhanden sein, wenn sich die Wirkungssphären schneiden, sie soll verloren gehen, sobald dies nicht mehr der Fall ist. Die Wirkung von Elektrolytzusätzen, Temperaturerhöhung etc. wäre auf Verkleinerung der Wirkungssphäre zurückzuführen.

Die Theorie wird sehr geistreich ausgeführt, lässt sich aber weder stützen, noch bestreiten, weil ihre Voraussetzungen einer experimentellen Prüfung unzugänglich sind.

H. Schulze[1] stellt Betrachtungen über den Zustand colloidalen Arsentrisulfids und Antimontrisulfids an. Er vergleicht das Verhältnis der Gele zu ihren Hydrosolen dem der verschiedenen Modificationen des Phosphors zueinander. Die Größe der Complexe soll den Unterschied bilden. Der Hydrosolzustand soll der primäre, der Gelzustand der secundäre sein, weil letzterer aus dem ersten durch äußere Einwirkungen gelöster Elektrolyte hervorgeht.

Hardy (l. c.) gibt eine wenig durchsichtige Erklärung der Erscheinungen. Jedes Theilchen in einem Hydrosol soll von einem Gebiete umgeben sein, in welchem die Componenten in einem Zustande chemischer Instabilität sind. Demgemäß sollen in den Hydrosolen zwei Phasen entstehen, die durch eine Schicht von großer Ausdehnung getrennt sind und vermöge ihres hohen Energieinhaltes katalytische Eigenschaften an den Tag legen.

Wichtiger scheint mir die Erklärung, welche Hardy für die Coagulation gibt. Es ist ihm zuerst gelungen, den Wanderungssinn eines Colloids durch Zusätze umzukehren. Ist es in einem Falle negativ gegen die Lösung geladen, so wird der Sinn der Ladung durch den Zusatz umgekehrt; an der Grenze dieser beiden Zustände muss der Potentialunterschied verschwinden und in diesem »isoelektrischen« Punkte zeigen die Colloide große Instabilität. Die Ausflockung soll daher mit Erreichung dieses Punktes durch Elektrolytzusätze ermöglicht werden.

[1] J. prakt. Chem. [2], 25. 431; [2], 27. 320.

Diese Beobachtung hat Bredig in seiner schon mehrmals citierten Monographie zum Ausgangspunkte einer sehr einleuchtenden Erklärung der Coagulation gewählt. Seine Prämissen sind folgende:

1. Die Suspensionen und Colloide besitzen eine Potentialdifferenz gegen das umgebende Medium.

2. Die Oberflächenspannung zweier Medien gegeneinander ist eine Function ihrer Potentialdifferenz, welche durch Zusätze gewisser Ionen um ganz erhebliche Beträge geändert werden kann. Nun hat nach Helmholtz die Oberflächenspannung am isoelektrischen Punkte ein Maximum.

Die Analogie mit capillarelektrischen Erscheinungen erstreckt sich auf den Wechsel der elektrischen Ladung durch Zusätze und die am »isoelektrischen« Punkte besonders ausgeprägte Tendenz der Colloide, zusammenzuflocken, also ihre Oberfläche zu verkleinern.

Bredig stellt daher die Theorie auf, »dass es sich bei der Coagulation um eine capillarelektrische Oberflächenverkleinerung handelt, welche umso schneller verläuft, je größer durch Verminderung der Potentialdifferenz unter gleichzeitiger Absorption die Oberflächenspannung gegen das Medium wird«.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass diese Anschauung vor allen anderen weitaus den Vorzug verdient, da sie allein auf experimenteller Grundlage ruht; sie ist meines Erachtens die einzige, die ernstlich in Betracht kommt.

Wir werden im folgenden aber sehen, dass sie leider nicht in allen Fällen ausreicht und werden es versuchen, eine allgemeinere, zugleich eine einfachere Deutung zu geben.

Eigene Theorie.

Ich habe vor einiger Zeit[1] gezeigt, dass es gelingt, die Potentialdifferenz colloidalen Platins gegen die Lösung durch verschiedene Zusätze zu ändern, in vielen Fällen sogar umzukehren. Die Potentialdifferenz wurde damals an einer größeren

[1] Zeitschrift für Elektrochemie, VIII, 638 (1902); vergl. auch die demnächst in diesen Berichten erscheinende Abhandlung gleichen Titels.

platinierten Platinelektrode gemessen, welche in die colloidale Lösung eingesenkt war; dies involviert die Annahme, dass sich die colloidalen Theilchen des Platins elektromotorisch gleich verhalten wie platiniertes Platin. Ich glaube kaum, dass diese Annahme auf irgend welche Bedenken stoßen wird. Zwar ist es eine bekannte Thatsache, dass sehr kleine Theilchen eines Körpers größere Löslichkeit, also auch größere Lösungstension besitzen müssen, doch sind die Unterschiede so gering, dass es sich höchstens um eine Differenz von einigen Millivolt handelt. Das Intervall, in welchem wir die Potentialdifferenz ändern, beträgt aber circa 0·6 Volt. Überdies haben wir in der Beobachtung des Wanderungssinnes von colloïdalem Platin und anderer colloidaler Metalle ein Mittel gewonnen, auf unabhängigem Wege den Sinn der Potentialdifferenz zu erkennen; die durchgehende Übereinstimmung, welche ich dabei erhielt, kann als Beleg dafür dienen, dass ein größerer Fehler in der Potentialmessung sicher nicht vorliegt.

Ich habe nun beobachten können, dass in bestimmten Fällen Zusatz von Nichtelektrolyten einen großen Einfluss auf die Potentialdifferenz ausübt und dass in anderen Beispielen zugesetzte Salze soviel wie ohne Einfluss blieben. So gelang es, in Alkohol-Wassermischungen die Potentialdifferenz des Platins gegen die Lösung umzukehren, dagegen blieb ein Zusatz von KCl, und überhaupt jeden Salzes, das nicht hydrolytisch gespalten ist und weder oxydierende, noch reducierende Wirkungen ausübt, weder saure, noch alkalische Reaction erzeugt, ohne nennenswerte Wirkung. Durch Zusatz von Alkohol gelingt es nun, die Potentialdifferenz zwischen dem Platin und der Lösung zum Verschwinden zu bringen; eine gewisse, aber wenig ausgeprägte Instabilität des Colloids ist da allerdings zu beobachten, doch erreicht sie bei der Anwendung reiner Materialien lange nicht den Grad der Unbeständigkeit, welche der Lösung durch geringe Zusätze irgend eines indifferenten Salzes ertheilt wird und die ein Ausflocken in wenigen Minuten bewirkt.

Wir haben also erstens durch Alkoholzusatz einen Fall realisiert, in welchem die Potentialdifferenz gegen die Lösung

Null ist bei Abwesenheit eines Elektrolyten, zweitens durch Zusatz von KCl einen Fall, in welchem eine Potentialdifferenz bei Gegenwart eines Elektrolyten bestehen bleibt.

Nach Hardy's und Bredig's Theorie müsste im ersten Falle eine viel größere Instabilität resultieren, ein Schluss, dem das Experiment widerspricht.

Die geringe Instabilität im ersten Falle ist keine neue Erscheinung, wir finden ihr völliges Analogon im Bestreben feiner Niederschläge, sich zusammenzuballen. Kräftiges Schütteln, Anwesenheit größerer Theilchen oder festen Metalles beschleunigen den Vorgang; — soweit stehen wir noch völlig auf dem Boden der Bredig'schen Theorie — wir erkennen aber jetzt, dass die Einwirkung von Elektrolyten in vielen Fällen auch eine andere sein kann, da die bloße Anwesenheit eines Elektrolyten ohne Änderung der Potentialdifferenz Coagulation bewirkt.

Die Bredig'sche Erklärung tritt also erst an zweiter Stelle in ihr Recht, wenn nämlich die Wirkung des Elektrolytzusatzes sich auch auf die Verminderung der bestehenden Potentialdifferenz erstreckt. Ich habe aber gezeigt (l. c.), dass Elektrolytzusatz die bestehende Potentialdifferenz oft vergrößert und dennoch stets eine Ausflockung bewirkt.

Beladet man z. B. colloidales Platin mit Hilfe durchgeleiteten Wasserstoffes, so wird die Potentialdifferenz durch Zusatz von Alkali erhöht und es tritt dennoch Coagulation ein.

Hat man hingegen sauerstoffbeladenes Platin, so vermindert zugesetzte Säure zunächst die Potentialdifferenz, dieselbe wird bald Null, kehrt sich dann um und wächst nun mit weiterem Säurezusatze. Nach Bredig und Hardy müsste ein Maximum der Instabilität beim Nullpunkte erreicht werden, die Unbeständigkeit, d. h. die Coagulierungsgeschwindigkeit nimmt aber mit wachsendem Zusatze immer zu.

Sollte es bestritten werden, dass die Potentialdifferenz zwischen Platin und der Lösung an dem »Umkehrungspunkte« der Wanderung im elektrischen Strome verschwindet, so entsteht damit doch kein Einwand gegen das Vorstehende. Da ich mich nämlich nach beiden Richtungen vom Nullpunkte

entfernt habe, muss ich mich von jedem beliebigen anderen Nullpunkte, wenigstens in einem der beiden Fälle, entfernt haben.[1]

Die bisherigen Theorien erklären also nicht die Wirkung indifferenter Elektrolytzusätze und es liegt das Bedürfnis vor, eine allgemeinere Deutung der Erscheinung zu geben. Den Anforderungen, welche an eine neue Erklärung gestellt werden, suche ich im folgenden gerecht zu werden und gehe hiebei von den zwei Voraussetzungen aus:

1. Colloidale Lösungen[2] stellen eine Art äußerst feiner[3] Suspensionen vor.

2. Die einzelnen Theilchen derselben stehen im elektrischen Gegensatze zu dem umgebenden Medium.

Die erste Voraussetzung stützt sich auf Ansichten, die von Faraday, Ostwald, Paternò, Barus und Schneider, van Bemmelen, Bredig, Coehn, Lottermoser, Winssinger, Linder und Picton, Spring (l. c.) etc. ausgesprochen und vertreten worden sind, und die eingangs ausführlich besprochen wurden.

Die zweite Voraussetzung stützt sich auf die Anschauungen von Quincke (l. c.), v. Helmholtz,[4] Dorn, Coehn und auf eigene Versuchsresultate (l. c.).

Um diesen Voraussetzungen eine weitere experimentelle Basis zu ertheilen, habe ich noch folgenden Versuch angestellt.

Wir haben S. 1411 erwähnt, dass die colloidalen Metalle eine geringe Leitfähigkeit besitzen; bestehen sie nun aus discreten Theilchen, so kann die Leitfähigkeit mit Hilfe der

[1] Es mag hier noch erwähnt werden, dass viele bekannte Einwände gegen die Helmholtz'sche Theorie (vergl. z. B. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie, VII, 254, 1901) es zum mindesten noch sehr zweifelhaft erscheinen lassen, dass das Maximum der Oberflächenspannung überhaupt mit dem Verschwinden der Doppelschicht zusammenfällt.

[2] Nur die »echten« Colloide sind hier einbezogen; ich werde sie im folgenden »colloidale Suspensionen« nennen.

[3] Bezüglich des Grades der Feinheit siehe S. 1408.

[4] Abhandlungen I, 855.

Doppelschicht einer Bewegung der suspendierten Partikeln zu einer der Elektroden zugeschrieben werden. Messen wir ihre Leitfähigkeit nach der Kohlrausch'schen Brückenmethode mit Wechselstrom, so ist zu erwarten, dass die Leitfähigkeit mit zunehmender Frequenz des Wechselstromes bis zu einem Minimum abnehmen wird, weil die Partikeln den immer rascheren Schwingungen immer schwerer folgen werden. Diese Vermuthung schien durch das Experiment bestätigt zu werden, als ich einen Tourbinen-Unterbrecher statt des Nef'schen Hammers im Inductorium verwendete und die Leitfähigkeit bei verschiedenen Tourenzahlen maß:

Leitfähigkeit des Wassers

$0\cdot81\times10^{-6}$.

Leitfähigkeit von colloidalem Platin

Anzahl der Unterbrechungen		Versuchsreihe [1] I	II	III
30	....	(1·6)	(1·15)	$(1\cdot43 \times 10^{-6})$
48	....	—	(1·144)	$(1\cdot423 \times 10^{-6})$
60	....	1·59	1·141	$1\cdot417 \times 10^{-6}$
87	....	—	—	$1\cdot399 \times 10^{-6}$
500	....	1·46	—	—
600	....	—	1·136	$1\cdot37 \times 10^{-6}$

Die verschiedenen Versuchsreihen wurden mit verschiedenen, gleichzeitig hergestellten Solen ausgeführt und es wurde constatiert, dass die Leitfähigkeit des Wassers beim Wechsel der Tourenzahlen constant blieb. Um eine Garantie dafür zu haben, dass das Colloid während der Untersuchung ungeändert blieb, wurde die Messung erst mit steigender Frequenz vorgenommen, sodann mit abnehmender Tourenzahl wiederholt.

Die Unterschiede der Leitfähigkeiten sind immerhin recht klein und es lag der Wunsch nahe, die Messungen auszudehnen, um große Differenzen zu erhalten, die ein sichereres Resultat liefern würden.

[1] Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen Werte, die durch sehr schlechtes Minimum nur ungenau ermittelt werden konnten.

Einen viel größeren Messbereich als mit dem Tourbinen-Unterbrecher erhält man aber, wenn man Wechselströme verwendet, die R. v. Lieben und Reisz nach einer Methode, die sie demächst in der physikalischen Zeitschrift publicieren werden, erzeugen. Mit diesen gelingt es, durch den Wechsel einer Capacität beliebige Frequenzen zu erhalten.

Ich habe daher meine Messungen mit diesen Wechselströmen wiederholt[1] und eine weitere Prüfung mit den äußerst raschen elektrischen Schwingungen angeschlossen, die Duddell mit einer Bogenlampe durch Parallelschaltung einer Selbstinduction und einer Capacität erhält.

Bei diesen hohen Schwingungen würde die gewöhnliche Messmethode von Leitfähigkeiten fehlerhafte Resultate liefern, weil der Unterschied der Capacitäten beider Brückenkreise nun empfindlich stört. Diesem Fehler zu entgehen, wurde in beiden Brückenkreisen eine elektrolytische Zelle, deren Platten gleichen Abstand besaßen, eingeschaltet und ich überzeugte mich vor allem, dass das Tonminimum mit dem Wechsel der Frequenz nicht verschoben wurde, so lange beide Zellen mit derselben Flüssigkeit beschickt waren, wohl aber lieferte jede Schwingungszahl ein anderes Minimum, sobald eine Zelle einen Elektrolyten oder »Leitfähigkeitswasser«, die andere ein Metallsol enthielt, wie es aus folgender Messungsreihe hervorgeht:

Leitfähigkeit des Wassers..... $1 \cdot 82 \times 10^{-6}$.

		Leitfähigkeit des Colloides
Schwingungszahl	183 (fis) ...	$2 \cdot 34 \times 10^{-6}$
»	260 ($c_{,}$) ...	$2 \cdot 28 \times 10^{-6}$
»	366 ($fis_{,}$) ..	$2 \cdot 30 \times 10^{-6}$
»	652 ($e_{,,}$) ...	$2 \cdot 38 \times 10^{-6}$
»	1096 ($cis_{,,,}$) .	$2 \cdot 51 \times 10^{-6}$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
»	circa 30000.......	$4 \cdot 8$ bis $5 \cdot 2 \times 10^{-6}$

[1] Ich möchte es nicht versäumen, auch an dieser Stelle meinen Freunden, den Herren R. v. Lieben und E. Reisz, für die Liebenswürdigkeit, mit der sie mir bei der Ausführung dieser Messungen beistanden, auf das Wärmste zu danken.

Einer anfänglichen, abermals sehr geringen Erniedrigung folgt also eine ganz beträchtliche Vermehrung der Leitfähigkeit. Dieselbe war zwar äußerst schwierig zu messen und niemals gelang es, scharfe Einstellungen auf der Brücke zu erhalten, doch übertreffen die gefundenen Abweichungen die möglichen Fehler um das Drei- bis Fünffache, so dass zum mindesten der Gang der Zahlen sicher ist.

Die Deutung des Versuchsresultates dürfte wohl die sein, dass ein Metallsol bei sehr großer Frequenz und Spannung wie eine Capacität wirkt, d. h. ein Leiter wird. Eine Deutung, die abermals mit unserer Anschauung über die Natur der Colloide im Einklange steht, wenn man sich vor Augen hält, dass die im Medium eingebetteten Metallpartikelchen eine unzählige Reihe außerordentlich kleiner Condensatoren darstellen.[1]

Es sei hier vielleicht noch auf eine Analogie des Verhaltens von Isolatoren unter ähnlichen Bedingungen hingewiesen, die man sich ja gleicherweise als ein System leitender Partikeln vorstellt, die in einem sehr schlecht leitenden Medium eingebettet sind.

Nach dieser kleinen Abschweifung, welche sich der Discussion unserer ersten Prämisse anschloss, soll eine Besprechung der zweiten erfolgen: dass die einzelnen Theilchen des Colloides im elektrischen Gegensatze zu dem umgebenden Medium stehen.

Diese Annahme wurde zuerst von Helmholtz in seiner bereits citierten Abhandlung über elektrische Grenzschichten gemacht, indem er den Begriff der elektrischen Doppelschicht einführte. Unter dieser versteht er zwei Schichten, welche in sehr geringem Abstande von einander stehen und deren eine ebensoviel positive Elektricität enthält, als die andere negative. Eine Doppelschicht bildet sich aber überall an der Berührungsfläche heterogener Körper aus und verschwindet nur in ganz

[1] Ich beabsichtige noch ähnliche Messungen mit Hertz'schen Wellen auszuführen. Die Anwendung der Nernst'schen Methode (Wied. Ann. 60, 600; 1897) wird hiebei jedenfalls reinere Resultate ergeben.

speciellen Fällen. Bekannt ist die Erklärung, die Helmholtz mit ihrer Hilfe von der Elektroendosmose gibt.

Um auch die Wanderung in einer Flüssigkeit suspendierter Theilchen im elektrischen Stromgefälle zu veranschaulichen, nimmt Helmholtz[1] an, dass zunächst eine Verschiebung der Belegungen der Doppelschicht zueinander stattfindet. In einem homogenen elektrischen Felde müsste es bei dieser Verschiebung bestehen bleiben, wenn wir mit vollständigen Isolatoren operieren könnten; da es einen solchen aber nicht gibt, so stellt sich Helmholtz vor, dass der Theil der Doppelschicht, welcher in die Flüssigkeit fällt und durch die Verschiebung eine Entfernung von dem entgegengesetzten Antheile (der an den festen suspendierten Körper gebunden ist) erfahren hat, seine Ladung an andere Flüssigkeitstheilchen abgibt, die dem suspendierten Körper näherliegen. In dem Maße aber, als die »Zerrung« der Doppelschicht (wenn der Ausdruck gestattet ist) abnimmt, wird sie unter Einfluss des elektrischen Potentialgefälles auch wieder hergestellt: es rückt also der suspendierte Körper in demselben Maße vor, als der andere Theil der Doppelschicht ihm nachrückt.

Diese Erklärung ist schwer zu verstehen, denn es erhellt nicht recht, warum der in die Flüssigkeit fallende Theil der Doppelschicht dem anderen nachrückt. Es ist ja die Verschiebung lediglich die Folge der äußeren elektrostatischen Einwirkung und findet statt, wenn der Punkt erreicht ist, wo die elektrostatische Anziehung der auseinandergezerrten Theile der Doppelschicht der äußeren Kraft eben nicht mehr das Gleichgewicht hält, und so lange diese ungeändert einwirkt, ist eine Näherung der Theile der Doppelschicht nicht begründet, gleichgiltig, ob ein Isolator sie trennt oder nicht.

Eine andere Schwierigkeit bietet sich bei der Betrachtung von Versuchen, die als Umkehrungen des Vorstehenden aufgefasst werden können; ich meine hier die Stromerzeugung durch Theilchen, welche in einer Flüssigkeit sich bewegen, durch Gasblasen, die in ihr aufsteigen etc. Da fällt es auf, dass schon so geringe mechanische Kräfte eine »Zerrung« der so

[1] Wied. Ann. VII.

nahe gegenüberstehenden elektrostatischen Ladungen der Doppelschicht bewirken sollen.

Alle diese Schwierigkeiten, welche denen ähneln, die sich anfangs der Erklärung der Elektrolyse entgegenstellten, verschwinden hier wie dort, sobald man nicht mehr daran festhält, dass die beiden Belegungen der Doppelschicht untrennbar aneinandergebunden sind und erst durch ein elektrisches Potentialgefälle auseinandergezerrt, beziehungsweise -gerissen werden, sondern dass eine solche Spaltung bereits vor dem Durchgange des Stromes besteht; wenn sich also mit anderen Worten die suspendierten Theilchen in gewissem Sinne wie Ionen verhalten. Dies trifft aber zu, sobald die Doppelschicht eine Art »Dissociation« erfährt[1] (indem z. B. geladene Flüssigkeitstheilchen der äußeren Doppelschicht in die Flüssigkeit diffundieren); in diesem Augenblicke heben sich die elektrostatischen Ladungen der Belegungen der Doppelschicht innerhalb eines bestimmten Bereiches nicht mehr völlig auf und es kommt für die ferneren Betrachtungen auf dasselbe hinaus, als besäßen der suspendierte Körper und die in der Flüssigkeit enthaltenen geladenen Theilchen, die von der Dissociation der Doppelschicht stammen, gleiche und entgegengesetzte freie Ladungen. In diesem Sinne kann man also von einer Analogie mit den Ionen sprechen, und diese Vorstellungsweise wird im weiteren immer dort zugrunde liegen, wo des knapperen Ausdruckes wegen kurzweg von einer »Ladung« der Theilchen gesprochen werden wird. Eine engere Beziehung wird sich aber bei der Besprechung speciellerer Fälle ergeben.

Nach diesen Betrachtungen gestaltet sich die Erklärung des Vorganges bei der Ausfällung colloidaler Suspensionen durch Elektrolyte sehr einfach.

Das Sol stellt nur ein System kleiner geladener Theilchen vor, ein neues Moment tritt aber hinzu: Es ist bei der Verkleinerung der materiellen Theilchen Arbeit gegen die Massenanziehung und gegen die Oberflächen-Energie geleistet worden

[1] Letztere Ausdrucksweise verdanke ich einem Gespräche mit Herrn Prof. Nernst, in welchem er mir eine kinetische Vorstellung dieses Vorganges entwickelte.

und diese Arbeitsgröße kann bei der Wiedervereinigung der Theilchen auf anderem Wege zurückgewonnen werden. Eine Möglichkeit dazu ist aber vorhanden, sobald das Medium, in dem die geladenen Theilchen sich befinden, ein Leiter der Elektricität ist, und zwar aus folgendem Grunde:

Die Coagulierung der einzelnen geladenen Theilchen zu größeren Complexen ist ein Vorgang, der mit der Verminderung ihrer Capacität verbunden ist; die Verminderung der Capacität bedingt aber eine Erhöhung des Potentiales, also bei constanter Elektricitätsmenge in einem isolierenden Medium eine Erhöhung der freien Energie. Die Unmöglichkeit, dass sich ein solcher Process »von selbst« abspielt (nach den zwei Hauptsätzen), verleiht dem Systeme colloidaler Suspensionen ihre Stabilität. Dieser Fall ist nur eine Fiction. Es ist nicht abzusehen, ob in vollständigen Isolatoren eine Potentialdifferenz zustande käme und alle unsere Isolatoren stellen nur sehr schlechte Elektrolyte dar.

In der That sind aber Sole, die man durch Zerstäubung von Metallen in ganz reinem Alkohol erhält, recht beständig. Eine Möglichkeit zur Coagulation in einem vollständig isolierenden Medium ist nur dann gegeben, wenn die molecularen Anziehungskräfte, die Gravitation und die Tendenz der Körper, ihre Oberfläche zu verkleinern, soweit vorherrschen, dass sie durch die Ausflockung in Summa doch eine Abnahme der freien Energie herbeiführen; dies ist der Fall bei mechanischen Suspensionen, ferner bei Colloiden, wenn die Potentialdifferenz der Theilchen gegen die Flüssigkeit genügend klein wird oder verschwindet.

Anders aber liegen die Dinge, wenn das Medium einen Elektrolyten vorstellt. Hier wird mit steigendem Potentiale zunehmende Polarisation erzeugt werden können, ein Vorgang, der eine Arbeitsleistung repräsentiert, mit Verminderung der freien Energie verbunden ist und sich also von selbst abspielen kann.

Wenn ich hier von einer Polarisation spreche, so ist dies in bestimmtem Sinne zu verstehen: Erstlich ist sie unipolar (worauf wir Seite 1425 ff. näher zu sprechen kommen werden) und zweitens ist darunter nicht eine Anreicherung von Ionen verstanden, wie sie beispielsweise an einer Elektrode erfolgt, sondern es werden sich in unserem Falle umgekehrt die viel

schwächer geladenen Colloidtheilchen anhäufen müssen, um ein Ion anzuziehen. Dabei vereinigen sie sich, bis sie mindestens die »kritische Größe«[1] erreicht haben, bei der sie der Schwerkraft folgen können, respective bis von den einzelnen Theilchen eine genügende Elektricitätsmenge zusammengetragen worden ist, die des fällenden (entgegengesetzt geladenen) Ions zu neutralisieren.

In Gegenwart eines Elektrolyten handelt es sich also um die Aufhebung eines labilen Zustandes, bei welchem das fällende Ion recht eigentlich die Rolle eines Condensationskernes spielt. Und wir können schon daraus entnehmen, dass die Erscheinung, die Schnelligkeit, mit der sie eintritt, u. s. f. im innigen Zusammenhange mit der Ionenconcentration der Lösung (und hiemit, wie Hardy und Bodländer gefunden haben, Seite 1400 ff., mit ihrer Leitfähigkeit) stehen wird. In reinem Wasser, einem der allerschlechtesten Elektrolyten, erfolgt die Fällung nur äußerst langsam, und darum gelingt es, Colloide darin lange zu bewahren.[2]

Nunmehr rückt aber auch eine ganz merkwürdige Erscheinung in den Vordergrund, die bislang nur theilweise erklärt werden konnte,[3] nämlich die Fähigkeit eines ausfallenden

---

[1] vgl. Barus u. Schneider, l. c.

[2] Ein Beispiel zur Controle anzuführen, wird nach Hardy das elektronegative Gold von Säuren bei der Wasserstoff-Ionenconcentration rund 1×10^{-2} eben ausgefällt. Die Fällung erfolgt nicht sofort, Hardy gibt leider die Zeit nicht an, setzen wir sie etwa = 10 Minuten (thatsächlich braucht es viel länger) und setzen wir ferner, wie es bei einer rohen Überschlagsrechnung zulässig ist, die Coagulationsgeschwindigkeit der Ionenconcentration proportional, so finden wir, dass in reinem Wasser, welches die Ionenconcentration von rund 1×10^{-7} aufweist, eine gleich starke Coagulation erst nach 10 Wochen wird bemerkt werden können. Dies genügt, um darzulegen, dass obige Behauptung durchaus in Übereinstimmung mit den Thatsachen steht.

Einem möglichen Missverständnisse vorzubeugen, sei hier ferner darauf hingewiesen, dass die Bildungsgeschwindigkeit der Ionen hier nicht wie bei der Elektrolyse eine Rolle spielt, da die Zeit lediglich dazu benöthigt wird, den Zustand zu erreichen, in welchem ein Ion mitgerissen werden kann (und weil ferner, wie bereits bemerkt, der Vorgang unipolar ist), nicht aber wie bei der Elektrolyse, um sehr schnell entfernte Ionen durch Neubildung nachzuliefern, und abermals zu entfernen.

[3] vgl. Bredig, Anorgan. Fermente, Seite 16 u. 17.

Colloides, eine bestimmte Menge eines und nur eines Iones des fällenden Salzes in den Niederschlag mitzureißen.

Linder und Picton[1] fanden schon, dass ihr colloidales Arsentrisulfid bei seiner Fällung durch ein Salz, etwa Chlorbaryum, immer eine kleine Menge des Kations, in unserem Falle also des Baryums, mit in den Niederschlag nahm. Das mitgefällte Baryum konnte durch Auswaschen mit Wasser nicht entfernt werden, dagegen ließ es sich beim Behandeln mit Salzen durch ein anderes Metall ersetzen. — Um die Beziehung herzustellen, braucht es nur erwähnt zu werden, dass die colloidale Arsentrisulfidsuspension zur Anode wandert, also negativ geladen ist.

Ebenso fand Spring,[2] dass seine elektronegativen Trübungen bei ihrer Fällung durch Kupfersulfat einen Theil des Kupfers in den Niederschlag überführten.

Quantitativ ist eine dieser Erscheinungen in letzter Zeit von W. R. Whitney und J. E. Ober[3] verfolgt worden. Sie finden, dass die Menge des ausgefällten positiven Ions der Concentration an Colloid proportional, von seiner eigenen ursprünglichen Concentration in der Lösung unabhängig ist, ferner dass nur das positive Ion mitgerissen wird, endlich dass verschiedene Metalle in dem Niederschlage des Colloids im Verhältnisse ihrer chemischen Äquivalente vertretbar sind.

Einige ihrer Zahlenangaben mögen hier zum Belege dienen.

Die verwendete colloidale Suspension enthielt circa 1% Arsensulfid. Um den Einfluss der verschiedenen Concentration des fällenden Salzes und des Colloids verfolgen zu können, giengen die Autoren von Lösungen bestimmter Concentrationen aus und setzten sie im wechselnden Verhältnis und wechselnder Verdünnung immer zu einem gleichen Volumen Versuchsmischung zusammen.

Die vorzügliche Übereinstimmung der zwei letzten Columnen verbürgt die Genauigkeit der Daten. In der ersten

[1] J. chem. Soc. 67, 63 (1895).

[2] Arch. des scienc. phys. et natur [IV], 10, 305.

[3] Zeitschrift für physik. Chemie, 39, 630 (1902).

Messungsreihe wird bei gleichbleibender Chlorcalciumconcentration die Menge des enthaltenen Colloids verdoppelt, dementsprechend enthält der Niederschlag im zweiten Falle annähernd die doppelte Menge des Metalles.

Verwendete Salzlösung	Colloidale Lösung (in Kubikcentimetern)	Verdünnt mit Wasser (in Kubikcentimetern)	Zugesetzte Salzlösung (in Kubikcentimetern)	Gehalt der Mischung an Metall	Vom Niederschlage zurückgehaltenes Metall	Chlor als freie Säure	Säure berechnet aus dem Metallgewichte
1. $CaCl_2$	100	100	25	0·0724	0·0020	0·0036	0·0036
	200	0	25	0·0724	0·0038	0·0073	0·0067
2. $BaCl_2$	200	0	30	0·1675	0·0152	0·0081	0·0079
	100	100	30	0·1675	0·0078	0·0038	0·0039
	100	80	50	0·2791	0·0075		

Im zweiten Beispiele wird erst ein Gleiches mit gleichem Resultate geprüft, dann wird die Concentration an Chlorbaryum bei gleichbleibendem Gehalte an Colloid erhöht; die Menge gefällten Metalles wird dadurch nicht wesentlich geändert.

Ein Vergleich der beiden Messungsreihen zeigt, dass die Mengen der gefällten Metalle Ba und Ca ihren elektrochemischen Äquivalenten entsprechen. Berechnet man nämlich aus der Menge des in der ersten Messungsreihe gefällten Ca die elektrochemisch äquivalente Menge Ba, so findet man (für 100 cm^3 der ursprünglichen colloidalen Lösung):

$$0·0076\ g\ \text{Ba},$$

während der Versuch:

$$\left.\begin{array}{l}0·0075\ g\ \text{Ba}\\ 0·0078\ g\ \text{Ba}\end{array}\right\}$$

ergibt.

Umgekehrt berechnen die Autoren für Calcium:

$$0·0022\ g$$

und finden

0·0019 *g* }
0·0020 *g* }

Für Strontium:

0·0049 *g*

und finden

0·0036 *g* }
0·0041 *g* }

Für Kalium:

0·0036 *g*

und finden

0·0043 *g*.

Wenn diese Resultate auch unseren Erwartungen völlig entsprechen, so musste es doch geprüft werden, ob die Adsorption thatsächlich während der Coagulation stattfindet. Nur nach meiner Deutung war ein solches zu erwarten, während die Adsorption nach den Anschauungen, die Bredig u. a. vertreten, der Coagulation vorausgehen müsste; selbst dann, wenn die Coagulation durch einen Zusatz verhindert wird. Indem ich colloidales Schwefelarsen und colloidales Platin durch zugesetztes Chlorbaryum fällte, daneben aber zwei Proben ebenso behandelte, denen ich zur Verhinderung der Coagulation eine Spur Gelatine zugesetzt hatte, konnte ich durch vergleichende Titrationen feststellen, dass die Adsorption thatsächlich während der Coagulation stattfindet (ich überzeugte mich natürlich, dass die Gelatine die Titration nicht beeinflusst), wie dies aus den beistehenden Zahlen hervorgeht.

Coll. As_2S_3:

	I	II	
100 cm^3	0·0042	0·0044	freie Säure,

bei Gegenwart von Gelatine:

100 cm^3	0·0008	0·0009	freie Säure.

Die Titration wurde mit Hilfe von Tüpfelreactionen ausgeführt; das Colloid hatte ungefähr dieselbe Concentration, wie das, welches Whitney und Ober benützten.

Noch viel durchsichtigere Resultate erhält man bei der Verwendung von colloidalem Platin,[1] weil es hier in unserer Hand liegt, seine Potentialdifferenz gegen die Flüssigkeit in controlierbarer Weise zu ändern. Ein frisch zerstäubtes (negatives) Hydrosol, durch Chlorkalium gefällt, lieferte so:

	I	II	
100 cm^3	0·00034 *g*	0·00036 *g*	freie Säure,

eine gleiche Probe, der Gelatine zur Verhinderung der Fällung beigefügt war, aber nur:

100 cm^3	0·00001 *g*	0·00004 *g*	freie Säure.

Wurde nun das Platin mit Wasserstoff beladen und also stärker negativ, so lieferte es bei seiner Fällung:

	I	II	
100 cm^3	0·00066 *g*	0·00058 *g*	freie Säure,

Nullprobe mit Gelatine:

100 cm^3	0·00009 *g*	0·00009 *g*	freie Säure

(eine Spur Säure war von vornherein zugesetzt worden).

War es hingegen positiv gegen die Lösung, so setzte es bei der Coagulation Alkali in Freiheit. Da die Lösung von Haus aus so sauer war, dass kein Umschlag der Reaction beim Ausflocken erfolgte — (eine Versuchsbedingung, die ich aus dem Grunde wählte, weil sonst die Potentialdifferenz mit dem Wechsel der Reaction sich sehr stark ändert) — wurde die Menge des in Freiheit gesetzten Alkalis durch Differenz des Titers der Nullprobe bestimmt:

	I	II	
100 cm^3	0·00068 *g*	0·00096 *g*	freies Alkali.

---

[1] Die ausführliche Publication dieser Versuche, welche ja eine unabhängige Methode zur Bestimmung »absoluter« Potentiale darstellt, wird später erfolgen.

Der Einwand, dass die Gelatine etwa die Adsorption verhindert, ist nicht haltbar, da meine Versuche über die Wanderung colloidaler Metalle (l. c.) im elektrischen Strome darlegen, dass die Beladung des Platins etc. bei ihrer Gegenwart unbeeinflusst erfolgt, dass hiemit die Ionen nach wie vor bis an die Platinpartikelchen dringen.

Des knapperen Ausdruckes wegen haben wir bisher nur den suspendierten Körper in Betracht gezogen und wollen nun unsere Aufmerksamkeit auf den zweiten Theil der Doppelschicht lenken, specieller auf den dissociierten Bruchtheil desselben, der in die Flüssigkeit fällt (denn von dem nicht dissociierten Antheile können wir für unsere Betrachtungen ganz absehen). Und wir fragen nun: Was geschieht mit diesem Theile des Systems, während das Colloid ausfällt? Die Antwort lautet: Es ist kein Grund vorhanden, weshalb er irgendwie durch diesen Vorgang beeinflusst werden sollte: Das Colloid mit beispielsweise negativer Ladung fällt mit einer entsprechenden Menge positiver Ionen zusammen aus und als Ersatz für diese bleibt der positiv geladene Antheil der Doppelschicht in der Lösung zurück. (In diesem Vorgange erblicken wir also eine gewisse Analogie in der Ausfällung eines Colloides mit dem Ausfällen eines Salzes, respective einer sehr schwachen Säure durch eine starke u. s. f.)

Dies ergibt aber wieder einen Unterschied gegen frühere Betrachtungsweisen, der einer experimentellen Prüfung zugänglich ist. Handelt es sich nämlich wie im vorliegenden Falle bei dem Mitreißen von Baryum lediglich um eine Adsorptionserscheinung, so muss freies Chlor in der Lösung bleiben; entspricht hingegen dieser Process unserer Vorstellungsweise, so bleiben in der Lösung außer Chlorionen noch die geladenen Theilchen, die von der Dissociation der Doppelschicht stammen und die eine gleiche und entgegengesetzte (in unserem Falle positive) Ladung tragen.

Fällt man nun das Colloid bei Gegenwart von Jodzinkstärke mit Chlorbaryum aus, so tritt keine Blaufärbung auf; Chlor ist also nicht in Freiheit gesetzt worden.

Und es erhellt auch sofort, dass dies gar nicht der Fall sein kann, wenn man eine Betrachtung über die Natur der

Doppelschicht an einem besser definierten Beispiele, etwa an colloidalem Platin, anstellt.

Ich habe[1] a. a. O. gezeigt, dass man aus den Beobachtungen über den Wanderungssinn colloidalen Platins den Rückschluss ziehen kann, dass sich die Platinpartikelchen elektromotorisch völlig wie eine Sauerstoff-, respective Wasserstoffelektrode verhalten. Nun ist Platin unter gewöhnlichen Umständen negativ gegen die Lösung, verhält sich also, als würde es positive Wasserstoffionen in die Lösung entsenden (oder, was auf dasselbe hinauskommt, negative Sauerstoffionen aufnehmen); fällt man es durch $BaCl_2$ aus, so reißt es eine bestimmte Zahl Ba-Ionen in den Niederschlag mit, lässt aber in der Lösung eine äquivalente Menge Wasserstoffionen zurück (die dem dissociierten Theile der Doppelschicht entsprechen) und es wird nicht Chlor, sondern Salzsäure freigemacht. Eine neue Übereinstimmung mit dem Beobachtungsmateriale.

Über die Entstehungsweise der Doppelschicht soll hier keine bestimmte Annahme gemacht werden, wenn es auch durch die Arbeiten von Thomson,[2] Brown,[3] S. Arrhenius,[4] Erskine Murray,[5] Edlund[6] und in letzter Zeit durch Studien von O. Knoblauch[7] und von mir[8] sehr wahrscheinlich geworden ist, dass wir es auch hier mit Ladung durch Ionen zu thun haben.

All dies festgehalten, ist diesen Fällungsversuchen für unsere Theorie zu entnehmen:

1. Dass äquivalente Mengen der verschiedenen Ionen in den Niederschlag gerissen wird (ein Analogon zum Faraday'schen Gesetz).

[1] Zeitschr. f. Elektrochemie, VIII, 638, 1902; vergl. auch die demnächst in diesen Berichten erscheinende ausführliche Abhandlung gleichen Titels.

[2] Ostwald, Lehrbuch, II, 910.

[3] Phil. Mag. [5], 6, 142 (1878); 7, 108 (1879); 11, 212 (1881).

[4] Wied. Ann. 33, 638 (1888).

[5] Proc. Roy. Soc. 49, 33 (1896).

[6] Pogg. Ann. 137, 474 (1869); 140, 435 (1870); 141, 404, 534 (1871).

[7] Zeitschrift für physik. Chemie, 39, 225.

[8] L. c.

2. Dass ferner die verfügbare Elektricitätsmenge und mit ihr die Menge eines Iones, das in den Niederschlag gerissen wird, ceteris paribus lediglich von der Menge der enthaltenen Suspension, wie von der Potentialdifferenz zwischen Theilchen und Lösung bestimmt wird.

Weiter zeigen die Tabellen, um wie geringe Mengen es sich hier handelt; sie schließen sich also der Erfahrungsthatsache, dass minimale Zusätze bereits Coagulierung hervorrufen, recht gut an.

Der Zusammenhang zwischen dem Coagulationsvermögen und der Leitfähigkeit eines fällenden Elektrolyten findet, wie schon bemerkt, durch unsere Anschauungen eine unmittelbare Erklärung, ferner noch der Umstand, dass es hierbei vorwiegend auf das eine Ion ankommt. Die viel schnellere Erreichung des »Schwellenwertes« mit Zunahme der Wertigkeit des Ions hat Whetham[1] auf sehr plausible Weise mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet. Bedeutet a eine Constante, c die Ionenconcentration, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Ion in einer bestimmten Sphäre befindet, ac; die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Ionen in derselben Sphäre befinden, $(ac)^2$; ebenso für drei Ionen $(ac)^3$ u. s. f.

Sollen drei Metall-Ionen

$$\overset{+}{m}_1, \quad \overset{++}{m}_2, \quad \overset{+++}{m}_3$$

in den Concentrationen

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3$$

ein Colloid gleich schnell coagulieren, so muss hiernach, wenn es lediglich auf die Anwesenheit einer Ladung in einem bestimmten Bereiche ankommt, das Verhältnis ihrer Concentration

$$c_1 : c_2 : c_3 = \frac{B}{a} : \frac{\sqrt[2]{B}}{a} : \frac{\sqrt[3]{B}}{a}$$

sein, oder vielmehr nach einer Correctur, auf die wir nicht näher einzugehen brauchen:

[1] Journ. of Physiol. 24, 301 (1899).

$$c_1 : c_2 : c_3 = B : \sqrt[3/2]{B} : \sqrt[3]{B},$$

wo B den Schwellenwert für $\overset{+}{m}_1$ bedeutet.

Die berechneten Werte stimmen sehr gut mit denen, die H. Schulze (l. c.) experimentell gefunden hat, überein:

$$\overset{+}{m}_1 : \overset{++}{m}_2 : \overset{+++}{m}_3 = 1 : 30 : 1650 \quad \text{gefunden}$$
$$= 1 : 40 : 1600 \quad \text{berechnet.}$$

Ein ähnliches Resultat erhält man auch nach unserer Vorstellungsweise, wenn man berücksichtigt, dass die elektrostatische Wirksamkeit mit der Wertigkeit zunimmt und dass gleichzeitig die »kritische« Größe der Partikel (bei der sie ausfallen können) rascher erreicht wird.

Sind die Zusätze Säuren oder Basen, so wird diese Beziehung nicht erfüllt. Hier stört offenbar die viel größere Beweglichkeit des einen Ions die einfachen Verhältnisse.

Vergleichen wir die Schwellenwerte, die Hardy angibt (S. 1403), mit den von Whitney und Ober bestimmten Gewichten mitgerissenen Metalles (S. 1423), so sehen wir, dass sie von gleicher Größenordnung sind; dagegen erweisen sich Bodländer's Schwellenwerte (S. 1404) für mechanische Suspensionen kleiner. Auch dieses Ergebnis ist nur eine weitere Bestätigung unserer Theorie und folgt als ihre nothwendige Consequenz, wenn man in Betracht zieht, dass mechanische Suspensionen schon von Haus aus viel größere Theilchen enthalten. Eine quantitative Verfolgung dieser Erscheinung an Suspensionen würde, bei Kenntnis ihrer Theilchengröße, die Größe der in colloidalen Lösungen desselben Körpers enthaltenen Partikeln berechnen lassen.

Eine Eigenthümlichkeit bedarf noch der Erläuterung. Es ist dies die große Empfindlichkeit, welche elektropositive Suspensionen gegen Alkalizusatz zeigen, der eine sehr kleine Empfindlichkeit gegen Säurezusatz gegenübersteht, und umgekehrt die große Empfindlichkeit elektronegativer Suspensionen gegen Säure im Vergleiche zu der gegen Alkali.

Die Verhältnisse liegen hier nicht ganz so einfach, weil Säure- und Alkalizusatz die Potentialdifferenz zwischen den

Theilchen und der Lösung ändert. Eines aber drängt sich sofort auf: Elektronegative Suspensionen werden durch elektropositive Ionen gefällt. Hat nun dieses elektropositive Ion eine so viel größere Beweglichkeit als das Anion, wie dies bei dem Wasserstoff-Ion der Säuren zutrifft, so wird die Fällung viel schneller erfolgen können, umgekehrt aber begünstigt die große Beweglichkeit des negativen Hydroxyl-Ions in Basen die Fällung positiver Suspensionen. Hat man es hingegen mit einer elektropositiven Suspension zu thun, welcher man Säure zusetzt, so wird das positive Wasserstoff-Ion viel schneller zu den Theilchen wandern, als das entsprechende Anion, wird nach Knoblauch (l. c.) streben, es positiv zu beladen, und es entsteht ein Widerstreit zweier Kräfte, welcher die Fällung verzögert. Analoges gilt für den umgekehrten Fall.[1]

Auch einige Anomalien, die von Quincke[2] u. a. gefunden wurden, verlieren nach unserer Anschauung an Seltsamkeit. Ich meine hier die Fällung von Suspensionen durch Nichtelektrolyte, die bisher als völlige Ausnahme von der Regel betrachtet wurde. Aber auch eine solche lässt sich ganz gut erklären, wenn man die Thatsache benützt, dass der Ladungssinn fester Körper bei der Berührung in verschiedenen Flüssigkeiten verschieden ist. So ladet sich Platin gegen Wasser negativ, gegen Alkohol, Chloroform etc. aber positiv. In der That wirkt Chloroformzusatz fällend. Wir haben uns hier aber die Ausflockung so vorzustellen, dass positive Theilchen der Suspension mit negativen zusammentreten, oder es kann durch Zufall auch gerade der isoelektrische Punkt erreicht werden, an dem es langsam ausfällt.

Es liegt hier ein ähnlicher Vorgang vor wie bei der Mischung zweier Colloide. Hat man es dabei mit zwei gleichgeladenen colloidalen Suspensionen zu thun, die man übereinanderschichtet, so scheinen sie undurchdringlich für einander

[1] Handelt es sich um wasserstoff- oder sauerstoffbeladene Substanzen, so wird man fast in jedem Falle finden, dass Säure die Potentialdifferenz vermindert, wenn sie negativ sind, Alkali, wenn sie positiv sind. Auch diesem Umstande ist hier, soweit es auf die Geschwindigkeit der Fällung Einfluss übt, Rechnung zu tragen.

[2] Drude's Ann. VII, 57 (1902).

zu sein: die gleichgeladenen Theilchen stoßen sich ab. Sind die Theilchen des einen Colloids elektropositiv, die des anderen hingegen elektronegativ, so fällen sie sich hier wie beim Mischen gegenseitig aus.[1] Eine chemische Untersuchung zeigt, dass der Niederschlag beide Colloide enthält.

Mechanische Suspensionen befolgen völlig die gleichen Gesetze, nur sind hier quantitative Verschiedenheiten dadurch bedingt, dass die kleinere Oberfläche nur kleinere Elektricitätsmengen durch Berührung scheiden kann, und dass die Schwerkraft mit der Verschiebung des Verhältnisses von Ladung zur Masse (zu Gunsten der letzteren) mehr in den Vordergrund tritt.

Die Unterschiede der unechten Colloide von den typischen, beruhen in der Hauptsache auf der noch viel feineren Vertheilung ihrer Materie und auf der Geringfügigkeit der Potentialdifferenz, welche sie in der Regel gegen die Lösung aufweisen. Andere Unterschiede treten aber hinzu, deren Beschreibung zu weit führen würde und einer weiteren Studie vorbehalten bleiben sollen. Desgleichen hoffe ich die Schutzwirkungen von Gelatine, Eiweiß etc. besprechen zu können.

Eine große Zahl bekannter Erscheinungen schließen sich hier an und erweisen sich als wesensgleich. Die Wirkung von Gasionen als Condensationskernen, die Fällung der Wassertröpfchen von Wolken, Nebeln etc., die Verstärkung des Regens bei der Ionisierung der Luft durch Blitze, die Elektricitätserregung beim Aufsteigen von Gasblasen in Flüssigkeiten, Wirkungen auf Staub, Rauch etc., das Mitreißen von Niederschlägen, die Ähnlichkeit der Fermentwirkungen, vielleicht auch gewisse physiologische Erscheinungen etc. seien nur als wenige Beispiele dieser Art angeführt. Es ist eben ein Charakteristikon naturwissenschaftlicher Forschung, dass jede Beantwortung einer Frage neue Fragen ins Leben ruft. Wenn auch diese hier noch nicht berührt werden konnten, so glaube ich doch nicht weiter zögern zu müssen, diese Zeilen zu veröffentlichen, da mir die leitenden Gesichtspunkte fixiert zu sein scheinen, welche einer Inangriffnahme dieser Probleme zugrunde liegen müssen.

[1] Vergl. Lottermoser, Anorganische Colloide, 76.

Zusammenfassung.

Nach einer kurzen Beschreibung der Haupteigenschaften der mechanischen und colloidalen Suspensionen werden die wichtigsten Theorien discutiert. Da sie als unzureichend erkannt werden, folgt die Aufstellung einer eigenen Theorie, die von energetischen Betrachtungen ausgeht und deren Consequenzen experimentelle Bestätigung finden.

Elektrochemische Studien am Acetylen.

II. Mittheilung:

Anodische Depolarisation

von

Dr. **Jean Billitzer** und Dr. **A. Coehn.**[1]

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juni 1902.)

Hatte die Untersuchung ergeben, dass Acetylen an Kathoden aus platiniertem Platin einfache Additionsproducte liefert, so zeigte es sich, dass es zur Abspielung etwas complicierterer chemischer Processe Anlass gibt, wenn man es während der Elektrolyse an Anoden von Platin etc. vorbeiführt.

Die Bildungspunkte der Producte zu bestimmen und Auskunft über die Grenzen der Intervalle zu erlangen, innerhalb deren der elektrische Strom quantitativ zur Bildung der betreffenden Producte nutzbar gemacht werden kann, bedienten wir uns wieder der Methode der Bestimmung von Zersetzungsspannungen, die bereits ausführlich beschrieben worden ist.

Es wurde nun zunächst das Entladungspotential des Sauerstoffes in Normalkalilauge bestimmt und in Übereinstimmung mit früheren Messungen bei 1·68 Volt gefunden, sodann leiteten wir Acetylen an der Messelektrode (einer feinen Platinspitze) vorbei und beobachteten, dass das Entladungspotential nunmehr auf 1·23 Volt gesunken war. Tabelle I und Fig. 1 geben ein Bild der Messresultate; sie sind ein Mittel vieler Versuche.

---

[1] Unvollständig mitgetheilt. Zeitschrift für Elektrochemie, VII, 681.

Tabelle I.

E	*J* ohne Acetylen	*J* mit Acetylen
0·86	1	1
0·94	1	1
1·2	2·5	2·5
....		....
1·24	—	5·5
1·26	—	7
1·3	5	—
1·32	—	18
1·4	6	—
1·47	—	35
1·5	8	—
1·55	—	43
1·6	10	50
1·64	11	67
1·65	11	83
	....	
1·7	14	—
1·71	17	—
1·73	34	—

Die Potentiale sind hier wie im folgenden immer gegen eine Wasserstoffelektrode in gleicher Lösung zu verstehen. die Zersetzungspunkte sind in der Tabelle durch eine punktierte Linie bezeichnet.

Die Erniedrigung des Entladungspotentiales gibt nur ein Signal, dass hier ein Vorgang einsetzt, dass also hier ein Angriffsobject für die chemische Untersuchung vorliegt. Wir konnten durch eine längere Elektrolyse nachweisen, dass in unserem Falle Ameisensäure entsteht. Die Ameisensäure wurde identificiert durch die Reduction von $HgCl_2$ unter Bildung von CO_2, ferner durch die Reduction von Silbersalzen und endlich noch durch den Siedepunkt.

Es erübrigte noch nachzuweisen, dass zwischen den Knickpunkten bei 1·23 und 1·68 Volt nichts weiter als

Ameisensäure entsteht, die gesammte Stromarbeit also dazu verwendet wird, die Hydroxylionen ihrer Reaction mit Acetylen zuzuführen, da sich bei diesem Potentiale noch kein freier Sauerstoff abscheiden kann. Dazu wurde der Strom bei einer anodischen Spannung von etwa 1·4 Volt durch die Zelle und zugleich durch ein Silbervoltameter geschickt, das Silber

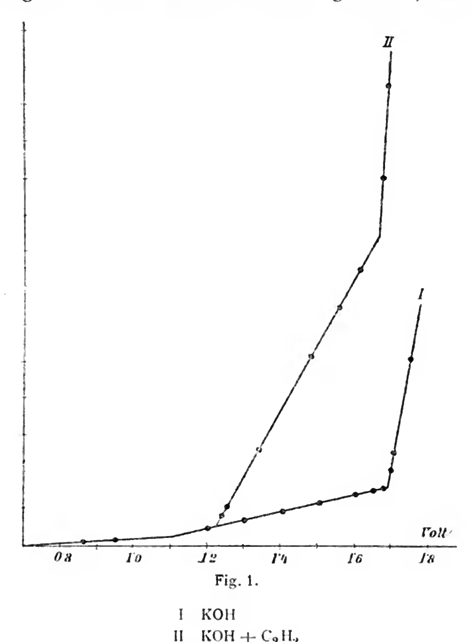


Fig. 1.

I KOH
II KOH + C_2H_2

gewogen und auf die Menge gebildeter Ameisensäure umgerechnet nach der Gleichung:

$$C_2H_2+6OH = 2HCOOH+2H_2O.$$

Zur Trennung des Anodenraumes vom Kathodenraume wurde als Zelle ein U-förmiges Gefäß verwendet, dessen

unteres Verbindungsstück durch eine Capillare gebildet war. Die Lösung wurde dann neutralisiert, mit $HgCl_2$ versetzt und das erhaltene Hg_2Cl_2, das auf gewogenem Filter gesammelt und getrocknet wurde, ergab ein Maß für die enthaltene Ameisensäure.

Folgendes waren unsere Resultate:

	Menge des im Voltameter abgeschiedenen Ag	Menge der darnach berechneten Ameisensäure	Gefundene Menge Ameisensäure	Stromausbeute an Ameisensäure
1....	0·7436 *g*	0·108 *g*	0·105 *g*	97·2%
2....	0·9320	0·1336	0·1318	98·7
3....	0·6201	0·0889	0·0853	95·9

Während hier die Ausbeute als quantitativ, dem Faraday'schen Gesetze entsprechend bezeichnet werden kann, findet — wie vorauszusehen — ein Sinken der Ausbeute an Ameisensäure bei Steigerung der Anodenspannung über den zweiten Zersetzungspunkt hinauf statt. So war das Resultat bei 1·72 Volt Anodenspannung:

4....	0·8440 *g*	0·1115 *g*	0·0695 *g*	62·3%

Da die elektrolytische Oxydation nur an die anodische Entwickelung von Sauerstoff gebunden zu sein schien, war es der nächste Schritt, die Kalilauge durch einen Elektrolyten von gleicher Eigenschaft zu ersetzen. Wir verwendeten Normalschwefelsäure. Es zeigte sich dabei die auffallende Erscheinung, dass die Erniedrigung der Entladungsspannung des Sauerstoffes — im Gegensatze zu der absoluten Sicherheit und Schärfe bei Kalilauge — hier nicht regelmäßig eintrat, keinen ganz constanten Wert ergab und im Mittel nur 0·19 Volt betrug. Der Wert der Methode zeigt sich hier darin, dass wir aus den unregelmäßigen Erscheinungen sofort schließen können, dass hier keine einfache Depolarisation eintritt, sondern dass Vorgänge stattfinden, die noch von anderen Umständen abhängen. Die chemische Untersuchung lehrte, dass keine Ameisensäure entstand, vielmehr wurde Essigsäure gefunden. Der Nachweis geschah durch die Farbreaction mit Eisenchlorid und durch

die Kakodylreaction. Die Erklärung des Auftretens von Essigsäure und zugleich die Deutung der unregelmäßigen Depolarisationserscheinungen ist darin zu sehen, dass beim Einleiten von Acetylen in Schwefelsäure durch Wasseranlagerung intermediär Aldehyd gebildet wird, der sich weiter zu Essigsäure oxydiert. Die Depolarisation von 0·19 Volt rührt hiernach vom Aldehyd her. Nun hat aber bereits Dony-Hénault gefunden und wir konnten es bestätigen, dass die Zufügung von Aldehyd zu Schwefelsäure die Sauerstoffentladung nicht herabsetzt. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass der zugesetzte Aldehyd nicht identisch ist mit dem eben entstehenden, der noch nicht zu Paraldehyd etc. polymerisiert ist.

Wenn man mit der Spannung unterhalb derjenigen bleibt, bei welcher sich Sauerstoff entladen kann, muss auch die Entstehung der Essigsäure dem Faraday'schen Gesetze entsprechend erfolgen. Nachdem die Essigsäure chemisch identificiert war, geschah ihre quantitative Bestimmung — in Abwesenheit einer einfachen gewichtsanalytischen Methode — in der Weise, dass man ein gemessenes Volumen 0·1 *n* SH_2O_4 der Elektrolyse unterwarf, während Acetylen hindurchgeleitet wurde. Der Elektrolyt wurde dann in einen Messcylinder gebracht, mit dem Spülwasser vereinigt und die Zunahme des Titers eines aliquoten Theiles auf CH_3COOH umgerechnet; die Versuche ergaben mit Benützung der Reactionsgleichung:

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ COH \end{matrix} + O = \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ COOH \end{matrix}$$

		Menge des im Voltameter abgeschiedenen Ag	$C_2H_4O_2$ darnach berechnet	$C_2H_4O_2$ aus dem Titer gefunden	Stromausbeute an $C_2H_4O_2$
bei 1·6 Volt	1.	0·758 *g*	0·2126 *g*	0·2125 *g*	99·9%
	2.	0·734	0·2058	0·2051	99·7
	3.	0·943	0·2644	0·2673	101·1

Die Ausbeute ist also quantitativ (der letzte Wert entspricht einer schwachen Übertitration), doch sinkt sie sogleich, wenn die Spannung die oben bestimmte Grenze übersteigt:

bei 1·7 Volt	0·791	0·2218	0·1047	47·2%

Nach der Oxydation versuchten wir die Einführung von Halogen in Acetylen zu erreichen. Dies gelang aber nicht so glatt. In alkalischer Lösung erfolgt eine starke Depolarisation, die aber — wie sich vorhersehen lässt — nicht von einer primären Wirkung der Halogene herrühren kann, da sich ja zunächst die unterbromigsauren etc. Salze bilden. Zwei Knickpunkte treten hier auf und ihnen entsprechend zwei Producte (vergl. Fig. 2 und 3). Bei höherer Spannung ist das Hauptproduct der Elektrolyse Oxalsäure, das erste Product muss

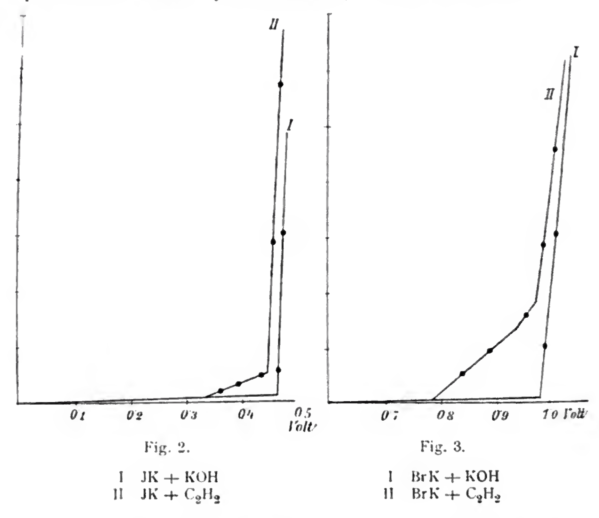


Fig. 2.

I JK + KOH
II JK + C_2H_2

Fig. 3.

I BrK + KOH
II BrK + C_2H_2

hiernach Glyoxal sein, welches sich auch durch schwache Bräunung der alkalischen Lösung zu erkennen gibt. Die Reaction entspricht also wohl den Gleichungen:

$$C_2H_2 + 4OH = \begin{matrix} COH \\ | \\ COH \end{matrix} + 2H_2O$$

$$\begin{matrix} COH \\ | \\ COH \end{matrix} + 4OH = \begin{matrix} COOH \\ | \\ COOH \end{matrix} + 2H_2O.$$

Eine quantitative Verfolgung ist bei Gegenwart von Alkali hier ausgeschlossen.

Wendet man dagegen die Halogenwasserstoffsäuren an, so ist platiniertes Platin als Elektrode ausgeschlossen, da es angegriffen wird, dagegen ist die Verwendung von blanken Platinelektroden zulässig. An diesen findet aber keine nennenswerte Depolarisation statt, dieselbe beträgt vielmehr nur 0·01 bis 0·02 Volt. Es erschien nun als eine Frage von Interesse, zu prüfen, ob Halogenüberträger auch elektrochemisch ein

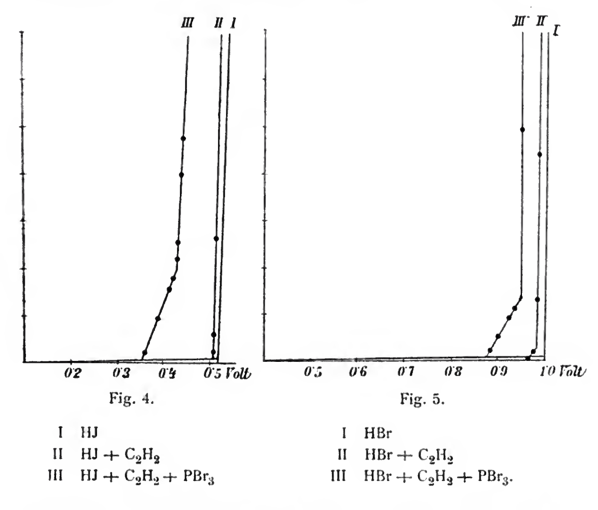


Fig. 4.

I HJ
II HJ + C_2H_2
III HJ + C_2H_2 + PBr_3

Fig. 5.

I HBr
II HBr + C_2H_2
III HBr + C_2H_2 + PBr_3.

Anzeichen ihrer Wirksamkeit geben, so dass in deren Gegenwart die vorher ausgebliebene Wirkung des Halogens auf das Acetylen merkbar erfolgt. Dafür hat man zunächst festzustellen, ob die Gegenwart des Überträgers allein ohne das Acetylen einen Einfluss auf das Entladungspotential äußert. Wir nennen hier als Beispiel die Messungen für Phosphortribromid. Weder Chlor, Brom, noch Jod ergeben bei Zusatz dieses Überträgers eine wesentliche Änderung ihres Entladungspotentiales. Wurde aber jetzt Acetylen hindurchgeleitet, so zeigte sich eine deutliche

Depolarisation, wie aus Fig. 4 und 5 und den Tabellen II und III zu ersehen ist. Phosphorige und Phosphorsäure aber erwiesen sich als wirkungslos, wie auch festes Jod und rother Phosphor ohne Einfluss bleiben.

Tabelle II.

E	J		
	JH	JH + C_2H_2	JH + C_2H_2 + PBr_3
0·2	< 1	< 1	< 1
0·3	< 1	< 1	< 1
0·39	< 1	< 1	9
0·42	—	—	14·5
0·43	—	—	17
0·44	—	—	25
0·45	< 1	< 1	48
0·5	< 1	2	—
0·51	—	6	—
0·52	—	25	—

Tabelle III.

E	J		
	BrH	BrH + C_2H_2	BrH + C_2H_2 + PBr_3
0·5	< 1	< 1	< 1
0·7	< 1	< 1	< 1
0·85	< 1	< 1	< 1
0·88	•	•	2
0·91	•	•	5
0·93	—	—	7·5
0·94	—	—	9
0·95	< 1	< 1	11·5
0·96	—	—	50
0·97	1	2	—
0·98	1	10	—
0·99	—	45	—

Für die chemische Untersuchung erhalten diese Curven den deutlichen Hinweis, dass zwei verschiedene Producte entstehen und zugleich die Abgrenzung des Spannungsgebietes, innerhalb dessen nur das eine Product zu erwarten ist. Wegen seiner geringen Ausdehnung und der Schwierigkeit, so spurenhafte Producte von den Ausgangssubstanzen zu trennen, musste hier davon Abstand genommen werden, die chemische Untersuchung weiterzuführen. Es scheint hier aber ein Weg gegeben zu sein, die Wirksamkeit der Überträger auf einfache Weise quantitativ zu untersuchen, ein Weg, der vielleicht zu einem Blicke in den Mechanismus jener Wirksamkeit zu führen geeignet ist.

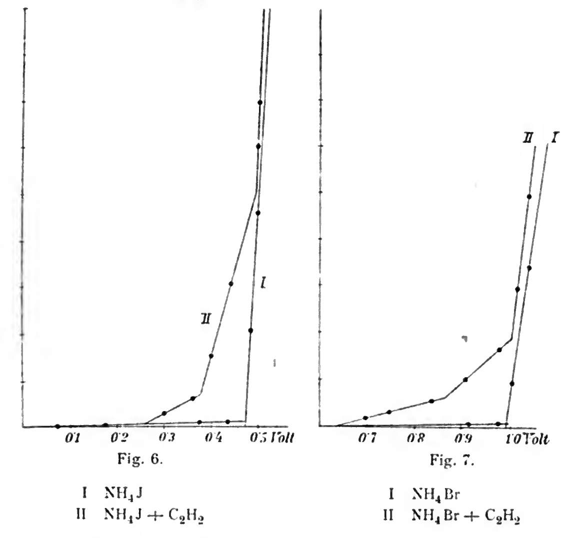


Fig. 6.

I NH_4J
II $NH_4J + C_2H_2$

Fig. 7.

I NH_4Br
II $NH_4Br + C_2H_2$

Den Schwierigkeiten, welchen wir hier begegneten, auszuweichen, wurden folgende Versuche ausgeführt, bei welchen die gesuchte Halogeneinführung endlich auf directem Wege zu gelingen scheint. Es hatte sich gezeigt, dass in sauren und alkalischen Lösungen die Einführung von Halogen nicht gelingt, anderseits sind neutrale Salzlösungen

während der Elektrolyse nicht neutral zu erhalten, sondern erlangen alkalische Reaction an der Kathode, saure Reaction an der Anode. Diesen Übelstand möglichst zu mildern, verwendeten wir nunmehr Lösungen von Brom- und Jodammonium und erhielten mit diesen an platinierten Platinelektroden in der That eine deutliche Depolarisation, welche abermals für das Auftreten zweier Producte, also für die Bildung der gesuchten Additionsproducte spricht, wie Fig. 6 und 7 und Tabelle IV und V zeigen. (Von Chlorammonium wurde wegen des erfolgenden Angriffes der Elektrode Abstand genommen.)

Tabelle IV.

E	*J*	
	NH_4J	$NH_4J + C_2H_2$
0·08	< 1	< 1
0·18	< 1	< 1
0·3	1	3
0·37	—	6
0·38	1	—
0·4	—	16
0·44	> 1	30
0·49	20	61
0·50	45	70

Tabelle V.

E	*J*	
	NH_4Br	$NH_4Br + C_2H_2$
0·63	< 1	< 1
0·7	< 1	2
0·75	—	3
0·84	< 1	5
0·91	1	10·5
0·98	1	17
1·01	10	30
1·04	35	49

Die Producte der Einwirkung sind leicht flüchtige Körper von ätherischem Geruche. Leider stellten sich ihrer chemischen Untersuchung die Schwierigkeit der Trennung, die wegen der sehr langsamen Elektrolyse äußerst geringen Ausbeuten (bei so geringer Stromdichte) etc. entgegen, und wir mussten uns begnügen zu constatieren, dass die Siedepunkte in der Nähe derjenigen der Brom- und Jodadditionsproducte liegen müssen, für deren Bildung auch andere Umstände sprechen. Die einwandsfreie Bestätigung dieser Vermuthung muss aber aus äußeren Gründen einer weiteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Über die Discriminante einer in der Theorie der doppeltperiodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung

(III. Mittheilung)

von

Otto Biermann in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1902.)

In einer ersten Mittheilung, Bd. CIX, Abth. IIa., Juli 1900 wurde die Form der Discriminante derjenigen Transformationsgleichung entwickelt, deren Lösungen die Verhältnisse der aus einem Integralmodul c transformierten k und der entsprechenden Multiplicatoren M sind; und in einer zweiten Mittheilung, Bd. CX, Abth. IIa., April 1901 wurden Nullstellen der Discriminante $D(c)$ gefunden.

Weil die Wurzeln der Transformationsgleichung in der Gestalt darstellbar sind:

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}}\, t\, \frac{\vartheta_2^2\left(0, \frac{t\tau-16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(0, \tau)},$$

wo in dem Thetamodul $\tau = a+bi = \frac{iK'}{K}$, dem der Integralmodul c entspricht, nothwendig $b > 0$ sein muss und wo t, t_1, ξ solche positive ganze Zahlen sind, dass tt_1 dem positiven ganzzahligen Transformationsgrade n ohne quadratischen Theiler gleich,

$$0 \leqq \xi < t_1$$

ist,[1] so verschwindet die Discriminante $D(c)$, wenn eine Gleichung der Form besteht:

$$\vartheta_2^2(0, \tau_1) = (-1)^{\frac{u-t}{2}} \frac{u}{t} \vartheta_2^2(0, \tau_2), \qquad \ldots A)$$

in der

$$\tau_1 = \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}, \qquad \tau_2 = \frac{u\tau - 16x}{u_1}$$

$$(uu_1 = n, \quad 0 \leqq x_1 < u_1)$$

ist.

Es handelte sich darum, hinreichende Bedingungen für die Existenz der Gleichung A) anzugeben und eine Methode zur Ermittelung von solchen τ-Werthen mit positiven imaginären Bestandtheilen herzustellen, denen zufolge des eindeutigen Zusammenhanges zwischen τ und c, $\frac{\vartheta_2^2(0, \tau)}{\vartheta_3^2(0, \tau)} = c$, je ein c entspricht, für welches $D(c)$ verschwindet.

Hinreichende Bedingungen waren es, wenn $\tau_1 = \frac{b_0 - a_0\tau_2}{a_1\tau_2 - b_1}$ war, oder darum eine Gleichung der Form bestand:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0, \qquad \ldots 1')$$

und die der Relation $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$ genügenden Transformationszahlen a_0, a_1, b_0, b_1 dem ersten oder fünften Falle der linearen Transformation angehörten, ferner aber auch τ der Gleichung genügte:

$$a_1 u\tau - b_1 u_1 - a_1 16x + (-1)^{\frac{u-t}{2}} t_1 e^{\frac{\pi i}{4}(2a_0b_0 + 2a_0 - 2)} = 0; \qquad \ldots 2)$$

und es waren die Gleichungen 1') und 2) zu bilden, denen dieselben τ-Werthe mit positiven imaginären Bestandtheilen genügen.

---

[1] L. c. hieß es unrichtig $(-1)^{\frac{t_1-1}{2}}$ statt $(-1)^{\frac{t-1}{2}}$, so dass in den Fällen $n \equiv 3$ (mod. 4) eine Verkehrung der Zeichen aller Wurzeln der Transformationsgleichung verursacht, in den Fällen $n \equiv 1$ (mod. 4) keine Änderung hervorgerufen war.

Herr Martin Krause machte mich aufmerksam, dass die Größe

$$e^{\frac{2\pi i}{4} m},$$

wo $m = a_0 b_0 + a_0 - 1$ ist, bei gegebenen Werthen von a_0 und b_0 den (von der linearen Transformation der Thetafunction entstammenden) eindeutig bestimmten Werth

$$\cos \frac{2\pi m}{4} + i \sin \frac{2\pi m}{4}$$

besitze, indessen die vierte Wurzel passend so gewählt war, dass aus der Gleichung 2) bei vorgegebenen Werthen der dem ersten oder fünften Falle angehörenden Transformationszahlen ein τ-Werth der verlangten Beschaffenheit hervorging.

Nun erfahren einige der früheren Aussagen Zusätze, die zuerst abgeleitet werden müssen.

Wenn die Transformationszahlen dem ersten Falle der linearen Transformation angehören, also a_1 und b_0 gerade sind, und daher auch m gerade ist, geht kein τ-Werth der verlangten Art aus der Gleichung 2) hervor. Die Transformationszahlen des ersten Falles sind also auszuschließen, was l. c. aus anderem Grunde auch geschehen war.

Wenn aber die Transformationszahlen dem fünften Falle der linearen Transformation angehören, also von diesen nur a_1 gerade und daher m ungerade ist, so geht, je nachdem

$$u - t \equiv \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \pmod{4}$$

ist, nur dann ein τ-Werth mit positivem imaginären Bestandtheil aus der Gleichung 2) hervor, wenn beziehungsweise

$$a_0 b_0 + a_0 - 1 \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \pmod{4}$$

ist.

Darnach aber sind die Formen, unter denen die Transformationszahlen im ersten der unterschiedenen Fälle auftreten:

$$a_0 = 4A_0+1 \quad b_0 = 4B_0+1, \quad a_1 \equiv 0 \pmod{2}, \qquad \ldots 1)$$
$$b_1 \equiv 1 \pmod{2},$$

$$a_0 = 4A_0+3, \quad b_0 = 4B_0+1, \quad a_1 \equiv 0 \pmod{2}, \qquad \ldots 2)$$
$$b_1 \equiv 1 \pmod{2},$$

aber im zweiten der unterschiedenen Fälle:

$$a_0 = 4A_0+1, \quad b_0 = 4B_0+3, \quad a_1 \equiv 0 \pmod{2}, \qquad \ldots 1')$$
$$b_1 \equiv 1 \pmod{2},$$

$$a_0 = 4A_0+3, \quad b_0 = 4B_0+3, \quad a_1 \equiv 0 \pmod{2}, \qquad \ldots 2')$$
$$b_1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Wir erfuhren, dass die Determinante $\Delta = Q^2 - PR$ der zu unserem Zwecke verwerthbaren Gleichung 1′) den Werth $-n^2$ haben müsse und dass die Coefficienten der zu bildenden Gleichung 1′) die Eigenthümlichkeit hätten:

$$\left.\begin{aligned} P &= a_1 ut \equiv 0 \pmod{2} \\ Q &= u(a_0 t_1 - a_1 16\xi) = -t(b_1 u_1 + a_1 16x) \equiv 1 \pmod{2} \\ R &= a_1.16x.16\xi + b_1.16\xi.u_1 - a_0.16x.t_1 - b_0 u_1 t_1 \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}\right\} \quad \alpha)$$

Doch beachtet man jetzt, dass im Falle

$$u - t \equiv 2 \pmod{4},$$

wo $b_0 \equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$u = 4p+k, \quad u_1 = 4p_1+k, \quad t = 4q-k, \quad t_1 = 4q_1-k, \qquad \ldots 1)$$
$$u = 4p+k, \quad u_1 = 4p_1-k, \quad t = 4q-k, \quad t_1 = 4q_1+k, \qquad \ldots 2)$$

$k = 1, 3$ gilt, also

$$ut \equiv -k^2 \equiv 3 \pmod{4}, \qquad b_0 \not\equiv ut \pmod{4}$$

und daher

$$R \equiv 1 \pmod{4}$$

ist; und dass im Falle

$$u - t \equiv 0 \pmod{4},$$

wo $b_0 \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$u = 4p+k, \quad u_1 = 4p_1+k, \quad t = 4q+k, \quad t_1 = 4q_1+k, \quad \ldots 1)$$

$$u = 4p+k, \quad u_1 = 4p_1-k, \quad t = 4q+k, \quad t_1 = 4q_1-k, \quad \ldots 2)$$

$k = 1, 3$ gilt, also

$$ut \equiv k^2 \equiv 1 \pmod{4}, \qquad b_0 \not\equiv ut \pmod{4}$$

und daher auch

$$R \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, so ist die frühere Bedingung $R \equiv 1 \pmod{2}$ nunmehr durch $R \equiv 1 \pmod{4}$ zu ersetzen.

Die genannten Bedingungen betreffs der Determinante der Gleichung 1′) und ihrer Coefficienten bestehen nothwendig, wenn unsere für die Existenz der Gleichung A) hinreichenden Bedingungen erfüllt sind. Der Beweis, dass sie zur Bestimmung der Zahlen u, u_1, x, t, t_1, ξ, a_0, b_0, a_1, b_1 und somit zur Herstellung der Gleichungen 1′) hinreichend sind, bedarf nach der Unterscheidung der Transformationszahlen a_0 und b_0 nach dem Modul 4 des Zusatzes, dass je nachdem

$$u-t \equiv \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \pmod{4}$$

ist, b_0 beziehungsweise von der Form wird:

$$4B_0+1 \quad \text{oder} \quad 4B_0+3.$$

Das ergibt sich aber unmittelbar, wenn man in dem Ausdrucke $\frac{a_0 b_1 - 1}{a_1}$ für b_0, sobald als P die Theiler u und t von n und den Theiler ut besitzt, wonach auch Q diese Theiler u und t hat,

$$a_1 = \frac{P}{ut}, \qquad a_0 = \frac{1}{ut_1}\left(Q+16\xi\frac{P}{t}\right),$$

$$b_1 = \frac{-1}{u_1 t}\left(Q+16x\frac{P}{u}\right), \qquad -1 = -\frac{n^2}{n^2} = \frac{Q^2-PR}{u u_1 t t_1}$$

setzt und wieder die in der dritten der Gleichungen α) gegebene Darstellung von R ableitet.[1]

Im übrigen ist zu sehen, dass von den in der zweiten Mittheilung angegebenen Gleichungen 1') die wegzulassen sind, wo $R \equiv 3$ (mod. 4) ist.

Wenn man also von den im Falle $n = 3$ vorkommenden drei reducierten Formen (1, 0, 9), (3, 0, 3), (2, 1, 5) die erste und zweite, die noch kein gerades P und keine ungeraden Q und R aufweisen, durch die lineare Transformation des sechsten Falles, wo

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad b_0 = -1, \quad b_1 = 1$$

ist, überführt in (10, —1, 1), (6, —3, 3), so ist hiervon die zweite fortzulassen, und man behält nur zwei Formen, von denen jede zu zwei Gleichungen 1') Veranlassung gibt. Man gewinnt zuerst die Gleichungen

$$10\tau^2-2\tau+1 = 0, \qquad 2\tau^2+2\tau+5 = 0$$

und dann zwei solchen Formen entsprechende Gleichungen, die aus den früheren Formen durch eine lineare Transformation des ersten Falles hervorgehen. Ist bei dieser z. B.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1,$$

so heißen die weiteren zwei Gleichungen

$$10\tau^2+2\tau+1 = 0. \qquad 26\tau^2+22\tau+5 = 0.$$

τ-Werthe mit positiven imaginären Bestandtheilen, denen c-Werthe entsprechen, für welche die $n = 3$ entsprechende Discriminante $D(c)$ verschwindet, sind also die vier nachstehenden:

$$\frac{1+3i}{10}, \quad \frac{-1+3i}{10}, \quad \frac{-1+3i}{2}, \quad \frac{-11+3i}{26}.$$

[1] ξ und x waren so zu rechnen, dass die Congruenzen

$$t\,\frac{Q}{u}+16\xi\,\frac{P}{u} \equiv 0 \text{ (mod. } n), \qquad u\,\frac{Q}{t}+16x\,\frac{P}{t} \equiv 0 \text{ (mod. } n)$$

befriedigt wurden.

Es bleibt aber naturgemäß noch immer die Frage bestehen, ob so alle Nullstellen von $D(c)$ angegeben werden, natürlich außer denen, für die ihre Factoren verschwinden, die Potenzen von c und c^2-1 sind, d. h. ob die unseren für die Existenz der Gleichung A) hinreichenden Bedingungen entspringenden Lösungen der Gleichung $D(c) = 0$ auch die den nothwendigen Bedingungen zukommenden Lösungen sind.

Es soll nun die weitere Aufgabe dieser Zeilen sein, gerade die Frage zu behandeln, ob die hinreichenden Bedingungen auch die nothwendigen sind. Wenn sich da ergeben sollte, dass dies nicht der Fall ist, so würde zu den früheren Untersuchungen nur hinzuzufügen sein, dass es außer den gefundenen Nullstellen von $D(c)$ im allgemeinen noch andere gibt.

Die Untersuchung führe ich, indem ich zunächst einer mir von M. Krause freundlichst gegebenen Anregung folge und unabhängig von der Transformationstheorie nach den Beziehungen zwischen τ_1 und τ_2 frage, unter welchen eine Gleichung

$$\vartheta_2^2(0, \tau_1) = a\,\vartheta_2^2(0, \tau_2) \qquad \ldots A')$$

besteht.

Weil

$$c_1 = \frac{\vartheta_2^2(0, \tau_2)}{\vartheta_3^2(0, \tau_2)}, \qquad k_1 = \frac{\vartheta_2^2(0, \tau_1)}{\vartheta_3^2(0, \tau_1)}$$

eindeutig von τ_2, beziehungsweise τ_1 abhängen, so kann man auch fragen, welche Bedingung zwischen c_1 und k_1 bestehen müsse, damit die frühere Gleichung existiert. Doch weil $\vartheta_2^2(0, \tau_2)$, als Function von c_1 betrachtet, einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, $\vartheta_2^2(0, \tau_1)$ einer solchen Differentialgleichung mit der unabhängigen Variablen k_1, so lässt sich die frühere Frage (immer noch mit Krause) durch die folgende ersetzen: Wann haben diese Differentialgleichungen eine gemeinsame Lösung, oder — was hier auf dasselbe hinauskommt — eine bis auf einen Factor gemeinsame Lösung, damit eine Gleichung der früheren Art besteht.

Wir haben diese Differentialgleichungen aufzustellen, haben einen Zusammenhang zwischen k_1 und c_1 vorauszusetzen, etwa in der Form $k_1 = f(c_1)$ und werden die Bedingung

an f, unter welcher die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein gemeinsames Integral haben, in Gestalt einer Differentialgleichung dritter Ordnung mit der unabhängigen Variablen c_1 finden. Doch wenn diese Differentialgleichung von derjenigen verschieden und allgemeiner ist als die, welche zwischen dem τ_2 entsprechenden gegebenen Integralmodul c_1 und dem transformierten k_1 besteht, dessen zugehörender Thetamodul aus τ_2 durch eine Transformation

$$\frac{b_0-a_0\tau_2}{a_1\tau_2-b_1}=\tau_1$$

mit ganzzahligen Coefficienten hervorgeht, wobei $a_0b_1-a_1b_0$ eine beliebige ganze Zahl ist, so werden unsere für die Existenz der Gleichung A) hinreichenden Bedingungen im allgemeinen noch nicht erfüllt sein; d. h. wenn in der früheren Transformationsgleichung die Transformationszahlen der Gleichung $a_0b_1-a_1b_0=1$ genügen und dem fünften Falle der linearen Transformation angehören, dann

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(2a_0b_0+2a_0-2)}(b_1-a_1\tau_2)=(-1)^{\frac{n-t}{2}}\frac{n}{t}$$

ist, und endlich

$$a_0b_0+a_0-1\equiv 1,\ 3 \pmod{4}$$

ist, je nachdem

$$n-t\equiv 2,\ 0 \pmod{4}$$

gilt, so werden die nothwendigen Bedingungen wohl erfüllt sein, aber umgekehrt werden diese nothwendigen Bedingungen die hinreichenden nicht enthalten.

Die Aufstellung der Differentialgleichung, der $\vartheta_2^2(0,\tau)=\vartheta_2^2$ als Function von c oder von c' genügt, wo $c'^2=1-c^2$ ist, vollziehen wir in zweierlei Weise. Wir beachten einerseits, dass Jacobi[1] das Theorem aufstellte: ϑ_2 genügt der Differentialgleichung:

[1] Gesammelte Werke, Bd. II, S. 180.

$$\left(\vartheta_2^2 \frac{d^3 \vartheta_2}{d\tau^3} - 15\, \vartheta_2 \frac{d\vartheta_2}{d\tau} \frac{d^2 \vartheta_2}{d\tau^2} + 30 \left(\frac{d\vartheta_2}{d\tau}\right)^3\right)^2 +$$

$$+ 32 \left(\vartheta_2 \frac{d^2 \vartheta_2}{d\tau^2} - 3 \frac{d\vartheta_2}{d\tau}\right)^3 + \pi^2 \vartheta_2^{10} \left(\vartheta_2 \frac{d^2 \vartheta_2}{d\tau^2} - 3 \frac{d\vartheta_2}{d\tau}\right)^2 = 0$$

und führen c' als unabhängige Variable ein. Man hat also die Gleichungen

$$\frac{d\vartheta_2}{d\tau} = \frac{d\vartheta_2}{dc'} \frac{dc'}{d\tau},$$

$$\frac{d^2 \vartheta_2}{d\tau^2} = \frac{d^2 \vartheta_2}{dc'^2} \left(\frac{dc'}{d\tau}\right)^2 + \frac{d\vartheta_2}{dc'} \frac{d^2 c'}{d\tau^2}, \quad \text{u. s. w.}$$

zu berücksichtigen und die Ableitungen von c' nach τ einzuführen. Es ist aber

$$c' = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}, \qquad \frac{dc'}{d\tau} = \frac{2\vartheta_0}{\vartheta_3^3} \left(\vartheta_3 \frac{d\vartheta_0}{d\tau} - \vartheta_0 \frac{d\vartheta_3}{d\tau}\right)$$

und vermöge der partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v, \tau)}{\partial v^2}\right)_{v=0} = \vartheta_\alpha'' = 4\pi i \left(\frac{\partial \vartheta_\alpha(v, \tau)}{\partial \tau}\right)_{v=0} \qquad (\alpha = 0, 2, 3).$$

$$\frac{dc'}{d\tau} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3^3} (\vartheta_3 \vartheta_0'' - \vartheta_0 \vartheta_3'').$$

Doch weil aus der bekannten Darstellung der zweiten Ableitung von $\log \vartheta_3^2(v, \tau)$ nach v für $v = 0$ noch folgt, dass

$$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2} \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$$

ist, so wird

$$\frac{dc'}{d\tau} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3^3} \frac{\vartheta_1'^2 \vartheta_2^2}{\vartheta_0^2 \vartheta_3^2} \vartheta_0 \vartheta_3$$

und wegen der Relation $\vartheta_1' = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3$:

$$\frac{dc'}{d\tau} = -\frac{\pi i}{2} c' \vartheta_2^4.$$

Dann folgt

$$\frac{d^2c'}{d\tau^2} = -\frac{\pi^2 c'}{4}\vartheta_2^7\left(\vartheta_2 + 4c'\frac{d\vartheta_2}{dc'}\right),$$

u. s. w.

und es ergibt sich die Differentialgleichung

$$c'c^4\frac{d^2\vartheta_2}{dc'^2} + c^4\frac{d\vartheta_2}{dc'} + c'c^4\frac{1}{\vartheta_2}\left(\frac{d\vartheta_2}{dc'}\right)^2 + c'\frac{\vartheta_2}{2} = 0;$$

die für $\vartheta_2^2 = L$ lautet:

$$c'c^4\frac{d^2L}{dc'^2} + c^4\frac{dL}{dc'} + c'L = 0.$$

Andererseits aber gewinnen wir diese Differentialgleichung, indem wir von der Differentialgleichung für K, dem vierten Theile der ersten Elementarperiode von $sn(\pi\vartheta_3^2 v) = sn\,u$ ausgehen, das ist von

$$c(1-c^2)\frac{d^2K}{dc^2} + (1-3c^2)\frac{dK}{dc} - cK = 0,$$

hier zunächst die unabhängige Variable c' einführen, wobei

$$c'(1-c'^2)\frac{d^2K}{dc'^2} + (1-3c'^2)\frac{dK}{dc'} - c'K = 0$$

entsteht, und von dieser Differentialgleichung für K zu der übergehen, welche für

$$\vartheta_2^2 = L = \frac{2Kc}{\pi}$$

gilt. Man erhält die frühere Differentialgleichung, welche nach Einführung von c als der unabhängigen Variablen durch die folgende zu ersetzen ist:

$$c^2(1-c^2)\frac{d^2L}{dc^2} - c(1+c^2)\frac{dL}{dc} + L = 0;$$

diese bietet den Vortheil, dass die Coefficienten ganze Functionen von c sind.

$\vartheta_2^2(0, \tau_2) = L_1$ genügt dann der Differentialgleichung

$$c_1^2(1-c_1^2)\frac{d^2L_1}{dc_1^2} - c_1(1+c_1^2)\frac{dL_1}{dc_1} + L_1 = 0, \qquad \ldots \text{I})$$

$\vartheta_2^2(0, \tau_1) = L_2$ aber der Differentialgleichung

$$k_1^2(1-k_1^2)\frac{d^2L_2}{dk_1^2} - k_1(1+k_1^2)\frac{dL_2}{dk_1} + L_2 = 0. \qquad \ldots \text{II})$$

Wenn die beiden Differentialgleichungen für L_1 und L_2 ein gemeinsames Integral besitzen, oder — wie schon früher gesagt — ein bis auf einen Factor gleiches Integral haben, so wird gewiss eine Beziehung zwischen c_1 und k_1 bestehen.

Wenn überhaupt eine solche $k_1 = f(c_1)$ besteht, so lautet die zweite Differentialgleichung nach Einführung der Größe c_1 als der unabhängigen Variablen, weil

$$\frac{dL_2}{dk_1} = \frac{dL_2}{dc_1}\frac{1}{f'(c_1)},$$

$$\frac{d^2L_2}{dk_1^2} = \frac{d^2L_2}{dc_1^2}\frac{1}{f'^2(c_1)} - \frac{dL_2}{dc_1}\frac{f''(c_1)}{f'^3(c_1)}$$

ist, folgendermaßen:

$$(\text{III}\ldots\left(k_1^2(1-k_1^2)\frac{dk_1}{dc_1}\right)\frac{d^2L_2}{dc_1^2} -$$

$$-\left(k_1(1+k_1^2)\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^2 + k_1^2(1-k_1^2)\frac{d^2k_1}{dc_1^2}\right)\frac{dL_2}{dc_1} + \left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^3 L_2 = 0;$$

und jetzt ist nur die Bedingung an die Function $f(c_1)$ anzugeben, unter der die Differentialgleichungen I) und III), d. h. zwei Differentialgleichungen der Gestalt

$$A_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B_1(x)\frac{dy}{dx} + C_1(x)y = 0 \qquad \ldots \text{I}')$$

$$A_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B_2(x)\frac{dy}{dx} + C_2(x)y = 0 \qquad \ldots \text{II}')$$

durch dieselbe Function, hier y von x befriedigt werden.

Wenn es eine solche Function gibt, so wird auch

$$A_1(x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{dA_1}{dx}+B_1(x)\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dB_1}{dx}+C_1(x)\right)\frac{dy}{dx}+\frac{dC_1}{dx}y=0,$$

$$A_2(x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{dA_2}{dx}+B_2(x)\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dB_2}{dx}+C_2(x)\right)\frac{dy}{dx}+\frac{dC_2}{dx}y=0.$$

Doch die vier in y und seinen ersten drei Differentialquotienten linearen Differentialgleichungen bestehen nur zusammen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & A_1 & B_1 & C_1 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & A_1'+B_1 & B_1'+C_1 & C_1' \\ A_2 & A_2'+B_2 & B_2'+C_2 & C_2' \end{vmatrix}$$

verschwindet. Wenn umgekehrt die Determinante Null ist, so haben die zwei Differentialgleichungen I′) und II′) ein gemeinsames Integral.

Die Ausführung der in dem Symbol der verschwindenden Determinante vorgeschriebenen Operationen liefert die Gleichung

$$\begin{aligned}(A_1B_2-A_2B_1)[(B_1C_2-B_2C_1)+(A_1C_2'-A_2C_1')]+\\ +(B_1C_2-B_2C_1)(A_1A_2'-A_2A_1')+\\ +(C_1A_2-C_2A_1)(A_1B_2'-A_2B_1')-(A_1C_2-A_2C_1)^2=0\end{aligned}$$

und im Falle unserer Differentialgleichungen I) und III) ist

$$A_1=c_1^2(1-c_1^2),$$

$$A_2=k_1^2(1-k_1^2)\frac{dk_1}{dc_1},$$

$$A_1'=2c_1(1-2c_1^2),$$

$$A_2'=k_1^2(1-k_1^2)\frac{d^2k_1}{dc_1^2}+2k_1(1-2k_1^2)\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^2;$$

$$B_1 = -c_1(1+c_1^2),$$

$$B_2 = -\left\{k_1(1+k_1^2)\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^2 + k_1^2(1-k_1^2)\frac{d^2k_1}{dc_1^2}\right\},$$

$$B_1' = -(1+3c_1^2),$$

$$B_2' = -\left\{(1+3k_1^2)\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^3 + 2k_1(2-k_1^2)\frac{d^2k_1}{dc_1^2}\frac{dk_1}{dc_1} + k_1^2(1-k_1^2)\frac{d^3k_1}{dc_1^3}\right\};$$

$$C_1 = 1,$$

$$C_2 = \left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^3,$$

$$C_1' = 0,$$

$$C_2' = 3\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^2\frac{d^2k_1}{dc_1^2}.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die früher angegebene Bedingung dafür, dass die Differentialgleichungen I′) und II′) ein gemeinsames Integral haben, liefert beim Ordnen und nach der Division durch

$$c_1^2(1-c_1^2).k_1^2(1-k_1^2)$$

bis auf den Factor

$$-\frac{dk_1}{dc_1}$$

eine Differentialgleichung dritter Ordnung für jene Functionalbeziehung $k_1 = f(c_1)$, die zwischen k_1 und c_1 erfüllt sein muss, damit eine Gleichung

$$\vartheta_2^2(0, \tau_1) = a\,\vartheta_2^2(0, \tau_2)$$

besteht. Sie lautet:

$$\frac{d^3k_1}{dc_1^3}\left\{k_1^2(1-k_1^2) - c_1^2(1-c_1^2)\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^2\right\} +$$

$$+\frac{d^2k_1}{dc_1^2}\left\{k_1^2(1-k_1^2)\frac{c_1(1-5c_1^2)}{c_1^2(1-c_1^2)} + 3\frac{k_1^3(1-k_1^4)}{k_1^2(1-k_1^2)}\frac{dk_1}{dc_1} -\right.$$

$$\left.-3\frac{c_1^3(1-c_1^4)}{c_1^2(1-c_1^2)}\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^2 - c_1^2(1-c_1^2)\frac{k_1(1-5k_1^2)}{k_1^2(1-k_1^2)}\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^3\right\} -$$

$$-\frac{dk_1}{dc_1}\left[3\frac{c_1^2k_1^2(1-k_1^2)}{c_1^2(1-c_1^2)}-\frac{c_1(1-5c_1^2)k_1(1+k_1^2)}{c_1^2(1-c_1^2)}\frac{dk_1}{dc_1}+\right.$$

$$+\left(c_1^2\frac{1-7c_1^2-2c_1^4}{c_1^2(1-c_1^2)}+k_1^2\frac{1-7k_1^2-2k_1^4}{k_1^2(1-k_1^2)}\right)\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^2-$$

$$\left.-\frac{k_1(1-5k_1^2)c_1(1+c_1^2)}{k_1^2(1-k_1^2)}\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^3+3\frac{k_1^2c_1^2(1-c_1^2)}{k_1^2(1-k_1^2)}\left(\frac{dk_1}{dc_1}\right)^4\right]=0$$

und hat das particuläre Integral $k_1 = c_1$, denn der letzte Klammerausdruck ist für $k_1 = c_1$ gleich Null. Die Differentialgleichung für k_1^2 als Function von c_1^2 ist noch umständlicher.

Betrachten wir nun die Differentialgleichung dritter Ordnung für einen Integralmodul k als Function von c_1, der aus c_1 entsteht, wenn man statt dem c_1 zugehörenden Thetamodul τ_2 einen solchen setzt, der durch eine Transformation

$$\frac{b_0-a_0\tau_2}{a_1\tau_2-b_1}=\tau_1$$

mit ganzen Transformationszahlen hervorgeht, wobei der Werth von $a_0b_1-a_1b_0$ gleichgiltig ist, d. h. betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^3k}{dc_1^3}-\frac{3}{2}\frac{d^2k}{dc_1^2}-$$
$$-\frac{dk}{dc_1}\left(\frac{(1+c_1^2)^2}{2c_1^2(1-c_1^2)^2}\frac{dk}{dc_1}-\frac{(1+k^2)^2}{2k^2(1-k^2)^2}\left(\frac{dk}{dc_1}\right)^3\right)=0,$$ [1]

welche auch das particuläre Integral $k = c_1$ besitzt, so ist zu sehen, dass die erste Differentialgleichung, wenn sie auch Integrale mit der zweiten gemein hat wie c_1, einen anderen Zusammenhang zwischen k_1 und c_1, wie auch zwischen τ_1 und τ_2 involviert, als einen solchen, wie er der letzten Differentialgleichung zukommt, und insbesondere einen anderen Zusammenhang, als einen solchen linearen zwischen τ_1 und τ_2, für den

$$a_0b_1-a_1b_0=1$$

ist.

[1] Koenigsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Bd. II, S. 160.

Das sähe man noch deutlicher und unmittelbarer, wenn man statt der früheren Differentialgleichung die sehr zusammengesetzte rechnete, welche für den Thetamodul τ_1 als Function von τ_2 bestehen muss, damit eine Gleichung A') existiert. Sie sei mit

$$\varphi\left(\tau_1, \tau_2, \frac{d\tau_1}{d\tau_2}, \frac{d^2\tau_1}{d\tau_2^2}, \frac{d^3\tau_1}{d\tau_2^3}\right) = 0$$

bezeichnet. Sie wird zufolge des Zusammenhanges des Integralmoduls mit dem Thetamodul Thetafunctionen enthalten. Doch weil man die lineare Transformation dieser Functionen beherrscht, so wird man den Wert von φ für $\tau_1 = \frac{b_0 - a_0\tau_2}{a_1\tau_2 - b_1}$ rechnen und aussagen können, unter welchen neuen, weiteren Bedingungen die Differentialgleichung $\varphi = 0$ das Integral $\tau_1 = \frac{b_0 - a_0\tau_2}{a_1\tau_2 - b_1}$ $(a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1)$ besitzt, wie ja eine solche Beziehung auch unter unseren hinreichenden Bedingungen erschien.

Jetzt können wir darum sagen, dass unsere für die Existenz der Gleichung A) hinreichenden Bedingungen nicht auch die nothwendigen sind und sie somit dem Thetamodul zu große Beschränkungen auferlegen, wenn nicht der Umstand eine Änderung herbeiführt, dass in der Gleichung A') $\vartheta_2^2(0, \tau_1)$ und $\vartheta_2^2(0, \tau_2)$ bis auf die Factoren

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{1}{l} \vartheta_3^2(0, \tau),$$

beziehungsweise

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \vartheta_3^2(0, \tau),$$

die Wurzeln derselben algebraischen Gleichung, nämlich unserer Transformationsgleichung sind. Doch, diesen Fall jetzt beiseite lassend, müssen wir aber sagen, es wurden wohl Nullstellen von $D(c)$ gefunden, doch im Falle eines beliebigen unserer Transformationsgrade n werden diese nicht die sämmtlichen sein und, um alle zu finden, braucht man die Lösungen

der aufgestellten Differentialgleichung dritter Ordnung und der durch diese gesetzten Beziehungen zwischen den Thetamoduln τ_1 und τ_2. Aus diesen werden nämlich wegen der bei der Frage nach den Nullstellen von $D(c)$ bestehenden Formeln

$$\tau_1 = \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}, \qquad \tau_2 = \frac{u\tau - 16x}{u_1}$$

Gleichungen für τ hervorgehen und denjenigen τ-Lösungen dieser Gleichungen, welche positive imaginäre Bestandtheile besitzen, werden solche Werte des Integralmoduls c entsprechen, die das Verschwinden von $D(c)$ herbeiführen. Nur wird auch zu erwägen sein, welchen τ-Werten verschiedene Wurzeln der Gleichung $D(c) = 0$ zukommen.

Darnach wird ein Beispiel dann, wenn neben den gefundenen Lösungen der Gleichung $D(c) = 0$ keine anderen mehr existieren, darauf hindeuten, dass man die hinreichenden Bedingungen auch als die nothwendigen erkennen soll; oder aber, wird das Beispiel dann, wenn neben den gefundenen Lösungen noch andere existieren, fordern, dass man neben den hinreichenden Bedingungen auch die nothwendigen suche.

Der dem Transformationsgrade $n = 3$ zukommende Fall soll hier als Beispiel behandelt werden. Will man zuerst die Gleichung, deren Wurzeln sind:

$$y_i = \frac{\vartheta_2^2(0, \tau_i)}{\vartheta_3^2(0, \tau)} \quad \left(\tau_i = \frac{\tau - (i-1)16}{3}, \quad i = 1, 2, 3\right),$$

$$y_4 = -3\frac{\vartheta_2^2(0, 3\tau)}{\vartheta_3^2(0, \tau)},$$

so beachte man, dass die Gleichung mit den Wurzeln

$$\frac{1}{M_i} = x_i = \frac{\vartheta_3^2(0, \tau_i)}{\vartheta_3^2(0, \tau)} \quad \left(\tau_i = \frac{\tau - (i-1)16}{3}, \quad i = 1, 2, 3\right),$$

$$\frac{1}{M_4} = x_4 = -3\frac{\vartheta_3^2(0, 3\tau)}{\vartheta_3^2(0, \tau)}$$

lautet:

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 - c^2 16x = 0. \qquad \ldots 3)$$

Doch weil bei der Transformation dritten Grades die Formeln bestehen:

$$(t\vartheta_2^2(0,\tau')\pm\vartheta_2^2(0,\tau))^2 =$$

$$= 2\vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0,\tau')\left[\frac{\vartheta_0^3(0,\tau)}{\vartheta_0(0,\tau')}\left(1\pm(-1)^{\frac{t-1}{2}}\right)+\frac{\vartheta_3^3(0,\tau)}{\vartheta_3(0,\tau')}\left(1\mp(-1)^{\frac{t-1}{2}}\right)\right],*$$

$$\left(\tau' = \frac{t\tau-16\xi}{t_1}\right),$$

und hier für $t = 1, 3$ beziehungsweise die Relationen erstehen:

$$[\vartheta_2^2(0,\tau_i)-\vartheta_2^2(0,\tau)]^2 = 4\vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0,\tau_i)\frac{\vartheta_3^3(0,\tau)}{\vartheta_3(0,\tau_i)},$$

$$[3\vartheta_2^2(0,3\tau)+\vartheta_2^2(0,\tau)]^2 = 4\vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0,3\tau)\frac{\vartheta_3^3(0,\tau)}{\vartheta_3(0,3\tau)},$$

so wird

$$x_\nu = 16c\frac{y_\nu}{(y_\nu-c)^4}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

und man kann in die bekannten elementarsymmetrischen Functionen der x_ν die Größen y_ν einführen.

Dabei erhält man nach Entfernung der Nenner die Gleichungen:

$$(16c)^4 y_1y_2y_3y_4 = -3\prod_{\nu=1}^{4}(c-y_\nu)^4,$$

$$(16c)^3\Sigma y_\alpha y_\beta y_\gamma(y_\delta-c)^4 = -8(1-2c^2)\prod_{\nu=1}^{4}(c-y_\nu)^4,$$

$$(16c)^2\Sigma y_\alpha y_\beta(y_\gamma-c)^4(y_\delta-c)^4 = -6\prod_{\nu=1}^{4}(c-y_\nu)^4,$$

$$(16c)\Sigma y_\alpha(y_\beta-c)^4(y_\gamma-c)^4(y_\delta-c)^4 = 0,$$

---

* Siehe Krause, Theorie der doppeltperiodischen Functionen, Bd. I, S. 179, Formel 18.

die man als Gleichungen in den elementarsymmetrischen Functionen der y_ν ansprechen kann. Wenn man sie nach diesen löste, so hätte man auch die verlangte Transformationsgleichung vierten Grades und könnte deren Discriminante angeben. Doch hier mag dieses Gleichungensystem nur zur Controlle dienen, wenn man zur Angabe der gewünschten Gleichung auch den in der ersten Mittheilung angegebenen Weg eingeschlagen hat. Bildet man nämlich die Gleichung mit den Wurzeln y_ν, indem man in der Gleichung β) statt x $\frac{y}{c}$, statt c $\frac{1}{c}$ setzt, so erhält man nach Entfernung des Nenners die Gleichung

$$y^4-6c^2y^2+8c(c^2-2)y-3c^4=0$$

und man sieht leicht, dass durch die hier erkenntlichen Werthe der elementarsymmetrischen Functionen in den y_ν die früheren Gleichungen erfüllt werden.

Die Discriminante der Gleichung in y heißt:

$$-3^3.16^3.c^4((c^2-2)^2-c^4)^2$$

oder auch

$$-3^3.16^4.c^4(c^2-1)^2(0.c^4+0.c^3+0.c^2+0.c+1),$$

wo der Exponent von (c^2-1) zwei ist, entsprechend dem, was in der Mittheilung I allgemein angegeben war. Die zweite Schreibweise für die Discriminante zeigt an, dass es außer den Lösungen $c=0$, ± 1 vier und nur vier c-Werthe gibt, für welche sie verschwindet. Diese vier Werthe werden alle unendlich.

Nun fanden wir früher vier τ-Werthe, denen Nullwerthe der Discriminante entsprachen; für diese τ-Werthe wird, wie wir hier sahen, c unendlich.

Nach diesem Beispiele scheint es, dass unsere für die Existenz der Gleichung A) hinreichenden Bedingungen auch die nothwendigen sind. Der Weg, auf dem man das entscheiden könnte, ist damit bezeichnet worden, dass gesagt wurde, in welcher Weise man die nothwendigen Bedingungen suchen solle.

Ein zweites Beispiel habe ich nicht durchgerechnet, denn es wäre sehr umständlich, die Discriminante der $n=5$ entsprechenden Transformationsgleichung

$$\frac{1}{5}y^6-2cy^5+7c^2y^4-12c^3y^3+11c^4y^2+$$
$$+\frac{1}{5}(16^2c(c^2-1)-26c^5)y+c^6=0$$

zu berechnen. Doch weiß man, abgesehen von $c=0, \pm 1$, sechs Nullstellen derselben anzugeben, weil in jeder der $n=5$ entsprechenden reducierten Formen (1, 0, 25), (5, 0, 5), (2, 1, 13) $R \equiv 1 \pmod{4}$ ist und jede zu zwei Gleichungen zweiten Grades in τ Veranlassung gibt.

Im Falle $n=7$ weiß man acht solcher Lösungen, weil jeder der vier reducierten Formen (1, 0, 49), (2, 1, 25), (5, ± 1, 10), von denen die erste, dritte und vierte noch zu transformieren sind, je zwei Gleichungen der Form 1') zugehören.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. XI.

Luftelektrische Beobachtungen zu Mattsee im Sommer 1902

von

Dr. Egon R. v. Schweidler.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1902.)

Die hier mitgetheilten Beobachtungen betreffen in erster Linie die Zerstreuung der Elektricität, in zweiter Linie das Potentialgefälle. Es sei gleich hier ausdrücklich bemerkt, dass diese Messungen nicht der Hauptzweck meines Aufenthaltes in Mattsee, sondern nur eine Nebenbeschäftigung während der Ferien waren, dass daher bezüglich Zahl der Beobachtungen und Wahl der Beobachtungstermine neben sachlichen Gründen auch Bequemlichkeitsrücksichten maßgebend waren, so dass z. B. Nachtbeobachtungen ganz fehlen. Immerhin ist das erhaltene Material, wenigstens bezüglich der Zerstreuung — es liegen für eine zusammenhängende Reihe von 70 Tagen je vier Messungen vor — ausreichend, um einige Gesetzmäßigkeiten ableiten zu lassen.

Die Zeit der Beobachtungen reicht vom 7. Juli bis 16. September 1902, wobei bloß zwei Tage (30. und 31. August) als Beobachtungstage ausfielen.

Der Beobachtungsort Mattsee liegt circa 20 *km* nördlich von Salzburg im Alpenvorland, auf einer Landzunge zwischen zwei Seen, umgeben von sanft ansteigenden, größtentheils

bewaldeten Bergen, die sich 200 bis 300 *m* über das Niveau des Seespiegels (Meereshöhe 500 *m*) erheben. Die Gegend ist infolge dieser Lage Luftströmungen ziemlich ausgesetzt — ein Stagnieren von Luftmassen, wie es in mehr abgeschlossenen Thälern und Seebecken häufig eintritt, ist hier normalerweise ausgeschlossen — dabei vollkommen staubfrei und infolge der dünnen Besiedelung der ganzen Umgebung, des Fehlens industrieller Etablissements und der Eisenbahn fast rauchfrei, so dass für luftelektrische Messungen günstige Vorbedingungen vorhanden sind.

Nach der geographischen Lage, wie nach den damit in Zusammenhang stehenden meteorologisch-klimatischen Verhältnissen nimmt Mattsee eine Mittelstellung ein zwischen dem tiefer im Gebirge gelegenen, in luftelektrischer Beziehung von Herrn F. Exner untersuchten St. Gilgen und den Stationen der bairischen Ebene, für die Herr Ebert und seine Schüler analoge Beobachtungen ausgeführt haben.

Neben den im folgenden mitgetheilten Beobachtungen der Zerstreuung und des Potentialgefälles wurden auch solche rein meteorologischer Natur ausgeführt, allerdings unter Zuhilfenahme eines sehr bescheidenen Instrumentariums. Ein meteorologisches Journal, das ich führte, enthält für in der Regel sechs Termine (8^h, 11^h, 14^h, 17^h, 20^h, 22^h) den Luftdruck (an einem gewöhnlichen Aneroid bestimmt), Temperatur, relative Feuchtigkeit und Thaupunkt (an einem vorher geprüften und corrigierten Lambrecht'schen Polymeter abgelesen; die Aufstellung des Instrumentes in der Fensternische der NE-Wand des Hauses dürfte meteorologisch kaum correct gewesen sein), ferner Bewölkung, Windrichtung und -Stärke nach subjectiver Schätzung, endlich Notizen über besondere Erscheinungen, wie Gewitterbildungen, Hagel, Regenböen u. dgl. Die im Anhange befindlichen Tabellen enthalten einen Auszug aus diesem Journal.

A. Messungen der elektrischen Zerstreuung.

Die Messungen der Zerstreuung wurden in einem Gartenhäuschen ausgeführt, das, unmittelbar neben dem Wohnhause gelegen, am Rande des Ortes stand, circa 10 *m* über dem Seespiegel und gegen S und W vollkommen frei. Das Garten-

häuschen von circa 2×2 *m* Grundfläche und 2 *m* Höhe hatte zwei mit Jalousiefenstern versehene Bretterwände, während die anderen zwei Wände fehlten, und war mit Cementplatten gedeckt, also einem hinreichend leitenden Materiale, um den Innenraum vor der Influenz des Erdfeldes zu schützen. Zugleich ist nach dem eben Gesagten der Beobachtungsraum der Luftcirculation hinreichend ausgesetzt, um einem im Freien gelegenen Punkte äquivalent zu sein.

Die Nähe des zweistöckigen Wohnhauses, sowie einiger gleich hoher Bäume würde nach den Erfahrungen des Herrn Lutz[1] die Werte der Zerstreuung verkleinert haben; da mir damals die citierte Arbeit noch nicht bekannt war, habe ich es unterlassen, Vergleichsmessungen im Freien anzustellen; eine zu einem anderen Zwecke unternommene Vergleichung (siehe unter »Varia«) ergab aber keinen Unterschied.

Als Messapparat diente ein Apparat nach Elster und Geitel, verfertigt von Günther und Tegetmaier. Das Elektroskop besaß Bernsteinisolation und war vorher sorgfältigst geaicht worden. Die Isolation war eine so vollkommene, dass die Controlbeobachtung zur Ermittelung dieser Correction als überflüssig weggelassen werden konnte. Einzelne stichprobenweise Messungen bei feuchtem Wetter ergaben immer zu vernachlässigende Werte für den Elektricitätsverlust im Innern des Elektroskopes.

Die Messungen wurden durchwegs ohne Schutzcylinder angestellt. Da der Apparat unter dem leitenden Dache dem Einflusse des Erdfeldes entzogen ist, fällt die einzige Fehlerquelle fort, welche gegen die Anwendung des ungeschützten Zerstreuungskörpers spricht. Ein Vortheil liegt in der Abkürzung der Expositionszeit, für welche stets fünf Minuten gewählt wurden. Ferner machte ich die Erfahrung, dass in kurzen Intervallen ausgeführte Messungen bei Anwendung des Schutzcylinders viel unregelmäßigere, schwankende Werte liefern als solche ohne Schutzcylinder, eine Erfahrung, die auch Herr Gockel[2] anführt.

[1] H. Ebert, Göttinger Nachr. 1902, Heft 3.

[2] A. Gockel, Luftelektrische Untersuchungen, Freiburg 1902.

Der Nachtheil, dass meine ohne Schutzcylinder erhaltenen Werte mit denen anderer Autoren nicht direct vergleichbar sind, fällt weniger ins Gewicht, da es sich mir ja in erster Linie um relative Messungen zur Ermittelung des täglichen Ganges und des Einflusses verschiedener meteorologischer Factoren handelte. Um gleichwohl wenigstens einigermaßen eine Vergleichung mit den Resultaten anderer Autoren zu ermöglichen, habe ich es versucht, einen Reductionsfactor zu ermitteln, der das Verhältnis der Entladungsgeschwindigkeiten mit und ohne Schutzcylinder angibt. Der Wert dieses Reductionsfactors war an verschiedenen Tagen ziemlich verschieden, bei Extremwerten von 2 und 5 im Mittel circa 3·7. Analoge Resultate erhielt Gockel[1] in der früher erwähnten, mir damals noch unbekannten Arbeit; er findet im Mittel den nahe übereinstimmenden Wert 3·5.

Die Anfangsladung hatte bei allen Beobachtungen nahe den gleichen Wert (zwischen 187 und 197 Volt).

Die Beobachtungstermine waren an verschiedenen Tagen nicht vollkommen die gleichen, sie fielen aber fast immer in die Intervalle (die Zeit von Mitternacht bis Mitternacht, von 0^h bis 24^h gezählt):

1. $7^h 30^m$ bis $9^h 30^m$;
2. $12^h 30^m$ » 13^h;
3. 14^h » 16^h;
4. $19^h 30^m$ » 20^h.

Doch sind die meisten Beobachtungen thatsächlich zur mittleren Zeit ausgeführt, verfrühte und verspätete ungefähr gleich häufig, so dass als Beobachtungstermine im Mittel gelten können:

1. $8^h 30^m$;
2. $12^h 45^m$;
3. 15^h;
4. $19^h 45^m$.

Die Resultate der Messungen an diesen Terminen sind in den Tabellen des Anhanges ausführlich wiedergegeben. Einzelne Messungen zu anderen Stunden sind weiter unten im Texte an geeigneter Stelle eingefügt und besprochen. Es sei

[1] A. Gockel, l. c.

hier noch erwähnt, dass die Beobachtungen am Abend in den letzten Wochen bereits in die Dunkelheit fielen und bei künstlicher Beleuchtung (Laterne mit Kerze oder Petroleumlampe) ausgeführt werden mussten; die Lichtquelle war aber derart angebracht — höher als der Zerstreuungskörper und in einiger Entfernung (die Beleuchtung der Skale vermittelte ein Spiegel) — dass eine Beeinflussung der Zerstreuung durch die Flammengase nicht eintrat, was einige Controlmessungen am Tage bei brennender Lampe erwiesen.

Während jeder Messung wurde noch der Grad der Durchsichtigkeit der Luft bestimmt. Ein wenige Schritte vom Beobachtungsorte entfernter, frei gelegener Punkt bot eine Fernsicht dar, an der sich die Abstufungen der Luftreinheit leicht schätzen ließen.

Es waren nämlich sichtbar: Waldige Berge der nächsten Umgebung in Distanzen von circa 2 bis 9 *km*, ein bewaldeter Höhenzug im NE in einer Distanz von 13 *km*, ferner verschiedene Gipfel des bairischen und salzburgischen Hochgebirges in Distanzen von 30 *km*, 45 *km* und 60 *km*.

Es wurden vier Grade der Durchsichtigkeit unterschieden:

I. sehr reine Fernsicht (Berge in 60 *km* Entfernung deutlich sichtbar);
II. reine bis ziemlich reine Fernsicht (dieselben eben noch sichtbar);
III. ziemlich getrübte Fernsicht (Berge in 30 *km* Entfernung noch sichtbar);
IV. sehr getrübte Fernsicht (dieselben unsichtbar, Nähe dunstig).

Bei eingetretener Dunkelheit oder bei Regen entfällt die Angabe der Durchsichtigkeit.

Im folgenden sollen die Resultate der Zerstreuungsmessungen zusammengestellt und besprochen werden.

Gesammtmittel, täglicher Gang.

Das Gesammtmittel aus den Beobachtungen liefert folgende Werte für die Zerstreuungen $Z-$ und $Z+$ in Volt pro 5 Minuten:

	Z−	Z+
$8^h\,30^m$	24·82	25·91
$12^h\,45^m$	27·69	28·29
15^h	28·89	28·38
$19^h\,45^m$	23·20	22·73

Die nach der oben erwähnten Weise auf Anwendung des Schutzcylinders reducierten und in Procenten der ursprünglichen Ladung ausgedrückten Ladungsverluste pro Minute, also die gewöhnlich mit a bezeichneten Werte ergeben sich daraus (das mittlere Potential während der Entladung zu 180 Volt gerechnet) durch die Formel

$$a = Z\,\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3\cdot 7}\cdot\frac{1}{180}\cdot 100 = \frac{Z}{33\cdot 3} = 0\cdot 03\,Z:$$

a−	a+
0·745	0·777
0·831	0·849
0·867	0·851
0·696	0·682.

Endlich erhält man für die Größe $q = \frac{Z-}{Z+} = \frac{a-}{a+}$:

0·959
0·979
1·019
1·021.

Es ergibt sich also eine deutlich ausgeprägte tägliche Periode der Zerstreuung; das Maximum liegt in den ersten Nachmittagsstunden, während morgens und abends die Werte kleiner sind; die Abendwerte liegen dabei noch tiefer als die Morgenwerte; die Amplitude der täglichen Periode beträgt circa 25% des Mittelwertes. Über den Gang in den Nachtstunden ist diesen Resultaten nichts zu entnehmen; es könnte ebensowohl die Zerstreuung eine einfache Periode mit einem Nachtminimum, als eine doppelte mit zwei Minimas früh und abends besitzen.

Ebenso zeigt q einen deutlichen Gang, es steigt vom Morgen bis zum Abend continuierlich an, ist am Vormittage

kleiner, am Nachmittage größer als 1, d. h. am Vormittage überwiegt die Zerstreuung der positiven Elektricität (oder die Zahl der negativen Ionen), am Nachmittage die Zerstreuung der negativen Elektricität (oder die Zahl der positiven Ionen); doch sind im ganzen die Werte von q nicht sehr abweichend von 1, so dass in erster Annäherung die Zerstreuungen der negativen und der positiven Elektricität einander gleich gesetzt werden können.

Nachstehend folgen die Mittelwerte für bestimmte Kategorien von Tagen, woraus der Einfluss verschiedener meteorologischer Factoren bestimmt werden kann.

Bewölkung. Es sind aus der Gesammtzahl 15 Tage abgesondert, die entweder vollkommen klar waren oder höchstens zeitweise den Bewölkungsgrad $^1/_4$ erreichten. Die Mittelwerte für diese klaren Tage sind:

$Z-$	$Z+$	
24·30	25·50	
		$q =$ 0·952
29·75	29·88	
		$q =$ 0·995
31·07	30·27	
		$q =$ 1·026
22·80	21·77	
		$q =$ 1·061

Der Gang der Zerstreuung, wie des Verhältnisses q ist der gleiche wie im Gesammtmittel, nur stärker ausgeprägt; die Morgen- und Abendwerte von Z sind erniedrigt, die Maxima um und nach Mittag erhöht, die Amplitude auf 40% des Mittelwertes gesteigert; ebenso ist die Differenz der Extreme von q vergrößert.

Luftdurchsichtigkeit. Das Mittel aus 12 Tagen, an denen der Durchsichtigkeitsgrad zwischen I und II schwankte, also Tagen mit reiner Fernsicht, ergibt:

	Z−		Z+
	28·75		29·67
q =		0·976	
	32·65		34·35
q =		0·950	
	36·00		34·37
q =		1·047	
	26·60		26·00
q =		1·023	

Der Gang der Zerstreuung ist der gleiche wie im Hauptmittel, nur sind die Absolutwerte sämmtlich erhöht; die Amplitude beträgt circa 33% des Mittels, ist also größer wie im Hauptmittel, aber kleiner als an klaren Tagen.

Die Größe q dagegen zeigt eine ausgesprochene doppelte Periode mit einem Minimum am Vormittage und einem Maximum am Nachmittage, die dem einfachen steigenden Gang von morgens bis abends übergelagert ist.

Eine graphische Darstellung des Ganges von q im Mittel an klaren und an durchsichtigen Tagen zeigt, dass im Hauptmittel diese doppelte Periode bereits angedeutet ist, an klaren Tagen dagegen fast vollkommen fehlt, so dass hier der einfache nahezu linear ansteigende Gang von q am reinsten hervortritt.

Die doppelte Periode von q wurde auch von Herrn Lutz[1] am Starnbergersee in Baiern an klaren Tagen constatiert. Aus obigen Resultaten geht hervor, dass nicht die geringe Bewölkung, sondern die Durchsichtigkeit der Luft die charakteristische Begleiterscheinung derselben ist.

Der Einfluss der Luftdurchsichtigkeit auf die Absolutwerte ist zwar unverkennbar vorhanden, doch ist dieser Factor nicht ein so sehr in erster Linie stehender, vor allen anderen leicht erkennbarer, wie es die Herren Elster und Geitel hauptsächlich in Wolfenbüttel constatiert haben. Die höchsten Einzelwerte wurden nicht bei besonders durchsichtiger Luft, sondern vor und bei Gewittern und heftigen Regengüssen gefunden; umgekehrt treten bisweilen bei sehr reiner Luft recht geringe Werte

[1] H. Ebert, l. c.

der Zerstreuung auf, so z. B. 8. August morgens, 25. Juli, 29. Juli, 18. August und 2. September abends. Erst im Mittel tritt der Zusammenhang zwischen großer Durchsichtigkeit und hoher Zerstreuung hervor, und selbst hier stimmt der tägliche Gang nicht überein, denn es ist eine alte, jedem Touristen bekannte Erfahrungsthatsache, dass die Durchsichtigkeit morgens und abends am größten, mittags am kleinsten ist.

Absolute Feuchtigkeit. Das Mittel von 15 Tagen, die extrem feucht waren (Thaupunkt um 14^h höher als 16° C., also absolute Feuchtigkeit größer als 13·7 g/m^3) ergibt:

	$Z-$		$Z+$
	28·64		29·56
$q=$		0·969	
	29·00		29·82
$q=$		0·973	
	29·60		29·86
$q=$		0·991	
	26·00		25·17
$q=$		1·033	

Ferner ist das Mittel von 13 trockenen Tagen (Thaupunkt unter 10° C., absolute Feuchtigkeit unter 9·4 g/m^3

	$Z-$		$Z+$
	23·77		24·77
$q=$		0·960	
	25·23		26·12
$q=$		0·965	
	25·71		25·21
$q=$		1·020	
	19·50		19·00
$q=$		1·025	

Es fällt in der That auf, dass die feuchten Tage übernormale, die trockenen unternormale Werte der Zerstreuung zeigen, während der tägliche Gang von Z nicht wesentlich

von dem Hauptmittel abweicht, höchstens darin, dass an den feuchten Tagen die Morgenwerte auffallend hoch sind.

Ein Einfluss der Feuchtigkeit auf die Isolation ist natürlich hiebei nicht im Spiele, da diese an solchen verdachterregenden Tagen geprüft wurde. Gleichwohl möchte ich aus diesen Resultaten nicht auf die Richtigkeit der veralteten, gegenwärtig auf Grund von Versuchen im Freien, wie im Laboratorium aufgegebenen Ansicht schließen, dass feuchte Luft ein besserer Leiter sei. Vielmehr lehrt ein Blick in die Tabellen, dass die feuchten Tage in der Regel zugleich Gewittertage sind, und darauf dürften die hohen Werte von Z zurückzuführen sein. Da neben diesen feuchten Gewittertagen auch die klaren, in Bezug auf absolute Feuchtigkeit eine mittlere Stellung einnehmenden Tage hohe Werte der Zerstreuung aufweisen und daher das Gesammtmittel heben, ist es dann auch begreiflich, dass die trockenen Tage — in der Regel kühle, bewölkte, theilweise regnerische Tage — unter dem Gesammtmittel bleiben.

Bezüglich des Ganges von q schließen sich die feuchten Tage am meisten an die klaren Tage an, während die Curve für die trockenen Tage fast mit der des Hauptmittels zusammenfällt, also die doppelte Periode bereits angedeutet enthält.

Gewittertage. Hier sind nur solche Tage ausgewählt, die bei schönem oder fast schönem Wetter ein Gewitter oder eine intensivere Gewitterbildung am Nachmittage oder Abende aufwiesen; Regentage mit Gewittern und Tage mit Morgengewittern sind nicht berücksichtigt. Das Mittel aus neun Tagen beträgt:

	$Z-$		$Z+$
	24·3		25·1
$q =$		0·97	
	29·7		30·4
$q =$		0·98	
	31·1		31·9
$q =$		0·98	
	25·3		23·0
$q =$		1·10	

Die Absolutwerte von Z sind ziemlich hoch, der Gang von Z und q ziemlich ähnlich mit dem an den feuchten Tagen, mit denen ja die Gewittertage großentheils identisch sind. Der tiefe Abendwert von Z und der dazugehörige Wert von q, der höchste unter den Mittelwerten von q, fallen auf eine Zeit, in der meistens das Gewitter schon vorüber ist. Unmittelbar vor oder während Gewittern ergaben sich die höchsten beobachteten Werte von Z (92·5 am 20. Juli, 50·0 am 17. August, 64·0 am 7. August), dabei zugleich starke polare Verschiedenheiten, und zwar größere Zerstreuung der positiven Elektricität, also kleine Werte von q.

Gang nach Sonnenuntergang. Leider erlangte ich erst Ende August Kenntnis von einer bisher nicht publicierten Thatsache, die in der Station Kremsmünster beobachtet wurde, nämlich, dass an einzelnen durch besonders schönes Wetter ausgezeichneten Tagen zur Zeit des Sonnenaufganges und -Unterganges die Zerstreuung tiefe Minima erreiche. In der kurzen, noch zur Verfügung stehenden Zeit suchte ich daher noch den Gang zur Zeit des Sonnenunterganges näher zu verfolgen, konnte aber nicht mehr viel Beobachtungsmaterial beibringen.

Die Resultate einiger Tage, an denen außer an den gewöhnlichen Terminen noch Beobachtungen angestellt wurden, sind:

		$Z-$	$Z+$	
3. September,	$18^h 40^m$	20·0	24·5;	klar.
	$19^h 45^m$	21·0	—	»
4. »	$17^h 45^m$	31·0	31·0;	fast klar.
	$19^h 15^m$	27·5	27·5;	» »
	$21^h 00^m$	30·5	26·5;	» »
7. »	$17^h 30^m$	22·0	20·0;	fast klar.
	$19^h 00^m$	17·5	16·0;	$^1/_2$ bewölkt.
	$19^h 50^m$	21·5	16·0;	$^3/_4$ »
8. »	$18^h 45^m$	16·0	19·0;	fast klar.
	$20^h 50^m$	20·5	20·0;	» »

			$Z-$	$Z+$	
9. September,		$17^h\,45^m$	24·5	22·5;	klar.
		$18^h\,35^m$	15·0	18·5;	»
		$19^h\,45^m$	19·0	14·5;	»
		$22^h\,00^m$	19·0	18·0;	»
14.	»	$18^h\,45^m$	17·0	21·0;	$^1/_4$ bewölkt.
		$19^h\,45^m$	21·5	20·5;	$^1/_4$ »
16.	»	$16^h\,30^m$	36·0	27·5;	fast klar.
		$19^h\,10^m$	15·0	14·5;	fast bewölkt.
		$20^h\,30^m$	26·0	25·5;	$^3/_4$ »

Es zeigt sich in der That, wenigstens für die negative Zerstreuung, ein Wiederansteigen nach einem Minimum, das auf circa 19^h fällt, also bald nach Sonnenuntergang. Für die positive Zerstreuung findet sich ein solches Wiederansteigen nur an zwei von sechs Tagen, wobei in einem Falle (16. September) der unregelmäßige Gang der Bewölkung möglicherweise mit von Einfluss ist. Doch ist das Material zu gering, um einigermaßen verlässliche Resultate zu ergeben.

Jährlicher Gang. Werden die Mittel für je zehn aufeinanderfolgende Tage gebildet, so zeigt sich kein regelmäßiger Gang dieser Dekadenmittel. Der bekannte jährliche Gang der Zerstreuung — hohe Werte im Sommer, tiefe im Winter — ist also innerhalb der 70 Beobachtungstage noch nicht erkennbar.

Extreme Werte. Die beobachteten Maximalwerte der Zerstreuung bei Gewittern wurden bereits erwähnt. Auch heftige Regengüsse von böenartigem Charakter, aber ohne elektrische Entladungen liefern hohe Werte (47 am 10. Juli, 49 und 48 am 1. August, 43 am 3. August); dann folgen schöne Tage mit besonders klarer Fernsicht (40 am 19. August und 4. September, 39·5 am 26. Juli), vielleicht im Zusammenhange mit Föhnwind in den Alpen. Die kleinsten beobachteten Werte betragen 11·0 und 12·0 (am 4. August), also weniger als die Hälfte des Mittelwertes. Diese Minimalwerte, sowie einige nicht viel höhere (25. Juli, 30. Juli, 18. August, 22. August, 25. August, 9. September und 16. September) scheinen in keinem leicht ersichtlichen Zusammenhang mit anderen meteorologischen Elementen

zu stehen und sind auffallend häufig mit großer Durchsichtigkeit der Luft verbunden.

Varia. Eine Anzahl von Messungen, die an einigen schönen Tagen außerhalb der regelmäßigen Termine angestellt wurden, ergab — abgesehen von den bereits separat besprochenen Verhältnissen bei Sonnenuntergang — keine Besonderheiten; sie entsprachen dem normalen Gange, den die Interpolation aus den vier gewöhnlichen Beobachtungsterminen voraussetzen lässt. In den allerletzten Tagen gelangte ich in den Besitz einer Notiz,[1] welche die bereits citierte Abhandlung des Herrn Ebert im Auszuge enthält. Das darin erwähnte merkwürdige Verhalten von See-Ufern, an denen abnorm hohe Werte der negativen Zerstreuung gefunden wurden, konnte ich gerade noch einmal prüfen; das Resultat war aber ein negatives: unmittelbar am Ufer des Sees (das an der betreffenden Stelle theilweise mit Schilf bewachsen ist) ergab sich für beide Elektricitäten die gleiche Zerstreuung wie wenige Minuten später an dem ungefähr 500 *m* entfernten gewöhnlichen Beobachtungsorte.

Theoretisches. Der tägliche Gang der Zerstreuung, der sich dem der Temperatur analog zeigt, weist jedenfalls auf einen Zusammenhang mit der Sonnenstrahlung hin. Ob dieser Zusammenhang ein unmittelbarer (Ionenbildung durch die Strahlung) oder ein mittelbarer, auf dem Wechsel auf- und absteigender Luftströmungen und auf dem Hervorquellen der nach den Beobachtungen der Herren Elster und Geitel[2] besonders ionenreichen Bodenluft beruhender ist, wage ich vorläufig nicht zu entscheiden.

Auf einen Umstand möchte ich noch hinweisen; die Entladungsgeschwindigkeit, die an dem Elster-Geitel'schen Apparate beobachtet wird, ist jedenfalls abhängig sowohl von der Zahl der vorhandenen Ionen, als auch von der Beweglichkeit derselben, also von der Größe der Masse, an die sie gebunden sind.

---

[1] Met. Zeitschr. 1902, 9. Heft.

[2] Elster und Geitel, Phys. Zeitschr. *3*, S. 574, 1902.

Einfachere Gesetzmäßigkeiten für den Verlauf der Zerstreuung in Bezug auf tägliche und jährliche Periode, sowie für den Zusammenhang mit anderen meteorologischen Factoren dürften erst dann erhalten werden, wenn diese beiden Bestimmungsstücke getrennt zur Beobachtung kommen, beziehungsweise aus der Combination von zwei verschiedenartigen Messungsmethoden rechnerisch getrennt werden können.

Die verschiedene Wichtigkeit, welche der Luftdurchsichtigkeit, die als Index der Ionenbeweglichkeit aufgefasst werden kann, bei verschiedenen Beobachtern (und daher an verschiedenen Orten) zuzuschreiben ist, beruht vielleicht auf dem Umstande, dass an dem einen Orte die Schwankungen der Ionenzahl, an einem anderen Orte mit anderen meteorologisch-klimatischen Verhältnissen die der Ionenbeweglichkeit das ausschlaggebende Moment sind.

Auch die bereits erwähnte Veränderlichkeit des Verhältnisses der Entladungsgeschwindigkeiten mit und ohne Schutzcylinder dürfte darauf beruhen, dass die beiden Bestimmungsstücke, Ionenzahl und Beweglichkeit, bei den zwei verschiedenen Messungsarten in verschiedener Weise zur Geltung kommen.

B. Messungen des Potentialgefälles.

Die Messungen des Potentialgefälles — in der gewöhnlichen Exner'schen Anordnung, mit Kerze als Collector — wurden auf einer Wiese ausgeführt, die bereits als Beobachtungsort für die Luftdurchsichtigkeit erwähnt wurde. Diese Wiese bildet eine sattelförmige Fläche, die nach zwei Seiten zu den beiden Seen abfällt, senkrecht hiezu nach beiden Seiten mäßig ansteigt. Da der Beobachtungspunkt ungefähr im Maximum-Minimum dieser Fläche liegt, also der Einfluss der entgegengesetzten Krümmungen auf das Potentialgefälle theilweise compensiert wird und da nähere kleinere störende Objecte wie Häuser, Bäume, Sträucher etc. nicht vorhanden waren, kann man annehmen, dass die erhaltenen Werte von den auf einer Ebene gefundenen nicht wesentlich abweichen. Die angegebenen Zahlen sind auf Volt pro Meter reduciert. Die Beobachtungsresultate sind in einer Tabelle des Anhanges zusammengestellt, wobei aus den zahlreichen Einzelwerten (durchschnittlich eine

Ablesung pro 2 Minuten) die Mittelwerte für halbe Stunden abgeleitet wurden.

Die allerdings nicht zahlreichen Messungen lassen gar keine bestimmte Gesetzmäßigkeit in Bezug auf die tägliche Periode erkennen. Übrigens hatte ich bereits in den Sommern 1898 und 1901 in einem nahe benachbarten Orte (circa 2 *km* entfernt) unmittelbar am See-Ufer Messungen des Potentialgefälles ausgeführt und dasselbe negative Resultat bezüglich des täglichen Ganges erhalten; höchstens die Existenz eines Morgenminimums (zwischen 6^h und 9^h) schienen diese älteren Beobachtungen anzudeuten.

Bezüglich des Verhältnisses zur Zerstreuung ist allerdings erkennbar, dass die Tage mit geringem Potentialgefälle ziemlich hohe Werte der Zerstreuung zeigen und dass umgekehrt hohe Werte des Potentialgefälles mit kleinen der Zerstreuung zusammenfallen. Speciell das Mittagsmaximum des Potentialgefälles am 29. August ist mit einem dem normalen Gange der Zerstreuung nicht entsprechendem Abfalle derselben und mit einer gleichzeitigen vorübergehenden Wolkenbildung verbunden. Im übrigen lassen sich Beziehungen dieser beiden Größen nicht auffinden.

Während Herr Pochettino[1] in Norditalien eine ausgesprochene tägliche Periode des Potentialgefälles findet, ohne bei der Zerstreuung eine solche zu erhalten, ist hier umgekehrt ein deutlicher täglicher Gang der Zerstreuung vorhanden, während der des Gefälles nicht constatierbar ist.

Anhang.

In den folgenden Tabellen sind die Resultate der Zerstreuungsmessungen chronologisch geordnet.

Die erste Columne enthält das Datum, die nächste die wichtigsten meteorologischen Angaben, und zwar: Mittlere

---

[1] A. Pochettino, Nat. Rundschau 16, Seite 290, 1901.

Bewölkung oder den Gang der Bewölkung, die Windrichtung (sehr schwache Winde sind wie Windstille mit 0 bezeichnet), den auf Meereshöhe reducierten Barometerstand um 7^h früh und zur Charakterisierung der absoluten Feuchtigkeit den um 14^h beobachteten Thaupunkt in Graden Celsius, nicht die absolute Feuchtigkeit selbst (der Thaupunkt ist nämlich am Lambrecht'schen Hygrometer direct ohne Rechnung ablesbar). Wegen der Unverlässlichkeit dieser Messung ist der Wert des Thaupunktes auf $^1/_2{}^\circ$ abgerundet. Die folgenden vier Columnen geben für die vier Beobachtungstermine den Grad der Luftdurchsichtigkeit (I bis IV) und die Zerstreuungen $Z-$ und $Z+$ in Volt pro 5 Minuten an.

Die letzte Columne enthält Anmerkungen über besondere Ereignisse, wie Gewitter, Gewitterbildungen (vorbeiziehende oder nicht zum Ausbruche kommende Gewitter), Regenböen, Nebel etc., unter Angabe der Zeit. Die eingeklammerten Werte von Z sind — als zufällig in einem abnormalen Zustande der Atmosphäre (Gewitter, Regenböe) erhalten — bei der Bildung der Mittelwerte nicht mitberücksichtigt.

Separat folgt eine Tabelle, in der die auf Volt pro Meter reducierten Mittelwerte des Potentialgefälles für halbe Stunden zusammengestellt sind.

Datum	Wetter		8h 30m			12h 45m			15h			19h 45m			Anmerkung
			D	Z—	Z+	D	Z—	Z+	D	Z—	Z+	D	Z—	Z+	
Juli 7.	klar—1/4 bew. 766	0 13·5	III	23·0	28·5	III	31·0	30·5	III	32·5	30·0	III	37·5	33·5	
8.	3/4 bew. 765	W 16·0	IV	18·0	19·5	IV	14·5	15·0	IV	15·0	16·0	IV	20·0	20·5	
9.	bew.—klar 764	W—E 15·0	IV	25·5	25·0	IV	17·0	19 0	III	19·5	19·5	—	17·5	22·0	
10.	1/2 bew.—bew. 756	0 14·5	II	32 0	40·0	—	30·5	28·5	—	47·0	31·0	—	—	—	7^h, 8^h, $8^1/_2{}^h$: Gew.
11.	bew., R. 760	W 9·5	—	24·5	20·5	—	20·5	23·0	—	—	—	IV	23·5	23·0	17^h Hagel.
12.	1/2 bew. 768	W 10·5	IV	22·5	23·5	IV	20·5	24·5	IV	21·0	25·0	III	20·0	17·5	
13.	1/4 bew. 769	NE 10·0	III	26·5	27·5	III	24·5	28·0	III	26·0	27·0	III	27·0	25·0	

Datum	Wetter	8h 30m			12h 45m			15h			19h 45m			Anmerkung
		D	$Z-$	$Z+$	D	$Z-$	$Z+$	D	$Z-$	$Z+$	D	$Z-$	$Z+$	
Juli 14.	3/4 bew.–1/4 bew. 0 768 13·0	III	24·5	23·5	II	34·5	31·0	II	30·5	30·0	II	28·5	29·0	
15.	1/4 bew. 0 765 15·5	III	20·0	20·5	III	27·5	25·5	III	30·5	29·5	IV	18·0	22·0	20h Gew.-Bildung.
16.	bew.–klar NE 762 19·0	II	33·0	34·5	II	29·5	29·5	III	30·0	29·0	IV	24·5	25·5	
17.	bew. W—E 759 18·5	I	35·5	37·0	IV	—	—	II	28·0	31·0	—	32·5	34·0	15h Gew.
18.	klar 0 764 14·5	IV	16·0	15·5	IV	20·0	20·0	IV	18·0	20·0	IV	20·0	19·0	
19.	bew.–1/2 bew., R. 0 759 17·0	—	20·5	19·5	—	30·0	35·0	—	25·5	26·0	IV	20·0	20·0	
20.	bew. NE SW 775 10·5	IV	24·0	20·0	IV	29·5	30·0	IV	31·5	35·5	—	[38·5]	[92·5]	18h Gew.

21.	1/2 bew.–bew., R. 755	E–SW 13·0	—	19·5	19·5	IV	29·0	30·0	—	32·5	36·5	—	26·0	27 0	
22.	1/2 bew. 764	SW 10·5	III	17·5	16·5	III	20·0	21·0	III	20·5	24·0	IV	22·0	22·0	$18^1/_2{}^h$ Gew.
23.	1/2 bew. 765	E, NE 9·5	III	22·0	23·0	III	20·0	22·5	III	21·0	21·0	—	20·5	21·5	
24.	klar—bew. 765	0 8·5	III	26·0	27·0	IV	31·5	31·0	III	30·0	30·5	III	23·5	19·0	22^h Gew.
25.	bew., R.—1/4 bew. 762	0 15·5	—	25·5	29·5	—	27·0	27·0	—	—	—	II	13·0	13·5	
26.	klar 764	NE 13·0	I	26·0	29·0	I	26·5	25·0	I	36·5	39·5	I	30·0	30 0	
27.	klar—bew., R. 762	N 18·0	II	33·0	33·5	III	36·5	36·0	IV	39·0	39·0	IV	38·0	26·0	20^h Gew.
28.	bew.—1/2 bew. 767	W 11·5	—	24·5	19·5	IV	24·5	23·0	IV	15·5	16·0	III	20·0	16·0	
29.	1/2 bew.—klar 770	0 10·0	IV	20·0	21·5	III	24·0	23·0	—	24·5	28·0	II	17·5	18·0	

Datum	Wetter		8h 30m			12h 45m			15h			19h 45m			Anmerkung
			D	Z−	Z+	D	Z−	Z+	D	Z−	Z+	D	Z−	Z+	
Juli 30.	klar 768	SW, E 11·5	II	13·5	20·0	III	30·0	30·0	III	27·5	31·0	III	12·0	15·5	
31.	klar—bew., R. 765	0 15·0	I	21·0	30·5	II	29·0	37·0	II	31·0	34·0		36·0	·	19h Gew.
August 1.	bew., R.— klar 762	E, NE 14·0	–	36·5	38·0	II	[48·0]	[49·0]	–	38·5	31·0	I	33·5	28·5	
2.	bew. 762	E, SW 16·0	I	29·5	30·0	IV	30·0	27·5	IV	30·0	34·0	II	31·0	28·0	17h Gew.-Bildung.
3.	bew., R. 761	0 16·0	—	28·0	[43·0]	IV	32·5	34·5	IV	31·5	26·0	–	22·5	23·5	
4.	klar 764	0 9·0	IV	17·5	19·5	IV	21·0	23·5	IV	25·0	24·5	III	12·0	11·0	
5.	$^{3}/_{4}$ bew. – $^{1}/_{2}$ bew. 763	0 18·0	III	21·0	20·0	III	28·0	25·0	III	30·0	29·5	II	26·0	25·5	13h Gew.

6.	½ bew.—klar 765	NE 14·5	III	19·5	20·0	IV	35·0	35·0	IV	32·5	30·5	III	25·0	24·5	
7.	klar—bew. 762	S, SW, E 16·5	II	32·0	32·0	—	—	—	III	[47·0]	[64·0]	II	25·0	25·0	4^h, 14^h Gew.
8.	klar—bew. 763	E, NE, SW 15·5	I	21·0	19·0	I	26·0	26·0	II	35·5	30·5	—	—	—	$19^1/_2{}^h$ Gew.
9.	bew. 763	W 15·0	—	19·0	32·5	—	21·5	19·5	—	25·0	25·0	—	23·0	28·0	
10.	¾ bew. 763	0 11·0	IV	25·5	24·5	—	28·0	28·0	IV	26·0	26·0	—	17·5	—	
11.	bew., R. 762	W 13·0	IV	15·5	18·5	—	14·0	17·0	IV	23·0	24·5	II	27·5	27·5	15^h, 16^h, 18^h: R.-Böen.
12.	bew., R. 764	W 9·0	IV	18·0	19·0	II	22·0	21·5	—	13·0	15·0	III	21·0	20·0	9^h, 11^h, 14^h, 16^h: R.-Böen.
13.	bew.—¼ bew. 764	W, E 11·0	IV	19·5	19·0	IV	21·0	23·5	IV	21·0	23·5	III	24·0	24·5	
14.	½ bew. 764	0 11·0	IV	20·0	21·0	—	—	—	I	28·0	27·0	II	28·0	26·0	

Datum	Wetter		8h 30m			12h 45m			15h			19h 45m			Anmerkung
			D	Z−	Z+	D	Z−	Z+	D	Z−	Z+	D	Z−	Z+	
August 15.	bew., R. 762	W 15·0	—	23·5	27·5	—	34·0	30·0		19·5	24·5		—	—	
16.	klar 764	0 12·0	I	30·0	27·5	—	—	—	II	35·5	29·0	—	25·0	23·5	
17.	bew. 761	0 17·0	II	25·5	26·0	II	31·0	35·5	I	32·0	32·5	IV	[25·0]	[50·0]	19^h Gew.-Bildung.
18.	$^3/_4$ bew.— klar 765	SSW 15·5	II	30·5	27·5	III	24·5	24·5	III	23·5	21·0	II	14·0	14·5	
19.	klar—$^1/_4$ bew. 764	SSW, E 13·5	I	30·0	32·0	I	40·0	40·0	I	32·0	36·5	I	31·0	30·0	
20.	bew., R. 761	SE, SW 19·5	II bis IV	30·5	30·0	III	22·0	25·5	—	24·5	36·0	—	37·0	39·5	14^h R.-Böen.
21.	$^1/_4$ bew.—bew., R. 765	SW 15·0	I	23·5	25·5	—	—	—	II	27·5	28·5	IV	23·5	25·5	

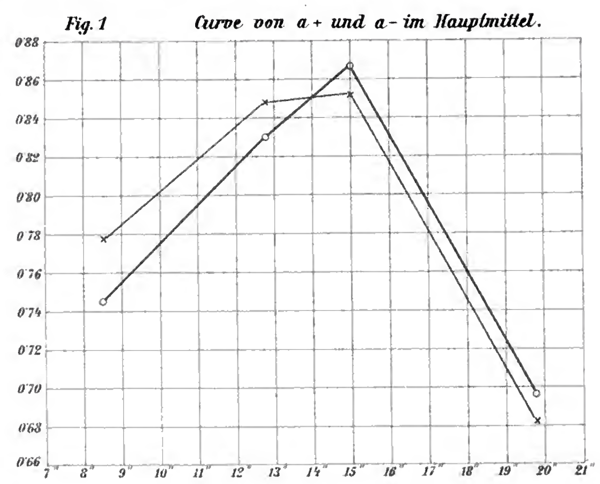
22.	1/2 bew. 769	0 10·0	IV	18·0	21·0	IV	19·5	19·5	IV	23·0	20·5	IV	15·5	16·5	
23.	klar 769	NE 10·5	V	19·5	20·0	III	19·0	20·0	III	22·0	21·5	III	20·0	—	
24.	klar 765	NE 14·0	II	21·0	22·0	III	29·5	29·5	III	33·0	26·5	II	19·5	20·0	
25.	klar—1/4 bew. 761	NE 16·0	II	26·5	26·5	II	35·5	34·5	III	30·5	31·0	—	15·0	14·5	
26.	1/2 bew.—klar 762	NE 14·5	IV	24·0	26·5	IV	29·5	27·5	IV	32·0	32·0	IV	24·0	21·0	8^h Nebel.
27.	1/2 bew. 757	NW 16·0	I	27·5	28·0	IV	21·5	20·5	IV	25·5	19·5	IV	18·0	19·0	
28.	klar 765	NE 13·0	II	29·0	24·5	III	29·5	29·5	III	25·5	37·0	IV	31·0	23·5	
29.	klar, 3/4 bew., klar 762	NE 17·0	IV	35·0	31·0	IV	25·0	28·5	III	31·5	30·0	IV	27·5	26·0	
Sept. 1.	bew., R. 764	0 17·0	I	30·5	31·0	III	36·0	35·5	III	32·5	31·0	—	31·0	—	15^h Gew.-Bildung.

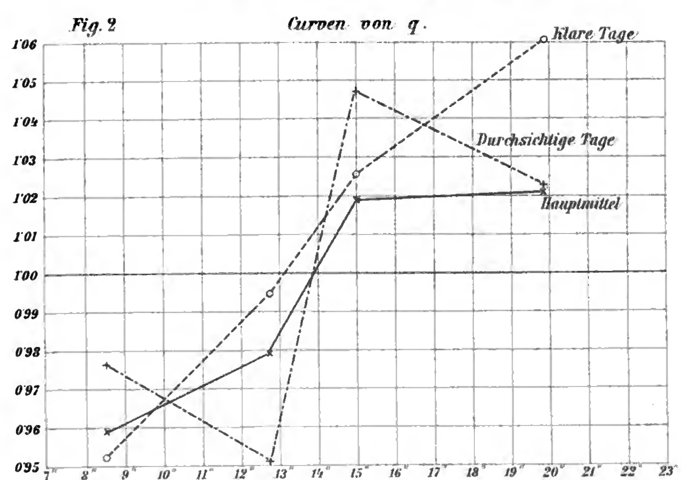
Datum	Wetter		8h 30m			12h 45m			15h			19h 45m			Anmerkung
			D	$Z-$	$Z+$	D	$Z-$	$Z+$	D	$Z-$	$Z+$	D	$Z-$	$Z+$	
Sept. 2.	1/2 bew.—klar 765	SW, E, 0 14·0	IV	22·5	21·5	II	24·5	29·5	III	25·0	22·5	II	17·5	25·5	
3.	klar 764	NE 16·5	I	35·0	34·0	I	34·0	35·0	II	38·5	37·5	I	21·0	—	
4.	klar 765	NE, E 14·0	I	30·0	35·0	I	40·0	36·0	I	37·0	37·0	I	27·5	27·5	
5.	klar—bew. 764	0, W 14·0	II	29·5	27·5	II	30·5	34·5	II	32·0	36·0	I	25·5	24·0	19h Gew.-Bildung.
6.	bew., R. 763	SE, 0 14·5	I	29·5	28·5	I	33·5	41·5	—	42·5	26·5	I	27·0	26·5	20h R.-Böen. 22h Wetterl.
7.	1/4 bew. 765	W, 0 10·5	III	23·5	24·0		—	—	—	—	—	III	21·5	16·0	
8.	1/2 bew.—klar 766	0 11·0	IV	24·0	23·5	IV	30·0	29·5	III	27·0	27·0	III	18·5	20·0	

9.	klar 764	NE 10·0	IV	27·0	25·0	IV	34·0	34·5	IV	37·0	30·5	III	19·0	14·5	8½h Nebel.
10.	klar—bew., R. 761	0 16·0	III	19·0	19·0	III	37·0	32·0	—	—	—	—	—	—	21h Gew.
11.	bew., ½bew., bew. 762	0 15·0	—	35·0	35·0	I	34·5	37·5	I	40·5	41·5	—	—	—	6h 30m, 19h: Gew.
12.	bew. 758	0 14·5	I	34·5	33·0	II	32·5	31·0	II	44·0	36·0	II	19·5	21·5	20h R.-Böe, SW.
13.	bew., R. 754	W 9·0	II	36·5	37·5	II	24·5	26·5	III	17·0	17·5	—	18·5	—	
14.	klar—¼ bew. 760	0 8·0	IV	20·5	23·5	III	26·5	—	III	25·5	22·5	IV	21·5	20·5	
15.	¾ bew. 763	0 6·0	III	24·0	26·5	III	30·0	27·5	III	29·5	25·5	IV	16·0	20·0	
16.	¾bew., klar, ¾bew. 762	NW 9·0	III	28·5	30·5	II	31·0	31·0	II	29·0	31·5	—	15·0	14·5	

Potentialgefälle in Volt pro Meter.

Zeit	Datum																	
	Juli				August												Septbr.	
	26	27	30	31	4	6	7	19	22	23	24	25	26	27	28	29	3	5
7h			90					108				112				138	144 94	73
8							83			110					78			
9		104	110					138 106	112 155	122	152	98	83		86		93	
10				100						140		86					90	
11																		
12																		
13							78			106	132	80		130	91	160 166	110	
14																		
15								84 91		130		104			82 86	154	90	
16									86		142						116	
17													112					
18	63							90										
19	61 90				130	102		95										
20			60															
21																		





Lith. u. Druck aus der k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Eine Construction einer quadratischen Verwandtschaft zweier ebener Punktfelder aus sieben Paaren entsprechender Punkte

von

V. Weiß in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. November 1902.)

Sieben Punktepaare $A_i A'_i$ $(i = 1, 2, \ldots 7)$ zweier ebener Felder ε und ε' bestimmen bekanntlich als Paare entsprechender Punkte eine und im allgemeinen nur eine quadratische Verwandtschaft dieser Felder. Die vorliegende Arbeit enthält eine Construction dieser quadratischen Verwandtschaft. Solche Constructionen sind wohl bereits gegeben worden, und zwar von Reye,[1] Schröter[2] und London,[3] doch glaube ich, dass trotzdem die hier gegebene Construction durch ihre Einfachheit und Durchsichtigkeit von Interesse ist. Um diese Construction einfach aussprechen zu können, bezeichnen wir mit $a_{ik} \equiv a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots 7;\ i \neq k)$ jene 21 Gruppen von fünf Punkten, die in der Gruppe der sieben Punkte $A_1 A_2 \ldots A_7$ enthalten sind, und zwar sei $a_{ik} \equiv a_{ki}$ jene Gruppe, die die Punkte A_i und A_k nicht enthält. Von analoger Bedeutung seien die 21 Zeichen $a'_{ik} \equiv a'_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots 7;\ i \neq k)$ bezüglich der Ebene ε'. Dann lautet die Construction wie folgt:

Wir construieren[4] jene 42 Punkte B_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots 7;\ i \neq k)$ der Ebene ε, die so beschaffen sind, dass jener Fünfstrahl, der

---

[1] Geom. Verw. II. Grades; Zeitschrift für Mathem. Bd. 11.

[2] Problematis geometrici etc.; Crelle's J., Bd. 62.

[3] Über constr. Pr. a. d. Th. d. recipr. Verw. u. s. w.; Mathem. Annalen, Bd. 38.

[4] Nach der bekannten Methode von Chasles.

die fünf Punkte der Gruppe a_{ik} aus dem Punkte B_{ik} projiciert, projectiv ist zu jenem Fünfstrahl, der die fünf Punkte der Gruppe a'_{ik} aus dem Punkte A'_i projiciert.

Fernerhin construieren wir die 105 Schnittpunkte $(\overline{A_i B_{kl}}, \overline{A_k B_{il}}) = C_{ikl} = C_{kil}$.

Dann liegen, wenn *ik* zwei und $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5$ die fünf übrigen der sieben Indices 1, 2, ... 7 sind, die fünf Punkte C_{ikl_ν} ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) mit den Punkten A_i und A_k auf demselben Kegelschnitte, der kein anderer ist als der der Geraden $\overline{A'_i A'_k}$ in der gesuchten quadratischen Verwandtschaft entsprechende Kegelschnitt $\omega_{ik} = \omega_{ki}$ der Ebene ε.

Mit Hilfe der 21 Kegelschnitte $\omega_{ik} = \omega_{ki}$ können wir leicht alle ∞^1 Correlationen der Felder ε und ε' herstellen, in denen die sieben gegebenen Punktepaare $A_i A'_i$ Paare conjugierter Punkte sind. Eine jede von diesen Correlationen ist bestimmt, wenn wir die Forderung stellen, dass in ihr z. B. dem Punkte A'_1 der Ebene ε' ein bestimmter Strahl a_1 des Büschels A_1 in der Ebene ε entspricht. Nach Angabe dieses Strahles a_1 können wir dann z. B. mit Hilfe der Kegelschnitte ω_{12}, ω_{13} und ω_{14} die den Punkten A'_2, A'_3 und A'_4 entsprechenden Geraden a_2, a_3 und a_4 in einfacher Weise bestimmen. Wir bestimmen nämlich die neben dem Punkte A_1 vorhandenen zweiten Schnittpunkte B_2, B_3 und B_4 der Geraden a_1 mit diesen drei Kegelschnitten. Dann sind die Geraden $\overline{A_2 B_2}$, $\overline{A_3 B_3}$ und $\overline{A_4 B_4}$ die gesuchten drei Geraden. Jene einzige Correlation, in der den Punkten A'_1, A'_2, A'_3 und A'_4 die Geraden a_1, a_2, a_3 und a_4 entsprechen, ist dann die gesuchte Correlation, und wenn wir den Strahl a_1 den Büschel A_1 beschreiben lassen, so erhalten wir in der angegebenen Weise alle gesuchten ∞^1 Correlationen.

Mit Hilfe dieser ∞^1 Correlationen erhalten wir endlich zu jedem Punkte A' der Ebene ε' den ihm in der gesuchten quadratischen Verwandtschaft entsprechenden Punkt A der Ebene ε als Schnittpunkt aller jener ∞^1 Geraden der Ebene ε, die dem Punkte A' in diesen ∞^1 Correlationen entsprechen.

Um die Richtigkeit dieser Construction zu beweisen, erinnern wir an die folgenden bekannten Sätze:

Sechs Punktepaare $A_i A'_i$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ zweier Ebenen ε und ε' bestimmen in diesen Ebenen:

Erstens ∞^1 Punktepaare MM', die Paare entsprechender Punkte sind in allen jenen ∞^2 quadratischen Verwandtschaften dieser zwei Felder, in denen diese sechs Punktepaare Paare entsprechender Punkte sind;[1] (α)

zweitens ∞^1 Punktepaare TT', die so beschaffen sind, dass $T(A_1 A_2 \ldots A_6) \wedge T'(A'_1 A'_2 \ldots A'_6)$ ist.[2] (β)

Die ∞^1 Punkte M und die ∞^1 Punkte T erfüllen in der Ebene ε eine und dieselbe Curve III. Ordnung K, die ∞^1 Punkte M' und die ∞^1 Punkte T' in der Ebene ε' eine und dieselbe Curve III. Ordnung K'. (γ)

Die Punkte M und M' entsprechen einander ein-eindeutig auf den Curven K und K'; ebenso die Punkte T und T'. Wir wollen die erste dieser Beziehungen mit μ und die zweite mit τ bezeichnen. Für diese zwei Beziehungen gilt der folgende Satz:

Ist TT' ein Punktepaar der Beziehung τ, so sind der Strahlenbüschel T in der Ebene ε und der Strahlenbüschel T' in der Ebene ε' projectiv aufeinander bezogen, wenn wir je zwei Strahlen derselben einander zuordnen, die entsprechende Punkte der Beziehung μ projicieren.[3] (δ)

Wenn nämlich MM' ein beliebiges Punktepaar der Beziehung μ ist, so ist das Punktepaar $A_6 A'_6$ eines jener ∞^1 Punktepaare, die die sechs Punktepaare $A_i A'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ und MM' nach dem Satze (α) bestimmen. Daher sind diese ∞^1 Punktepaare identisch mit den ∞^1 Punktepaaren der Beziehung μ. Daher liegen nach (γ) jene ∞^1 Punktepaare, die die sechs Punktepaare $A_i A'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ und MM' nach dem Satze (β) bestimmen, ebenso wie die ∞^1 Punktepaare der Beziehung τ auf den Curven K und K', so dass sie die Punktepaare einer ein-eindeutigen Beziehung $\bar{\tau}$ dieser beiden Curven sind. Wir sehen aber leicht ein, dass die Beziehungen τ und $\bar{\tau}$ identisch sind, denn wenn T ein beliebiger Punkt der Curve K ist, so sind die ihm in den Beziehungen τ und $\bar{\tau}$ entsprechenden

---

[1] Duporcq, Sur la corr. quadr. etc.; C. r. 126, S. 1405.

[2] Sturm, Das Problem der Projectivität u. s. w. Math. Ann., Bd. 1.

[3] Vergl. Sturm, Rec. Verw., Mathem. Annalen, Bd. 19 (14), S. 473. Ich habe diesen Satz deshalb hier bewiesen, weil er a. a. O. nur angedeutet ist.

Punkte identisch mit jenem einzigen Punkte der Ebene ε', der nach den fünf Punkten A'_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ einen Fünfstrahl sendet, der projectiv ist zu jenem Fünfstrahl, den der Punkt T nach den fünf Punkten A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sendet. Daraus aber folgt, dass $T(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 M) \barwedge T'(A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A'_5 M')$ ist, was zu beweisen war.

Aus dem Satze (δ) folgt unmittelbar:

Wenn M_1 und M'_1 zwei einander entsprechende Punkte der Beziehung μ und T_1 und T'_1 zwei einander entsprechende Punkte der Beziehung τ sind, so entsprechen einander ebenfalls in der Beziehung μ der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{M_1 T_1}$ mit der Curve K neben den Punkten M_1 und T_1, und der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{M'_1 T'_1}$ mit der Curve K' neben den Punkten M'_1 und T'_1.[1] (η)

Alle diese Sätze wenden wir nunmehr auf die neben dem Punktepaare $A_7 A'_7$ gegebenen sechs Punktepaare $A_i A'_i$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ an und weisen nach, dass z. B. der Punkt $C_{127} \equiv C_{217}$ ein Punkt des der Geraden $\overline{A'_1 A'_2}$ in der gesuchten quadratischen Verwandtschaft entsprechenden Kegelschnittes $\omega_{12} \equiv \omega_{21}$ ist. M' sei der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{A'_1 A'_2}$ mit der Curve K' neben den Punkten A'_1 und A'_2. Die den Punkten A'_1 und A'_2 in der Beziehung μ entsprechenden Punkte sind die Punkte A_1 und A_2, und die ihnen in der Beziehung τ entsprechenden Punkte sind die Punkte B_{17} und B_{27}. Daher ist nach dem Satze (η) der dem Punkte M' in der Beziehung μ entsprechende Punkt sowohl der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{A_1 B_{27}}$ mit der Curve K neben den Punkten A_1 und B_{27}, als auch der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{A_2 B_{17}}$ mit der Curve K neben den Punkten A_2 und B_{17}. Er ist daher der Schnittpunkt $C_{127} \equiv C_{217}$ dieser beiden Geraden; daher erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass die Punktepaare der Beziehung μ Punktepaare der gesuchten quadratischen Verwandtschaft sind, das folgende Resultat: Der Punkt $C_{127} \equiv C_{217}$ ist der dem Punkte M' in der gesuchten quadratischen Verwandtschaft entsprechende Punkt. Daher ist er, weil der

[1] Speciell folgt: Sind M und M' zwei einander entsprechende Punkte der Beziehung μ, so sind deren Tangentialpunkte T und T' auf den Curven K und K' zwei einander entsprechende Punkte der Beziehung τ.

Punkt M' ein Punkt der Geraden $\overline{A'_1 A'_2}$ ist, ein Punkt des Kegelschnittes ω_{12}, was zu beweisen war.

Es genügt wohl, die Richtigkeit der gegebenen Construction der Kegelschnitte $\omega_{ik} \equiv \omega_{ki}$ nachgewiesen zu haben, denn das Verfahren, wie man mit Hilfe dieser Kegelschnitte die Construction der gesuchten quadratischen Verwandtschaft zu Ende führt, ist nicht neu. Ich habe es nur der Vollständigkeit halber hier angeführt.

Selbstverständlich sind nicht alle 42 Punkte B_{ik} für die Construction der gesuchten quadratischen Verwandtschaft nothwendig. Für die praktische Ausführung derselben ist es wünschenswert, nach einem übersichtlichen Schema construieren und die Anzahl der nothwendigen Operationen möglichst reducieren zu können. Dies geht in der folgenden Weise:

Wir lassen die vier Punktepaare $A_i A'_i (i = 1, 2, 3, 4)$ und die drei Punktepaare $A_k A'_k (k = 5, 6, 7)$ verschiedene Rollen spielen. Dementsprechend construieren wir zwölf Kegelschnitte $\alpha_{ik} (i = 1, 2, 3, 4; k = 5, 6, 7)$ oder auch

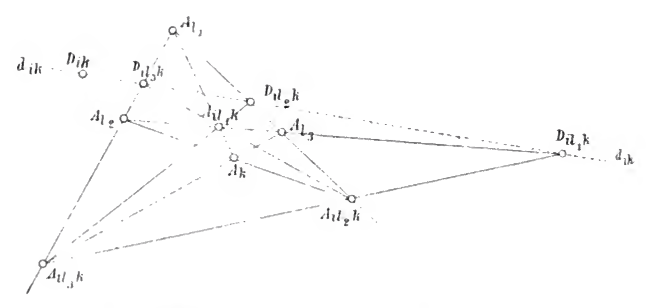
$$\begin{matrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} \\ \alpha_{25} & \alpha_{26} & \alpha_{27} \\ \alpha_{35} & \alpha_{36} & \alpha_{37} \\ \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{47}, \end{matrix}$$

die in der folgenden Weise definiert sind: Wenn i eine beliebige der Zahlen $1, 2, 3, 4$ ist, l_1, l_2, l_3 die drei übrigen derselben sind und k eine beliebige der Zahlen $5, 6, 7$ ist, so liegen die vier Punkte $A_{l_1} A_{l_2} A_{l_3}$ und A_k auf dem Kegelschnitte α_{ik} und haben auf ihm dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Strahlen $A'_i (A'_{l_1} A'_{l_2} A'_{l_3} A'_k)$. Mit Hilfe dieser zwölf Kegelschnitte erhalten wir 12 der 42 Punkte B_{ik}, nämlich die folgenden: $B_{ik} (i = 1, 2, 3, 4; k = 5, 6, 7)$ oder auch:

$$\begin{matrix} B_{15} & B_{16} & B_{17} \\ B_{25} & B_{26} & B_{27} \\ B_{35} & B_{36} & B_{37} \\ B_{45} & B_{46} & B_{47}. \end{matrix}$$

Der Punkt B_{ik} ist nämlich, wenn lm jene Ambe der Terne 5, 6, 7 ist, die k nicht enthält, der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte $\varkappa_{il}$ und $\varkappa_{im}$ neben jenen dreien von den Punkten $A_1 A_2 A_3 A_4$, unter denen der Punkt A_i nicht vorkommt.

Diese zwölf Punkte B_{ik} genügen, um die Kegelschnitte ω_{12}, ω_{13} und ω_{14} zu construieren. Ist nämlich m eine beliebige der Zahlen 2, 3, 4, so erhalten wir mittels der drei Punktepaare $B_{15} B_{m5}$, $B_{16} B_{m6}$ und $B_{17} B_{m7}$ und des Punktepaares $A_1 A_m$ die drei Punkte C_{1m5}, C_{1m6} und C_{1m7} des Kegelschnittes ω_{1m}, die im Vereine mit den Punkten A_1 und A_m zur Construction dieses Kegelschnittes hinreichen. Wir erhalten daher thatsächlich die drei Kegelschnitte ω_{12}, ω_{13} und ω_{14}, die, wie wir



gesehen haben, zur Weiterführung der Construction der gesuchten quadratischen Verwandtschaft genügen.

Um auch die letzten Details dieser Construction zu erledigen, sei noch (ohne Beweis) bemerkt, dass wir die Construction der 12 Punkte B_{ik} in der folgenden Weise übersichtlich und einfach ausführen können:

Wenn i eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 ist und $l_1 l_2 l_3$ die vier übrigen derselben sind, und wenn k eine der Zahlen 5, 6, 7 ist, so sei d_{ik} die harmonische Polare des Punktes A_k bezüglich des Dreiecks $A_{l_1} A_{l_2} A_{l_3}$. Wir finden dieselbe leicht in der folgenden Weise: Wir projicieren (siehe die Figur) jeden der Eckpunkte des Dreiecks $A_{l_1} A_{l_2} A_{l_3}$ aus dem Punkte A_k in die ihm in diesem Dreieck gegenüberliegende Seite. Wir erhalten so ein Dreieck

$A_{il_1k}A_{il_2k}A_{il_3k}$, das perspectiv ist zu dem Dreieck $A_{l_1}A_{l_2}A_{l_3}$, und zwar ist A_k das bezügliche Perspectivitätscentrum, und die bezügliche Perspectivitätsachse ist keine andere als die gesuchte Gerade d_{ik}, die wir daher erhalten als Verbindungsgerade der Schnittpunkte $D_{il_1k}, D_{il_2k}, D_{il_3k}$ entsprechender Seiten der Dreiecke $A_{l_1}A_{l_2}A_{l_3}$ und $A_{il_1k}A_{il_2k}A_{il_3k}$.

Auf dieser Geraden d_{ik} bestimmen wir den Punkt D_{ik} so, dass $A'_i(A'_{l_1}A'_{l_2}A'_{l_3}A'_k) = d_{ik}(D_{il_1k}D_{il_2k}D_{il_3k}D_{ik})$ ist.

Mit Hilfe der zwölf Punkte $D_{ik}(i = 1, 2, 3, 4; k = 5, 6, 7)$ erhalten wir endlich die zwölf Punkte B_{ik} in der folgenden Weise: Wenn i eine der Zahlen $1, 2, 3, 4$ ist und $n_1 n_2 n_3$ die drei übrigen derselben sind, und wenn k eine der Zahlen $5, 6, 7$ ist und lm die beiden übrigen derselben sind, so ist der Punkt B_{ik} der harmonische Pol der Geraden $\overline{D_{il}D_{im}}$ bezüglich des Dreiecks $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3}$.

Über die scheinbaren Beziehungen zwischen den heliocentrischen Perihelbreiten und den Periheldistanzen der Kometen

von

Dr. J. Holetschek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. November 1902.)

Diese Abhandlung schließt sich an diejenigen meiner Kometenuntersuchungen an, in welchen die Häufigkeit oder Seltenheit von gewissen Bahnelementen oder von Beziehungen zwischen denselben als eine Folge des Umstandes erklärt wird, dass die Kometen desto leichter gefunden werden können, je größer die Helligkeit ist, die sie für die Erde erlangen, und je günstiger die Stellung ist, die sie für den Standpunkt der Beobachter erreichen. Sie ist die siebente dieser Untersuchungen und behandelt die aus

$$\sin b = \sin(\pi - \Omega) \sin i$$

sich ergebenden heliocentrischen Breiten der Perihelpunkte b in ihrer Beziehung zu den Periheldistanzen q der betreffenden Kometen.

In der Abhandlung: »Über die Vertheilung der Bahnelemente der Kometen«[1] ist u. a. gezeigt worden, dass die Perihelbreiten der uns bekannten Kometen im allgemeinen umso kleiner sind, je größer die Periheldistanzen der betreffenden Kometen sind, und zwar darum, weil bei dieser Combination am leichtesten eine Annäherung der Kometen an die Erde

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 98, S. 1541.

zur Zeit des Perihels, also die größte erreichbare Helligkeit und somit auch die größte Wahrscheinlichkeit der Auffindung ermöglicht wird. Fasst man die Kometen nach den Größen ihrer Periheldistanzen in Gruppen zusammen, so findet man, wenn als Länge jeder Strecke 0·25 gewählt wird, für die in der genannten Abhandlung in Betracht gezogenen Kometen, deren Zahl 300 beträgt, wobei der letzte 1886 V ist und die periodischen Kometen nur mit der ersten beobachteten Erscheinung in Rechnung gezogen sind, die folgenden Mittel der numerischen Werte der Perihelbreiten:

	q			b	Kometen
Zwischen	0·00	und	0·25	35°8	28
»	0·25	»	0·50	33·1	46
»	0·50	»	0·75	31·2	67
»	0·75	»	1·00	27·6	79
»	1·00	»	1·25	24·2	41
»	1·25	»	1·50	23·7	17
»	1·50	»	1·75	14·1	10
	$>$ 1·75			26·6	12

Diese Beziehung zwischen b und q soll nun hier noch eingehender untersucht und insbesondere sollen die Kometen nicht nur in ihrer Gesammtheit, sondern auch partienweise betrachtet werden, was in mehrfacher Hinsicht gerathen erscheint. Zunächst wäre es trotz der hier angegebenen Begründung immerhin möglich, dass die genannte Beziehung nur in der Gesammtheit der Kometen, und zwar darum hervortritt, weil sich hier gewisse Abweichungen gegenseitig aufheben oder stark zurücktreten, auch kann bei einer solchen Trennung viel leichter erkannt werden, ob thatsächlich vorhandene Abweichungen von der Regel, wie sie sich schon hier auf der Strecke von $q = 1·50$ an zeigen, reell oder nur zufälliger Natur sind, und schließlich können dabei auch noch andere Eigenthümlichkeiten zum Vorscheine kommen, die in den Gesammtmitteln nicht zu erkennen sind.

Vor allem drängt sich die Nothwendigkeit auf, auch die Vorzeichen der Perihelbreiten, die früher außeracht gelassen

worden sind, in Betracht zu ziehen. Es ergibt sich dadurch eine neue Beziehung, nämlich die, dass stark südliche Perihelbreiten vorwiegend mit kleinen, höhere nördliche Perihelbreiten mit mittleren und größeren Periheldistanzen verbunden vorkommen.

Bezeichnet man die Mittel aus den nördlichen Perihelbreiten mit b_n, die aus den südlichen mit b_s und die aus sämmtlichen Breiten unter Rücksichtnahme auf das Vorzeichen mit b_a, so ergibt sich das folgende Tableau, in welchem der Übersichtlichkeit halber unter b_m auch noch die soeben mitgetheilten numerischen Mittel eingefügt sind und die den Mittelwerten in Klammern beigesetzten Zahlen angeben, aus wie viel Kometen dieselben abgeleitet sind.

q	b_n	b_s	b_a	b_m
0·00—0·25	+26°1 (13)	—44°2 (15)	—11°6 (28)	35°8
0·25—0·50	37·7 (26)	27·0 (20)	+ 9·6 (46)	33·1
0·50—0·75	37·0 (42)	21·6 (25)	+15·1 (67)	31·2
0·75—1·00	28·3 (52)	26·2 (27)	+ 9·7 (79)	27·6
1·00—1·25	31·0 (22)	16·8 (19)	+ 9·1 (41)	24·2
1·25—1·50	31·2 (11)	10·0 (6)	+16·6 (17)	23·7
1·50—1·75	20·2 (5)	8·1 (5)	+ 6·1 (10)	14·1
> 1·75	+27·6 (7)	—25·2 (5)	+ 5·6 (12)	26·6

Hier ist nun in den Zahlenreihen b_n und b_s das Kleinerwerden der Perihelbreiten mit zunehmender Größe der Periheldistanzen nicht mehr so auffallend wie in der Gesammtheit, d. h. in der Zahlenreihe b_m, aber, wenn von einigen, übrigens nur mäßigen Sprüngen abgesehen wird, sowohl in den nördlichen, als in den südlichen Perihelbreiten im großen und ganzen immer noch vorhanden. Was aber auffällt und insbesondere beim Betrachten der Reihe b_a sofort in die Augen

springt, ist, dass bei kleinen Periheldistanzen die südlichen Breiten bedeutend überwiegen, während bei allen anderen die nördlichen Breiten vorherrschen.

Der Grund davon ist schon in meiner Abhandlung: »Über die Unsichtbarkeit der Kometen für den Äquator und für höhere geographische Breiten« [1] angegeben worden und liegt darin, dass Kometen mit kleinen Periheldistanzen im allgemeinen nicht im Perihel, sondern nur weit vom Perihel zu sehen sind und dass demnach diejenigen Kometen mit kleinen Periheldistanzen, deren Perihelbreiten stark südlich sind, am besten und eigentlich fast ausschließlich nur auf der Nordhemisphäre der Erde beobachtet werden können. Die hier besonders ausschlaggebenden Kometen sind: 1780 I, 1816, 1826 V, 1827 III, 1847 I, 1851 IV, 1853 IV, 1859, 1874 I; sie gehören thatsächlich zu denjenigen, die nur auf der Nordhalbkugel zu sehen waren, und müssen überdies, was für eine spätere Folgerung von Wichtigkeit sein wird, zu den schwächeren gerechnet werden, da sie fast alle nur teleskopisch waren.

Aus demselben Grunde können Kometen mit kleinen Periheldistanzen und stark nördlichen Perihelbreiten fast nur auf der Südhemisphäre beobachtet werden; ein solcher war 1865 I.

Dass bei größeren Periheldistanzen überall die nördlichen Perihelbreiten überwiegen, erscheint für die Nordhemisphäre selbstverständlich, wenn man beachtet, dass Kometen mit größeren Periheldistanzen gerade in der Nähe des Perihels, wo sie ihre größte Helligkeit erreichen, am leichtesten beobachtet werden können.

Es soll nun nachgesehen werden, ob diese Vertheilung, wenigstens in ihren Hauptzügen, auch dann zu bemerken ist, wenn man die Kometen nicht in ihrer Gesammtheit, sondern gruppenweise betrachtet.

Ich habe zu diesem Zwecke die Kometen in vier Gruppen getheilt und dabei alle in der zuletzt citierten Abhandlung enthaltenen 355 Kometen in Betracht gezogen, so dass der letzte

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 109, S. 993.

derselben 1900 I ist. Vorerst sollen aber noch die entsprechenden Mittelwerte aus allen diesen 355 Kometen abgeleitet werden, und zwar ausschließlich nach den Zahlen, die in der genannten Abhandlung angegeben sind.

q	b_n	b_s	b_a	b_m
von 0·00 bis 0·24	+29°2 (15)	-46°6 (15)	— 8°7 (30)	37°9
0·25 0·49	33·7 (29)	26·4 (21)	+ 8·5 (50)	30·7
0·50 0·74	36·0 (45)	21·7 (26)	+14·8 (71)	30·7
0·75 0·99	29·9 (57)	27·9 (31)	+ 9·5 (88)	29·2
1·00 1·24	28·2 (30)	16·4 (21)	+ 9·8 (51)	23·3
1·25 1·49	23·7 (21)	9·0 (7)	+15·5 (28)	20·0
1·50 1·75	21·7 (8)	20·1 (7)	+ 2·2 (15)	20·9
> 1·75	+24·5 (13)	17·5 (9)	+ 7·3 (22)	21·6

Diese Zahlen weichen, wie man sieht, von den früheren nicht wesentlich ab, was übrigens von vornherein zu erwarten war, denn was einmal von 300 Kometen gilt, darf, wenn es allgemeine Giltigkeit haben soll, auch durch einen Zuwachs von 55 Kometen keine Änderung mehr erfahren.

Bei der Trennung der Kometen in kleinere Gruppen zeigt sich die Größe des hier für q gewählten Intervalles nicht zweckentsprechend, weil auf die Strecke der kleinsten und der größten Periheldistanzen so wenig Kometen entfallen, dass hier von der Ableitung eines Mittelwertes gar keine Rede mehr sein kann, indem Zufälligkeiten einen so großen Einfluss haben, dass schon ein einziger Komet mit einer sehr kleinen oder sehr großen Perihelbreite das Mittel um viele Grade ändern kann.

Ich habe mich daher entschlossen, auf der Strecke $q = 0·0$ bis $1·0$ nur drei Intervalle zu unterscheiden und insbesondere das erste Intervall, das der Kometen mit den

kleinsten Periheldistanzen, zu erweitern, und zwar bis $q = 0 \cdot 39$, damit hier eine größere Zahl von Perihelpunkten untergebracht werden kann, und da keine Nöthigung besteht, die Intervalle gleich groß anzunehmen, erscheint es nicht unzweckmäßig, die Grenzen mit den mittleren Abständen der großen Planeten von der Sonne zusammenfallen zu lassen. Es werden dadurch thatsächlich die Strecken größer, welche die wenigsten, und diejenigen kleiner, welche die meisten Perihelpunkte enthalten. Eine vollständige Gleichmäßigkeit ist allerdings nicht erreicht, aber auch nicht angestrebt worden und würde überdies auch keinen besonderen Gewinn bringen, denn wenn man auch in der Gesammtheit der Kometen die Intervalle so wählt, dass jede Strecke gleich viele Perihelpunkte enthält, so ist doch nicht zu erwarten, dass diese Gleichmäßigkeit auch dann noch bleibt, wenn man die Kometen nach verschiedenen Zeiträumen trennt.

Vor der Trennung sollen noch die jetzt gewählten Intervalle auf die Gesammtheit der Kometen angewendet werden.

q	b_n	b_s	b_a	b_m
von 0·00 bis 0·39	+35°1 (32)	−37°9 (30)	− 0°3 (62)	36°4
» 0·40 » 0·72	33·7 (55)	22·9 (29)	+14·2 (84)	30·0
» 0·73 » 0·99	29·9 (59)	26·0 (34)	+ 9·5 (93)	28·5
» 1·00 » 1·52	26·3 (53)	14·5 (28)	+12·2 (81)	22·2
> 1·52	+23·1 (19)	−18·6 (16)	+ 4·0 (35)	21·1

Der Gang dieser Zahlen weicht von dem, der sich in den zwei vorangehenden Übersichten zeigt, insoferne ab, als das Übergewicht der südlichen Perihelbreiten bei kleinen Periheldistanzen minder auffallend hervortritt. Das hat seinen Grund natürlich darin, dass die erste Strecke hier nicht ausschließlich ganz kleine, sondern auch noch etwas größere Periheldistanzen enthält, welche das Übergewicht der stark südlichen Perihelbreiten schon wieder etwas verringern. Es findet also das

auffallend große Übergewicht stark südlicher Perihelbreiten ausschließlich bei ganz kleinen Periheldistanzen statt.

Es folgt nun die Unterscheidung der Kometen nach vier Zeiträumen, wozu noch bemerkt werden mag, dass eine solche Trennung besonders hinsichtlich der Periheldistanzen geboten erscheint, indem die großen unter ihnen mit jedem neuen Zeitraume häufiger geworden sind, z. B. die von $q = 1·00$ an: 8, 24, 36, 48.

q	b_n	b_s	b_a	b_m
		I. 240 bis 1759		
von 0·00 bis 0·39	+40°2 (11)	−25°4 (9)	+10°7 (20)	33°5
» 0·40 » 0·72	39·0 (18)	18·3 (6)	+24·7 (24)	33·8
» 0·73 » 0·99	19·9 (18)	29·5 (7)	+ 6·1 (25)	22·6
» 1·00 » 1·52	7·6 (3)	13·5 (3)	— 2·9 (6)	10·5
> 1·52	+10·2 (1)	−49·0 (1)	19·4 (2)	29·6
		II. 1762 bis 1835		
von 0·00 bis 0·39	+19°6 (6)	35°9 (8)	—12°1 (14)	28°9
» 0·40 » 0·72	32·0 (11)	22·9 (13)	+ 2·2 (24)	27·1
» 0·73 » 0·99	24·9 (15)	15·4 (6)	+13·4 (21)	22·2
» 1·00 » 1·52	+42·2 (10)	21·0 (10)	+10·6 (20)	31·6
> 1·52		−17·4 (4)	—17·4 (4)	17·4
		III. 1840 bis 1871		
von 0·00 bis 0·39	+40°5 (9)	−65°7 (6)	— 2°0 (15)	50°6
» 0·40 » 0·72	37·7 (13)	33·1 (7)	+12·9 (20)	36·1
» 0·73 » 0·99	34·8 (14)	27·9 (10)	+ 8·7 (24)	31·9
» 1·00 » 1·52	28·2 (16)	13·2 (10)	+12·3 (26)	22·4
> 1·52	+33·8 (5)	−9·6 (5)	+12·1 (10)	21·7
		IV. 1873 bis 1900		
von 0·00 bis 0·39	+33°0 (6)	−32°5 (7)	— 2°3 (13)	32°7
» 0·40 » 0·72	24·0 (13)	8·3 (3)	+18·0 (16)	21·0
» 0·73 » 0·99	45·2 (12)	27·8 (11)	+10·3 (23)	36·9
» 1·00 » 1·52	20·8 (24)	4·7 (5)	+16·4 (29)	18·0
> 1·52	+20·0 (13)	−21·9 (6)	+ 6·8 (19)	20·6

In diesen vier Zeiträumen verlaufen nun, wie man sieht, die Zahlenreihen nicht überall so wie in der Gesammtheit, sondern es zeigen sich an einigen Stellen wesentliche Unterschiede. Diese haben zwar ihren Grund zum Theil gewiss in den hier stets obwaltenden Zufälligkeiten, doch kann auch gezeigt werden, dass sich hier der Unterschied zwischen der vorteleskopischen Zeit und der Gegenwart bemerkbar macht.

Was zunächst das Kleinerwerden der Zahlen b_m mit zunehmender Periheldistanz betrifft, so ist dasselbe im dritten Zeitraume am deutlichsten und im vierten wenigstens in der Weise ausgesprochen, dass für $q > 1$ die Perihelbreiten wesentlich kleiner sind als 30°. Im zweiten Zeitraume ist aber eine solche Abnahme so gut wie gar nicht vorhanden und im ersten ist sie zwar angedeutet, beginnt aber schon bei $q > 0{\cdot}7$, während man für $q > 1{\cdot}5$ keine allgemeine Folgerung ziehen kann, da sich hier nur zwei Kometen (1729 und 1747) befinden.

Dieses Verhalten steht nun damit in Übereinstimmung, dass es im allgemeinen erst bei Anwendung stärkerer Teleskope möglich ist, weit abstehende Kometen, also insbesondere solche mit großen Periheldistanzen zu finden, und demzufolge ist das bestimmte Auftreten dieser Beziehung zwischen b und q eigentlich erst ein Product der neueren Zeit.

Damit hängt auch der in den Zahlenreihen b_n bemerkbare Umstand zusammen, dass diejenigen Periheldistanzen, mit denen nördliche Perihelbreiten am häufigsten verbunden erscheinen, in den ersten Zeiträumen zu den kleineren (0·4 bis 0·7), in den letzten zu den größeren gehören (0·7 bis 1·0).

Aus dem sehr auffallenden Umstande, dass auf der Strecke von $q = 0{\cdot}73$ bis $0{\cdot}99$, wo sich die Kometen am dichtesten beisammen finden, die Mittel aus den nördlichen Perihelbreiten b_n mit der Zeit ansteigen (+19°9, 24°9, 34°8, 45°2), kann entnommen werden, dass die in den Kometenentdeckungen schon immer vorhanden gewesene Präponderanz der nördlichen Hemisphäre in der neueren Zeit noch stärker ist als früher.

Auch das Überwiegen der südlichen Perihelbreiten bei kleinen Periheldistanzen ist in den vier Zeiträumen nicht gleich groß und insbesondere ist dasselbe im ersten Zeitraume so gut

wie gar nicht vorhanden. Beachtet man aber, wie dieses Überwiegen zustande kommt und dass die Kometen, durch welche es bewirkt wird, wie schon hervorgehoben worden ist, zu den relativ lichtschwachen gehören, so kann auch diese Differenz durch den Unterschied zwischen der vorteleskopischen Zeit und der neueren Zeit erklärt werden, und insbesondere wird es begreiflich, dass das Überwiegen der stark südlichen Perihelbreiten bei kleinen Periheldistanzen gerade in der vorteleskopischen Zeit nicht zu constatieren ist.

Dass auch im letzten Zeitraume die stark südlichen Perihelbreiten bei kleinen Periheldistanzen weniger auffallend sind, dürfte wohl nur eine Zufälligkeit sein, die dadurch begünstigt worden ist, dass dieser Zeitraum der kürzeste von allen ist.

Wir können hier noch eine wichtige Folgerung anschließen. Man bemerkt nämlich, insbesondere beim dritten Zeitraume, dass es gerade diese stark südlichen Perihelbreiten sind, welche die bedeutende Größe der numerischen Werte b_m bei kleinen Periheldistanzen bewirken, und da die betreffenden Kometen fast alle zu denen gehören, die nicht am Äquator, sondern nur unter höheren geographischen Breiten zu sehen waren, so können wir den Umstand, dass die Mittel der Perihelbreiten b_m sowohl in der Gesammtheit, als auch insbesondere im dritten Zeitraume gerade bei ganz kleinen Periheldistanzen am größten sind, nicht als eine allgemeine Nothwendigkeit, sondern nur als eine durch den Standpunkt der Beobachter unter höheren geographischen Breiten hervorgerufene Zufälligkeit bezeichnen, die bei Kometenentdeckungen am Äquator wahrscheinlich nicht stattfinden würde.

Diese einigermaßen unerwartete Folgerung erscheint ganz naturgemäß, wenn man beachtet, dass die schon eingangs erwähnte Helligkeitsregel, nämlich dass die Kometen desto leichter sichtbar werden, je größer die Helligkeit ist, die sie für uns erreichen können, und dass diese Helligkeit im allgemeinen umso größer wird, je mehr die Zeit der Erdnähe mit der Perihelzeit zusammentrifft, in ihrer zweiten Hälfte auf Kometen mit kleinen Periheldistanzen keine Anwendung hat, indem diese Kometen nicht im Perihel, sondern nur weit vom Perihel

in die Erdnähe gelangen und daher gewöhnlich auch nicht im Perihel, sondern nur weit vom Perihel beobachtet werden können. Es ist daher der Umstand, dass die Perihelbreiten bei den kleinsten Periheldistanzen am größten sind, so befremdend dies auch im ersten Augenblicke erscheinen mag, nicht auf denselben Grund zurückzuführen, aus welchem sie bei großen Periheldistanzen am kleinsten sind, und da wir jetzt wissen, dass die bedeutende Größe der Perihelbreiten bei kleinen Periheldistanzen hauptsächlich durch den Standpunkt der Beobachter unter höheren geographischen Breiten hervorgerufen wird, so ist es, obwohl das mit zunehmenden Periheldistanzen bemerkbare Kleinerwerden der Mittelwerte der Perihelbreiten b_m insbesondere in dem gleich zu Anfang mitgetheilten Tableau ein auffallend continuierliches ist, auch gar nicht nothwendig, dass sich das Maximum gerade bei den kleinsten Periheldistanzen zeigt. Wie groß der Mittelwert b_m an dieser Stelle sein würde, wenn Kometenentdeckungen ausschließlich oder überwiegend in den Äquatorgegenden stattgefunden hätten, lässt sich von vornherein nicht angeben; soviel bleibt aber sicher, dass von größeren Periheldistanzen an, etwa bei $q = 0 \cdot 7$, das Kleinerwerden der Perihelbreiten bei zunehmenden Periheldistanzen mit Bestimmtheit zu erwarten ist, und zwar nicht nur in der Gesammtheit der Kometen überhaupt, sondern auch bei etwaigen Kometenentdeckungen in den Äquatorgegenden.

Nachdem nun die Mittelwerte der Perihelbreiten b in ihren Beziehungen zu den Periheldistanzen untersucht sind, soll die durch die Abhandlung: »Über die Unsichtbarkeit von Kometen etc.« dadurch gebotene Gelegenheit, dass dort die Perihelpunkte nicht nur auf die Ekliptik, sondern auch auf den Äquator bezogen sind, dazu benützt werden, zu diesem Zwecke auch die Periheldeclinationen δ heranzuziehen.

Es ist zwar zu erwarten, dass diese Untersuchung kein wesentlich anderes Resultat liefern wird, indem die Differenz zwischen b und δ höchstens 23°5 beträgt und das Plus (Nördlicherwerden von Perihelpunkten) auf der einen Himmelshälfte (0° bis 180°) durch das Minus (Südlicherwerden von Perihelpunkten) auf der anderen (180° bis 360°) größtentheils auf-

gehoben wird, ja man muss sich im Gegentheile, da die Helligkeiten der Kometen jedenfalls mehr an die Ekliptik (nämlich an die Nähe der Sonne) als an den Himmelsäquator gebunden sind, darauf gefasst machen, dass durch diesen Übergang die zwischen b und q gefundenen, ohnehin erst bei einer längeren Reihe von Kometen merkbaren Beziehungen hie und da noch mehr verwischt werden, aber es erscheint gerade in Anbetracht der geringen Sicherheit, die in manchen der bisher abgeleiteten Zahlen liegt, immerhin als eine wesentliche Vervollständigung, wenn sich zeigt, dass die neuen Zahlenreihen mit den früheren wenigstens soweit übereinstimmen, dass aus ihnen nicht etwa geradezu entgegengesetzte Folgerungen gezogen werden können.

q	δ_n	δ_s	δ_a	δ_m
von 0·00 bis 0·24	+20°9 (14)	−48°8 (16)	−16°3 (30)	35°8
» 0·25 » 0·49	30·4 (29)	31·3 (21)	+ 4·5 (50)	30·8
» 0·50 » 0·74	37·6 (42)	24·3 (29)	+12·3 (71)	32·2
» 0·75 » 0·99	32·5 (57)	28·5 (31)	+11·0 (88)	31·1
» 1·00 » 1·24	31·3 (31)	18·8 (20)	+11·7 (51)	26·4
» 1·25 » 1·49	35·0 (16)	12·7 (12)	+14·6 (28)	25·4
» 1·50 » 1·75	31·4 (8)	25·0 (7)	+ 5·1 (15)	28·5
> 1·75	+30·3 (13)	19·9 (9)	+ 9·7 (22)	26·0

Hier ist in der Reihe der nördlichen Perihelpunkte δ_n ein Kleinerwerden der Zahlen mit zunehmenden Periheldistanzen nicht vorhanden, wohl aber in den südlichen δ_s, und infolge dessen zeigen auch die numerischen Mittel δ_m eine Abnahme, wenigstens soweit, dass die Zahlen für $q < 1\cdot0$ größer und für $q > 1\cdot0$ kleiner sind als der theoretische Mittelwert 30°. Die Zahlen δ_a verlaufen nahe so, wie wir es schon früher bei den Zahlen b_a gesehen haben, nur ist bei den ganz kleinen Periheldistanzen der Ausschlag nach Süden noch etwas bedeutender.

Nahe dasselbe Verhalten zeigt sich, wie zu erwarten ist, auch dann, wenn für q die größeren Intervalle gewählt werden:

q	δ_n	δ_s	δ_a	δ_m
von 0·00 bis 0·39	+28°5 (32)	—41°7 (30)	5°4 (62)	34°9
» 0·40 » 0·72	35·5 (50)	24·9 (34)	+11·0 (84)	31·2
» 0·73 » 0·99	32·0 (60)	28·1 (33)	+10·6 (93)	30·6
» 1·00 » 1·52	33·3 (48)	16·5 (33)	+13·0 (81)	26·4
> 1·52	+29·0 (20)	—22·4 (15)	+ 6·9 (35)	26·2

Wird auch diese Übersicht nach vier Zeiträumen getrennt, so ergibt sich:

q	δ_n	δ_s	δ_a	δ_m
I. 240 bis 1759				
von 0·00 bis 0·39	+30°0 (13)	—40°9 (7)	+ 5°2 (20)	33°8
» 0·40 » 0·72	43·8 (17)	24·1 (7)	+24·0 (24)	38·1
» 0·73 » 0·99	26·8 (17)	27·7 (8)	+ 9·3 (25)	27·1
» 1·00 » 1·52	+ 8·8 (3)	6·6 (3)	+ 1·1 (6)	7·7
> 1·52	—	—34·3 (2)	—34·3 (2)	34·3
II. 1762 bis 1835				
von 0·00 bis 0·39	+14°9 (5)	—36°9 (9)	—18°4 (14)	29°1
» 0·40 » 0·72	33·6 (12)	32·6 (12)	+ 0·5 (24)	33·1
» 0·73 » 0·99	27·6 (16)	17·4 (5)	+16·9 (21)	25·2
» 1·00 » 1·52	+39·1 (12)	21·5 (8)	+14·8 (20)	32·1
> 1·52	—	—11·5 (4)	—11·5 (4)	11·5

q	δ_n	δ_s	δ_a	δ_m
		III. 1840 bis 1871		
von 0·00 bis 0·39	+42°8 (7)	−54°0 (8)	− 8°2 (15)	48°8
» 0·40 » 0·72	33·9 (13)	27·9 (7)	+12·3 (20)	31·8
» 0·73 » 0·99	41·7 (13)	30·5 (11)	+ 8·6 (24)	36·6
» 1·00 » 1·52	34·3 (17)	16·4 (9)	+16·8 (26)	28·1
> 1·52	+25·2 (7)	−28·2 (3)	+ 9·2 (10)	26·1
		IV. 1873 bis 1900		
von 0·00 bis 0·39	+21°4 (7)	−33°2 (6)	− 3°8 (13)	26°8
» 0·40 » 0·72	22·9 (8)	11·5 (8)	+ 5·7 (16)	17·2
» 0·73 » 0·99	34·3 (14)	31·6 (9)	+ 8·5 (23)	33·2
» 1·00 » 1·52	32·3 (16)	15·8 (13)	+10·7 (29)	24·9
> 1·52	+31·0 (13)	−22·8 (6)	+14·0 (19)	28·4

Man sieht, dass hier das Überwiegen der südlichen Perihelpunkte bei kleinen Periheldistanzen ebenso wie bei den Perihelbreiten im zweiten, dritten und vierten Zeitraume vorhanden ist. Was die Abnahme der Zahlen δ_m betrifft, so ist dieselbe im ersten und dritten Zeitraume ziemlich deutlich, im zweiten und vierten aber mehr minder verwischt. Überhaupt lässt sich auch für die Periheldeclinationen fast alles nachweisen, was sich bei den Perihelbreiten gezeigt hat, nur nicht überall so bestimmt.

Ich habe es schließlich, um die Differenzen zwischen den verschiedenen Zeiträumen etwas mehr abzuschwächen, auch noch versucht, die Kometen statt auf vier nur auf drei Zeiträume zu vertheilen, und zwar sowohl für b, als für δ. Dabei

vermengen sich natürlich die Eigenthümlichkeiten von je zwei benachbarten Gruppen aber nicht vollständig, da sich nicht die ganzen Gruppen, sondern nur die einander zugekehrten Partien von je zwei Nachbargruppen vereinigen. Es kann daher vorkommen, dass unter den neuen Mittelwerten der eine oder der andere nicht zwischen die benachbarten hineinfällt, sondern außerhalb zu liegen kommt. So liegt z. B. der zu kleinen Periheldistanzen gehörende Mittelwert δ_a im zweiten Zeitraume, nämlich —22°5, jetzt weit südlicher als die entsprechenden Mittelwerte im zweiten und dritten Zeitraume der früheren Vertheilung, nämlich —18°4 und —8°2, und zwar darum, weil in dieser Gruppe bei der jetzigen Vertheilung sehr viele stark südliche Perihelpunkte zusammenkommen, die bei der früheren Abgrenzung auf zwei verschiedene Gruppen vertheilt waren. Sonst aber ist durch diese hier folgende Vertheilung nichts wesentlich Neues zum Vorscheine gekommen.

Mittel aus den Perihelbreiten.

q	b_n	b_s	b_a	b_m
		240 bis 1799		
von 0·00 bis 0·39	+40°8 (12)	—24°3 (12)	+ 8°2 (24)	32°5
» 0·40 » 0·72	39·5 (25)	26·0 (14)	+16·0 (39)	34·7
» 0·73 » 0·99	23·0 (26)	26·5 (9)	+10·3 (35)	23·9
» 1·00 » 1·52	25·5 (8)	18·4 (7)	+ 5·0 (15)	22·2
> 1·52	+10·2 (1)	—26·5 (2)	—14·2 (3)	21·0
		1801 bis 1863		
von 0·00 bis 0·39	+27°5 (11)	—56°2 (11)	—14°3 (22)	41°9
» 0·40 » 0·72	32·4 (16)	18·0 (9)	+14·3 (25)	27·2
» 0·73 » 0·99	32·1 (18)	22·4 (13)	+ 9·3 (31)	28·0
» 1·00 » 1·52	33·9 (18)	16·5 (14)	+11·8 (32)	26·3
> 1·52	+41·1 (4)	—18·0 (6)	+ 5·6 (10)	27·2

q	b_n	b_s	b_a	b_m
		1864 bis 1900		
von 0·00 bis 0·39	+36°6 (9)	—32°5 (7)	+ 6°4 (16)	34°9
» 0·40 » 0·72	24·9 (14)	23·1 (6)	+10·5 (20)	24·4
» 0·73 » 0·99	39·2 (15)	29·5 (12)	+ 8·7 (27)	34·9
» 1·00 » 1·52	21·5 (27)	6·6 (7)	+15·7 (34)	18·4
> 1·52	+18·9 (14)	—17·1 (8)	+ 5·8 (22)	18·2

Mittel aus den Periheldeclinationen.

q	δ_n	δ_s	δ_a	δ_m
		240 bis 1799		
von 0·00 bis 0·39	+29°5 (15)	—39°9 (9)	+ 3°4 (24)	33°4
» 0·40 » 0·72	42·8 (25)	31·6 (14)	+16·1 (39)	38·8
» 0·73 » 0·99	27·7 (26)	25·3 (9)	+14·0 (35)	27·1
» 1·00 » 1·52	+26·7 (10)	7·2 (5)	+15·4 (15)	20·2
> 1·52	—	26·1 (3)	— 26·1 (3)	26·1
		1801 bis 1863		
von 0·00 bis 0·39	+28·0 (7)	—46°1 (15)	—22°5 (22)	40°3
» 0·40 » 0·72	31·6 (16)	23·5 (9)	+11·8 (25)	28·7
» 0·73 » 0·99	37·1 (18)	27·1 (13)	+10·2 (31)	32·9
» 1·00 » 1·52	38·5 (18)	19·4 (14)	+13·1 (32)	30·1
> 1·52	+30·8 (5)	—21·2 (5)	+ 4·8 (10)	26·0
		1864 bis 1900		
von 0·00 bis 0·39	+27°5 (10)	—33°2 (6)	+ 4°8 (16)	29°7
» 0·40 » 0·72	21·9 (9)	17·6 (11)	+ 0·2 (20)	19·5
» 0·73 » 0·99	33·2 (16)	31·7 (11)	+ 6·7 (27)	32·6
» 1·00 » 1·52	31·8 (20)	17·0 (14)	+11·7 (34)	25·7
> 1·52	+28·4 (15)	21·7 (7)	+12·4 (22)	26·3

Die Vertheilung der Kometen auf mehrere Gruppen hat also gezeigt, dass das in der Gesammtheit verhältnismäßig deutlich hervortretende Kleinerwerden der Perihelbreiten, beziehungsweise -Declinationen mit zunehmenden Periheldistanzen zwar auch in kürzeren Zeiträumen zu bemerken ist, aber nicht überall und auch nicht überall in demselben Maße, und dass demnach die hier dargelegten Beziehungen, wenn sie auch begründet erscheinen, vielfach von Zufälligkeiten beeinflusst werden, die erst im Verlaufe eines längeren Zeitraumes oder überhaupt durch eine größere Zahl von Kometenerscheinungen so weit zurückgedrängt werden, dass die Regel mit Sicherheit erkannt werden kann.

Es liegt nun, nachdem aus den zu gewissen Periheldistanzen gehörenden Perihelbreiten die Mittel genommen und dieselben untereinander verglichen worden sind, sehr nahe, auch umgekehrt aus den zu gewissen Perihelbreiten gehörenden Periheldistanzen die Mittel zu nehmen und dieselben untereinander zu vergleichen. Es empfiehlt sich dabei, die Sphäre durch die Breiten 0° und ±30° in vier gleich große Flächen zu theilen und dabei im Auge zu behalten, dass bei einer gleichmäßigen Vertheilung der Perihelpunkte auf jeder dieser vier Flächen gleich viel Perihelpunkte liegen sollen; es können infolgedessen die durch diese Rechnungen erhaltenen je vier Zahlen direct miteinander verglichen werden.

Bei dieser Untersuchung erscheint es, weil die Mittelwerte der Periheldistanzen, der zunehmenden Stärke der optischen Instrumente entsprechend, von den früheren Jahrhunderten bis zur neueren Zeit allmählich größer werden, ganz besonders angezeigt, die Kometen nach verschiedenen Zeiträumen zu trennen.

Die zwei übermäßig großen Periheldistanzen des ersten Zeitraumes, 4·05 und 2·20, welche den Kometen 1729, beziehungsweise 1747 angehören, sind nicht berücksichtigt.

240 bis 1759.

	b			q_m	
zwischen	+90°	und	+30°	0·53 (22)	
»	+30	»	0	0·72 (28)	0·68 (47)
»	0	»	—30	0·62 (19)	
»	—30	»	—90	0·54 (6)	

1762 bis 1835.

b				q_m	
zwischen	+90°	und	+30°	0·88 (17)	
»	+30	»	0	0·69 (25)	0·79 (53)
»	0	»	—30	0·89 (28)	
»	—30	»	—90	0·61 (13)	

1840 bis 1871.

b				q_m	
zwischen	+90°	und	+30°	0·82 (34)	
»	+30	»	0	1·00 (23)	1·08 (47)
»	0	»	—30	1·17 (24)	
»	-30	»	—90	0·51 (14)	

1873 bis 1900.

b				q_m	
zwischen	+90°	und	+30°	0·92 (30)	
»	+30	»	0	1·20 (38)	1·12 (61)
»	0	»	—30	0·98 (23)	
»	—30	»	—90	0·84 (9)	

Hier ist nun die Beziehung zwischen b und q deutlich dadurch ausgesprochen, dass die zu den südlichsten Perihelbreiten (—30° bis —90°) gehörenden Periheldistanzen am kleinsten und die zu niedrigen Breiten (+30° bis —30°) gehörenden am größten sind. Was die zu den nördlichsten Breiten (+90° bis +30°) gehörenden Periheldistanzen betrifft, so ist auf Grund derselben Überlegung zu erwarten, dass sie kleiner sind als die zu den niedrigen Breiten gehörenden, und das ist auch im allgemeinen der Fall, nur im zweiten Zeitraume zeigt sich eine Ausnahme, indem hier die nördliche Zahl (0·88) nicht kleiner, sondern größer ist als die mittlere (0·79). Dieses abweichende Verhältnis war übrigens auf Grund des schon früher bemerkten Umstandes, dass in diesem Zeitraume der Mittelwert der zu $q > 1$ gehörenden nördlichen Perihelbreiten auffallend groß ist (+42°2), auch zu erwarten; es rührt daher, dass sich hier relativ viele Kometen mit großen Periheldistanzen und hohen nördlichen Perihelbreiten zusammen-

gefunden haben, so insbesondere 1762, 1774, 1793 II, 1818 II, und verliert den Charakter einer ernstlichen Ausnahme, wenn man beachtet, dass diese Kometen verhältnismäßig lichtschwach und für den Äquator größtentheils oder ganz unsichtbar waren. Man kommt nämlich auf Grund dieses Umstandes zu dem Schlusse, dass die Auffindung dieser Kometen und infolgedessen auch das Übergewicht großer Periheldistanzen bei hohen nördlichen Perihelbreiten nur durch intensiveres Nachsuchen der unter höheren geographischen Breiten befindlichen Beobachter ermöglicht oder wenigstens begünstigt worden ist.

Werden die Kometen statt auf vier nur auf drei Zeiträume vertheilt, so tritt das im zweiten Zeitraume bemerkte Übergewicht der großen Periheldistanzen bei hohen nördlichen Perihelbreiten wesentlich zurück, zeigt aber noch immer seine Spuren.

240 bis 1799.

	b			q_m	
zwischen	+90°	und	+30°	0·61 (33)	
»	+30	»	0	0·76 (38)	0·73 (69)
»	0	»	—30	0·69 (31)	
»	—30	»	—90	0·54 (12)	

1801 bis 1863.

	b			q_m	
zwischen	+90°	und	+30°	0·91 (34)	
»	+30	»	0	0·78 (33)	0·92 (68)
»	0	»	—30	1·05 (35)	
»	—30	»	—90	0·53 (18)	

1864 bis 1900.

	b			q_m	
zwischen	+90°	und	+30°	0·85 (36)	
»	+30	»	0	1·19 (43)	1·13 (71)
»	0	»	—30	1·03 (28)	
»	—30	»	—90	0·82 (12)	

Der Vollständigkeit halber sollen hier auch noch die Zahlen angesetzt werden, welche zeigen, in welchem Grade die Beziehung zwischen den Perihelbreiten und den Periheldistanzen in der Gesammtheit der Kometen hervortritt.

b				q_m
zwischen	+90°	und	+30°	0·79 (103)
»	+30	»	0	0·93 (114)
»	0	»	—30	0·93 (94)
»	—30	»	—90	0·62 (42)

Werden auch hier statt der Perihelbreiten b die Periheldeclinationen δ in Betracht gezogen, also aus den Periheldistanzen, welche zu den durch die Periheldeclinationen 0° und ±30° begrenzten Flächen gehören, die Mittel genommen, so tritt das schon bei den Perihelbreiten bemerkte Überwiegen von einigen mit stark nördlichen Perihelpunkten verbundenen großen Periheldistanzen noch mehr hervor, und zwar so sehr, dass die erwartete Beziehung zwischen den nördlichsten und den mittleren Periheldistanzen zum Theile gar nicht und selbst in der Gesammtheit der Kometen nur in einem so geringen Grade vorhanden ist, dass sie schon durch einen oder zwei Kometen mit extremen Periheldistanzen ganz zum Verschwinden gebracht werden könnte. Man findet nämlich als Mittel der Periheldistanzen:

δ				q_m
zwischen	+90°	und	+30°	0·86 (98)
»	+30	»	0	0·88 (112)
»	0	»	—30	0·92 (94)
»	—30	»	—90	0·65 (49)

Es gewährt also hier die Einführung der Periheldeclinationen, wenn sie auch nicht gerade zu entgegengesetzten Folgerungen führt, doch mindestens keine strenge Bestätigung der für die Perihelbreiten gefundenen Beziehung, und man ist daher im allgemeinen nicht berechtigt, von Beziehungen zwischen q und δ mit derselben Sicherheit zu sprechen wie von den Beziehungen zwischen q und b.

Ich möchte hier noch die Bemerkung beifügen, dass das bisher durchgehends in Anwendung gebrachte Mittelnehmen, und zwar insbesondere aus Winkelgrößen, die meistens um viele Grade auseinanderliegen, wohl in mancher Hinsicht unzulässig genannt werden kann, für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung aber immerhin erlaubt erscheint, da es mir nicht darum zu thun war, bestimmte numerische Werte abzuleiten, sondern nur, eine Vorstellung davon zu bekommen, welche Perihelbreiten, beziehungsweise -Declinationen durchschnittlich als die mittleren angesehen werden dürfen, damit diese sodann leichter untereinander verglichen werden können. Dasselbe gilt von den Mittelwerten aus den Periheldistanzen.

Nichtsdestoweniger sollen aber jetzt zur weiteren Klärung die Beziehungen zwischen den Perihelbreiten und den Periheldistanzen auch noch in einer anderen Weise dargelegt werden, und zwar durch die Abzählungen der betreffenden Kometen. Man findet:

b	q						
	von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	7	18	24	26	13	8	7
» +30 » 0	8	11	21	31	17	15	12
» 0 » —30	4	14	18	20	19	7	12
» —30 » —90	11	7	8	11	2	—	4

Man bemerkt auch hier die drei Haupteigenthümlichkeiten der Vertheilung, nämlich erstens, dass ganz kleine Periheldistanzen ($q < 0·25$) am häufigsten mit stark südlichen Perihelbreiten verbunden vorkommen, zweitens, dass bei etwas größeren Periheldistanzen (schon von $q = 0·25$ an) sofort die nördlichen Perihelbreiten in einer ansehnlichen Menge zum Vorscheine kommen, und schließlich drittens, dass noch größere Periheldistanzen (q gegen 1·0 und größer als 1·0) am häufigsten mit niedrigen Perihelbreiten (+30° bis —30°) verbunden sind.

Dieselben Beziehungen sind auch angedeutet, wenn man statt der Perihelbreiten b die Periheldeclinationen δ in Betracht zieht:

δ	q von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	3	15	24	25	14	9	8
» +30 » 0	11	14	18	32	17	8	12
» 0 » −30	4	14	21	17	15	13	11
» −30 » 90	12	7	8	14	5	—	4

Und nun wollen wir nachsehen, in welchem Grade die hier dargelegten Beziehungen durch die Kometen, welche nur unter höheren geographischen Breiten, aber nicht am Äquator zu sehen waren, beeinflusst werden. Zieht man zu diesem Zwecke diejenigen 97 Kometen heran, von denen in meiner Abhandlung: »Über die Unsichtbarkeit von Kometen...« gezeigt worden ist, dass sie für den Äquator nur schwer oder gar nicht zu sehen waren, so findet man, dass dieselben in Bezug auf b und q in nachstehender Weise vertheilt sind:

b	q von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	2	5	12	14	5	3	1
» +30 » 0	1	2	9	8	3	1	2
» 0 » −30	1	5	7	1	—	—	—
» −30 » −90	9	4	2	—	—	—	—

Diesem Tableau soll auch gleich die Vertheilung derselben Kometen in Bezug auf δ und q angeschlossen werden:

δ	q						
	von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	1	2	9	13	7	3	3
» +30 » 0	2	5	8	6	1	1	—
» 0 » —30	—	5	11	4	—	—	—
» —30 » —90	10	4	2	—	—	—	—

In diesen beiden Zusammenstellungen fällt nun sofort auf, dass diese Kometen hinsichtlich ihrer Periheldistanzen und Perihelbreiten, beziehungsweise -Declinationen in einer ganz eigenthümlichen Weise vertheilt sind. Bevor wir diese Vertheilung für unsere Zwecke verwenden, soll hier zunächst noch der allgemeinere Umstand erklärt werden, dass die Periheldistanzen dieser Kometen fast durchgehends kleiner als 1·0 und nur in wenigen Fällen größer als 1·0 sind.

Beachtet man, dass die für den Äquator unsichtbar bleibenden Kometen die Ekliptik in geringen Elongationen von der Sonne durchschneiden und dass unter den Kometen überhaupt und somit auch unter diesen im allgemeinen die helleren leichter gefunden werden, so ist klar, dass eine größere Helligkeit und also auch eine größere Häufigkeit vor allem bei denjenigen Kometen auftreten wird, die sich während ihrer Sichtbarkeit zwischen der Erde und der Sonne bewegen ($\Delta < 1·0$ und $q < 1·0$), und damit ist schon die Bedingung $q < 1$ gegeben. Es kommen zwar unter den Kometen, die für den Äquator unsichtbar bleiben, auch solche vor, welche sich um die Zeit ihres Durchganges durch die Ekliptik jenseits der Sonne befinden, doch erscheinen dieselben infolge der großen Distanzen von der Erde ($\Delta > 1·0$) und besonders, wenn auch noch $q > 1·0$ ist, wesentlich lichtschwächer, und diese geringe Helligkeit macht es erklärlich, dass sich in den zwei letzten Zusammenstellungen allerdings auch einige Kometen mit $q > 1·0$ zeigen, aber nur wenige; solche waren: 1886 VIII, 1887 II, 1892 II. Dass Kometen mit großen Periheldistanzen auch in

viel günstigere Stellungen, und zwar sogar in die Opposition mit der Sonne kommen können, ist hier gegenstandslos, weil sie ja in diesem Falle nicht mehr zu den für den Äquator unsichtbaren Kometen gehören.

Was nun das Eigenthümliche in der Vertheilung dieser Kometen bezüglich ihrer Periheldistanzen und Perihelpunkte betrifft, so liegt dasselbe, wie man sieht, darin, dass stark südliche Perihelpunkte fast ausschließlich an Kometen mit kleinen Periheldistanzen und die nördlichen Perihelpunkte an Kometen mit größeren Periheldistanzen gebunden sind, so zwar, dass die Maximalwerte der Häufigkeit sehr nahe an der von links unten nach rechts oben bei $q = 0 \cdot 75$ bis $0 \cdot 99$ gezogenen Diagonale liegen und stark südliche Perihelpunkte bei Periheldistanzen, die größer als $0 \cdot 74$ sind, gänzlich fehlen.

Das ist nun im Grunde genommen dieselbe Vertheilung, welche sich schon früher, nämlich beim Mittelnehmen aus den Perihelbreiten und -Declinationen bemerkbar gemacht hat. Dass sie aber hier noch bestimmter hervortritt und sich höchst auffallend bei den für den Äquator unsichtbaren Kometen zeigt, ist zwar eine natürliche Folge des Umstandes, dass sowohl stark südliche, als stark nördliche Perihelbreiten infolge der Relation zwischen sin b und sin i nur bei großen Neigungen i vorkommen können und dass diese letzteren, wie sich in der Untersuchung »Über die Unsichtbarkeit von Kometen etc.« gezeigt hat, ein Charakteristicum der für den Äquator unsichtbaren Kometen sind, führt aber gerade aus diesem Grunde noch bestimmter als früher zu dem Schlusse, dass die zwei genannten Beziehungen, nämlich dass mit ganz kleinen Periheldistanzen stark südliche und mit größeren Periheldistanzen hauptsächlich nördliche Perihelbreiten, beziehungsweise -Declinationen verbunden sind, eine Folge des Standpunktes der meisten Kometenbeobachter unter höheren geographischen Breiten, und zwar bis jetzt auf der nördlichen Erdhemisphäre sind.

Es ist demnach zu erwarten, dass durch Kometenentdeckungen am Äquator von diesen zwei Beziehungen zwischen b und q oder δ und q, die eigentlich nur Ungleichmäßigkeiten sind, keine zum Vorschein kommen, sondern eine ziemlich gleichmäßige Vertheilung auf Nord und Süd eintreten

würde. Um angenähert zeigen zu können, wie sich diese Verhältnisse auf Grund der uns bekannten Kometen für den Äquator gestalten würden, habe ich aus den zwei vorletzten Zusammenstellungen die 97 für den Äquator unsichtbaren Kometen, wie sie in den zwei letzten Zusammenstellungen enthalten sind, ausgeschieden, wodurch sich die folgende Vertheilung ergibt.

Vertheilung der für den Äquator sichtbaren Kometen in Bezug auf b und q.

b	q						
	von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	5	13	12	12	8	5	6
» +30 » 0	7	9	12	23	14	14	10
» 0 » −30	3	9	11	19	19	7	12
» −30 » −90	2	3	6	11	2	—	4

Vertheilung der für den Äquator sichtbaren Kometen in Bezug auf δ und q.

δ	q						
	von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	2	13	15	12	7	6	5
» +30 » 0	9	9	10	26	16	7	12
» 0 » −30	4	9	10	13	15	13	11
» −30 » −90	2	3	6	14	5	—	4

Hier sind also unter anderen diejenigen Kometen ausgeschieden, welche ein bedeutendes Überwiegen einerseits der nördlichsten Perihelpunkte, anderseits der südlichsten Perihelpunkte bei kleinen Periheldistanzen hervorrufen oder dasselbe zum Theile sogar fast ausschließlich selbst bewirken, und es zeigt sich nun thatsächlich sehr auffallend, dass diese Übergewichte jetzt verschwunden sind und dafür von ungefähr $q = 0 \cdot 75$ angefangen die zwischen +30° und —30° liegenden Perihelpunkte am häufigsten sind.

Dass die südlichsten Perihelpunkte (zwischen —30° und —90°) überhaupt am seltensten sind, braucht kaum eigens hervorgehoben zu werden, da dies eine schon lange bekannte und auch erklärte Thatsache ist (Schiaparelli, Sternschnuppen, 3. Note). Während nämlich der nördliche Standpunkt der meisten Beobachter bewirkt, dass wir von den Kometen mit größeren Periheldistanzen und stark nördlichen Perihelbreiten mehr kennen lernen, als nach der Häufigkeit der Kometen mit kleineren Perihelbreiten zu erwarten wäre, hat er anderseits auch zur Folge, dass uns von den Kometen mit größeren Periheldistanzen und stark südlichen Perihelbreiten verhältnismäßig viele entgehen.

Es ist also jetzt auch durch die Abzählungen dargelegt, dass für den Erdäquator die zwei ersten Beziehungen wahrscheinlich gar nicht vorhanden wären, wohl aber die dritte, nämlich dass größere und sehr große Periheldistanzen entschieden häufiger mit niedrigen als mit hohen Perihelbreiten, beziehungsweise -Declinationen verbunden sind.

Aber auch diese Beziehung erfährt noch eine wesentliche Einschränkung, mag es sich nun um Kometenentdeckungen in den Äquatorgegenden oder unter höheren geographischen Breiten handeln, und zwar durch die periodischen Kometen, insbesondere die kurzperiodischen. Diese tragen nämlich, da sie fast durchgehends kleine Neigungen besitzen, zur Zahl der Kometen mit kleinen Perihelbreiten, beziehungsweise -Declinationen in einem sehr hohen Grade bei. Wie weit dies der Fall ist, zeigt die folgende Vertheilung, zu welcher diejenigen 43 Kometen herangezogen worden sind, deren Umlaufszeit 100 Jahre nicht wesentlich übersteigt.

Vertheilung der periodischen Kometen in Bezug auf *b* und *q*.

b	*q* von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	—	—	—	—	1	1	—
» +30 » 0	—	2	3	3	6	5	4
» 0 » —30	—	1	3	3	3	4	4
» —30 » —90	—	—	—	—	—	—	—

Vertheilung der periodischen Kometen in Bezug auf δ und *q*.

δ	*q* von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	—	1	1	—	1	1	—
» +30 » 0	—	1	3	5	7	3	4
» 0 » —30	—	1	2	1	2	6	3
» —30 » —90	—	—	—	—	—	—	1

Zieht man die in diesen zwei Zusammenstellungen enthaltenen Summen von den entsprechenden früheren ab (wobei der Komet 1873 II, da er sich schon unter den für den Äquator unsichtbaren Kometen befindet, außeracht zu lassen und daher die Anzahl der abzuziehenden Kometen nur 42 ist), so entsteht natürlich eine wesentliche Verminderung der mittleren, d. h. der zwischen +30° und —30° liegenden Perihelpunkte:

Beziehungen zwischen *b* und *q*.

b	*q* von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	5	13	12	12	7	4	6
» +30 » 0	7	7	9	20	8	9	6
» 0 » —30	3	8	9	16	16	3	8
» —30 » —90	2	3	6	11	2	—	4

Beziehungen zwischen δ und q.

δ	q von 0·00 bis 0·24	0·25 0·49	0·50 0·74	0·75 0·99	1·00 1·24	1·25 1·50	>1·50
zw. +90° u. +30°	2	12	14	12	6	5	5
» +30 » 0	9	8	8	21	9	4	8
» 0 » −30	4	8	8	12	13	7	8
» −30 » −90	2	3	6	14	5	—	3

Durch die Ausscheidung der periodischen Kometen ist, wie man sieht, die Vermiuderung der Anzahl der Kometen mit kleinen Perihelbreiten eine so bedeutende geworden, dass das Übergewicht dieser Perihelbreiten nur noch wenig hervortritt und nach diesen Zahlen eigentlich nicht mehr mit Bestimmtheit behauptet werden könnte. Trotzdem wird aber die Behauptung, dass größere und sehr große Periheldistanzen ($q > 0·74$) häufiger mit niedrigen als mit hohen Perihelbreiten verbunden sind, nicht hinfällig, denn wenn auch die periodischen Kometen bezüglich ihrer Entdeckung vor den anderen das voraus haben, dass sie infolge ihrer wiederholten Wiederkehr im allgemeinen leichter als einer der nur einmal erscheinenden Kometen von nahezu derselben Helligkeit gefunden werden können, so gilt doch auch von ihnen der die Grundlage dieser Untersuchungen bildende Satz, dass sie umso leichter entdeckt werden können, je größer die Helligkeit ist, die sie für uns erreichen, und es verliert daher die hier dargelegte Beziehung zwischen b und q ihre thatsächliche Existenz nicht, wenn die Kometen, durch welche sie wesentlich verstärkt wird, die relativ leichter auffindbaren periodischen Kometen sind.

Wenn wir nun zum Schlusse die Resultate dieser Untersuchungen nochmals überblicken, so sind die bemerkenswertesten die, dass

1. sehr kleine Periheldistanzen (q kleiner als etwa 0·3) fast ausschließlich mit stark südlichen Perihelbreiten (von etwa −30° bis −90°),

2. etwas größere Periheldistanzen (ungefähr von 0·3 bis 0·8) hauptsächlich mit nördlichen Perihelbreiten (und zwar nicht nur von 0° bis +30°, sondern insbesondere auch von +30° bis +90°), und

3. noch größere Periheldistanzen (q gegen 1·0 und größer als 1·0) am häufigsten mit niedrigen, sei es nördlichen oder südlichen Perihelbreiten (0° bis +30° und 0° bis —30°) verbunden vorkommen.

Die hier für q speciell angesetzten Grenzwerte sind zu bemerken, wenn in den Abzählungen für q statt des Intervalles 0·25 ein kleineres, etwa 0·20, gewählt wird.

Die zwei ersten Beziehungen lassen sich in folgender Weise noch umfassender ausdrücken. Wir sehen auf der nördlichen Erdhemisphäre von den Kometen mit stark nördlichen Perihelbreiten hauptsächlich diejenigen, welche mit größeren Periheldistanzen, und am wenigsten die, welche mit ganz kleinen Periheldistanzen verbunden sind; von den Kometen mit stark südlichen Perihelbreiten hauptsächlich diejenigen, welche mit ganz kleinen, und am wenigsten die, welche mit größeren Periheldistanzen verbunden sind. Auf der südlichen Erdhemisphäre ist für südliche, beziehungsweise nördliche Perihelpunkte dasselbe zu erwarten, d. h. man sieht dort von den Kometen mit stark südlichen Perihelbreiten hauptsächlich diejenigen, welche mit größeren, und am wenigsten die, welche mit ganz kleinen Periheldistanzen verbunden sind, von den Kometen mit stark nördlichen Perihelbreiten hauptsächlich diejenigen, welche mit ganz kleinen, und am wenigsten die, welche mit größeren Periheldistanzen verbunden sind.

Es sind also die zwei ersten Beziehungen eine Folge des Standpunktes der meisten Kometenentdecker unter höheren, und zwar bis jetzt zumeist nördlichen geographischen Breiten; die dritte dagegen ist von der Erdhemisphäre unabhängig und wäre auch bei Kometenentdeckungen in den Äquatorgegenden zu erwarten.

Die zweite und dritte dieser Beziehungen können damit begründet werden, dass die Kometen desto leichter sichtbar werden, je größer die Helligkeit ist, die sie für uns erlangen, und dass diese Helligkeit desto größer wird, je mehr die Zeit

der Erdnähe mit der Zeit des Periheldurchganges zusammentrifft, während die erste, sich entgegengesetzt verhaltende Beziehung dadurch entsteht, dass dieser Helligkeitssatz in seiner zweiten Hälfte auf Kometen mit kleinen Periheldistanzen keine Anwendung hat, indem diese Kometen nicht im Perihel, sondern nur weit vom Perihel in die Erdnähe kommen und daher auch meistens nur weit vom Perihel beobachtet werden können.

Wenngleich diese Beziehungen zwischen den heliocentrischen Perihelbreiten b und den Periheldistanzen q, insbesondere die erste und dritte, erst in einer längeren Reihe von Kometen zu erkennen sind und bei weitem nicht so auffällig hervortreten wie die zwischen den heliocentrischen Perihellängen l und den Perihelzeiten T vorhandene Beziehung, welche in drei meiner Abhandlungen[1] von verschiedenen Gesichtspunkten aus dargelegt ist und darin besteht, dass unter den bekannten Kometen stets diejenigen überwiegen, bei denen die Differenz zwischen der heliocentrischen Perihellänge l und der zur Perihelzeit T gehörenden heliocentrischen Länge der Erde $L \pm 180°$ klein ist, so können sie dieser bestimmt ausgesprochenen Beziehung dennoch als eine wesentliche Ergänzung an die Seite gestellt werden, und zwar nicht nur darum, weil es überhaupt nothwendig erscheint, dass nach den Beziehungen der Perihellängen l auch Beziehungen der Perihelbreiten b zur Untersuchung gelangen, sondern auch darum, weil die hier dargelegten Beziehungen eine Folge desselben Satzes sind, welcher der soeben citierten Perihelregel zugrunde liegt, nämlich dass die Kometen desto leichter sichtbar werden, je größer die Helligkeit und je günstiger die Stellung ist, die sie für uns erreichen.

[1] »Über die Richtungen der großen Axen der Kometenbahnen«, »Über den scheinbaren Zusammenhang der heliocentrischen Perihellänge mit der Perihelzeit der Kometen«, »Über die Unsichtbarkeit von Kometen für den Äquator und für höhere geographische Breiten«; diese Sitzungsber., Bd. 94, beziehungsweise 99 und 109.

Über die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für bewegte Körper

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1902.)

Bei der Ableitung der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in bewegten Körpern kann man bekanntlich von zwei verschiedenen Annahmen ausgehen. Die erste, nach welcher der Äther die Bewegung der ponderablen Materie mitmacht, liegt der Hertz'schen Theorie zugrunde; sie führt auf entschiedenen Widerspruch mit der Erfahrung. Von der entgegengesetzten Annahme, eines ruhenden Äthers, ausgehend, hat H. A. Lorentz[1] Gleichungen abgeleitet, welche fast in allen Punkten der Erfahrung genügen.[2]

Eine weitere Annahme der Theorie von Lorentz ist, dass alle wahre Elektricität an »Ionen« gebunden ist, welche ihrerseits die Bewegung der Materie mitmachen. Im Ion ist div $\mathfrak{d} \gtrless 0$, wenn $\mathfrak{d}$ die dielektrische Verschiebung im Äther ist. Denkt man sich unter $\mathfrak{d}$ eine Verschiebung im gewöhnlichen,

[1] Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895.

[2] Das Ergebnis des Versuches von Michelson und Morley lässt sich wohl (ohne weitere Hilfshypothese) kaum aus der Annahme eines ruhenden Äthers erklären. Die Gleichungen von Cohn (Livre Jubilaire dedié à H. A. Lorentz; Göttinger Nachrichten 1901) sind ja als der Ausdruck aller bisher gemachten Erfahrungen hingestellt, nicht aber aus irgendwelchen Annahmen abgeleitet.

geometrischen Sinne, so ist also im Ion ein (positiver oder negativer) Überschuss von Äther über die Umgebung enthalten. Dieser Überschuss nimmt also an der Bewegung der Materie theil. Der ganze Äther ruht also auch nach der Lorentz'schen Theorie nicht, sondern nur der einem vollständigen Gleichgewichtszustande entsprechende Theil desselben.

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die Grundgleichungen des Elektromagnetismus in bewegten Körpern ohne Annahme von Ionen abzuleiten; das Resultat ist im wesentlichen mit den Lorentz'schen Gleichungen identisch. Der Gedankengang ist ganz analog dem, welchen Boltzmann (Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes, II. Theil) bei seiner Ableitung der Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper eingeschlagen hat. Die Modification, welche dabei in Anbetracht der Bewegung der Materie eingeführt werden musste, beruht auf der Annahme, dass der Äther des freien Weltraumes die Materie durchdringt und an ihrer Bewegung nicht theilnimmt, dass aber die Veränderung des Äthers, welche den Unterschied der elektrischen Erscheinungen in Äther und Materie bedingt, mit der Materie fortschreitet. Die folgenden Ausführungen werden den Sinn dieser Unterscheidung klarer hervortreten lassen.

Eine ähnliche Grundauffassung, aber ganz andere Durchführung zeigt eine Arbeit von Reiff.[1] Dieselbe fußt auf der Helmholtz'schen Theorie und führt zum richtigen Ausdruck des sogenannten Fresnel'schen Fortführungscoefficienten. Weitere Consequenzen sind jedoch im Widerspruch mit der Erfahrung.[2]

Bevor ich zum eigentlichen Thema dieser Arbeit übergehe, möchte ich mir erlauben, ein rein mechanisches Modell zu beschreiben, dessen mathematische Behandlung den später vorzutragenden Betrachtungen sehr ähnlich ist. Speciell erläutert das Modell den Fresnel'schen Fortführungscoefficienten, dessen richtige Darstellung wohl eines der wichtigsten Postulate jeglicher Theorie der Optik in bewegten Körpern ist.

[1] Wied. Ann., 50, S. 361; 1893.

[2] Poincaré, Electricité et Optique, 2de édition, 1901, p. 597 ff.

1. Mechanisches Modell.

Wir denken uns einen Kautschukschlauch, der zwischen zwei fixen Punkten gespannt, rein transversale Schwingungen ausführt. Ist σ_1 seine Masse per Längeneinheit, ν eine Constante; fällt ferner seine Ruhelage mit der X-Axe zusammen, während y die dazu senkrechte Elongation ist, so besitzt die Längeneinheit des Schlauches die potentielle Energie $\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ und die lebendige Kraft $\frac{\sigma_1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$.[1] Ist der Schlauch mit Flüssigkeit gefüllt, so bleibt die potentielle Energie ungeändert. Die kinetische wird jedoch $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$, wenn σ_2 die Flüssigkeitsmasse ist, welche sich in der Längeneinheit des Schlauches befindet. Hieraus lässt sich etwa mit Hilfe des Hamilton'schen Princips leicht die Bewegungsgleichung, die »Differentialgleichung der schwingenden Saite« ableiten. Physikalisch entspricht derselben bekanntlich eine Wellenbewegung, welche mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\nu}{\sigma_1}} \tag{1}$$

im ersten Falle, im zweiten Falle mit der Geschwindigkeit

$$c' = \sqrt{\frac{\nu}{\sigma_1 + \sigma_2}} \tag{2}$$

nach jeder Richtung der X-Axe fortschreitet.

Nun wollen wir annehmen, dass die Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit ξ in der Richtung der X-Axe strömt (wobei sie natürlich außerdem noch die Bewegung des Schlauches mitzumachen gezwungen ist). Von jeglicher Reibung sehen wir ab. Die potentielle Energie bleibt auch jetzt ungeändert, ebenso der Theil der kinetischen Energie, welcher von der Masse des Schlauches herrührt, nämlich $\frac{\sigma_1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$; die

[1] Siehe etwa Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen, I, S. 184.

lebendige Kraft der Flüssigkeit ist aber jetzt, wie eine leichte Überlegung zeigt, $\frac{\sigma_2}{2}\left[\xi^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$, wenn wir zur Kürze das schon aus der Hydrodynamik bekannte Symbol:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

verwenden. Das Hamilton'sche Princip liefert jetzt:

$$0=\delta\int_{t_0}^{t_1}\partial t(T-V)=\delta\int_{t_0}^{t_1}\partial t\int_0^l dx\left[\frac{\sigma_1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma_2}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{\sigma_2}{2}\xi^2-\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right].$$

Hierin ist l die Länge des Schlauches. Offenbar ist es consequenter, hier das Zeitdifferential mit ∂t zu bezeichnen. ξ soll unvariiert bleiben, das Glied $\frac{\sigma_2}{2}\xi^2$ kann also weggelassen werden. Setzen wir für $\frac{d}{dt}$ seinen Wert aus (3) ein, führen die Variation nach y durch und vertauschen gleich die Reihenfolge von Variation und Differentiation, so erhalten wir

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\partial t\int_0^l dx\left[\sigma_1\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial\delta y}{\partial t}+\sigma_2\frac{dy}{dt}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial t}+\xi\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)-\nu\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right].$$

Integriert man partiell nach der Zeit, respective nach x, so erhält man nach dem gewöhnlichen Gedankengang, unter der Voraussetzung, dass δy an den Grenzen verschwindet, die Bewegungsgleichung:

$$\sigma_1\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\sigma_2\frac{d^2 y}{dt^2}=\nu\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

oder

$$(\sigma_1+\sigma_2)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\sigma_2\xi\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}+(\sigma_2\xi^2-\nu)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist:

$$y=f(x+\gamma_1 t)+g(x+\gamma_2 t),$$

worin f und g zwei willkürliche Functionen sind und γ_1 und γ_2 sich als Wurzeln einer quadratischen Gleichung ergeben; und zwar ist:

$$\begin{matrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{matrix} = -\frac{\sigma_2 \xi}{\sigma_1+\sigma_2} \pm \sqrt{\frac{\nu(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_1\sigma_2\xi^2}{(\sigma_1+\sigma_2)^2}}.$$

Wir nehmen nun an, dass ξ gegen die durch Gleichung (1) und (2) eingeführten Größen c und c' klein sei, so dass wir die höheren Potenzen von $\frac{\xi}{c}$ und $\frac{\xi}{c'}$ vernachlässigen können. Dann ist auch

$$\xi^2 \text{ gegen } \nu\frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}$$

zu vernachlässigen und wir erhalten annähernd:

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\nu}{\sigma_1+\sigma_2}} - \xi\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} = c' - \xi\left(1-\left(\frac{c'}{c}\right)^2\right)$$
$$= c' - \xi\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\gamma_2 = -\sqrt{\frac{\nu}{\sigma_1+\sigma_2}} - \xi\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} = -c' - \xi\left(1-\left(\frac{c'}{c}\right)^2\right)$$
$$= -c' - \xi\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

wenn wir noch der Analogie mit den optischen Erscheinungen zu Liebe das Verhältnis $\frac{c'}{c} = \frac{1}{n}$ setzen.

Die Geschwindigkeit, mit der sich jetzt die Wellen längs des Schlauches fortpflanzen, ist also eine solche, als ob die strömende Flüssigkeit dem Schlauche den Bruchtheil $1-\frac{1}{n^2}$ ihrer eigenen Geschwindigkeit mittheilen würde.

Die Analogie mit der Optik ist also eine ziemlich befriedigende, wenn man den (als Ganzes) ruhenden Schlauch mit dem Äther, die strömende Flüssigkeit mit der bewegten Materie vergleicht. Es ist ja nach den Versuchen von Fizeau und Michelson und Morley, die Geschwindigkeit des Lichtes im

Wasser, das mit der Geschwindigkeit ξ strömt, in der Strömungsrichtung durch $-\gamma_2$, respective γ_1 gegeben, wenn man unter c' die Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Wasser, unter n den Brechungsexponenten des Wassers versteht.[1]

2. Ableitung der Grundgleichungen.

Nach der in der Einleitung erwähnten Theorie von Boltzmann haben wir uns den jeweiligen Zustand des Äthers durch den Wert des »tonischen« Vectors (Momentenvector) $\mathfrak{A}$ gegeben zu denken; seine Componenten seien F, G, H. Ist $\frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2}$ die Dichte des Äthers, so ist seine kinetische Energie per Volumseinheit:

$$\frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^2\right]=\frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2. \qquad (4)$$

Die potentielle Energie hat den Wert:

$$\frac{1}{8\pi}(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2,$$

worin

$$a=-\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z} \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$\mathfrak{B}=-\text{curl}\,\mathfrak{A} \qquad \text{I)}$$

ist, wenn wir den Vector, dessen Componenten a, b, c sind, mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen. An Stellen, wo ruhende ponderable Materie vorhanden ist, erscheint die lebendige Kraft noch um den Addenden:

$$\frac{\varepsilon}{8\pi\mathfrak{B}^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2$$

vermehrt. Wir können uns dies entweder so deuten, dass die Dichte des Äthers in der Materie eine größere ist, oder man könnte sich auch denken, dass ein Theil der Materie, von der Masse $\frac{\varepsilon}{8\pi\mathfrak{B}^2}$ per Volumseinheit gezwungen ist, die tonische

[1] Siehe etwa Drude, Optik, S. 426 ff.

Bewegung des Äthers mitzumachen. Ferner ist noch der früher angegebene Wert der potentiellen Energie in der Materie mit dem Factor $\frac{1}{\mu}$ zu multiplicieren. Die gesammte elektromagnetische Energie ist also jetzt per Volumseinheit:

$$\frac{1+\varepsilon}{8\pi\mathfrak{V}^2}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2.$$

Offenbar ist $1+\varepsilon$ gleich der (elektrostatisch gemessenen) Dielektricitätsconstante oder, wenn $\mu=1$ ist, gleich dem Quadrat des Brechungsindex.

Wie haben wir nun diese Ausdrücke zu modificieren, wenn die Materie nicht ruht, sondern sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$, deren Componenten ξ, η, ζ seien, bewegt? Wenn wir an der Analogie mit dem mechanischen Modell festhalten, erkennen wir einmal, dass der Wert der potentiellen Energie ungeändert bleiben muss. Dieselbe ist ja nur durch den momentanen Wert des Vectors $\mathfrak{A}$ bestimmt, nicht aber durch seine Differentialquotienten nach der Zeit. Ebensowenig kann der Bestandtheil (4) der lebendigen Kraft geändert werden, denn derselbe rührt von der Bewegung des reinen Äthers her, der an der Bewegung der Materie gar nicht theilnimmt.

Zu ändern ist bloß der Ausdruck (5). Die Masse — sei es des Äthers oder der Materie —, welcher dieser Bestandtheil der lebendigen Kraft entspricht, hat jetzt erstens die sichtbare Bewegung der Materie mitzumachen, zweitens aber eine solche tonische Bewegung auszuführen, dass ihre Verschiebung stets durch den am jeweiligen Ort momentan herrschenden Wert des Vectors $\mathfrak{A}$ gegeben ist. Die tonische Bewegung geht also für diese Masse mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}+\xi\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}+\eta\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z}=\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \qquad (6)$$

vor sich. $\frac{d}{dt}$ bedeutet offenbar eine Differentiation bei constanten »relativen« Coordinaten, wenn wir unter einem relativen Coordinatensystem ein System verstehen, das mit der Materie fortschreitet; es entspricht dies der Geschwindigkeit, welche ein

mit der Materie fortschreitender Beobachter wahrnimmt. Wir haben also jetzt an Stelle von (5) den Ausdruck

$$\frac{\varepsilon}{8\pi\mathfrak{V}^2}\left[\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)^2+\mathfrak{p}^2\right]$$

zu setzen. Die gesammte Energie der tonischen Bewegung hat also jetzt die Dichte:

$$\frac{1}{8\pi\mathfrak{V}^2}\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2+\varepsilon\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2. \tag{7}$$

Daraus leiten wir wieder mit Hilfe des Hamilton'schen Princips die Bewegungsgleichungen ab. $\mathfrak{p}$ lassen wir unvariiert; dann können wir von der lebendigen Kraft der sichtbaren Bewegung absehen. Wir erhalten also:

$$0=\delta\int_{t_0}^{t_1}\partial t\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\left\{\frac{1}{8\pi\mathfrak{V}^2}\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2+\varepsilon\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)^2\right]-\frac{1}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2\right\}.$$

Dabei bedeutet $\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau$ eine Integration über den ganzen Raum. Hierin setzen wir für $\frac{d}{dt}$ und $\mathfrak{B}$ ihren Wert aus (6) und (I) ein, führen die Variation durch und vertauschen gleich die Reihenfolge von Variation und Differentiation. So erhalten wir:

$$\begin{aligned}0=\int_{t_0}^{t_1}\partial t\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\Bigg\{&\frac{1}{4\pi\mathfrak{V}^2}\Bigg[\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial\delta F}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial\delta G}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial\delta H}{\partial t}\\
&+\varepsilon\frac{dF}{dt}\left(\frac{\partial\delta F}{\partial t}+\xi\frac{\partial\delta F}{\partial x}+\eta\frac{\partial\delta F}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\delta F}{\partial z}\right)\\
&+\varepsilon\frac{dG}{dt}\left(\frac{\partial\delta G}{\partial t}+\xi\frac{\partial\delta G}{\partial x}+\eta\frac{\partial\delta G}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\delta G}{\partial z}\right)\\
&+\varepsilon\frac{dH}{dt}\left(\frac{\partial\delta H}{\partial t}+\xi\frac{\partial\delta H}{\partial x}+\eta\frac{\partial\delta H}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\delta H}{\partial z}\right)\Bigg]\\
&-\frac{1}{4\pi\mu}\Bigg[a\left(\frac{\partial\delta G}{\partial z}-\frac{\partial\delta H}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial\delta H}{\partial x}-\frac{\partial\delta F}{\partial z}\right)\\
&+c\left(\frac{\partial\delta F}{\partial y}-\frac{\partial\delta G}{\partial x}\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Hierin ist wieder partiell zu integrieren. Setzen wir noch voraus, dass die Variationen an den Grenzen verschwinden, so haben wir die Factoren von δF, δG, δH einzeln gleich Null zu setzen und erhalten so, wenn wir wieder die abgekürzte Bezeichnungsweise (6) benützen und noch den Vector

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\mathfrak{B} \tag{8}$$

mit den Componenten α, β, γ einführen:

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{d^2 F}{dt^2}\right) = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \quad \text{u. s. w.,}$$

oder in einer Gleichung:

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2}\right) = \operatorname{curl}\mathfrak{H}. \tag{II}$$

Die Gleichungen (I) und (II) sind die Grundlagen der hier vorzutragenden Theorie. Bei ihrer Ableitung wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass $\mathfrak{p}$ von den Coordinaten unabhängig sei. (Die Abhängigkeit von der Zeit macht keinen Unterschied.) Hängt $\mathfrak{p}$ von den Coordinaten ab, so erhalten wir statt (II):

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} + \varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{p}\right) = \operatorname{curl}\mathfrak{H}.^{1} \tag{II'}$$

Den Fällen, wo div $\mathfrak{p}$ von Null verschieden ist, kommt vorläufig keine Bedeutung zu; wir werden uns daher stets an (II) halten.

Eine weitere Voraussetzung, die der Ableitung der Gleichungen (II) und (II′) zugrunde lag, ist das Princip der

---

[1] Außer diesen Symbolen div und curl werden wir noch die folgenden benützen: Vectorproduct aus zwei Vectoren $[\mathfrak{A}.\mathfrak{B}]$ oder $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$; scalares Product $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, eventuell $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$; Operator ∇^2; Operator ∇, welcher, vor einen Scalar g gesetzt, einen Vector mit den Componenten $\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dg}{dz}$ gibt (Gradient). Über all' diese Bezeichnungsweisen siehe etwa Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität, Leipzig 1894; erster Abschnitt.

Continuität der Übergänge. Die Größen ε und μ als stetig veränderlich anzusehen, ist man gewöhnt. Doch auch von der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ kann dasselbe vorausgesetzt werden. Bewegen sich zwei feste Körper mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander vorbei, so kann man immer voraussetzen, dass etwa eine Luftschichte an der Berührungsfläche den stetigen Übergang der Geschwindigkeit vermittelt. Grenzt jedoch ein bewegter Körper an den freien Äther, so ist die Sache noch einfacher; denn im Äther können wir formell ξ, η, ζ ganz beliebige Werte ertheilen, hier ist ja die Dichte der Materie Null und es ist daher ganz gleichgiltig, mit welcher Geschwindigkeit bewegt wir sie supponieren.

3. Der Fresnel'sche Fortführungscoefficient.

Da sich die Geschwindigkeit, mit welcher eine elektromagnetische Störung in einem bewegten Körper fortschreitet, sofort aus den Gleichungen (I) und (II) ergibt, wollen wir ihren Wert gleich jetzt berechnen. Ist μ constant, so liefert die Combination von (I) und (II):

$$\frac{\mu}{\mathfrak{V}^2}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{d^2 \mathfrak{A}}{d t^2}\right) = \nabla^2 \mathfrak{A} - \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A}. \tag{9}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist, wenn wir (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $\eta = \zeta = 0$ setzen und ξ constant annehmen:

$$F = H = 0; \quad G = f(x + ct);$$

setzt man dies in die drei Gleichungen ein, welche (9) repräsentiert, so erhält man außer zwei Identitäten:

$$\frac{\mu}{\mathfrak{V}^2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(1+\varepsilon) + 2\varepsilon\xi \frac{\partial^2 G}{\partial x \, \partial t} + \varepsilon \xi^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2};$$

setzt man noch für G seinen Wert ein, so erhält man für c die quadratische Gleichung:

$$\frac{\mu(1+\varepsilon)}{\mathfrak{V}^2} c^2 + 2 c \varepsilon \frac{\mu \xi}{\mathfrak{V}^2} = 1 - \varepsilon \mu \frac{\xi^2}{\mathfrak{V}^2}.$$

Setzen wir hierin (entsprechend durchsichtigen Körpern) $\mu = 1$ und vernachlässigen die zweite Potenz von $\frac{\xi}{\mathfrak{V}}$, so erhalten wir

$$c = \pm \frac{\mathfrak{V}}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{\xi\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

oder wenn wir $1+\varepsilon = n^2$ und $\frac{\mathfrak{V}}{n} = \mathfrak{V}'$ setzen:

$$c = \pm \mathfrak{V}' - \xi\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

in Übereinstimmung mit den früher erwähnten Versuchen und der Annahme von Fresnel.

4. Folgerungen aus den Grundgleichungen.

Im folgenden werden wir voraussetzen, dass $\mathfrak{p}$ überall constant sei; es ist dann zweckmäßig, den weiteren Betrachtungen ein Coordinatensystem zugrunde zu legen, das mit der Materie fortschreitet. Dazu haben wir aus (II) das Symbol $\frac{\partial}{\partial t}$ mittels (6) zu eliminieren. Gleichung (II) lautet dann:

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left\{(1+\varepsilon)\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} - 2\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right.$$
$$\left. + \left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \mathfrak{A}\right\} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}. \quad (10)$$

Wir können jetzt ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\eta = \zeta = 0$ setzen; ferner nehmen wir an Gleichung (10) die Operation div vor. Wir erhalten, wenn wir zur Kürze

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \sigma$$

setzen:

$$0 = (1+\varepsilon)\frac{d^2\sigma}{dt^2} - 2\xi\frac{d^2\sigma}{dx\,dt} + \xi^2\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial x}\frac{d^2F}{dt^2}$$
$$+ \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial y}\frac{d^2G}{dt^2} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial z}\frac{d^2H}{dt^2}. \quad (11)$$

Betrachten wir erst einen homogenen Körper, wo also ε constant ist, so fallen die drei letzten Glieder weg, und es ist leicht, das allgemeine Integral von (11) aufzustellen. Dasselbe setzt sich additiv aus Gliedern von der Form

$$e^{\pm\lambda\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\xi t} \cdot \frac{\sin}{\cos}\lambda\left(\frac{\xi}{1+\varepsilon}t+x\right)$$

zusammen, wo λ ganz beliebig ist; und zwar sind leicht Anfangsbedingungen denkbar, welche auch das Vorkommen positiver e-Potenzen im obigen Ausdrucke nöthig machen. Solche Glieder würden aber auf unendlich große Werte von σ führen. Der einzige Wert von σ, welcher physikalisch denkbar ist, ergibt sich also für $\lambda = 0$, ist also eine reine Constante, die wir gleich Null annehmen. Es ist also in einem homogenen Körper (dessen Theile sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen) stets

$$\sigma = 0 \tag{12}$$

(In einer homogenen Flüssigkeit, deren Theile verschiedene Geschwindigkeiten haben, würde dies nicht gelten.)

Wenn ε variabel ist, lässt sich (11) nicht so leicht integrieren. Eine andere Betrachtung führt uns jedoch auch zu einem wichtigen Resultat. Wir betrachten einen Raum, wo ε (stetig) variabel ist, nehmen aber an, dass derselbe von einem homogenen Körper umgeben sei, dass sich also um ihn eine geschlossene Fläche legen lässt, auf welcher Gleichung (12) gilt. Diese Fläche kann im übrigen beliebig nahe an dem betrachteten Raume liegen.

Nun integrieren wir Gleichung (11) über den von dieser Fläche begrenzten Raum. Wir bilden also:

$$0 = \int d\tau \left\{(1+\varepsilon)\frac{d^2\sigma}{dt^2} - 2\xi\frac{d^2\sigma}{dx\,dt} + \xi^2\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial x}\frac{d^2F}{dt^2} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial y}\frac{d^2G}{dt^2} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial z}\frac{d^2H}{dt^2}\right\}.$$

Das zweite und dritte Glied innerhalb des Integralzeichens kann sofort nach x integriert werden; da σ an den Grenzen

verschwindet, liefert jedes Null. Die drei letzten Glieder integrieren wir partiell nach x, y, respective z; das hiebei übrigbleibende Raumintegral hebt sich gegen das erste Glied; es bleibt also bloß das Oberflächenintegral stehen und wir erhalten:

$$0 = \int dS(1+\varepsilon)\left[\cos(nx)\frac{d^2F}{dt^2} + \cos(ny)\frac{d^2G}{dt^2} + \cos(nz)\frac{d^2H}{dt^2}\right]$$

oder

$$0 = \int dS(1+\varepsilon)\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2}\cos(\mathfrak{A}n)$$

oder weiters durch Integration nach der Zeit:

$$\int dS(1+\varepsilon)\frac{d\mathfrak{A}_n}{dt} = \text{const.} \tag{13}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{A}_n$ die Componente von $\mathfrak{A}$ nach der Normalen n des Flächenelementes dS.

5. Umformung der Grundgleichungen. Physikalische Interpretation der Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Den Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kam bisher eine rein mechanische Bedeutung zu. Sie charakterisieren eine verborgene Bewegung, von der man sich nach Maxwell und Boltzmann auch ein Bild machen kann. Um den Übergang zu den Gleichungen der Elektricitätslehre durchzuführen, müssen wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit bestimmten Vectoren des elektromagnetischen Feldes identificieren. Darin liegt dann die Hypothese der Theorie. Wir müssen hier jedenfalls so vorgehen, dass wir für $\mathfrak{p} = 0$ die Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper erhalten, während die Gleichungen, welche sich für bewegte Körper ergeben werden, den hier gemachten Erfahrungen genügen müssen. Die letztere Aufgabe ist natürlich ungemein dadurch erleichtert, dass wir in den Lorentz'schen Gleichungen eine vollständige und überaus einfache Beschreibung fast aller hier experimentell erhaltenen Resultate haben. Auf diese Gleichungen wollen wir also lossteuern.

Die Gleichung (II) schreiben wir wieder in der Form (10):

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left[(1+\varepsilon)\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2}-2\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right.$$
$$\left.+\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\mathfrak{A}\right]=\operatorname{curl}\mathfrak{H}.$$

berücksichtigen wir (I), so sehen wir, dass auf der rechten Seite dieser Gleichung zweite Differentialquotienten von $\mathfrak{A}$ nach den Coordinaten stehen. Gegen diese wollen wir die auf der linken Seite befindlichen gleichgebauten Glieder vernachlässigen, welche mit $\frac{\xi^2}{\mathfrak{V}^2}$ oder $\frac{\xi\eta}{\mathfrak{V}^2}$ oder dergleichen multipliciert sind. Wir vernachlässigen also die Glieder »höherer Ordnung«. Dadurch wird die obige Gleichung:

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{d}{dt}\left[(1+\varepsilon)\frac{d\mathfrak{A}}{dt}-2\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{A}\right]=\operatorname{curl}\mathfrak{H}. \quad (14)$$

(Natürlich gilt dies nur solange, als nicht etwa die rechte Seite für sich verschwindet. Man dürfte z. B. nicht ohneweiters an dieser Gleichung die Operation div vornehmen.) Statt (14) können wir auch schreiben:

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)=\operatorname{curl}\mathfrak{H}+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \quad (15)$$

Benützen wir nun die bekannte Identität:

$$\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{A}=-\operatorname{curl}[\mathfrak{p}\mathfrak{A}]+\mathfrak{p}\operatorname{div}\mathfrak{A}, \quad (16)$$

so wird die obige Gleichung für einen homogenen Körper, wonach (12) stets $\operatorname{div}\mathfrak{A}=\sigma=0$ ist,

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)=\operatorname{curl}\left(\mathfrak{H}-\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left[\mathfrak{p}\,\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right]\right). \quad (17)$$

Wir setzen nun

$$\varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}=4\pi\mathfrak{V}^2\mathfrak{D} \quad (18)$$

und

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\left[\mathfrak{p} \cdot \frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right]. \tag{19}$$

Ferner führen wir noch einen Vector $\mathfrak{E}$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \nabla\left(\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{A}}{1+\varepsilon}\right) \tag{20}$$

ein. Da die Operation curl ∇ stets Null ergibt, ist:

$$\text{curl } \mathfrak{E} = \text{curl} \frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \tag{21}$$

Benützen wir die Identität:

$$\nabla(\mathfrak{p}\mathfrak{A}) = \left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{A} + [\mathfrak{p}\,.\,\text{curl } \mathfrak{A}],^{1} \tag{22}$$

so können wir an Stelle von (20) (im homogenen Körper) schreiben:

$$(1+\varepsilon)\mathfrak{E} = \varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} - [\mathfrak{p}\,.\,\text{curl } \mathfrak{A}].$$

Berücksichtigen wir (I) und (18), so wird

$$(1+\varepsilon)\mathfrak{E} = 4\pi\mathfrak{V}^2\mathfrak{D} + \mu[\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{H}].$$

Endlich bemerken wir noch, dass wir in (19) mit Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung statt $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ auch $\mathfrak{E}$ setzen können.

Schreiben wir nun zur besseren Übersicht alle Gleichungen zusammen auf, so haben wir also:

$$\text{div } \mathfrak{D} = 0 \tag{23}$$

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 \tag{24}$$

---

[1] Diese, sowie die Identität (16) finden sich etwa bei Föppl, l. c. S. 64, Gleichung (83) und (85); dort steht an Stelle von $\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)$ das Symbol $(\mathfrak{p}\nabla)$.

$$4\pi\frac{d\mathfrak{D}}{dt}=\text{curl }\mathfrak{H}' \tag{25}$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt}=-\text{curl }\mathfrak{E} \tag{26}$$

$$(1+\varepsilon)\mathfrak{E}=4\pi\mathfrak{V}^2\mathfrak{D}+\mu[\mathfrak{p}.\mathfrak{H}] \tag{27}$$

$$\mu\mathfrak{H}'=\mathfrak{B}-\frac{\mu}{\mathfrak{V}^2}[\mathfrak{p}.\mathfrak{E}]. \tag{28}$$

Von diesen Gleichungen ergibt sich (23) sofort aus (12), (24) aus (I); (25) folgt aus (17), (18) und (19); (26) aus Differentiation von (I) nach der Zeit und (21); (28) aus Multiplication von (19) mit μ und (8).

Wesentlich ist, dass diese Gleichungen nur in homogenen Körpern gelten (in denen $\mathfrak{p}$ constant ist). Bei Ableitung der Grenzbedingungen sind sie nicht ohneweiters zu benützen. (Wir fassen die Grenzschichte wieder als eine dünne Schichte raschen, aber continuierlichen Überganges auf.)

Innerhalb der Grenzschichte darf in (16) nicht mehr div $\mathfrak{A}=0$ gesetzt werden; wir erhalten also statt (17):

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}-\mathfrak{p}\text{ div }\mathfrak{A}\right)=\text{curl }\mathfrak{H}'; \tag{17*}$$

setzen wir also

$$\varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}-\mathfrak{p}\text{ div }\mathfrak{A}=4\pi\mathfrak{V}^2\mathfrak{D}^*, \tag{18*}$$

so gelten in der Grenzschichte die Gleichungen (24) und (26) — dieselben sind ja ohne Voraussetzung der Homogenität abgeleitet — und statt (25)

$$4\pi\frac{d\mathfrak{D}^*}{dt}=\text{curl }\mathfrak{H}. \tag{25*}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Größen $\mathfrak{D}^*_h$ und $\mathfrak{B}_h$ in der Grenzschichte endlich bleiben, erhält man daraus die Grenzbedingung, dass beim Übergange von einem Medium ins andere

$$\mathfrak{E}_h,\ \mathfrak{H}'_h,\ \mathfrak{B}_n,\ \frac{d\mathfrak{D}^*_n}{dt} \tag{29}$$

continuierlich bleiben. (Die Indices h und n bezeichnen die Componenten des betreffenden Vectors parallel und senkrecht zur Grenzfläche.)

Die letzte dieser Grenzbedingungen haben wir hier durch (25*), auf die zur Grenzfläche senkrechte Componente angewendet und durch Berücksichtigung der Continuität von $\mathfrak{H}'_h$ erhalten.

Es verlohnt sich jedoch zu zeigen, dass wir auch mittels der Methode des §. 4 zum selben Resultate gelangen können.

Wir schreiben (18*) in der Form:

$$4\pi\mathfrak{V}^2\mathfrak{D}^* = (1+\varepsilon)\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{A} - \mathfrak{p} \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

und nehmen an dieser Gleichung die Operation div vor; so erhalten wir:

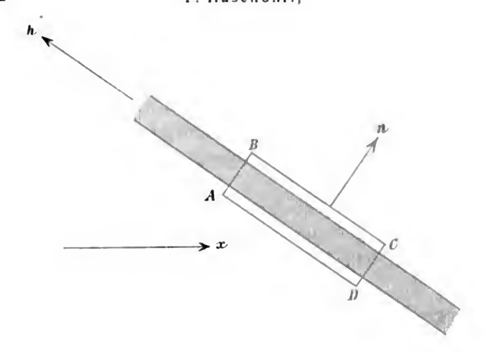
$$4\pi\mathfrak{V}^2 \operatorname{div} \mathfrak{D}^* = (1+\varepsilon)\frac{d\sigma}{dt} - 2\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\sigma$$
$$+ \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial x}\frac{dF}{dt} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial y}\frac{dG}{dt} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial z}\frac{dH}{dt}.$$

(Hierin ist wieder div $\mathfrak{A} = \sigma$ gesetzt.) Wir können wieder ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\eta = \zeta = 0$ setzen und erhalten mit Rücksicht auf die streng giltige Gleichung (11):

$$4\pi\mathfrak{V}^2\frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{D}^* = -\xi^2\frac{d^2\sigma}{dx^2}. \qquad (30)$$

Wir betrachten nun einen unendlich kleinen Cylinder *ABCD*, welcher in der durch Fig. 1 gekennzeichneten Lage zur schraffiert gezeichneten Grenzschichte liegt.[1] Dabei muss die Möglichkeit vorausgesetzt werden, diesen Cylinder so zu construieren, dass seine Mantelfläche von höherer Ordnung unendlich klein sei als die Basisflächen. Über diesen Cylinder integrieren wir nun Gleichung (30) und erhalten:

[1] Vergl. etwa Boltzmann, Vorlesungen, II, §. 5, oder H. A. Lorentz, l. c. S. 59.



$$4\pi\mathfrak{B}^2\frac{d}{dt}\int \operatorname{div}\mathfrak{D}^* d\tau = -\xi^2\int\frac{d^2\sigma}{dx^2}d\tau$$

$$= -\xi^2\int\cos(\nu x)\frac{d\sigma}{dx}dS,$$

worin die Normale zum Flächenelemente der Cylinderoberfläche dS jetzt zur Unterscheidung mit ν bezeichnet ist. An den Basisflächen ist σ und $\frac{d\sigma}{dx}$ gleich Null; das Oberflächenintegral ist also bloß über die Mantelfläche zu erstrecken. (Dasselbe darf aber nicht ohneweiters vernachlässigt werden, weil $\frac{d\sigma}{dx}$ dortselbst sehr groß sein kann.) An Stelle von $\int dS$ können wir setzen:

$$\rho\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\lambda}d\lambda,$$

wenn ρ der Radius, λ die Höhe des Cylinders ist und ϑ irgend einen Azimuthalwinkel bedeutet. Dann wird das Oberflächenintegral:

$$= \rho\int_0^{2\pi}d\vartheta\cos(\nu x)\int_0^{\lambda}d\lambda\frac{d\sigma}{dx}.$$

Wir können nun

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\sigma}{d\lambda}\cos(x\lambda) + \frac{d\sigma}{dh}\cos(xh)$$

setzen, wenn h eine Richtung in der Trennungsfläche (also senkrecht zu λ) ist. Wir haben allen Grund anzunehmen, dass $\frac{d\sigma}{dh}$ endlich bleibt, also gibt das Integral von $\frac{d\sigma}{dh}\cos(xh)\cos(\nu x)$ über die von höherer Ordnung unendlich kleine Mantelfläche des Cylinders erstreckt unendlich Kleines höherer Ordnung, was wir vernachlässigen. Es wird also das Oberflächenintegral:

$$= \rho\int_0^{2\pi} d\vartheta \cos(\nu x)\cos(\lambda x)\int_0^{\lambda} d\lambda\,\frac{d\sigma}{d\lambda}\,.$$

Da nun σ an den Grenzen des zweiten Integrales verschwindet (dieselben liegen ja schon außerhalb der Übergangsschichte), so ist das Integral gleich Null. Wir erhalten also

$$\frac{d}{dt}\int \operatorname{div}\mathfrak{D}^* d\tau = 0, \tag{31}$$

woraus sich sofort unter Voraussetzung, dass $\mathfrak{D}_h^*$ überall endlich bleibt, die Grenzbedingung ableiten lässt, dass $\frac{d}{dt}\,\mathfrak{D}_n^*$ continuierlich ist.

(Der Unterschied mit der gewöhnlichen Ableitung dieser Grenzbedingung, wie sie etwa in der Elektrodynamik ruhender Körper angewendet wird, ist also der, dass wir nicht überall in der Grenzschichte $\frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{D}^* = 0$ haben müssen, wohl aber das Integral dieser Größe über den betrachteten Cylinder verschwindet. Aus der Gleichung (12) dürfte man nicht, so wie hier, eine Grenzbedingung ableiten wollen, da die dazu nöthige Voraussetzung, dass σ und $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ in der Grenzschichte endlich bleiben, nicht erfüllt sein muss.)

Ist der Raum, wo ε variabel ist (ebenso wie in §. 4) ganz von einem homogenen Körper umgeben, so liefert dieselbe Betrachtung sofort auch hier

$$\frac{d}{dt}\int d\tau \operatorname{div} \mathfrak{D}^* = 0$$

oder (32)

$$\frac{d}{dt}\int dS \mathfrak{D}_n^* = 0.$$

(Diese Gleichung kann auch aus (13) gewonnen werden.) Die Gleichungen sind unter der Voraussetzung eines constanten $\mathfrak{p}$ abgeleitet; wir können sie aber auch auf einen materiellen Körper anwenden, der sich durch den reinen Äther bewegt, da wir ja nach §. 2 im Äther den Wert von $\mathfrak{p}$ beliebig annehmen, ihm also auch den Wert beilegen können, den es im bewegten Körper hat. Dadurch kommen wir auf ein Princip der Lorentz-schen Theorie, dass ein Ion bei der Bewegung durch den Äther seine Ladung nicht ändert. (Auf die Bewegung eines solchen Körpers durch eine Flüssigkeit könnte man den Satz nicht anwenden. Dieser Fall ist aber auch erfahrungsgemäß infolge des Auftretens der elektromotorischen Kräfte der Reibung nicht so einfach zu behandeln.)

Beschränken wir die Inhomogeneitäten auf die Grenzflächen homogener Körper, so ist (mit Ausnahme der Grenzschichten, deren Inneres sich ohnehin der Beobachtung entzieht) überall:

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}.$$

Es gelten also dann stets die Gleichungen (23) bis (28), wozu die Grenzbedingungen kommen, dass

$$\mathfrak{E}_h, \quad \mathfrak{H}'_h, \quad \mathfrak{B}_n, \quad \frac{d\mathfrak{D}_n}{dt} \tag{33}$$

an der Grenze continuierlich bleiben. Die letzte von ihnen liefert, nach der Zeit integriert:

$$|\mathfrak{D}_n|_1 - |\mathfrak{D}_n|_2 = \text{const.},$$

wobei sich die Indices 1 und 2 auf die beiden Seiten der Grenzfläche beziehen. (Die Constante haben wir später mit der Flächendichte der wahren Elektricität, dividiert durch $\mathfrak{V}^2$, zu identificieren.)

Die Gleichungen (23) bis (28) und (33) werden mit den Gleichungen von Lorentz[1] vollständig identisch, wenn man darin $\mu = 1$ setzt. Wir haben also den Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$ dieselbe Bedeutung beizulegen, welche sie dort haben. (Auf die hier und dort vernachlässigten Glieder höherer Ordnung erstreckt sich die Übereinstimmung durchaus nicht.)

Die von Cohn (l. c.) aufgestellten Gleichungen, welche auch den Fall $\mu \gtrless 1$ berücksichtigen, unterscheiden sich äußerlich von unseren dadurch, dass im zweiten Gliede der rechten Seiten von (27) und (28) der Factor μ fehlt. Dieser Factor bringt auch für uns Unzukömmlichkeiten mit sich. Einmal ist die Lorentz'sche Transformation mit Hilfe der Ortszeit jetzt (in den Grenzbedingungen) nicht durchführbar und, was damit zusammenhängt, würde auch die Fassung der Elektrostatik, die wir gleich behandeln wollen, auf Schwierigkeiten stoßen, da jetzt der Wert von μ in die Grenzbedingungen eingehen würde, was aller Erfahrung widerspricht. Wir haben von Anfang an die Größe μ in den Gleichungen mitgeführt, da dies ganz mühelos geschehen konnte. Jetzt sehen wir aber, dass wir stets $\mu = 1$ setzen müssen. Bei Erklärung gewisser magnetischer Erscheinungen müsste man sich also mit Ampère'schen Molecularströmen oder dergleichen helfen, worauf auch die Lorentz'sche Theorie angewiesen ist.[2] Diese Übereinstimmung der zwei Theorien verdient vielleicht hervorgehoben zu werden. Wir wollen uns also in den Gleichungen (23) bis (28) und (33) stets $\mu = 1$, also auch $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ gesetzt denken, die Gleichungen jedoch nicht noch einmal hinschreiben.

6. Neuer Ausdruck für die elektromagnetische Energie. — Elektrostatik.

Die Dichte der elektromagnetischen Energie ist im bewegten Körper durch (7) gegeben; da wir jetzt überall $\mu = 1$ setzen, hat sie den Wert:

$$\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + \frac{1}{8\pi\mathfrak{V}^2}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)^2\right]. \qquad (34)$$

[1] L. c. S. 76; Gleichung (I*c*) bis (VI*c*) und (VIII*c*).

[2] Vergl. Poincaré, l. c. S. 422.

Anderseits ist nach (18):

$$2\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2 = \frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2}\left[\varepsilon^2\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right].$$

Wenn wir Größen höherer Ordnung vernachlässigen, so ist:

$$\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2 = 2\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\,\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t},$$

also wird

$$2\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2 = \frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2}(\varepsilon+1)\left[\varepsilon\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2\right].$$

Diesen Näherungswert können wir in (34) einsetzen, da $\mathfrak{H}^2$ Glieder enthält, welche bis auf den Factor $\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{B}}\right)^2$ den vernachlässigten gleichwertig sind. Also wird die Dichte der Energie annähernd:

$$\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + 2\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2.$$

Die elektrostatischen Erscheinungen ergeben sich sofort aus den Gleichungen (23) bis (28) und (33), wenn wir nach dem Früheren stets $\mu = 1$ setzen. Dieselben sind dadurch charakterisiert, dass

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = 0$$

ist. Entsprechend (26) lässt sich dann $\mathfrak{E}$ als Potentialgradient darstellen. Wir setzen also:

$$\mathfrak{E} = -\nabla\omega.$$

Aus (27) folgt dann:

$$(1+\varepsilon)\operatorname{div}\mathfrak{E} = -(1+\varepsilon)\nabla^2\omega = 4\pi\mathfrak{B}^2\operatorname{div}\mathfrak{D} - \mathfrak{p}\operatorname{curl}\mathfrak{H}.$$

Im letzten Gliede ist es mit Vernachlässigung der Größen von der Ordnung $\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{V}}\right)^2$ gestattet, an Stelle von $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{H}'$ zu setzen, curl $\mathfrak{H}'$ ist aber wegen (25) im statischen Felde gleich Null. Berücksichtigt man noch (23), so erkennt man, dass im homogenen Körper:

$$\nabla^2\omega = 0$$

ist. An der Grenzfläche zweier Medien ist wegen der Continuität der tangentiellen Kraftcomponenten

$$\frac{\partial\omega}{\partial h} \text{ continuierlich.}$$

Aus (27) endlich erkennt man, dass die zur Trennungsfläche normale Componente von $(1+\varepsilon)\mathfrak{E}$ also $-(1+\varepsilon)\frac{\partial\omega}{\partial n}$ ebenso variieren muss wie $\mathfrak{D}_n$; die senkrechte Componente von $[\mathfrak{p}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{p}\mathfrak{H}']$ ist continuierlich, da $\mathfrak{H}'_h$ es ist.

Wir erhalten also

$$\left|(1+\varepsilon)\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_1 - \left|(1+\varepsilon)\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_2 = -4\pi\mathfrak{V}^2[\mathfrak{D}_{n,1}-\mathfrak{D}_{n,2}]$$
$$= \text{Const} = -4\pi\eta_{(\omega)},$$

wenn wir unter $\eta_{(\omega)}$ die Flächendichte der wahren Elektricität verstehen.

Die Gesetze der Elektrostatik werden also durch die Bewegung der Materie nicht geändert, wenn man Größen höherer Ordnung vernachlässigt. Zu demselben Satze führt auch die Lorentz'sche Theorie;[1] auf die vernachlässigten Glieder erstreckt sich die Übereinstimmung natürlich auch hier nicht. Dieselben entziehen sich jedoch jeglicher experimentellen Prüfung.

Eine wesentliche Abweichung von den üblichen Anschauungen ist, dass wir gezwungen waren, die Dichte der wahren Elektricität in einem homogenen Körper gleich Null zu setzen. Da wir aber bisher nur die absoluten Nichtleiter behandelt haben, glaube ich nicht, dass man dadurch mit der Erfahrung

[1] L. c. S. 38.

in Widerspruch geräth, wenn man das Vorkommen wahrer Elektricität auf die Grenzflächen beschränkt. Sonst müsste man sich mit der atomistischen Inhomogenität der Materie helfen, d. h. man müsste sich die wahre Elektricität an die Oberfläche der Molecüle gebunden denken, wodurch man allerdings wieder auf die Ionenhypothese käme, mit welcher die hier vorgetragene Theorie ja durchaus nicht in Widerspruch steht.

Die ponderomotorischen Kräfte, welche z. B. elektrisch geladene Körper aufeinander ausüben, liefert die Theorie der Elektricität im ruhenden Körper gewissermaßen auf einem Umwege, durch Betrachtung der Abhängigkeit der Energie von der gegenseitigen Lage der Körper. Dieselben Betrachtungen müssen auch hier zum Ziele führen. Das Hamilton'sche Princip muss aber, sowie wir es hier angewendet haben, diese Kräfte (durch eine allgemeinere Variation) direct ergeben. Desgleichen muss es auch die Kräfte liefern, mit denen die Materie auf den Äther wirkt. Diese Fragen hoffe ich in einer späteren Abhandlung behandeln zu können.

Prüfung der Mischungsregeln für die Dielektricitätsconstante der Gemische von Hexan-Aceton

von

Felix Ehrenhaft.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. November 1902.)

Die Dielektricitätsconstanten der flüssigen Gemische von Hexan und Aceton, die in nachfolgender Arbeit behandelt werden, wurden mit Hilfe der Nernst'schen Nebenschlussmethode[1] gemessen.

Reines Hexan aus Petroleum, von Kahlbaum aus Berlin bezogen, wurde durch Zusatz von metallischem Na getrocknet und sodann über Na abfractioniert. In Verwendung trat bloß die mittlere, etwa $^{2}/_{3}$ der gesammten betragende Fraction, die bei constantem Siedepunkte von 64·5° übergieng. Aceton aus Bisulfit, gleichfalls von Kahlbaum aus Berlin bezogen, wurde einer weiteren Reinigung nicht unterzogen.

Als Aichflüssigkeiten traten thiophenfreies Benzol,[2] das dreimal durch Ausfrieren und Abgießen gereinigt, sodann durch Zusatz von Na wasserfrei gemacht und über demselben bei constantem Siedepunkte abfractioniert wurde, und chemisch reines Äthylbromid in Verwendung. Die Scheibendurchmesser der Nickeltröge, die bei Messung der kleineren, respective der größeren Dielektricitätsconstanten verwendet wurden, betrugen 34, respective 19 *mm*. Bei Gemischen, die mit beiden Trögen gemessen wurden, zeigten die Dielektricitätsconstanten Ab-

---

[1] Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 14, S. 637.

[2] Ebenda, 1900, Bd. 35, S. 429.

weichungen von kaum $^1/_4$%. Die constante Füllung der Tröge betrug 5 *cm*³. Die Mischungen wurden nach Volumsprocenten hergestellt und wegen der großen Flüchtigkeit der Stoffe sofort gemessen. Sowohl die Dielektricitätsconstanten, wie die Dichten, die durch Wägung mit Schwingungsbeobachtung im Pyknometer ermittelt wurden, wurden bei 15° gemessen und sind nebst den pro Kubikcentimeter berechneten Dilatationen in nachstehender Tabelle verzeichnet.

Während die Leitfähigkeit der flüssigen Mischungen im Troge bei geringerer Zahl der Volumstheile Hexan durch die engen Widerstandsröhren des Nernst'schen Apparates compensiert werden konnte, mussten für die Mischungen, die mehr Aceton enthielten, die weiten Compensationsröhren benützt werden. Jede Mischung wurde dreimal frisch hergestellt, für jede Messung wurden 5 bis 7 Einstellungen gemacht und jedesmal die Capacität des leeren und des mit der Aichflüssigkeit gefüllten Troges nachbestimmt.

Tabelle I.

Volumstheile Hexan	Volumstheile Aceton	Dielektricitätsconstante bei 15° gemessen	Dielektricitätsconstante bei 15° berechnet nach der linearen Mischungsregel	Dichte bei 15°	Dilatation pro Kubikcentimeter
10	0	1·850	—	0·6744	—
9	1	3·458	3·97	—	—
8	2	4·813	6·09	0·6913	0·0074
7	3	6·649	8·21	—	—
6	4	8·424	10·33	—	—
5	5	10·22	12·46	0·7272	0·0121
4	6	13·47	14·58	0·7445	0·0052
3	7	16·14	16·70	0·7558	0·0065
2	8	17·97	18·82	0·7684	0·0047
1	9	20·44	20·94	0·7836	0·0030
0	10	23·06	—	0·7977 [1]	—

[1] Dichte bei 16·5° = 0·795.
„ „ 18° = 0·793.

Die in der Tabelle enthaltenen Dielektricitätsconstanten und Dichten sind Mittelwerte.

Die nachstehenden Diagramme Fig. 1 und 2 stellen die Dielektricitätsconstante, beziehungsweise Dichten als Function der Volumsprocente dar.

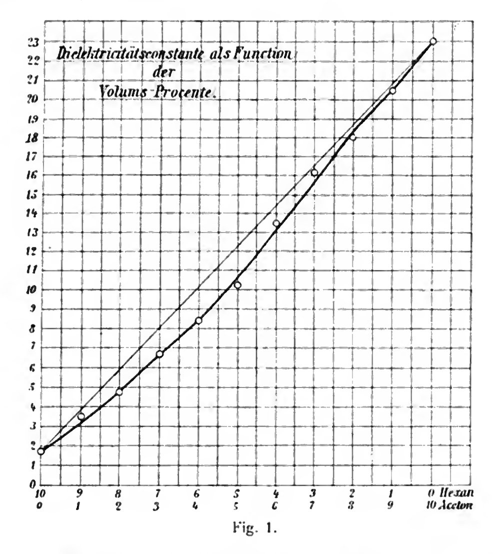


Fig. 1.

Die geometrische Ähnlichkeit der beiden Curven weist darauf hin, dass zwischen den Abweichungen der Dielektricitätsconstante und denjenigen der Dichte von der linearen Mischungsregel auch jene enge Verknüpfung besteht, die von Pufrich[1] und Buchkremer[2] zwischen optischem Brechungsvermögen und Contraction, beziehungsweise Dilatation der Mischung constatiert wurde.

Bedeuten v und v_1, m und m_1, k und k_1 specifische Volumina, Massen, Dielektricitätsconstanten der Mischung,

---

[1] Zeitschrift für phys. Chemie, 1889, Bd. 4, S. 561.

[2] Ebenda, 1890, Bd. 6, S. 161.

respective der ersten Flüssigkeitscomponente, $c = \frac{m_2}{m_1}$ die Concentration der Mischung, so hat Silberstein[1] die Differentialgleichung

$$k\left|v - c(1+c)\frac{\partial v}{\partial c}\right| - \frac{dk}{dc}c(1+c)v = v_1 k_1 \qquad (1)$$

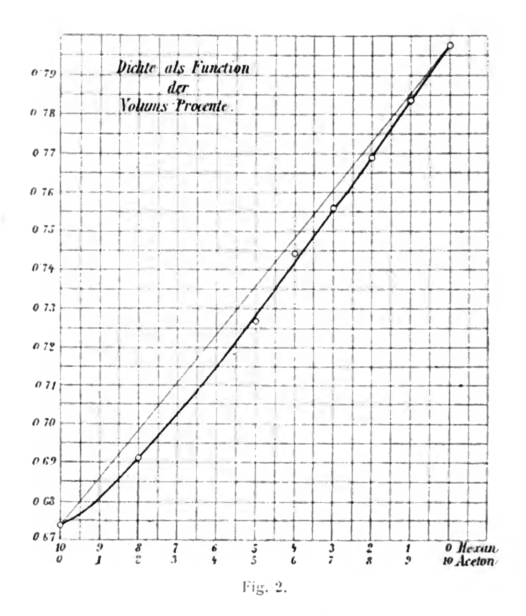


Fig. 2.

als Beziehung zwischen Dielektricitätsconstante und Concentration der Mischung aufgestellt. Silberstein integriert die Gleichung nur speciell für den einen Fall, der praktisch am seltensten realisiert ist, unter der Voraussetzung, dass das Gesammtvolumen einer Mischung von $m_1 g$ der einen und $m_2 g$

[1] Wied. Ann., 1895, Bd. 56, S. 669.

der zweiten Substanz der Summe der Volumina der Substanzen im getrennten Zustande gleich sei, so dass $(m_1+m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2$ erfüllt ist, also weder Contraction noch Dilatation der Flüssigkeiten beim Mischen eintritt.

Die Integration ergibt dann die lineare Mischungsregel, die für die Volumina vorausgesetzt wurde, für die Dielektricitätsconstanten als Resultat; also wenn V_1 und V_2 die Gesammtvolumina der beiden Componenten vor der Mischung bedeuten, ergibt sich die Dielektricitätsconstante der Mischung durch

$$k = \frac{V_1 k_1 + V_2 k_2}{V_1 + V_2}.$$

Im nachfolgenden wird gezeigt, dass auch ohne die obenerwähnte beschränkende Voraussetzung die Integration der Gleichung gelingt, wofern das specifische Volumen der Mischung als Function der Concentration $v = \psi(c)$ für die betreffenden Substanzen graphisch oder in Tabellen festgelegt ist. Unser specielles Diagramm Fig. 2 von Hexan und Aceton lässt sich durch einfache Transformation in ein Diagramm obiger Art verwandeln.

Die Substitution der Relation $v = \psi(c)$ in Gleichung (1) ergibt die lineare, nicht homogene Differentialgleichung

$$\frac{dk}{dc} + \frac{c(1+c)\psi'(c) - \psi(c)}{c(1+c)\psi(c)} k + \frac{v_1 k_1}{c(1+c)\psi(c)} = 0;$$

das Integral derselben

$$k = e^{-\int\left[\frac{\psi'(c)}{\psi(c)} - \frac{1}{c(1+c)}\right]dc} \left\{ A - v_1 k_1 \int \frac{e^{\int\left[\frac{\psi'(c)}{\psi(c)} - \frac{1}{c(1+c)}\right]dc}}{c(1+c)\psi(c)} dc \right\},$$

wobei A Integrationsconstante ist, geht, da $e^{\int \frac{\psi'(c)}{\psi(c)} dc} = \psi(c)$ und $e^{\int \frac{dc}{c(1+c)}} = \frac{c}{1+c}$ ist, über in

$$k = \frac{c}{\psi(c)(1+c)} \left\{ A - v_1 k_1 \int \frac{dc}{c^2} \right\}$$

und

$$k = \frac{c}{\psi(c)(1+c)} \left\{ A + \frac{v_1 k_1}{c} \right\}.$$

Die Integrationsconstante A ergibt sich durch die Grenzbedingung, dass für $c = \frac{m_2}{m_1} = \infty$, $k = k_2$, die Dielektricitätsconstante der zweiten Componente werden muss. Demgemäß

$$k_2 = \lim_{c=\infty} \frac{c}{\psi(c)(1+c)} \left\{ A + \frac{v_1 k_1}{c} \right\},$$

$$k_2 = \lim_{c=\infty} \frac{A}{\psi(c)},$$

$$A = k_2 v_2.$$

Durch Einführung von $c = \frac{m_2}{m_1}$ ergibt sich, wofern v das specifische Volumen der Flüssigkeiten nach der Mischung bedeutet,

$$kv(m_1 + m_2) = k_1 m_1 v_1 + k_2 m_2 v_2.$$

Bezeichnet man die Gesammtvolumina $v_1 m_1$ und $v_2 m_2$ vor der Mischung mit V_1 und V_2, das wirkliche Volumen $v(m_1+m_2)$ nach der Mischung mit V, so ergibt sich die Dielektricitätsconstante der Mischung durch

$$k = \frac{k_1 V_1 + k_2 V_2}{V}. \tag{2}$$

Zur Prüfung der Übereinstimmung dieses Resultates mit den Werten der Tabelle I ist nachfolgende Transformation vortheilhaft. Bedeuten σ, σ_1, σ_2 die Dichten der Mischung, respective der Componenten, so ergibt sich, da

$$m_1 + m_2 = V\sigma = V_1 \sigma_1 + V_2 \sigma_2$$

ist,

$$k \frac{V_1 \sigma_1}{\sigma} + k \frac{V_2 \sigma_2}{\sigma} = k_1 V_1 + k_2 V_2$$

und wenn $\frac{V_1}{V_2} = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$k = \sigma \frac{k_1 \varepsilon + k_2}{\sigma_1 \varepsilon + \sigma_2}. \tag{3}$$

Nachfolgende Tabelle II enthält die aus (2) berechneten und aus den Versuchen sich ergebenden Werte von $\frac{k}{\sigma}$. Fig. 3 stellt die Dielektricitätsconstante als Function der Dichten dar.

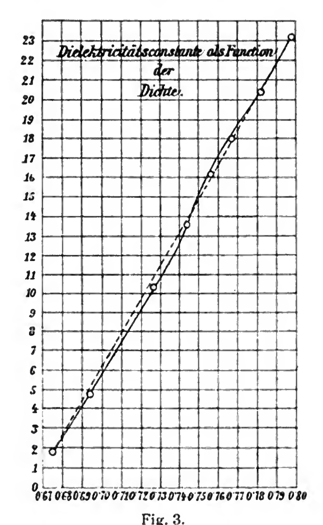


Fig. 3.

Die Curve zeigt einen Verlauf, der nahezu linear ist. Die mittleren Abweichungen betragen circa 2%.

Tabelle II.

Volumstheile Hexan	Volumstheile Aceton	$\frac{k}{\sigma}$ aus den Versuchen bestimmt	$\frac{k}{\sigma}$ aus der Formel (3) berechnet	Differenzen in Procenten
8	2	6·962	8·97	+ 28
5	5	14·00	16·93	+ 21
4	6	18·09	19·46	+ 7·2
3	7	21·36	21·94	+ 2·7
2	8	23·39	24·34	+ 4·5
1	9	26·10	26·65	+ 2

Die aus der allgemeinen Integration der Silberstein'schen Differentialgleichung entspringende Mischungsregel lautet

$$k = \frac{k_1 V_1 + k_2 V_2}{V},$$

wobei V das wirklich vorhandene Volumen nach der Mischung bedeutet.

Aus der Clausius-Mosotti'schen Theorie der Dielektrica ergibt sich eine Mischungsformel, die mit obiger, wie schon Dr. Lampa[1] nachgewiesen, im Widerspruche steht.

Ist der von den Molekeln in der Volumseinheit wirklich erfüllte Raum bei den beiden Componenten g_1, respective g_2, V_1, respective V_2 die Volumina vor der Mischung, so ist die wahre Raumerfüllung nach der Mischung

$$G = \frac{V_1 g_1 + V_2 g_2}{V}, \tag{4}$$

wobei V das wahre Volumen nach der Mischung bedeutet und so der Contraction, respective Dilatation auch hier Rechnung getragen werden kann.

Die Dielektricitätsconstante der Mischung ergibt sich aus der Clausius-Mosotti'schen Formel durch

$$k = \frac{1+2G}{1-G}.$$

Tragen wir hier für G aus (4) den Wert ein, so folgt

$$k = \frac{V + 2 V_1 g_1 + 2 V_2 g_2}{V - V_1 g_1 - V_2 g_2}.$$

Drückt man noch die Raumerfüllung der Componenten durch die Dielektricitätsconstanten aus, so folgt aus der Clausius-Mosotti'schen Theorie unter Berücksichtigung von Contraction, respective Dilatation als Mischungsregel für die Dielektricitätsconstante

$$K = \frac{V + 2 V_1 \frac{k_1 - 1}{k_1 + 2} + 2 V_2 \frac{k_2 - 1}{k_2 + 2}}{V - V_1 \frac{k_1 - 1}{k_1 + 2} - V_2 \frac{k_2 - 1}{k_2 + 2}}. \tag{5}$$

[1] Mitth. des technolog. Gewerbemuseums, 1897.

Wie J. Philip[1] und andere Autoren nachweisen, sind für Mischungen von Flüssigkeiten, deren Componenten Dielektricitätsconstanten von Zahlengrößen bis etwa 5 aufweisen, die also als Dielektricitätsconstanten im Sinne der Clausius'schen Theorie aufzufassen sind, die auf Grund der Clausius-Mosotti'schen Formel aufgestellten Mischungsregeln in hinreichender Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Für Flüssigkeitsgemische, deren eine Componente durch eine hohe Dielektricitätsconstante charakterisiert ist, wie z. B. im vorliegenden Falle, steht letztere mit der Erfahrung gar nicht in Übereinstimmung.

Die Übereinstimmung der linearen Mischungsregel ist in solchen Fällen eine mäßige. Die Berücksichtigung von Contraction oder Dilatation bringt die berechneten Werte der Erfahrung zwar näher, aber nicht in ausreichendem Maße.

Äthyläther und Benzol zeigen beim Mischen Contraction. Die Dielektricitätsconstanten sind den Messungen Linebarger's,[2] die Dichten der schon erwähnten Arbeit Buchkremer's entnommen.

Volumstheile		Dielektricitäts-constante bei 20°	Dichte bei 20°	$\frac{k}{\sigma}$		Differenzen in Procenten
Benzol	Äthyläther			aus den Versuchen bestimmt	aus Formel (3) berechnet	
0	100	4·261	0·72078	—	—	—
28·576	71·424	3·884	0·773	5·025	4·842	−3·6
56·924	43·076	3·345	0·811	4·125	3·841	−7
75·691	24·309	2·810	0·844	3·330	3·244	−2·5
100	0	2·249	0·87953	—	—	—

Während beim Gemisch Hexan-Aceton — im Falle der Dilatation — die Dielektricitätsconstanten unter den Werten der linearen Mischungsregel liegen, sind die bei Äther-Benzolgemischen — also im Falle der Contraction — gemessenen

[1] Zeitschrift für phys. Chemie, 1897, Bd. 24, S. 18.

[2] Ebenda, 1896, Bd. 20.

Werte größer als die aus diesem Gesetze berechneten. Dass die Abweichungen denselben Verlauf nehmen, wie diejenigen der Dichte, ist in diesen und anderen Fällen unverkennbar.

Wenn auch Formel (2) diesem Umstande Rechnung trägt, reicht dies nicht hin, die Resultate mit den Messungen völlig in Übereinstimmung zu bringen. Doch wirkt Berücksichtigung von Contraction und Dilatation im Sinne einer Correctur.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXV. SITZUNG VOM 4. DECEMBER 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 111, Abth. II b, Heft IV und V (April und Mai 1902).

Chefgeologe Georg Geyer übersendet einen Bericht über den Fortgang der geologischen Untersuchungen beim Baue des Bosruck-Tunnels.

Das c. M. Prof. R. Hoernes in Graz übersendet den Bericht über die im Auftrage der k. Akademie ausgeführte Untersuchung des Gebietes, welches bei dem Erdbeben vom 5. Juli 1902 in der Umgebung von Saloniki erschüttert wurde.

Dr. Heinrich Uzel in Königgrätz übersendet ein Dankschreiben für die ihm bewilligte Reisesubvention für entomologische Studien auf Ceylon und zwei Kisten mit gesammelten Insecten.

Prof. F. J. Obenrauch in Brünn übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Platons erste ebene Curve dritter Ordnung«.

Herr Friedrich Müller in Batum übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Ein Beitrag zum Gesetze der Massenanziehung«.

Privatdocent Dr. Wolfgang Pauli berichtet über einige Fortschritte seiner mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie ausgeführten Untersuchungen: »Über physikalische Zustandsänderungen organischer Colloide«.

Das w. M. Hofrath Ad. Lieben überreicht zwei Abhandlungen aus seinem Laboratorium:

I. »Über Condensation von Isobutyraldehyd mit *m*-Oxybenzaldehyd und mit *m*-Äthoxybenzaldehyd«, von Walther Subak.

II. »Condensation von Benzaldehyd mit Oxysäuren«, von Josef Mayrhofer und Karl Nemeth.

Das w. M. Hofrath Dr. Edm. v. Mojsisovics überreicht für die Mittheilungen der akademischen Erdbeben-Commission eine Abhandlung des c. M. Prof. Rud. Hoernes in Graz über das Erdbeben von Saloniki am 5. Juli 1902 und den Zusammenhang der makedonischen Beben mit den tektonischen Vorgängen in der Rhodopemasse.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Maharaja Takhtasingji Observatory in Poona: Publi cations, vol. I. Bombay, 1902. 4°.

Otto, Friedr. Aug.: Ein Problem der Rechenkunst. Allgemeines Verfahren zur Bildung und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. Düsseldorf, 1902. 8°

Retzius, Gustav und Carl M. Fürst: Anthropologia Suecica. Beiträge zur Anthropologie der Schweden. Stockholm, 1902. 4°.

XXVI. SITZUNG VOM 11. DECEMBER 1902.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXIII, Heft IX (November 1902).

Der Secretär Hofrath V. v. Lang verliest eine Zuschrift des hohen Curatoriums der kaiserlichen Akademie, worin mitgetheilt wird, dass Seine k. und k. Hoheit der Durchlauchtigste Herr Erzherzog-Curator zu der Verlegung der nächsten feierlichen Sitzung auf den 28. Mai 1903, und zwar um 4 Uhr nachmittags, seine Genehmigung ertheilt hat.

Prof. Friedrich Berwerth erstattet den zweiten Bericht über den Fortgang der geologischen Beobachtungen im Südflügel des Tauern-Tunnels.

Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (22. Fortsetzung).

Das w. M. Intendant Hofrath Franz Steindachner berichtet über zwei neue Fischarten aus dem Rothen Meere.

Das w. M. Prof. Dr. R. v. Wettstein überreicht eine Abhandlung von Fräulein Dr. Emma Ott, betitelt: »Anatomischer Bau der Hymenophyllaceenrhizome und dessen Verwertung zur Unterscheidung der Gattungen *Trichomanes* und *Hymenophyllum*«.

Das w. M. Hofrath Prof. J. Wiesner legt eine von Fräulein Ida Vepřek im pflanzenphysiologischen Institute ausgeführte Arbeit vor, mit dem Titel: »Zur Kenntnis des anatomischen Baues der Maserbildung an Holz und Rinde«.

Das w. M. Hofrath J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Über die tägliche Drehung der mittleren Windrichtung und über eine Oscillation der Luftmassen von halbtägiger Periode auf Berggipfeln von 2 bis 4 *km* Seehöhe«.

Das w. M. Hofrath F. Mertens überreicht eine Abhandlung von Dr. R. Daublebsky v. Sterneck in Wien mit dem Titel: »Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Fokker, A. P. Dr.: Versuch einer neuen Bakterienlehre. Untersuchungen aus dem hygienischen Institut in Groningen. Haag, 1902. 8°.

XXVII. SITZUNG VOM 18. DECEMBER 1902.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 111, Abth. III. Heft I bis VI (Jänner bis Juni 1902).

Das c. M. Prof. Dr. C. Doelter übersendet eine Arbeit: »Der Monzoni und seine Gesteine«, I. Theil.

Das w. M. Hofrath Zd. H. Skraup in Graz übersendet zwei Mittheilungen zur Aufnahme in die Sitzungsberichte:

I. »Über die Einwirkung von Brom auf die isomeren Cinchoninbasen«, von Dr. R. Zwerger. Aus dem chemischen Institut der Universität Graz.

II. »Über das Ononin«, von Prof. Dr. Franz v. Hemmelmayr. Aus dem Laboratorium der Landes-Oberrealschule in Graz.

Dr. Ernst Schorr in Montpreis übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Licht überall ist des Lebens Räthsel«.

Herr Georg Wollner in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Lenkbares Luftschiff«.

Das w. M. Hofrath Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Über die Einwirkung von alkoholischem Kali auf Methyläthylakroleïn«, von Arthur v. Lenz.

Das c. M. Hofrath Ludwig Boltzmann legt eine Abhandlung vor: »Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nicht holonome generalisierte Coordinaten«.

Dr. O. Abel in Wien überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Zwei neue Menschenaffen aus den Leithakalkbildungen des Wiener Beckens«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Némethy, Emil: Die endgiltige Lösung des Flugproblems. Leipzig, 1903. Groß-8°.

Schorn, J.: Die Erdbeben von Tirol und Vorarlberg. Innsbruck, 1902. 8°.

Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie

von

Dr. R. Daublebsky v. Sterneck,

Privatdocent in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. December 1902.)

In der sogenannten additiven Zahlentheorie[1] behandelt man die Frage, auf wie viele Arten eine gegebene Zahl als Summe gegebener Elemente dargestellt werden kann.

Stern hat in einer im 61. Bande des »Journals für Mathematik« veröffentlichten Abhandlung sich die analoge Frage vorgelegt, wie viele aus gegebenen Elementen additiv gebildete Zusammensetzungen einer gegebenen Zahl nach einem gegebenen Modul congruent sind. Seit der im Jahre 1863 erschienenen Abhandlung Stern's scheint jedoch diese Frage kaum mehr irgendeine Beachtung gefunden zu haben. Stern setzt voraus, dass der zugrunde gelegte Modul eine Primzahl sei, und bestimmt unter verschiedenen Annahmen über die zur Verwendung gelangenden Darstellungselemente die Gesammtzahl der Darstellungen einer bestimmten Zahl, sowie die Differenz der Darstellungsanzahlen durch eine gerade und durch eine ungerade Anzahl von Summanden mit Hilfe von Betrachtungen, die sich auf die Irreductibilität der Kreistheilungsgleichung gründen.

Die folgende Abhandlung soll nun einen Beitrag zu dieser der additiven Zahlentheorie verwandten Theorie liefern und speciell die beiden folgenden Probleme behandeln:

---

[1] Die Bezeichnung stammt von Kronecker, der sie in seinen Vorlesungen gebraucht haben soll.

1. Es ist die Anzahl der aus i beliebigen, mod. M incongruenten Summanden bestehenden additiven Zusammensetzungen zu bestimmen, welche der Zahl n (mod. M) congruent sind.

2. Es ist die Anzahl der der Zahl n (mod. M) congruenten, aus i incongruenten, aber überdies durch den Modul M untheilbaren Summanden bestehenden additiven Zusammensetzungen zu finden.

Diese beiden Aufgaben werden im folgenden unter der Voraussetzung gelöst, dass der Modul M entweder eine Primzahl oder das Product zweier verschiedener Primzahlen oder endlich eine beliebige Potenz einer Primzahl ist.

Es zeigt sich dabei, wie schon Stern in der Einleitung zu der erwähnten Abhandlung bemerkt, dass das hier behandelte Problem der additiven Erzeugung einer Zahl im Gebiete der Congruenzen von elementarerer Natur ist als das analoge der gewöhnlichen additiven Zahlentheorie, indem es dort nur für die kleinsten Werte i möglich ist, geschlossene Formeln für die Darstellungsanzahl einer Zahl n durch i beliebige Summanden aufzustellen, während man hier für jeden beliebigen Wert i zu solchen Formeln, und zwar auf vollkommen elementarem Wege gelangt.

In der gewöhnlichen additiven Zahlentheorie besagt der Euler-Legendre'sche Satz, dass sich jede ganze Zahl im allgemeinen ebenso oft als Summe einer geraden, wie einer ungeraden Anzahl von 0 verschiedener, ganzzahliger Summanden darstellen lässt (von den Pentagonalzahlen abgesehen, bei denen der Überschuss der einen über die andere dieser beiden Darstellungsanzahlen eine Einheit beträgt). Die Lösung der zweiten der obigen Aufgaben führt uns nun nach einer entsprechenden Summierung zum Analogon dieses Satzes für das Gebiet der Congruenzen, indem wir die Differenz der Darstellungsanzahlen der Zahl n durch eine gerade und durch eine ungerade Anzahl incongruenter, durch den Modul untheilbarer Summanden bestimmen können.[1]

[1] Hinsichtlich dieser Anzahldifferenz im Falle eines beliebig zusammengesetzten Moduls vergl. man die Note des Verfassers im XII. Bande des »Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung«.

I. Recursionsformeln.

Es bezeichne $(n)_i$, beziehungsweise $(n)_i^{(0)}$ die Anzahl der Lösungen unserer beiden Probleme, d. h. die Anzahl der Lösungen der Congruenz

$$n \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_i \pmod{M}$$

unter den Voraussetzungen

$$0 \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_i < M,$$

beziehungsweise

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < M.$$

Es bedeutet also $(n)_i$ die Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch i incongruente Elemente (mod. M), unter denen sich auch die Null vorfinden darf, und $(n)_i^{(0)}$ die analoge Anzahl bei Ausschluss des Elementes 0.

1. Haben n und m mit dem Modul M denselben größten gemeinschaftlichen Theiler gemein, so bestehen die Gleichungen:

$$(n)_i = (m)_i \quad \text{und} \quad (n)_i^{(0)} = (m)_i^{(0)}.$$

Um dies einzusehen, genügt die Bemerkung, dass einerseits ein volles Restsystem (ob es das Element 0 enthält oder nicht) durch Multiplication mit irgendeinem zum Modul theilerfremden Elemente wieder in ein gleiches Restsystem übergeht und dass anderseits eine Zahl n durch Multiplication mit einer zum Modul theilerfremden Zahl in eine Zahl m übergeführt wird, die denselben größten gemeinschaftlichen Theiler wie n mit dem Modul gemein hat.

2. Wenn i zum Modul M theilerfremd ist, bestimmt sich die Anzahl $(n)_i$ unmittelbar in folgender Weise: Bildet man alle Combinationen der Elemente $0, 1, 2, \ldots M-1$ zur i^{ten} Classe, so beträgt die Gesammtzahl $\binom{M}{i}$; anderseits ist jede dieser Combinationen, als Summe aufgefasst, einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots M-1$ congruent, so dass man erhält:

$$(0)_i + (1)_i + (2)_i + \ldots + (M-1)_i = \binom{M}{i}.$$

Bei theilerfremdem i sind nun alle Summanden der linken Seite dieser Gleichung einander gleich; denn aus jeder der in $(n)_i$ gezählten Darstellungen:

$$n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i \pmod{M}$$

erhält man offenbar eine Darstellung der Zahl $n+i$ in der Form:

$$n+i \equiv (\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)+\ldots+(\alpha_i+1) \pmod{M}.$$

Da nun aber die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ bloß an die Bedingung gebunden sind, incongruent zu sein, so erfüllen die Elemente $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \ldots \alpha_i+1$ diese Bedingung ebenfalls, und es besteht daher die Beziehung:

$$(n)_i = (n+i)_i.$$

Nun durchlaufen aber die Zahlen $n, n+i, n+2i, \ldots$ unter unserer Voraussetzung gleichfalls in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 0, 1, 2, ... $M-1$ (mod. M), so dass man findet:

$$(0)_i = (1)_i = (2)_i = \ldots = (M-1)_i = \frac{1}{M}\binom{M}{i} = \frac{1}{i}\binom{M-1}{i-1}.$$

3. Bezeichnet $(n)_i^{[e]}$ die Anzahl derjenigen in $(n)_i$ gezählten Darstellungen, welche ein bestimmtes Element e thatsächlich enthalten, $(n)_i^{(e)}$ aber die Anzahl derjenigen, in denen das Element e nicht auftritt, so besteht die Beziehung:

$$(n)_i^{[e]} = (n-e)_{i-1}^{(e)} = (n-e)_{i-1} - (n-e)_{i-1}^{[e]},$$

aus welcher sich successive folgende Formel ergibt:

$$(n)_i^{[e]} = (n-e)_{i-1} - (n-2e)_{i-2} + (n-3e)_{i-3} - \ldots + (-1)^{i-1}(n-ie)_0.$$

Summiert man diese Formel über alle e, so wird linker Hand jede in $(n)_i$ gezählte Darstellung i-mal gezählt werden, da eben i verschiedene Elemente e in ihr vorkommen, und man erhält daher:

$$i\,(n)_i = \sum_e (n-e)_{i-1} - \sum_e (n-2e)_{i-2} +$$
$$+ \sum_e (n-3e)_{i-3} - \ldots + (-1)^{i-1} \sum_e (n-ie)_0. \qquad (1)$$

In den Summen rechter Hand hat e ein vollständiges Restsystem (mod. M) zu durchlaufen. Diese Formel gestattet, $(n)_i$ auf $(n)_0$ zurückzuführen, das den Wert 1 hat für $n \equiv 0$ (mod. M), in allen übrigen Fällen aber den Wert 0.

4. Dieselbe Überlegung gestattet, $(n)_i^{(0)}$ auf $(n)_i$ zurückzuführen. Es ist nämlich:

$$(n)_i^{(0)} = (n)_i - (n)_i^{[0]},$$

so dass wir nur in obiger Formel $e = 0$ zu setzen brauchen, und erhalten:

$$(n)_i^{(0)} = (n)_i - (n)_{i-1} + (n)_{i-2} - \dots + (-1)^i (n)_0. \qquad (2)$$

Diese beiden Formeln (1) und (2) werden uns als Grundlage für die Berechnung der Anzahlen $(n)_i$ und $(n)_i^{(0)}$ dienen.

5. Schließlich sei hier noch die folgende, für Binomialcoefficienten giltige Formel angeführt, von welcher wir im folgenden fortwährend Gebrauch machen werden. Sind k und λ irgendwelche ganze Zahlen, so besteht die Beziehung:

$$\binom{k}{\lambda} - \binom{k}{\lambda-1} + \binom{k}{\lambda-2} - \dots + (-1)^{\lambda-1}\binom{k}{1} + (-1)^{\lambda}\binom{k}{0} = \binom{k-1}{\lambda}. \qquad (3)$$

II. Der Modul $M = p$.

1. Dieser Fall ist, wie erwähnt, bereits von Stern a. a. O. behandelt worden. Er erledigt sich in einfachster Weise.

Man findet für theilerfremde i

$$(n)_i = \frac{1}{p}\binom{p}{i}$$

und für die beiden Werte $i = 0$ und $i = p$ offenbar:

$$(n)_0 = (n)_p = 1, \text{ wenn } n \equiv 0 \text{ (mod. } p\text{), sonst } = 0.$$

2. Für die Anzahl $(n)_i^{(0)}$ ergibt sich auf Grund der Formel (2) im Falle eines durch p nicht theilbaren n:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p}\binom{p}{i} - \frac{1}{p}\binom{p}{i-1} + \frac{1}{p}\binom{p}{i-2} - \ldots + (-1)^{i-1}\frac{1}{p}\binom{p}{1}$$

und für $n \equiv 0$ (mod. p)

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p}\binom{p}{i} - \frac{1}{p}\binom{p}{i-1} + $$

$$+ \frac{1}{p}\binom{p}{i-2} - \ldots + (-1)^{i-1}\frac{1}{p}\binom{p}{1} + (-1)^i.$$

Durch Anwendung der Formel (3) stellt sich $(n)_i^{(0)}$ in folgender Form dar:

Für ein durch p untheilbares n:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p}\left[\binom{p-1}{i} + (-1)^{i-1}\right]$$

und für ein durch p theilbares n:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p}\left[\binom{p-1}{i} + (-1)^{i-1}\right] + (-1)^i.$$

Hierin kann i eine der Zahlen 0, 1, 2, . . . $p-1$ bedeuten, da bei Ausschluss der Null höchstens $p-1$ Elemente vorkommen können.

3. Will man die Anzahldifferenz $\Delta(n)$ der aus einer geraden und der aus einer ungeraden Anzahl von Elementen, die durch p nicht theilbar sind, bestehenden Darstellungen der Zahl n finden, so ergibt sich dieselbe in der Form

$$\Delta(n) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (n)_i^{(0)}.$$

Führt man die Summation aus, so findet man:

$\Delta(n) = -1$, wenn n nicht durch p theilbar ist,
$\Delta(n) = p-1$, wenn n durch p theilbar ist.

III. Der Modul $M = pq$.

1. Wir setzen zunächst voraus, dass die beiden Primzahlen p und q ungerade sind.

Ist i zu pq theilerfremd, so ergibt sich:

$$(n)_i = \frac{1}{pq}\binom{pq}{i}.$$

Im Falle i mit pq irgendeinen von 1 verschiedenen Theiler gemein hat, kann dieser nur entweder p oder q sein, da sich die beiden Fälle $i = 0$ und $i = pq$ sofort erledigen:

Für $i = 0$ ist

$$(n)_0 = 1, \text{ wenn } n \equiv 0 \pmod{pq}, \text{ sonst } = 0;$$

und ebenso ist für $i = pq$

$$(n)_{pq} = 1, \text{ wenn } n \equiv 0 \pmod{pq}, \text{ sonst } = 0,$$

weil die Summe sämmtlicher Elemente

$$0+1+2+\ldots+(pq-1) \equiv 0 \pmod{pq}$$

ist.

Für die übrigen nicht theilerfremden Zahlen i werden wir nun successive die Anzahl $(n)_i$ auf Grund der Recursionsformel (1) bestimmen und beginnen mit dem einfachsten Falle $i = p$. Hier nimmt die Formel (1) folgende Form an:

$$p(n)_p = \Sigma(n-e)_{p-1} - \Sigma(n-2e)_{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1}\Sigma(n-pe)_0.$$

Ist nun $p < q$, so sind sämmtliche Indices $p-1, p-2, \ldots 1$ zum Modul theilerfremd, also die einzelnen rechts stehenden Summen sofort bestimmbar, da alle in einer Summe stehenden Glieder einander gleich werden; es ist also in diesem Falle:

$$\Sigma(n-e)_{p-1} = pq\cdot\frac{1}{pq}\cdot\binom{pq}{p-1} = \binom{pq}{p-1}$$

$$\Sigma(n-2e)_{p-2} = pq\cdot\frac{1}{pq}\cdot\binom{pq}{p-2} = \binom{pq}{p-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

während der Wert von $\Sigma(n-pe)_0$ davon abhängt, ob n durch p theilbar ist oder nicht; $n-pe$ durchläuft nämlich, wenn e ein vollständiges Restsystem (mod. pq) durchläuft, entweder lauter durch p theilbare Zahlen, jede p-mal, oder gar keine durch p

theilbare Zahl, je nachdem n durch p theilbar ist oder nicht. Es ist also im Falle eines durch p untheilbaren n

$$\Sigma(n-pe)_0 = 0$$

und im Falle eines durch p theilbaren n

$$\Sigma(n-pe)_0 = p,$$

weil unter den in der Klammer stehenden Zahlen dann auch die Zahl 0, ebenfalls p-mal, vorkommt. Die ganze rechte Seite wird also im zweiten Falle um p Einheiten größer ausfallen als im ersten und daher $(n)_p$ im Falle eines durch p theilbaren n um eine Einheit größer sein als im Falle eines durch p untheilbaren n.

Ist die Voraussetzung $p<q$ nicht erfüllt, sondern etwa $p = aq+b$, so finden sich rechter Hand u. a. die Glieder:

$$(-1)^{b-1}\Sigma(n-be)_{aq}$$
$$(-1)^{b+q-1}\Sigma(n-(b+q)e)_{(a-1)q}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

in welchen die Indices nicht mehr zu pq theilerfremd sind und daher der frühere Schluss nicht anwendbar ist; hingegen sind die Zahlen $b, b+q, \ldots$ zu pq theilerfremd, so dass be, also auch $n-be$, ebenso $(b+q)e$, also auch $n-(b+q)e$ mit e zugleich vollständige Restsysteme (mod. pq) durchlaufen. Daher ist z. B. die Summe:

$$(-1)^{b-1}\Sigma(n-be)_{aq} = (-1)^{b-1}\binom{pq}{aq},$$

weil sie, vom Factor $(-1)^{b-1}$ abgesehen, die Gesammtzahl der Darstellungen aller Zahlen $0, 1, 2, \ldots pq-1$ durch aq incongruente Summanden aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots pq-1$ darstellt. Ebenso ist die zweite Summe:

$$(-1)^{b+q-1}\Sigma(n-(b+q)e)_{(a-1)q} = (-1)^{b+q-1}\binom{pq}{(a-1)q}$$

u. s. f.

Nach alledem erkennt man, dass auch in diesem Falle die frühere Schlussweise richtig bleibt und $(n)_p$ daher in dem Falle,

wo n durch p theilbar ist, um eine Einheit größer ist als im Falle eines durch p untheilbaren n.

Bezeichnen wir mit n jetzt eine durch p theilbare, mit n' aber eine durch p untheilbare Zahl, ferner mit Δ_p die Differenz

$$\Delta_p = (n)_p - (n')_p,$$

so können wir das erhaltene Resultat dahin aussprechen, dass

$$\Delta_p = 1$$

ist. Da nun aber unter den Zahlen $0, 1, 2, \ldots pq-1$ sich genau q Zahlen finden, die durch p theilbar sind, so folgt durch die Bemerkung, dass die Gesammtzahl aller Darstellungen der Zahlen $0, 1, 2, \ldots pq-1$ durch p incongruente Summanden $\binom{pq}{p}$ beträgt, aus der Gleichung

$$(n)_p = (n')_p + \Delta_p$$

die Beziehung

$$pq(n')_p + q\Delta_p = \binom{pq}{p}$$

und hieraus, da wir bereits Δ_p als gleich 1 erkannt haben:

$$(n')_p = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{p} - q\right].$$

Im Falle n durch p theilbar ist, kommt noch eine Einheit additiv hinzu; man kann in diesem Falle schreiben:

$$(n)_p = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{p} + (p-1)q\right].$$

Indem wir nun gleich dazu übergehen, die Anzahl

$$(n)_{\lambda p} \qquad 1 < \lambda < q$$

zu bestimmen, ersehen wir zunächst aus der Recursionsformel (1), dass auch $(n)_{\lambda p}$ nur zweier Werte fähig ist, je nachdem die Zahl n durch p theilbar ist oder nicht. Die hiezu führende Schlussweise ist der eben durchgeführten vollständig analog.

Es bezeichne in diesem Falle $\Delta_{\lambda p}$ den Unterschied dieser beiden Werte

$$\Delta_{\lambda p} = (n)_{\lambda p} - (n')_{\lambda p},$$

wobei n als durch p theilbar, n' als durch p untheilbar vorausgesetzt wird.

Es ist dann nicht schwer, eine Recursionsformel für $\Delta_{\lambda p}$ aus der Formel (1) abzuleiten. Denken wir uns nämlich die Formel (1) zunächst für ein durch p theilbares n, dann für ein durch p untheilbares n aufgestellt und die Differenz gebildet, so findet sich:

$$\lambda p \Delta_{\lambda p} = pq\Delta_{(\lambda-1)p} - pq\Delta_{(\lambda-2)p} + \ldots + (-1)^{\lambda-2} pq\Delta_p + (-1)^{\lambda-1} p.$$

Denn diejenigen Summen auf der rechten Seite der Gleichung (1), in denen der Index durch p untheilbar ist, haben offenbar für ein durch p theilbares und ein durch p untheilbares n genau denselben Wert, heben sich also in der Differenz auf, während in denjenigen, deren Index durch p theilbar ist, alle in der Klammer stehenden Argumente entweder durch p theilbare oder untheilbare Zahlen durchlaufen, je nachdem n durch p theilbar ist oder nicht; endlich werden in der letzten Summe rechter Hand entweder lauter durch p untheilbare Zahlen als Argumente vorkommen (wenn eben n durch p untheilbar ist) oder alle durch p theilbaren Zahlen, jede p-mal, auftreten, also auch die Null p-mal darin vorkommen (wenn eben n durch p theilbar ist). Da wir ferner p als ungerade vorausgesetzt haben, konnten wir die Zeichen $(-1)^p$, $(-1)^{2p}$, $\ldots (-1)^{(\lambda-1)p}$ durch $(-1), (-1)^2, \ldots (-1)^{\lambda-1}$ ersetzen.

Die erhaltene Formel lässt sich durch p kürzen und liefert zunächst für $\lambda = 1$ den uns schon bekannten Wert $\Delta_p = 1$.

Für $\lambda = 2$

$$2\Delta_{2p} = q\Delta_p - 1,$$

oder also

$$\Delta_{2p} = \frac{q-1}{2}.$$

Allgemein wird diese Recursionsformel befriedigt durch folgenden Wert für $\Delta_{\lambda p}$:

$$\Delta_{\lambda p} = \frac{1}{\lambda}\binom{q-1}{\lambda-1} = \frac{1}{q}\binom{q}{\lambda},$$

wie sich durch Anwendung der für die Binomialcoefficienten giltigen Formel (3) unmittelbar einsehen lässt.

Mit der Bestimmung von $\Delta_{\lambda p}$ ist auch diejenige von $(n)_{\lambda p}$ vollständig erledigt. Wir haben hier bloß die zwei Fälle zu unterscheiden, dass n durch p theilbar oder durch p untheilbar ist. Da es q durch p theilbare Zahlen in der Reihe $0, 1, 2, \ldots pq-1$ gibt, so ist die Anzahl

$$(0)_{\lambda p}+(1)_{\lambda p}+\ldots+(pq-1)_{\lambda p} = pq(n')_{\lambda p}+q\Delta_{\lambda p},$$

wo wir wieder unter n' eine durch p untheilbare Zahl verstehen.

Da nun aber die linke Seite gleich $\binom{pq}{\lambda p}$ ist, so erhält man schließlich:

$$pq(n')_{\lambda p}+q\Delta_{\lambda p} = pq(n')_{\lambda p}+\binom{q}{\lambda} = \binom{pq}{\lambda p}$$

und hieraus:

$$(n')_{\lambda p} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{\lambda p}-\binom{q}{\lambda}\right].$$

Aus diesem Werte erhält man sofort den entsprechenden für ein durch p theilbares n, wenn man den Betrag $\Delta_{\lambda p}$ hinzuzählt.

Da die beiden Primzahlen p und q im Modul pq vollständig die gleiche Rolle spielen und es auch, wie wir gesehen haben, nicht darauf ankommt, welche von beiden die größere ist, so kann man ganz analog die Anzahl $(n)_{\lambda q}$ bestimmen, wobei λ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots p-1$ bedeutet, und erhält dabei natürlich ganz ähnliche Resultate. Wenn man schließlich noch bemerkt, dass die Anzahl der Darstellungen durch sämmtliche pq Elemente nur dann gleich 1 ist, wenn $n \equiv 0 \pmod{pq}$ ist, sonst gleich Null (da eben die Summe

$$0+1+2+\ldots+(pq-1) \equiv 0 \pmod{pq}$$

ist), so lassen sich die Resultate betreffs der Anzahl $(n)_i$ für den Modul pq in Folgendes zusammenfassen:

Ist i zum Modul theilerfremd, so ist

$$(n)_i = \frac{1}{pq}\binom{pq}{i}.$$

Ist i nur durch p, nicht durch q theilbar, also $i = \lambda p$, so ist

$$(n)_{\lambda p} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{\lambda q} - \binom{q}{\lambda}\right], \text{ wenn } n \text{ nicht durch } p \text{ theilbar ist,}$$

$$(n)_{\lambda p} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{\lambda q} + (p-1)\binom{q}{\lambda}\right], \text{ wenn } n \text{ durch } p \text{ theilbar ist.}$$

Ist i bloß durch q, nicht durch p theilbar, also $i = \lambda q$, so ist

$$(n)_{\lambda q} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{\lambda q} - \binom{p}{\lambda}\right], \text{ wenn } n \text{ nicht durch } q \text{ theilbar ist,}$$

$$(n)_{\lambda q} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{\lambda q} + (q-1)\binom{p}{\lambda}\right], \text{ wenn } n \text{ durch } q \text{ theilbar ist.}$$

Für $i = 0$ und $i = pq$ ist

$(n)_0 = (n)_{pq} = 1$, wenn n durch pq theilbar ist,
$(n)_0 = (n)_{pq} = 0$, wenn n nicht durch pq theilbar ist.

2. Wir gehen nun dazu über, auf Grund der eben erhaltenen Formeln mit Hilfe der Formel (2) Ausdrücke für $(n)_i^{(m)}$ abzuleiten, d. h. die Anzahl der Darstellungen der Zahl n (mod. pq) zu bestimmen, welche aus i incongruenten, durch den Modul untheilbaren Summanden bestehen. Offenbar hängt es nur von der Theilbarkeit der einzelnen Indices $i, i-1, \ldots 2, 1, 0$ ab, welche der obigen Formeln für $(n)_i$ wir in die rechte Seite der Formel (2) einzusetzen haben.

Hat nun i die beiden Formen:

$$i = \lambda p + \rho \qquad 0 \leqq \rho < p$$
$$i = \mu q + \sigma \qquad 0 \leqq \sigma < q,$$

so ist es ganz leicht, diejenigen der Indices $i, i-1, \ldots 2, 1, 0$ herauszufinden, welche durch p, durch q oder durch pq theilbar sind und demgemäß für jedes Glied der rechten Seite in (2) den richtigen Wert einzusetzen.

Dies führt unter der Voraussetzung eines weder durch p, noch durch q theilbaren n zu folgender Formel für $(n)_i^{(0)}$:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq}{i} - \binom{pq}{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1}\binom{pq}{1}\right]$$
$$-\frac{1}{pq}\left[(-1)^{\rho}\binom{q}{\lambda} + (-1)^{\rho-1}\binom{q}{\lambda-1} + \ldots + (-1)^{\rho+\lambda-1}\binom{q}{1}\right]$$
$$-\frac{1}{pq}\left[(-1)^{\sigma}\binom{p}{\mu} + (-1)^{\sigma-1}\binom{p}{\mu-1} + \ldots + (-1)^{\sigma+\mu-1}\binom{p}{1}\right],$$

wofür wir unter Verwendung der Formel (3) leicht folgenden Ausdruck erhalten:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq-1}{i} + (-1)^{i-1}\right] + \frac{(-1)^{\rho-1}}{pq}\left[\binom{q-1}{\lambda} + (-1)^{\lambda-1}\right]$$
$$+ \frac{(-1)^{\sigma-1}}{pq}\left[\binom{p-1}{\mu} + (-1)^{\mu-1}\right].$$

Ist n zwar durch p, aber nicht durch q theilbar, so kommt in der zweiten Zeile des Ausdruckes für $(n)_i^{(0)}$ vor die Klammer statt des Factors $-\frac{1}{pq}$ der Factor $\frac{p-1}{pq}$, was zu folgender Formel führt:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq-1}{i} + (-1)^{i-1}\right] + \frac{(-1)^{\rho}(p-1)}{pq}\left[\binom{q-1}{\lambda} + (-1)^{\lambda-1}\right] +$$
$$+ \frac{(-1)^{\sigma-1}}{pq}\left[\binom{p-1}{\mu} + (-1)^{\mu-1}\right].$$

Ist n zwar durch q, aber nicht durch p theilbar, so kommt analog vor die in der dritten Zeile stehende Klammer der Factor $\frac{q-1}{pq}$ statt $-\frac{1}{pq}$, so dass die Formel folgende Gestalt annimmt:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq-1}{i} + (-1)^{i-1}\right] + \frac{(-1)^{\rho-1}}{pq}\left[\binom{q-1}{\lambda} + (-1)^{\lambda-1}\right] +$$
$$+ \frac{(-1)^{\sigma}(q-1)}{pq}\left[\binom{p-1}{\mu} + (-1)^{\mu-1}\right].$$

Endlich kommt im Falle, als n sowohl durch p, als durch q theilbar ist, sowohl in der zweiten Zeile der Factor $\frac{p-1}{pq}$, als auch in der dritten der Factor $\frac{q-1}{pq}$ vor die Klammer. In diesem Falle kommt auch noch das in der Formel (2) stehende Endglied $(-1)^i(n)_0$ zur Geltung, da eben hier $(n)_0 = 1$ ist. Berücksichtigt man dies, so findet man in diesem letzten Falle folgenden Ausdruck:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{pq}\left[\binom{pq-1}{i}+(-1)^{i-1}\right]+\frac{(-1)^\rho(p-1)}{pq}\left[\binom{q-1}{\lambda}+(-1)^{\lambda-1}\right]+$$

$$+\frac{(-1)^\sigma(q-1)}{pq}\left[\binom{p-1}{\mu}+(-1)^{\mu-1}\right]+(-1)^i.$$

Hiemit ist das Problem der Anzahlbestimmung $(n)_i^{(0)}$ für alle n und für alle hier in Betracht kommenden Zahlen $i = 0, 1, 2, \ldots (pq-1)$ vollständig gelöst.

3. Für die Anzahldifferenz $\Delta(n)$ der geraden und ungeraden Darstellungen der Zahl n erhält man den Ausdruck:

$$\Delta(n) = \sum_{i=0}^{pq-1} (-1)^i (n)_i^{(0)}.$$

Um die angezeigte Summierung auszuführen, bestimmen wir zunächst die beiden folgenden Summen:

$$A = \frac{1}{pq}\sum_{i=0}^{pq-1}(-1)^i(-1)^{\rho-1}\left[\binom{q-1}{\lambda}+(-1)^{\lambda-1}\right]$$

und

$$B = \frac{1}{pq}\sum_{i=0}^{pq-1}(-1)^i(-1)^{\sigma-1}\left[\binom{p-1}{\mu}+(-1)^{\mu-1}\right].$$

Für A erhält man, wenn man beachtet, dass $i = \lambda p+\rho$, also $i+\rho \equiv \lambda \pmod{2}$ ist:

$$A = \frac{1}{pq}\sum_{i=0}^{pq-1}(-1)^{i+\rho-1}\binom{q-1}{\lambda} + \frac{1}{pq}\sum_{i=0}^{pq-1}(-1)^{i+\rho+\lambda-2} =$$

$$= \frac{1}{pq}\sum_{i=0}^{pq-1}(-1)^{\lambda-1}\binom{q-1}{\lambda} + \frac{1}{pq}\sum_{i=0}^{pq-1}(-1)^{2i} =$$

$$= \frac{1}{pq}(p-1)\sum_{\lambda=0}^{q-1}(-1)^{\lambda-1}\binom{q-1}{\lambda} + 1 = 1.$$

Ebenso ist $B = 1$.

Das erste Glied in den Formeln für $(n)_i^{(0)}$, mit $(-1)^i$ multipliciert und summiert, liefert:

$$\frac{1}{pq}\sum_{i=0}^{pq-1}\left[(-1)^i\binom{pq-1}{i} + (-1)^{2i-1}\right] = -1.$$

Somit ergibt sich für $\Delta(n)$ im Falle eines weder durch p, noch durch q theilbaren n:

$$\Delta(n) = -1 + A + B = +1,$$

im Falle eines zwar durch p, aber nicht durch q theilbaren n:

$$\Delta(n) = -1-(p-1)A+B = -(p-1),$$

im Falle eines zwar durch q, aber nicht durch p theilbaren n:

$$\Delta(n) = -1+A-(q-1)B = -(q-1)$$

und endlich im Falle eines durch pq theilbaren n (wo dann das Glied $(-1)^i$ noch zu berücksichtigen ist):

$$\Delta(n) = -1-(p-1)A-(q-1)B+pq = (p-1)(q-1).$$

IV. Der Modul $M = 2q$.

1. Die vorstehenden Ableitungen erfahren einige Veränderungen, wenn eine der beiden Primzahlen, deren Product den Modul bildet, gleich 2 ist.

Zunächst ist auch hier

$$(n)_i = \frac{1}{2q}\binom{2q}{i},$$

wenn i zu $2q$ theilerfremd ist.

Ist i durch 2 theilbar, so liefert die Recursionsformel (1), wenn wir wieder unter $\Delta_{2\lambda}$ den Unterschied der Darstellungsanzahlen eines geraden und eines ungeraden n durch 2λ verschiedene Summanden (unter denen auch die Null vorkommen darf) verstehen, folgende Formel:

$$\lambda.2.\Delta_{2\lambda} = -2q\Delta_{(\lambda-1)2}-2q\Delta_{(\lambda-2)2}-\ldots-2q\Delta_2-2,$$

welche allgemein durch

$$\Delta_{\lambda.2} = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda}\binom{q-1}{\lambda-1} = \frac{(-1)^\lambda}{q}\binom{q}{\lambda}$$

befriedigt wird.

Da sich ferner unter den $2q$ Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 2q-1$ genau q durch 2 theilbare finden, erhalten wir analog wie früher:

$$\binom{2q}{\lambda.2} = (n)_{\lambda.2}.2q+q\Delta_{\lambda.2} = (n)_{\lambda.2}.2q+(-1)^\lambda\binom{q}{\lambda},$$

worin n eine durch 2 untheilbare Zahl bedeutet.

Man erhält daraus für ein ungerades n:

$$(n)_{\lambda.2} = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q}{\lambda.2}+(-1)^{\lambda-1}\binom{q}{\lambda}\right]$$

und für ein gerades n durch Hinzuzählung von $\Delta_{\lambda.2}$

$$(n)_{\lambda.2} = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q}{\lambda.2}+(-1)^{\lambda}\binom{q}{\lambda}\right].$$

Zweitens ist der Fall zu erledigen, dass i durch die zweite Primzahl q theilbar ist. Offenbar kommt hier nur die Zahl q selbst als Darstellungsindex in Betracht. Die Recursionsformel (1) liefert für Δ_q (worunter wieder die Differenz der Darstellungsanzahlen einer durch q theilbaren und einer durch q untheilbaren Zahl verstanden sein soll) den Wert:

$$q\Delta_q = (-1)^{q-1}q, \text{ also } \Delta_q = 1.$$

In der Reihe $0, 1, 2, \ldots 2q-1$ gibt es nur zwei Zahlen, die durch q theilbar sind; es ist daher, unter n zunächst eine durch q untheilbare Zahl verstanden:

$$\binom{2q}{q} = 2q(n)_q + 2\Delta_q = 2q(n)_q + 2,$$

woraus sich ergibt:

$$(n)_q = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q}{q} - 2\right],$$

während in dem Falle, wo n durch q theilbar ist, noch die Differenz Δ_q hinzukommt, was für $(n)_q$ den Ausdruck liefert:

$$(n)_q = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q}{q} + 2(q-1)\right].$$

Schließlich sind noch die Anzahlen $(n)_0$ und $(n)_{2q}$ zu bestimmen.

$(n)_0 = 1$, wenn $n \equiv 0 \pmod{2q}$, sonst gleich 0.

Da ferner die Summe aller $2q$ Darstellungselemente

$$0+1+2+\ldots+2q-1 = \frac{2q(2q-1)}{2} \equiv q \pmod{2q}$$

ist, so ist

$(n)_{2q} = 1$, wenn $n \equiv q \pmod{2q}$, sonst $= 0$.

2. Um auch für den Modul $2q$ die Anzahl $(n)_i^{(0)}$ zu bestimmen, setzen wir die gefundenen Werte für $(n)_i$ in die rechte Seite von (2) ein. Wir setzen dabei wieder voraus, dass der Index i die beiden folgenden Formen habe:

$$i = \lambda . 2 + \rho \qquad 0 \leqq \rho < 2$$
$$i = \mu . q + \sigma \qquad 0 \leqq \sigma < q.$$

Ganz analog dem Falle des Moduls pq erhalten wir nach einfachen Überlegungen, wenn n weder durch 2, noch durch q theilbar ist:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q}{i} - \binom{2q}{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1}\binom{2q}{1}\right]$$
$$+ \frac{(-1)^\rho}{2q}\left[(-1)^{\lambda-1}\binom{q}{\lambda} + (-1)^{\lambda-2}\binom{q}{\lambda-1} + \ldots + \binom{q}{1}\right]$$
$$+ \frac{(-1)^\sigma . \mu . (-2)}{2q}.$$

Im Falle n durch 2 theilbar ist, wird sich das Vorzeichen der zweiten Zeile in das umgekehrte verwandeln; im Falle n durch q theilbar ist, wird das in der dritten Zeile stehende Glied das Vorzeichen wechseln und den Factor $q-1$ erhalten, im Falle endlich, wo n durch $2q$ theilbar ist, wird noch das Glied $(-1)^i$ hinzutreten. Aus alledem ergeben sich folgende Endformeln für $(n)_i^{(0)}$:

Wenn n ungerade und nicht durch q theilbar ist:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q-1}{i}+(-1)^{i-1}\right]+ \\ +\frac{(-1)^{\rho+\lambda-1}}{2q}\left[\binom{q-1}{\lambda}+(-1)^{\lambda-1}\right]+\frac{(-1)^{\sigma+1}.\mu}{q}.$$

Wenn n gerade und nicht durch q theilbar ist:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q-1}{i}+(-1)^{i-1}\right]+ \\ +\frac{(-1)^{\rho+\lambda}}{2q}\left[\binom{q-1}{\lambda}+(-1)^{\lambda-1}\right]+\frac{(-1)^{\sigma+1}.\mu}{q}.$$

Wenn n ungerade und durch q theilbar ist:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q-1}{i}+(-1)^{i-1}\right]+ \\ +\frac{(-1)^{\rho+\lambda-1}}{2q}\left[\binom{q-1}{\lambda}+(-1)^{\lambda-1}\right]+\frac{(-1)^{\sigma}\mu.(q-1)}{q}.$$

Wenn endlich n durch $2q$ theilbar ist:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{2q}\left[\binom{2q-1}{i}+(-1)^{i-1}\right]+ \\ +\frac{(-1)^{\rho+\lambda}}{2q}\left[\binom{q-1}{\lambda}+(-1)^{\lambda-1}\right]+\frac{(-1)^{\sigma}\mu(q-1)}{q}+(-1)^{i}.$$

3. Will man auch hier die Anzahldifferenz der geraden und ungeraden Darstellungen der Zahl n haben, so erkennt man durch Ausführung der Summation, dass diese Anzahldifferenz in den hier angeführten vier Fällen bezüglich die

Werte $+1, -1, -(q-1), q-1$ annimmt, so dass die für den Modul pq giltigen Formeln richtig bleiben, wenn einfach p durch 2 ersetzt wird.

V. Der Modul $M = p^{\varkappa}$, $\varkappa > 1$.

1. Wir setzen p als ungerade Primzahl voraus. Die Anzahl $(n)_i$ hängt hier offenbar nur vom Index i und vom Exponenten der höchsten in n aufgehenden Potenz des p ab, da wir ja allgemein gesehen haben, dass zwei Zahlen dieselbe Darstellungsanzahl $(n)_i$ besitzen, wenn sie denselben größten gemeinschaftlichen Theiler mit dem Modul haben.

Es empfiehlt sich nun folgende Bezeichnung: Ist n genau durch p^{α} theilbar, so wollen wir setzen:

$$(n)_i = (r)_i + \Delta_i' + \Delta_i^2 + \ldots + \Delta_i^{\alpha}.$$

Hierin bedeutet r eine zum Modul theilerfremde, also durch p untheilbare Zahl und Δ_i^{α} (wobei α kein Exponent, sondern ein oberer Index ist) den Unterschied der Darstellungsanzahlen einer durch p^{α} und einer bloß durch $p^{\alpha-1}$ theilbaren Zahl durch i incongruente Summanden (mod. $p^{\varkappa}$), unter denen auch die Null vorkommen darf.

Die Bestimmung der Anzahlen $(n)_i$ kommt somit auf diejenige von $(r)_i$ und Δ_i^{α} (für die oberen Indices $\alpha = 1, 2, \ldots \varkappa$) zurück, welche wir nun in Angriff nehmen wollen.

Die Recursionsformel (1) lehrt zunächst die interessante Thatsache kennen, dass Δ_i^{α} nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn i durch p^{α} theilbar ist. Dies erschließt man auf folgende Weise:

Irgendein Glied der Recursionsformel (1) lautet, vom Zeichen abgesehen:

$$\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}.$$

Hierin durchläuft e ein vollständiges Restsystem (mod. $p^{\varkappa}$); wir wollen annehmen, dass p^{α} die höchste in n aufgehende Potenz des p sei, p^{β} die höchste in λ aufgehende Potenz des p. Der in der Klammer stehende Ausdruck $n-\lambda e$ wird unter dieser Voraussetzung lauter Zahlen durchlaufen, die mindestens durch die niedrigere der beiden Potenzen p^{α} und p^{β} theilbar sind. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Im Falle $\alpha < \beta$ durchläuft $n - \lambda e$ lauter Zahlen, die genau durch p^α theilbar sind, in diesem Falle ist also

$$\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda} = p^\varkappa (r)_{i-\lambda} + p^\varkappa \Delta'_{i-\lambda} + p^\varkappa \Delta^2_{i-\lambda} + \ldots + p^\varkappa \Delta^\alpha_{i-\lambda}.$$

Im Falle $\alpha \geqq \beta$ hingegen durchläuft λe, wie man leicht erkennt, alle durch p^β theilbaren Individuen des vollständigen Restsystems (mod. $p^\varkappa$), und zwar jedes dieser Individuen p^β-mal. Dasselbe wird offenbar auch von $n - \lambda e$ gelten. Unter diesen mindestens durch p^β theilbaren Individuen des vollständigen Restsystems (mod. $p^\varkappa$) finden sich

$p^{\varkappa-\beta} - p^{\varkappa-\beta-1}$	Zahlen, die genau durch	p^β	theilbar sind,
$p^{\varkappa-\beta-1} - p^{\varkappa-\beta-2}$	» » » »	$p^{\beta+1}$	» »
. . . .			
$p^2 - p$	» » » »	$p^{\varkappa-2}$	» »
$p - 1$	» » » »	$p^{\varkappa-1}$	» »

und

1	Zahl, » » »	$p^\varkappa$	» ist.

Daher hat das betrachtete Glied in diesem Falle folgenden Wert:

$$\begin{aligned}\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda} = \; & p^\beta \{ 1.[(r)_{i-\lambda} + \Delta'_{i-\lambda} + \Delta^2_{i-\lambda} + \ldots + \Delta^\varkappa_{i-\lambda}] \\ & + (p-1)[(r)_{i-\lambda} + \Delta'_{i-\lambda} + \Delta^2_{i-\lambda} + \ldots + \Delta^{\varkappa-1}_{i-\lambda}] \\ & + (p^2-p)[(r)_{i-\lambda} + \Delta'_{i-\lambda} + \Delta^2_{i-\lambda} + \ldots + \Delta^{\varkappa-2}_{i-\lambda}] \\ & + \ldots\ldots \\ & + (p^{\varkappa-\beta} - p^{\varkappa-\beta-1})[(r)_{i-\lambda} + \Delta'_{i-\lambda} + \Delta^2_{i-\lambda} + \ldots + \Delta^\beta_{i-\lambda}]\} \\ = \; & p^\varkappa (r)_{i-\lambda} + p^\varkappa \Delta'_{i-\lambda} + p^\varkappa \Delta^2_{i-\lambda} + \ldots + p^\varkappa \Delta^\beta_{i-\lambda} + \\ & + p^{\varkappa-1} \Delta^{\beta+1}_{i-\lambda} + p^{\varkappa-2} \Delta^{\beta+2}_{i-\lambda} + \ldots + p^\beta \Delta^\varkappa_{i-\lambda}.\end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, n sei genau durch p^α theilbar und bilden hiefür die Gleichung (1); dann stellen wir dieselbe Gleichung (1) für ein bloß durch $p^{\alpha-1}$ theilbares n auf und ziehen diese von der früheren Gleichung ab. Auf der linken

Seite erhalten wir dann offenbar $i\Delta_i^{\alpha}$, während in den rechts stehenden Gliedern $\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}$ berücksichtigt werden muss, welche Potenz des p in λ aufgeht. Hier sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

Erstens. Ist $\alpha<\beta$, also umsomehr $\alpha-1<\beta$, so liefert das betreffende Glied $\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}$, im Falle n durch p^{α} theilbar ist:

$$\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}=p^{\varkappa}(r)_{i-\lambda}+p^{\varkappa}\Delta'_{i-\lambda}+\ldots+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha-1}+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha}$$

und im Falle n bloß durch $p^{\alpha-1}$ theilbar ist, den Beitrag:

$$\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}=p^{\varkappa}(r)_{i-\lambda}+p^{\varkappa}\Delta'_{i-\lambda}+\ldots+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha-1}.$$

Zur Differenz $i\Delta_i^{\alpha}$ erhalten wir daher aus einem solchen Gliede den Beitrag

$$p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha}.$$

Zweitens. Ist $\alpha=\beta$, also $\alpha-1<\beta$, dann ist für ein durch p^{α} theilbares n

$$\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}=p^{\varkappa}(r)_{i-\lambda}+p^{\varkappa}\Delta'_{i-\lambda}+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{2}+\ldots+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha}+$$
$$+p^{\varkappa-1}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha+1}+p^{\varkappa-2}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha+2}+\ldots+p^{\alpha}\Delta_{i-\lambda}^{\varkappa}$$

und für ein bloß durch $p^{\alpha-1}$ theilbares n

$$\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}=p^{\varkappa}(r)_{i-\lambda}+p^{\varkappa}\Delta'_{i-\lambda}+\ldots+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha-1}.$$

Hier erhalten wir also aus dem betreffenden Gliede zur Differenz $i\Delta_i^{\alpha}$ den Beitrag

$$p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha}+p^{\varkappa-1}\Delta_{i-\lambda}^{\alpha+1}+\ldots+p^{\alpha}\Delta_{i-\lambda}^{\varkappa}.$$

Drittens. Ist $\alpha>\beta$, also $\alpha-1\geqq\beta$, so hat das Glied $\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}$ in den beiden Fällen eines durch p^{α} und eines bloß durch $p^{\alpha-1}$ theilbaren n genau den gleichen Wert, nämlich

$$\Sigma(n-\lambda e)_{i-\lambda}=p^{\varkappa}(r)_{i-\lambda}+p^{\varkappa}\Delta'_{i-\lambda}+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{2}+\ldots+p^{\varkappa}\Delta_{i-\lambda}^{\beta}+$$
$$+p^{\varkappa-1}\Delta_{i-\lambda}^{\beta+1}+\ldots+p^{\beta}\Delta_{i-\lambda}^{\varkappa}.$$

Für die Differenz $i\Delta_i^\alpha$ liefert es daher unter dieser Voraussetzung keinen Beitrag.

Wir können somit allgemein die Formel aufstellen:

$$i\Delta_i^\alpha = \sum_{\lambda_1} (-1)^{\lambda_1 - 1} p^\varkappa \Delta_{i-\lambda_1}^\alpha$$
$$+ \sum_{\lambda_2} (-1)^{\lambda_2 - 1} [p^\varkappa \Delta_{i-\lambda_2}^\alpha + p^{\varkappa-1} \Delta_{i-\lambda_2}^{\alpha+1} + \ldots + p^\alpha \Delta_{i-\lambda_2}^\varkappa], \tag{4}$$

wobei in der ersten Summe λ_1 alle Zahlen des Intervalles $1, 2 \ldots p^\varkappa$ zu durchlaufen hat, welche mindestens durch $p^{\alpha+1}$ theilbar sind, in der zweiten Summe aber λ_2 alle jene, welche genau durch p^α theilbar sind.

Diese Recursionsformel genügt offenbar zur Bestimmung der sämmtlichen Differenzen Δ_i^α, indem wir mit $\alpha = \varkappa$ beginnen und dann successive zu kleineren Werten α übergehen.

Da bloß die Zahl 0 (oder die durch $p^\varkappa$ theilbaren Zahlen) sich durch 0 Summanden (mod. $p^\varkappa$) darstellen lässt, ist ersichtlicherweise

$$\Delta_0^1 = 0,\ \Delta_0^2 = 0, \ldots \Delta_0^{\varkappa-1} = 0,\ \Delta_0^\varkappa = 1.$$

Aus dem letzten dieser Werte ergibt sich nun auch $\Delta_i^\varkappa$. Setzen wir nämlich $i = p^\varkappa$, so liefert die Formel (4)

$$p^\varkappa \Delta_{p^\varkappa}^\varkappa = (-1)^{p^\varkappa - 1} p^\varkappa \Delta_0^\varkappa,$$

woraus sich $\Delta_{p^\varkappa}^\varkappa = 1$ ergibt.

Liegt hingegen i zwischen 0 und $p^\varkappa$, so ist $\Delta_i^\varkappa = 0$, da sich dann in der Formel (4) kein von 0 verschiedenes Glied findet.

Diese Recursionsformel (4) zeigt nun, dass Δ_i^α, wie behauptet wurde, überhaupt nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn i durch p^α theilbar ist.

Dies ist durch die vorstehende Bemerkung für den größtmöglichen Wert von α, $\alpha = \varkappa$, gezeigt worden. Nehmen wir aber an, es gelte dies der Reihe nach für die Differenzen $\Delta_i^\varkappa, \Delta_i^{\varkappa-1}, \Delta_i^{\varkappa-2}, \ldots \Delta_i^{\alpha+1}$, so lehrt eine einfache Überlegung, dass es auch für Δ_i^α richtig bleibt; denn die in der Formel (4) stehenden Größen $\Delta_{i-\lambda_2}^{\alpha+1}, \Delta_{i-\lambda_2}^{\alpha+2}, \ldots \Delta_{i-\lambda_2}^\varkappa$ sind dann gewiss nur für solche $i-\lambda_2$ von 0 verschieden, die durch p^α theilbar sind,

und da λ_2 durch p^α theilbar sein muss, so sind diese Größen gewiss auch nur für durch p^α theilbare i ungleich Null. Setzt man aber nun der Reihe nach in die Formel (4) $i = 1, 2, \ldots p^\varkappa$, so ist es ganz leicht, zu erkennen, dass thatsächlich Δ_i^α nur für die durch p^α theilbaren i von 0 verschieden ausfallen kann.

Nachdem dies feststeht, versuchen wir nun einen Ausdruck für Δ_i^α $(\alpha = \varkappa, \varkappa - 1, \ldots 2, 1)$ aufzustellen, welcher der Recursionsformel (4) genügt. Wir brauchen dabei für i nur solche Werte in Betracht zu ziehen, welche durch p^α theilbar sind, da für die übrigen $\Delta_i^\alpha = 0$ ist.

Es sei also $i = \lambda p^\alpha$; dann wollen wir beweisen, dass der Formel (4) durch folgenden Wert von Δ_i^α genügt werden kann:

$$\Delta_{\lambda p^\alpha}^\alpha = \frac{1}{p^{\varkappa-\alpha}} \binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda}$$

wenn λ nicht durch p theilbar ist.

$$\Delta_{\lambda p^\alpha}^\alpha = \frac{1}{p^{\varkappa-\alpha}} \binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda} - \frac{1}{p^{\varkappa-\alpha}} \binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\frac{\lambda}{p}}, \qquad (5)$$

wenn λ durch p theilbar ist.

Wir können auch die zweite Formel für alle (auch durch p untheilbaren) λ giltig sein lassen, wenn wir festsetzen, dass ein Binomialcoefficient, dessen untere Zahl nicht ganz ist, stets den Wert 0 haben soll.

Um die Richtigkeit der Formel (5) zu erweisen, setzen wir i als durch p^α theilbar voraus und ersetzen in der Formel (4) λ_1 und λ_2 bezüglich durch die Ausdrücke:

$$\lambda_1 = \rho p^{\alpha+1}$$
$$\lambda_2 = \rho p^\alpha,$$

wobei der neue Summationsbuchstabe ρ im ersten Falle beliebig sein kann, im zweiten aber durch p untheilbar sein muss. Wir können auch im zweiten Falle dem ρ beliebige Werte geben, müssen aber nach geschehener Summation die mit einem durch p theilbaren ρ behafteten Glieder wieder in Abzug bringen. Diese Überlegung führt die Formel (4), wenn man dieselbe noch durch p^α kürzt, in folgende Gestalt über:

$$\lambda \Delta^{\alpha}_{\lambda p^{\alpha}} = p^{\varkappa-\alpha} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha}_{(\lambda-\rho) p^{\alpha}}$$

$$+ p^{\varkappa-\alpha-1} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+1}_{(\lambda-\rho) p^{\alpha}} - p^{\varkappa-\alpha-1} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+1}_{(\lambda-\rho p) p^{\alpha}}$$

$$+ p^{\varkappa-\alpha-2} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+2}_{(\lambda-\rho) p^{\alpha}} - p^{\varkappa-\alpha-2} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+2}_{(\lambda-\rho p) p^{\alpha}}$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ p \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa-1}_{(\lambda-\rho) p^{\alpha}} - p \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa-1}_{(\lambda-\rho p) p^{\alpha}}$$

$$+ \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa}_{(\lambda-\rho) p^{\alpha}} - \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa}_{(\lambda-\rho p) p^{\alpha}}$$

In allen diesen Summen hat jetzt ρ der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, . . . zu durchlaufen.

Indem wir aus den unteren Indices die den oberen entsprechenden Potenzen des p herausheben, nimmt diese Formel weiter folgende Gestalt an:

$$\lambda . \Delta^{\alpha}_{\lambda p^{\alpha}} = p^{\varkappa-\alpha} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha}_{(\lambda-\rho) p^{\alpha}}$$

$$+ p^{\varkappa-\alpha-1} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+1}_{\frac{\lambda-\rho}{p} p^{\alpha+1}} - p^{\varkappa-\alpha-1} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+1}_{\frac{\lambda-\rho p}{p} p^{\alpha+1}}$$

$$+ p^{\varkappa-\alpha-2} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+2}_{\frac{\lambda-\rho}{p^2} p^{\alpha+2}} - p^{\varkappa-\alpha-2} \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\alpha+2}_{\frac{\lambda-\rho p}{p^2} p^{\alpha+2}}$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ p \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa-1}_{\frac{\lambda-\rho}{p^{\varkappa-\alpha-1}} p^{\varkappa-1}} - p \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa-1}_{\frac{\lambda-\rho p}{p^{\varkappa-\alpha-1}} p^{\varkappa-1}}$$

$$+ \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa}_{\frac{\lambda-\rho}{p^{\varkappa-\alpha}} p^{\varkappa}} - \sum_{\rho} (-1)^{\rho-1} \Delta^{\varkappa}_{\frac{\lambda-\rho p}{p^{\varkappa-\alpha}} p^{\varkappa}}$$

In die rechte Seite substituieren wir nun für die einzelnen Δ die Werte (5), wobei wir uns immer der zweiten Formel bedienen wollen, was bei der getroffenen Festsetzung über die Bedeutung

eines Binomialcoefficienten mit einer nicht ganzen unteren Zahl offenbar gestattet ist, und erhalten:

$$\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\left[\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda-\rho}-\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\dfrac{\lambda-\rho}{p}}\right]$$

$$+\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\left[\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\dfrac{\lambda-\rho}{p}}-\binom{p^{\varkappa-\alpha-2}}{\dfrac{\lambda-\rho}{p^{2}}}\right]-$$

$$-\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\left[\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\dfrac{\lambda-p\rho}{p}}-\binom{p^{\varkappa-\alpha-2}}{\dfrac{\lambda-p\rho}{p^{2}}}\right]$$

$$+\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\left[\binom{p^{\varkappa-\alpha-2}}{\dfrac{\lambda-\rho}{p^{2}}}-\binom{p^{\varkappa-\alpha-3}}{\dfrac{\lambda-\rho}{p^{3}}}\right]-$$

$$-\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\left[\binom{p^{\varkappa-\alpha-2}}{\dfrac{\lambda-p\rho}{p^{2}}}-\binom{p^{\varkappa-\alpha-3}}{\dfrac{\lambda-p\rho}{p^{3}}}\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\left[\binom{p}{\dfrac{\lambda-\rho}{p^{\varkappa-\alpha-1}}}-\binom{1}{\dfrac{\lambda-\rho}{p^{\varkappa-\alpha}}}\right]-$$

$$-\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\left[\binom{p}{\dfrac{\lambda-\rho p}{p^{\varkappa-\alpha-1}}}-\binom{1}{\dfrac{\lambda-\rho p}{p^{\varkappa-\alpha}}}\right]$$

$$+\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\binom{1}{\dfrac{\lambda-\rho}{p^{\varkappa-\alpha}}}\quad-\sum_{\rho}(-1)^{\rho-1}\binom{1}{\dfrac{\lambda-\rho p}{p^{\varkappa-\alpha}}}$$

Die in der zweiten Verticalreihe stehenden Glieder heben sich nun sämmtlich gegen die in der ersten um eine Zeile tiefer stehenden Glieder und in gleicher Weise die in der vierten Colonne gegen die um eine Zeile tiefer stehenden Glieder der dritten Colonne, so dass sich dieser ganze Ausdruck auf Folgendes reduciert:

$$\sum_\rho (-1)^{\rho-1}\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda-\rho}-\sum_\rho(-1)^{\rho-1}\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\frac{\lambda-p\rho}{p}}=$$

$$=\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda-1}-\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda-2}+\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda-3}-\dots$$

$$-\left[\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\frac{\lambda}{p}-1}-\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\frac{\lambda}{p}-2}+\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\frac{\lambda}{p}-3}+\dots\right].$$

Durch Verwendung der Formel (3) können wir diese beiden Summationen ausführen und erhalten das Resultat:

$$\binom{p^{\varkappa-\alpha}-1}{\lambda-1}-\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}-1}{\frac{\lambda}{p}-1},$$

dem man auch die folgende Form geben kann:

$$\frac{\lambda}{p^{\varkappa-\alpha}}\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\lambda}-\frac{\lambda}{p^{\varkappa-\alpha}}\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\frac{\lambda}{p}}.$$

In genau denselben Ausdruck geht aber auch die linke Seite unserer Gleichung, nämlich $\lambda\Delta^{\alpha}_{\lambda p^{\alpha}}$ über, wenn wir für $\Delta^{\alpha}_{\lambda p^{\alpha}}$ den Wert (5) einsetzen. Es ist somit gezeigt, dass der Ausdruck (5) thatsächlich unserer Recursionsformel (4) genügt.

Es liege nun ein bestimmter Index i gegeben vor; wir wollen annehmen, dass dieser genau durch p^{α} theilbar sei. Dann liefert (5) folgende Beziehungen:

$$\Delta^{\beta}_i=0, \text{ wenn } \beta>\alpha \text{ ist.}$$

$$\Delta^{\alpha}_i=\frac{1}{p^{\varkappa-\alpha}}\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\frac{i}{p^{\alpha}}}$$

$$\Delta^{\alpha-1}_i=\frac{1}{p^{\varkappa-\alpha+1}}\binom{p^{\varkappa-\alpha+1}}{\frac{i}{p^{\alpha-1}}}-\frac{1}{p^{\varkappa-\alpha+1}}\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\frac{i}{p^{\alpha}}}$$

$$\Delta^{\alpha-2}_i=\frac{1}{p^{\varkappa-\alpha+2}}\binom{p^{\varkappa-\alpha+2}}{\frac{i}{p^{\alpha-2}}}-\frac{1}{p^{\varkappa-\alpha+2}}\binom{p^{\varkappa-\alpha+1}}{\frac{i}{p^{\alpha-1}}}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^{1}_i=\frac{1}{p^{\varkappa-1}}\binom{p^{\varkappa-1}}{\frac{i}{p}}-\frac{1}{p^{\varkappa-1}}\binom{p^{\varkappa-2}}{\frac{i}{p^{2}}}.$$

Es sei nun r eine durch p untheilbare Zahl. Betrachten wir alle additiven Verbindungen von je i Elementen des vollständigen Restsystems (mod. $p^\varkappa$), so ist die Anzahl derselben $\binom{p^\varkappa}{i}$. Anderseits ist diese Anzahl auch gleich $(0)_i+(1)_i+\ldots$ $\ldots+(p^\varkappa-1)_i$. Vereinigen wir hierin alle Glieder, bei denen die in der Klammer stehende Zahl denselben größten gemeinsamen Theiler mit $p^\varkappa$ hat, so erhalten wir, da sich im vollständigen Restsystem (mod. $p^\varkappa$) $p^{\varkappa-1}$ Zahlen finden, welche mindestens durch p theilbar sind, $p^{\varkappa-2}$ Zahlen, die mindestens durch p^2 theilbar sind u. s. f., folgende Beziehung:

$$p^\varkappa(r)_i+p^{\varkappa-1}\Delta_i'+p^{\varkappa-2}\Delta_i^2+\ldots+p^{\varkappa-\alpha}\Delta_i^\alpha = \binom{p^\varkappa}{i}.$$

Hiebei ist wie oben vorausgesetzt, dass i genau durch p^α theilbar ist.

Setzt man in diese Formel für $\Delta_i', \Delta_i^2, \ldots \Delta_i^\alpha$ die oben gefundenen Werte, so ergibt sich unmittelbar:

$$p^\varkappa(r)_i+\binom{p^{\varkappa-1}}{\frac{i}{p}} = \binom{p^\varkappa}{i}.$$

Hiedurch ist also $(r)_i$ gegeben; durch successive Addition der Größen $\Delta_i', \Delta_i^2, \ldots \Delta_i^\alpha$ ergeben sich weiter die Formeln für die Werte $(n)_i$, wenn n durch die 1., 2.,... αte Potenz des p theilbar ist, und zwar

wenn n nicht durch p theilbar ist:

$$(n)_i = (r)_i = \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^\varkappa}{i}-\frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^{\varkappa-1}}{\frac{i}{p}},$$

wenn n genau durch p theilbar ist:

$$(n)_i = (r)_i+\Delta_i' = \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^\varkappa}{i}+\frac{p-1}{p^\varkappa}\binom{p^{\varkappa-1}}{\frac{i}{p}}-\frac{1}{p^{\varkappa-1}}\binom{p^{\varkappa-2}}{\frac{i}{p^2}}$$

. . . .

wenn n genau durch $p^{\alpha-1}$ theilbar ist:

$$(n)_i = (r)_i + \Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \ldots + \Delta_i^{\alpha-1} =$$

$$= \frac{1}{p^{\varkappa}}\binom{p^{\varkappa}}{i} + \frac{p-1}{p^{\varkappa}}\binom{p^{\varkappa-1}}{\frac{i}{p}} + \frac{p-1}{p^{\varkappa-1}}\binom{p^{\varkappa-2}}{\frac{i}{p^2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p-1}{p^{\varkappa-\alpha+2}}\binom{p^{\varkappa-\alpha+1}}{\frac{i}{p^{\alpha-1}}} - \frac{1}{p^{\varkappa-\alpha+1}}\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\frac{i}{p^{\alpha}}},$$

wenn n durch p^{α} oder eine höhere Potenz theilbar ist:

$$(n)_i = (r)_i + \Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \ldots + \Delta_i^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{p^{\varkappa}}\binom{p^{\varkappa}}{i} + \frac{p-1}{p^{\varkappa}}\binom{p^{\varkappa-1}}{\frac{i}{p}} + \frac{p-1}{p^{\varkappa-1}}\binom{p^{\varkappa-2}}{\frac{i}{p^2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p-1}{p^{\varkappa-\alpha+2}}\binom{p^{\varkappa-\alpha+1}}{\frac{i}{p^{\alpha-1}}} + \frac{p-1}{p^{\varkappa-\alpha+1}}\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\frac{i}{p^{\alpha}}}.$$

Hiebei ist i als genau durch p^{α} theilbar vorausgesetzt.

Infolge unserer Übereinkunft, einem Binomialcoefficienten den Wert 0 zuzuschreiben, wenn die untere in ihm stehende Zahl nicht ganz ist, können wir ganz allgemein für eine Zahl n, die genau durch p^{α} theilbar ist, folgende für alle i giltige Formel aufstellen, die alle obigen Formeln in sich begreift:

$$(n)_i = \frac{1}{p^{\varkappa}}\binom{p^{\varkappa}}{i} + \frac{p-1}{p^{\varkappa}}\binom{p^{\varkappa-1}}{\frac{i}{p}} + \frac{p-1}{p^{\varkappa-1}}\binom{p^{\varkappa-2}}{\frac{i}{p^2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p-1}{p^{\varkappa-\alpha+1}}\binom{p^{\varkappa-\alpha}}{\frac{i}{p^{\alpha}}} - \frac{1}{p^{\varkappa-\alpha}}\binom{p^{\varkappa-\alpha-1}}{\frac{i}{p^{\alpha+1}}}.$$

Hiemit ist die Aufgabe, die Anzahl der Darstellungen einer Zahl n durch i incongruente Elemente des vollständigen Restsystems, unter denen auch die Null vorkommen kann, zu finden, für den Modul $p^{\varkappa}$ vollständig gelöst.

2. Wir gehen nun dazu über, für den Modul $p^\varkappa$ die Darstellungsanzahl $(n)_i^{(0)}$ zu bestimmen, d. i. die Anzahl der Zerlegungen der Zahl n in i incongruente Summanden (mod. $p^\varkappa$), deren keiner durch den Modul theilbar sein darf. $(n)_i^{(0)}$ ist durch die Formel (2) gegeben.

Wir bezeichnen nun in üblicher Weise mit $[x]$ die größte in x enthaltene ganze Zahl; dann lässt sich unmittelbar einsehen, dass in der rechten Seite von (2) die Indices

$$p\left[\frac{i}{p}\right],\ p\left[\frac{i}{p}\right]-p,\ p\left[\frac{i}{p}\right]-2p,\ldots$$

durch p theilbar sind und dass allgemein die Indices

$$p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right],\ p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]-p^\lambda,\ p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]-2p^\lambda,\ldots$$

durch p^λ theilbar sind.

Durch Einsetzen der im vorhergehenden Abschnitte gefundenen Werte für $(n)_i, (n)_{i-1},\ldots$ in die rechte Seite der Gleichung (2) werden wir, wenn wir die durch p^λ theilbaren Indices ins Auge fassen, zu folgenden Theilsummen geführt:

$$(-1)^{i-p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}\binom{p^{\varkappa-\lambda}}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}+(-1)^{i-p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]+p^\lambda}\binom{p^{\varkappa-\lambda}}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]-1}+$$
$$+(-1)^{i-p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]+2p^\lambda}\binom{p^{\varkappa-\lambda}}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]-2}+\ldots$$
$$=(-1)^{i-p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}\left[\binom{p^{\varkappa-\lambda}}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}-\binom{p^{\varkappa-\lambda}}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]-1}+\ldots+(-1)^{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]-1}\binom{p^{\varkappa-\lambda}}{1}\right]=$$
$$=(-1)^{i-p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}\left[\binom{p^{\varkappa-\lambda}-1}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}+(-1)^{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]-1}\right]=$$
$$=(-1)^{i-p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}\binom{p^{\varkappa-\lambda}-1}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}+(-1)^{i-1}.$$

Nehmen wir zunächst an, n sei nicht durch p theilbar, dann kommt die erste der Formeln des früheren Abschnittes zur Anwendung und wir erhalten:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^\varkappa-1}{i} + \frac{(-1)^{i-1}}{p^\varkappa} - \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^{\varkappa-1}-1}{\left[\frac{i}{p}\right]} - \frac{(-1)^{i-1}}{p^\varkappa} =$$

$$= \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^\varkappa-1}{i} - \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^{\varkappa-1}}{\left[\frac{i}{p}\right]}.$$

Wenn n durch die erste Potenz des p theilbar ist, ergibt die zweite der Formeln für $(n)_i$ durch Einsetzen in (2):

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^\varkappa-1}{i} + \frac{(-1)^{i-1}}{p^\varkappa}$$

$$+ \frac{p-1}{p^\varkappa}(-1)^{i-p\left[\frac{i}{p}\right]}\binom{p^{\varkappa-1}-1}{\left[\frac{i}{p}\right]} + \frac{p-1}{p^\varkappa}(-1)^{i-1}$$

$$- \frac{1}{p^{\varkappa-1}}(-1)^{i-p^2\left[\frac{i}{p^2}\right]}\binom{p^{\varkappa-2}-1}{\left[\frac{i}{p^2}\right]} - \frac{1}{p^{\varkappa-1}}(-1)^{i-1},$$

welcher Ausdruck sich dadurch vereinfacht, dass

$$\frac{(-1)^{i-1}}{p^\varkappa} + \frac{p-1}{p^\varkappa}(-1)^{i-1} - \frac{(-1)^{i-1}}{p^{\varkappa-1}} = 0$$

ist.

Betrachten wir noch den Fall eines genau durch p^2 theilbaren n; dann liefern die Formeln für $(n)_i$ ganz analog:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^\varkappa-1}{i} + \frac{p-1}{p^\varkappa}(-1)^{i-p\left[\frac{i}{p}\right]}\binom{p^{\varkappa-1}-1}{\left[\frac{i}{p}\right]} +$$

$$+ \frac{p-1}{p^{\varkappa-1}}(-1)^{i-p^2\left[\frac{i}{p^2}\right]}\binom{p^{\varkappa-2}-1}{\left[\frac{i}{p^2}\right]}$$

$$- \frac{1}{p^{\varkappa-2}}(-1)^{i-p^3\left[\frac{i}{p^3}\right]}\binom{p^{\varkappa-3}-1}{\left[\frac{i}{p^3}\right]}$$

$$+(-1)^{i-1}\left[\frac{1}{p^\varkappa} + \frac{p-1}{p^\varkappa} + \frac{p-1}{p^{\varkappa-1}} - \frac{1}{p^{\varkappa-2}}\right]$$

und wieder bemerken wir, dass das letzte Glied dieses Ausdruckes verschwindet.

In dem Falle, als n genau durch die λ^{te} Potenz des p theilbar ist, verschwindet der Coefficient von $(-1)^{i-1}$ in genau derselben Weise, und wir erhalten daher in diesem Falle für $(n)_i^{(0)}$ den Ausdruck:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p^\varkappa}\binom{p^\varkappa-1}{i} + \frac{p-1}{p^\varkappa}(-1)^{i-p\left[\frac{i}{p}\right]}\binom{p^{\varkappa-1}-1}{\left[\frac{i}{p}\right]} +$$

$$+\frac{p-1}{p^{\varkappa-1}}(-1)^{i-p^2\left[\frac{i}{p^2}\right]}\binom{p^{\varkappa-2}-1}{\left[\frac{i}{p^2}\right]} +$$

$$+\frac{p-1}{p^{\varkappa-2}}(-1)^{i-p^3\left[\frac{i}{p^3}\right]}\binom{p^{\varkappa-3}-1}{\left[\frac{i}{p^3}\right]} + \dots$$

$$\dots + \frac{p-1}{p^{\varkappa-\lambda+1}}(-1)^{i-p^\lambda\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]}\binom{p^{\varkappa-\lambda}-1}{\left[\frac{i}{p^\lambda}\right]} -$$

$$-\frac{1}{p^{\varkappa-\lambda}}(-1)^{i-p^{\lambda+1}\left[\frac{i}{p^{\lambda+1}}\right]}\binom{p^{\varkappa-\lambda-1}-1}{\left[\frac{i}{p^{\lambda+1}}\right]}.$$

Diese Formel gilt für $i = 1,2,\dots p^\varkappa-1$ und für $\lambda = 0,1,2,\dots\varkappa$.

3. Um nun schließlich die Differenz $\Delta(n)$ der Darstellungsanzahlen der Zahl n durch eine gerade und durch eine ungerade Anzahl von incongruenten Summanden (mod. $p^\varkappa$), deren keiner durch den Modul theilbar sein soll, zu bestimmen, haben wir den Ausdruck:

$$\Delta(n) = \sum_{i=0}^{p^\varkappa-1}(-1)^i(n)_i^{(0)}$$

zu bilden. Die Summierung macht gar keine Schwierigkeiten, und es sei daher bloß das Resultat derselben angegeben. Es ergibt sich, dass $\Delta(n)$ verschwindet, wenn n nicht durch $p^{\varkappa-1}$ theilbar ist. Ist n genau durch $p^{\varkappa-1}$ theilbar, so ist

$$\Delta(n) = -p^{\varkappa-1},$$

und ist n durch $p^{\varkappa}$ theilbar, so ist

$$\Delta(n) = p^{\varkappa} - p^{\varkappa-1}.$$

VI. Der Modul $M = 2^{\varkappa}$.

1. Bei der Ableitung der Formeln für $(n)_i$ und $(n)_i^{(0)}$ für den Modul $p^{\varkappa}$ haben wir stets vorausgesetzt, dass die Basis p eine ungerade Primzahl ist. Nehmen wir an, dass der Modul eine Potenz von 2 ist, so treten in diesen Formeln einige Änderungen ein. Da jedoch die Beweisführungen in diesem Falle in vollständiger Analogie mit dem Falle eines ungeraden p stehen, so sollen im folgenden nur die fertigen Formeln für den Fall des Moduls $2^{\varkappa}$ mitgetheilt werden, während von der Wiedergabe der Ableitungen derselben abgesehen wird.

Wenn wir wieder mit Δ_i^{α} den Unterschied der beiden Darstellungsanzahlen $(n)_i$ und $(n')_i$ bezeichnen, wo n durch 2^{α}, n' aber bloß durch $2^{\alpha-1}$ theilbar ist, so genügt Δ_i^{α} nunmehr der folgenden Recursionsformel:

$$\begin{aligned} i\Delta_i^{\alpha} = & -2^{\varkappa} \sum_{\lambda_1} \Delta_{i-\lambda_1}^{\alpha} \\ & -2^{\varkappa} \sum_{\lambda_2} \Delta_{i-\lambda_2}^{\alpha} - 2^{\varkappa-1} \sum_{\lambda_2} \Delta_{i-\lambda_2}^{\alpha+1} - \ldots - 2^{\alpha} \sum_{\lambda_2} \Delta_{i-\lambda_2}^{\varkappa}, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei wieder λ_1 alle Zahlen des Intervalles $1, 2, \ldots 2^{\varkappa}$ zu durchlaufen hat, welche mindestens durch $2^{\alpha+1}$, λ_2 aber alle jene, welche genau durch 2^{α} theilbar sind.

Was zunächst die beiden Darstellungen durch 0 und durch $2^{\varkappa}$ Summanden betrifft, so sieht man leicht, dass die erstere nur für $n \equiv 0$ (mod. $2^{\varkappa}$), die letztere nur für $n \equiv 2^{\varkappa-1}$ (mod. $2^{\varkappa}$) möglich ist, da die Summe aller Elemente

$$0+1+2+\ldots+2^{\varkappa}-1 = \frac{2^{\varkappa}(2^{\varkappa}-1)}{2} \equiv 2^{\varkappa-1} \pmod{2^{\varkappa}}$$

ist. Es ist also zunächst $\Delta_0^{\varkappa} = 1$ und $\Delta_{2^{\varkappa}}^{\varkappa} = -1$, letzteres aus dem Grunde, weil die Darstellungsanzahl einer durch $2^{\varkappa}$ theilbaren Zahl durch $2^{\varkappa}$ Elemente um eine Einheit kleiner ist als die Darstellungsanzahl einer bloß durch $2^{\varkappa-1}$ theilbaren, indem

die erstere gleich Null, die letztere aber, wie wir soeben gesehen haben, gleich 1 ist.

Die Recursionsformel (6) zeigt nun auch hier, dass Δ_i^α nur dann von Null verschieden sein kann, wenn i durch 2^α theilbar ist, und führt zu folgendem Ausdrucke für $\Delta_{\lambda.2^\alpha}^\alpha$

$$\Delta_{\lambda.2^\alpha}^\alpha = -\frac{1}{2^{\varkappa-\alpha}}\binom{2^{\varkappa-\alpha}}{\lambda},$$

wenn λ ungerade ist;

$$\Delta_{\lambda.2^\alpha}^\alpha = \frac{1}{2^{\varkappa-\alpha}}\binom{2^{\varkappa-\alpha}}{\lambda} + (-1)^{\frac{\lambda}{2}-1}\frac{1}{2^{\varkappa-\alpha}}\binom{2^{\varkappa-\alpha-1}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)},$$

wenn λ gerade ist.

Es sei nun ein bestimmter Index i gegeben, welcher genau durch 2^α theilbar ist; dann findet man leicht folgende Formeln:

$$\Delta_i^\beta = 0 \text{ für } \beta > \alpha$$

$$\Delta_i^\alpha = -\frac{1}{2^{\varkappa-\alpha}}\binom{2^{\varkappa-\alpha}}{\frac{i}{2^\alpha}}$$

$$\Delta_i^{\alpha-1} = \frac{1}{2^{\varkappa-\alpha+1}}\binom{2^{\varkappa-\alpha+1}}{\frac{i}{2^{\alpha-1}}} + \frac{1}{2^{\varkappa-\alpha+1}}\binom{2^{\varkappa-\alpha}}{\frac{i}{2^\alpha}}$$

$$\Delta_i^{\alpha-2} = \frac{1}{2^{\varkappa-\alpha+2}}\binom{2^{\varkappa-\alpha+2}}{\frac{i}{2^{\alpha-2}}} - \frac{1}{2^{\varkappa-\alpha+2}}\binom{2^{\varkappa-\alpha+1}}{\frac{i}{2^{\alpha-1}}}$$

$$\Delta_i^{\alpha-3} = \frac{1}{2^{\varkappa-\alpha+3}}\binom{2^{\varkappa-\alpha+3}}{\frac{i}{2^{\alpha-3}}} - \frac{1}{2^{\varkappa-\alpha+3}}\binom{2^{\varkappa-\alpha+2}}{\frac{i}{2^{\alpha-2}}}$$

. . . .

$$\Delta_i^1 = \frac{1}{2^{\varkappa-1}}\binom{2^{\varkappa-1}}{\frac{i}{2}} - \frac{1}{2^{\varkappa-1}}\binom{2^{\varkappa-2}}{\frac{i}{2^2}}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke bestimmen wir nun wieder die Darstellungsanzahl $(r)_i$, wo r eine zum Modul theilerfremde, also ungerade Zahl bedeutet, und erhalten:

$$(r)_i = \frac{1}{2^x}\binom{2^x}{i},$$

wenn i ungerade ist,

$$(r)_i = \frac{1}{2^x}\binom{2^x}{i} + \frac{1}{2^x}\binom{2^x}{\frac{i}{2}},$$

wenn i durch 2, aber nicht durch 4 theilbar ist,

$$(r)_i = \frac{1}{2^x}\binom{2^x}{i} - \frac{1}{2^x}\binom{2^x}{\frac{i}{2}},$$

wenn i durch 4 theilbar ist.

Ist n durch 2^α theilbar, so erhalten wir für jeden einzelnen Wert des i die Darstellungsanzahl $(n)_i$ in der Form:

$$(n)_i = (r)_i + \Delta_i' + \Delta_i^2 + \ldots + \Delta_i^\alpha;$$

durch successive Addition dieser Größen gelangen wir zu folgender, für alle Werte x und i giltigen Formel:

$$(n)_i = \frac{1}{2^x}\binom{2^x}{i} + \frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{2^x}\binom{2^{x-1}}{\frac{i}{2}} + \frac{(-1)^{\frac{i}{2^2}}}{2^{x-1}}\binom{2^{x-2}}{\frac{i}{2^2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{i}{2^3}}}{2^{x-2}}\binom{2^{x-3}}{\frac{i}{2^3}} + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{i}{2^\alpha}}}{2^{x-\alpha+1}}\binom{2^{x-\alpha}}{\frac{i}{2^\alpha}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{i}{2^{\alpha+1}}-1}}{2^{x-\alpha}}\binom{2^{x-\alpha-1}}{\frac{i}{2^{\alpha+1}}}.$$

Auch in dieser Formel haben wir einem Binomialcoefficienten den Wert 0 zu ertheilen, wenn die untere in ihm stehende Zahl nicht ganz ist.

2. Was die Anzahlen $(n)_i^{(0)}$ für den Modul 2^x betrifft, so ist der Vorgang bei der Berechnung derselben gleichfalls ganz analog jenem im Falle des Moduls p^x. Als Resultat ergibt sich die Formel, die für ein genau durch p^λ theilbares n gilt:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{2^\varkappa}\binom{2^\varkappa-1}{i} + \frac{(-1)^{i-\left[\frac{i}{2}\right]}}{2^\varkappa}\binom{2^{\varkappa-1}-1}{\left[\frac{i}{2}\right]} +$$

$$+\frac{(-1)^{i-\left[\frac{i}{2^2}\right]}}{2^{\varkappa-1}}\binom{2^{\varkappa-2}-1}{\left[\frac{i}{2^2}\right]} + \frac{(-1)^{i-\left[\frac{i}{2^3}\right]}}{2^{\varkappa-2}}\binom{2^{\varkappa-3}-1}{\left[\frac{i}{2^3}\right]} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{i-\left[\frac{i}{2^\lambda}\right]}}{2^{\varkappa-\lambda+1}}\binom{2^{\varkappa-\lambda}-1}{\left[\frac{i}{2^\lambda}\right]} - \frac{(-1)^{i-\left[\frac{i}{2^{\lambda+1}}\right]}}{2^{\varkappa-\lambda}}\binom{2^{\varkappa-\lambda-1}-1}{\left[\frac{i}{2^{\lambda+1}}\right]}.$$

Diese Formel gilt wieder für $i = 1, 2, \dots 2^\varkappa-1$ und für $\lambda = 0, 1, 2, \dots \varkappa$.

3. Schließlich erhält man auch hier für die Anzahldifferenz

$$\Delta(n) = \sum_{i=0}^{2^\varkappa-1} (-1)^i (n)_i^{(0)}$$

durch Ausführung der angezeigten Summation das Resultat, dass $\Delta(n) = 0$ ist, sobald n nicht durch $2^{\varkappa-1}$ theilbar ist, während für ein durch $2^{\varkappa-1}$ theilbares n

$$\Delta(n) = -2^{\varkappa-1}$$

und für ein durch $2^\varkappa$ theilbares n

$$\Delta(n) = 2^\varkappa - 2^{\varkappa-1}$$

ist.

Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Coordinaten

von

Ludwig Boltzmann in Wien,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. December 1902.)

In Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik (Bd. 98, Heft 1, S. 87) habe ich als Beispiel zur Erläuterung eines allgemeinen Theorems den folgenden Fall betrachtet.

Zwei Riemenscheiben sind durch einen Treibriemen verbunden, welcher parallel der Achse der Scheiben in ähnlicher Weise hin- und hergeschoben werden kann, wie man einen Treibriemen von einer wirkenden Scheibe auf eine Leerscheibe oder umgekehrt verschiebt. Die eine Riemenscheibe verjüngt sich nach einer Seite hin, wogegen sich die andere nach der entgegengesetzten Seite nach einem solchen Gesetze verjüngt, dass ein und derselbe Treibriemen überall passt, wenn er in der geschilderten Weise verschoben wird. Eine solche Verschiebung des Riemens bewirkt gewissermaßen eine Veränderlichkeit der Radien r_1 und r_2 der beiden Riemenscheiben und daher auch des Übersetzungsverhältnisses $a = r_1 / r_2$.

Ist daher ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der einen, ω_2 die der anderen Riemenscheibe, so hat man $\omega_2 = a\omega_1$. Wenn a veränderlich ist, so kann man a und die gesammte Winkeldrehung w_1 der ersten Riemenscheibe während einer gewissen Zeit als Coordinaten eines Punktes P, der entweder der zweiten Riemenscheibe angehört oder mit ihr fest verbunden ist, wählen. Es sind dies nichtholonome Coordinaten, da es zur

Bestimmung der Lage des Punktes P nicht gleichgiltig ist, ob zuerst a und dann w_1, oder umgekehrt zuerst w_1 und dann a sich um dieselben Beträge ändern.

Der gleiche Effect würde erzielt, wenn sich zwischen zwei nach entgegengesetzten Seiten konisch sich verjüngenden drehbaren Rotationskörpern eine Scheibe S drehen würde, die auf keinem der Rotationskörper gleiten könnte und die parallel ihrer Drehungsachse verschiebbar wäre.

Man kann vielleicht zweifeln, ob derartige Bedingungen ohne jede Gleitung realisierbar sind. Jedenfalls haben aber die Bedingungen, an welche wir uns das aus den beiden Riemenscheiben bestehende mechanische System gebunden dachten, genau die Eigenschaften, welche Hertz in seiner Mechanik von nichtholonomen Bedingungen fordert (Hertz's Mechanik, 1. Buch, Abschnitt IV).

Die Zuwächse der rechtwinkeligen Coordinaten eines jeden dieser Punkte sind in der Form

$$dx = A\,dw_1 + B\,da$$

darstellbar, wobei $B = 0$, A aber von a abhängig ist, so dass also dx kein vollständiges Differentiale ist. So ist z. B. eine unendlich kleine Winkeldrehung dw_2 der zweiten Riemenscheibe gleich $a\,dw_1$.

Ich zögerte am eingangs citierten Orte nicht, die Lagrange'schen Gleichungen auf diesen Fall anzuwenden, sah aber später ein, dass dies nicht erlaubt ist, wie die folgenden Betrachtungen lehren.

Die Summe der lebendigen Kraft aller mit den beiden Riemenscheiben fest verbundenen Massen kann als Function von a und $\frac{dw_1}{dt}$ ausgedrückt werden. Sie ist

$$T = \frac{1}{2}(K + La^2)\left(\frac{dw_1}{dt}\right)^2,$$

wenn t die Zeit ist und K und L die Trägheitsmomente aller mit der ersten, respective zweiten Riemenscheibe fest verbundenen Massen bezüglich der jeweiligen Drehungsachsen sind. Alles übrige denken wir uns dabei massenlos, so unter

anderen den Riemen, respective die Scheibe S. Die partielle Differentiation von T nach $\frac{dw_1}{dt}$ gibt vollkommen richtig die Kraft, welche nach der Coordinate w_1 wirkt und welche wir uns an einem mit der ersten Riemenscheibe fest verbundenen Punkte angreifend denken können.

Allein a hängt von den Coordinaten ab, welche die Lage des Riemens, respective der Scheibe S bestimmen. Die Differentialquotienten dieser Coordinaten nach der Zeit kommen zwar in T nicht vor, wohl aber kommen diese Coordinaten undifferenziert in T vor. Die Lagrange'schen Gleichungen liefern daher durch partielle Differentiation der Größe T nach diesen Coordinaten Kräfte, welche nach diesen Coordinaten wirken, d. h. sie zu verändern streben, welche aber nicht existieren.

Die Lagrange'schen Gleichungen sind daher nur für holonome Coordinaten richtig und es lohnt sich wohl der Mühe, zu fragen, welche Gleichungen bei nichtholonomen Coordinaten an Stelle der Lagrange'schen auftreten.

Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns die Lage der Bestandtheile eines beliebigen mechanischen Systems (einer beliebigen Anzahl n materieller Punkte) zunächst durch rechtwinkelige Coordinaten bestimmt. x_i sei eine beliebige derselben. Zwischen ihnen können Bedingungsgleichungen bestehen, welche wir in der Form schreiben:

$$\eta_j dt + \Sigma_i \eta_j^i dx_i = 0, \qquad j = 1, 2, 3 \ldots \sigma. \qquad 1)$$

Von denselben können beliebige holonom, beliebige andere nichtholonom sein. Für die holonomen sind natürlich die linken Seiten der obigen Gleichungen integrabel.

Die Lage sämmtlicher Theile des mechanischen Systems soll auch durch verallgemeinerte Coordinaten p_h bestimmbar sein, und zwar betrachten wir zunächst den Fall, dass die Anzahl der verallgemeinerten Coordinaten gleich ist der Zahl s der Freiheitsgrade des Systems, also gleich der Differenz der Anzahl $3n$ der rechtwinkeligen Coordinaten und der Anzahl σ der zwischen ihnen bestehenden Bedingungsgleichungen.

Die p_h sollen aber (wenigstens einige derselben) nicht-holonome Coordinaten sein, es sollen die Differentiale der rechtwinkeligen Coordinaten durch die verallgemeinerten Coordinaten mit Hilfe von Gleichungen gegeben sein, welche die Form haben:

$$dx_i = \xi_i dt + \Sigma_h \xi_i^h dp_h. \qquad 2)$$

Die rechten Seiten beliebig vieler dieser Gleichungen können integrabel sein, so dass die betreffenden Gleichungen in die Form gebracht werden können:

$$x_i = f(t, p_1, p_2, \ldots);$$

aber einige sollen nicht integrierbar sein, so dass also die verallgemeinerten Coordinaten keine holonomen sind. Die Größen ξ und η sind Functionen der Coordinaten, welche möglicherweise auch noch die Zeit t explicit enthalten können.

Die Kräfte X_i, welche im Sinne der rechtwinkeligen Coordinaten x_i auf die verschiedenen materiellen Punkte des Systems wirken, seien gegeben; dann hat man bekanntlich nach dem Lagrange-d'Alembert'schen Principe:

$$\sum_1^{3n} {}_i (X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i = 0. \qquad 3)$$

Den Fall einseitig wirkender Verbindungen, für welchen an Stelle des Gleichheitszeichens ein Ungleichheitszeichen treten würde, betrachten wir im folgenden nicht.

Die Buchstaben haben hier die übliche Bedeutung, nämlich $m_1 = m_2 = m_3$ ist die Masse des ersten, $m_4 = m_5 = m_6$ die des zweiten materiellen Punktes, ein darübergesetzter Punkt bedeutet den ersten, zwei den zweiten Differentialquotienten nach der Zeit, δx_i sind sogenannte virtuelle Verschiebungen, welche die auf einem bestimmten unveränderlichen Zeitmoment angewandten Bedingungen 1) erfüllen, in denen also $dt = 0$, für dx_i aber δx_i zu setzen ist, so dass sich ergibt:

$$\sum_1^{3n} {}_i \eta_j^i \delta x_i = 0, \qquad j = 1, 2 \ldots \sigma. \qquad 4)$$

Den aus den Gleichungen 2) bei Constanthaltung aller p_h folgenden Differentialquotienten von x_i nach t nennen wir den partiellen nach t und bezeichnen ihn mit $\partial x_i/\partial t$; eine analoge Bedeutung hat $\partial x_i/\partial p_h$, so dass man also hat:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \xi_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_h} = \xi_i^h. \tag{5}$$

Aus denselben Gleichungen folgt:

$$\dot{x}_i = \xi_i + \sum_{1h}^{s} \xi_i^h \dot{p}_h. \tag{6}$$

Dagegen ist bei Bildung der δx_i die Zeit constant zu erhalten, so dass man hat:

$$\delta x_i = \sum_{1h}^{s} \xi_i^h \delta p_h. \tag{7}$$

Versteht man daher unter einem partiellen Differentialquotienten der $\dot{x}_i$ einen solchen, wobei von den Variabeln t, x_i und $\dot{x}_i$ alle constant erhalten werden, bis auf die eine, nach welcher differentiiert wird, so ist:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h} = \frac{\partial \xi_i}{\partial p_h} + \sum_{1h}^{s} \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_h} \dot{p}_h, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_h} = \xi_i^h = \frac{\partial x_i}{\partial p_h}, \tag{9}$$

letzteres gemäß den Gleichungen 5). Durch Differentiation derselben Gleichungen folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial \xi_i^h}{\partial t} + \sum_{1k}^{s} \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_k} \dot{p}_k. \tag{10}$$

Es ist also:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial \xi_i}{\partial p_h} - \frac{\partial \xi_i^h}{\partial t} + \sum_{1k}^{s} \dot{p}_k \left(\frac{\partial \xi_i^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_k}\right).$$

Wir setzen nun kürzehalber:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_h} - \frac{\partial \xi_i^h}{\partial t} = \mathfrak{x}_i^h, \quad \frac{\partial \xi_i^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_k} = \mathfrak{x}_i^{hk}, \tag{11}$$

so dass wir schreiben können:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right) = \mathfrak{x}_i^h + \sum_1^s {}_k\, \mathfrak{x}_i^{hk} \dot{p}_k. \tag{12}$$

Die geometrische Bedeutung der hier neu eingeführten Größen ergibt sich durch folgende Betrachtungen.

Lässt man zuerst p_h um dp_h und hernach p_k um dp_k wachsen, so nimmt die Größe x_i zuerst um $\xi_i^h dp_h$, hernach um $\left(\xi_i^k + \frac{\partial \xi_i^k}{\partial p_h} dp_h\right) dp_k$ zu. Diejenige Stelle des Raumes, wohin während dieses ganzen Processes der materielle Punkt, dessen Masse m_r ist, von seiner Ausgangsstellung aus verschoben wird, heiße B_r^{hk}. Nun soll umgekehrt zuerst p_k um dp_k und dann erst p_h um dp_h wachsen, so dass zuerst x_i um $\xi_i^k dp_k$ und dann um $\left(\xi_i^h + \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_k} dp_k\right) dp_h$ wächst. Dabei gelange derselbe materielle Punkt, dessen Masse m_r ist, von seiner unverschobenen Lage nach A_r^{hk}. Man sieht sofort, dass, wenn $i = r$, $r+1$ oder $r+2$ ist, die Größe

$$\left(\frac{\partial \xi_i^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_k}\right) dp_h dp_k = \mathfrak{x}_i^{hk} dp_h dp_k$$

nichts anderes ist, als die Projection der geraden Verbindungslinie $A_r^{hk} B_r^{hk}$ der beiden Punkte A_r^{hk} und B_r^{hk} des Raumes auf diejenige Coordinatenaxe, nach welcher die x_i gezählt werden. Bezeichnet man diese Projection mit $C_i^{hk} D_i^{hk}$, so ist also:

$$\mathfrak{x}_r^{hk} = \lim \frac{C_i^{hk} D_i^{hk}}{dp_h dp_k}.$$

Ähnlich seien E_r^h und F_r^h die beiden Punkte des Raumes, wohin sich das Massentheilchen m_i verschiebt, wenn einmal zuerst t um dt und dann p_h um dp_k, das anderemal zuerst p_h

um dp_h, dann erst t um dt wächst. Ferner sei $G_i^h H_i^h$ die Projection von $E_r^h F_r^h$ auf diejenige Coordinatenaxe, nach welcher die x_i gezählt werden. In derselben Weise, in der sich früher die geometrische Bedeutung von $\mathfrak{x}_i^{hk}$ ergab, findet man jetzt, dass

$$\mathfrak{x}_i^h = \lim \frac{G_i^h H_i^h}{dt\,dp_h}$$

ist.

Bezeichnet man die Factoren, mit denen Lagrange die Bedingungsgleichungen 4) multipliciert, mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_s$, so folgt aus 3) und 4) in der bekannten Weise:

$$X_i = m\ddot{x}_i + \sum_{1}^{s}{}_j \lambda_j \eta_j^i, \qquad i = 1, 2, 3 \ldots n. \tag{13}$$

Führt man in dem Ausdrucke $\sum_{1}^{3n}{}_i X_i \delta x_i$ statt der δx_i die δp_h vermöge der Gleichungen 7) ein, so erhält man:

$$\sum_{1}^{3n}{}_i X_i \delta x_i = \sum_{1}^{s}{}_h \sum_{1}^{3n}{}_i X_i \xi_i^h \delta p_h. \tag{14}$$

Der Coefficient von δp_h in dem Ausdrucke rechts soll, wie bei holonomen generalisierten Coordinaten die nach der Coordinate p_h wirkende Kraft genannt und mit P_h bezeichnet werden, so dass man also hat:

$$P_h = \sum_{1}^{3n}{}_i X_i \xi_i^h = \sum_{1}^{3n}{}_i \left(m_i \ddot{x}_i + \sum_{1}^{s}{}_j \lambda_j \eta_j^i \right) \frac{\partial x_i}{\partial p_h}; \tag{15}$$

letzteres gemäß der Gleichung 13).

Wir wollen nun, wie man es bei Ableitung der Lagrange'schen Gleichungen zu thun pflegt, den Ausdruck $\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h}$ nach der Zeit differentiieren. Es folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p_h} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p_h} + \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_h} \right). \tag{16}$$

Bei holonomen Coordinaten kann man offenbar ohneweiters

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h}$$

setzen. Allein bei nichtholonomen ist dies nicht mehr gestattet. Denn es ist:

$$\dot{x}_i = \xi_i + \sum_{1}^{s}{}_k\, \xi_i^k \dot{p}_k,$$

daher:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h} = \frac{\partial \xi_i}{\partial p_h} + \sum_{1}^{s}{}_k \frac{\partial \xi_i^k}{\partial p_h} \dot{p}_k,$$

wogegen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_h} = \xi_i^h;$$

daher:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right) = \frac{d\xi_i^h}{dt} + \sum_{1}^{s}{}_k \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_k} \dot{p}_k$$

ist. Man hat daher:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p_h} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h} + \dot{x}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial p_h} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h}\right) \qquad 17)$$

oder nach Gleichung 12):

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p_h} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h} - \dot{x}_i \left(\mathfrak{x}_i^h + \sum_{1}^{s}{}_k \mathfrak{x}_i^{hk} \dot{p}_k\right). \qquad 18)$$

Wir multiplicieren nun diese Gleichung mit m_i, addieren beiderseits $\sum_{1}^{a}{}_j \lambda_j \eta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial p_h}$ und summieren schließlich bezüglich i von 1 bis $3n$.

Beginnen wir ganz links und schreiten zu immer mehr rechtsstehenden Gliedern der Gleichung 18) vor, so ist

1. nach Gleichung 9):

$$\sum_{1}^{3n}{}_i m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x}{\partial p_h}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{1}^{3n}{}_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_h} = \frac{dq_h}{dt}. \qquad 19)$$

q_h hat die bekannte Bedeutung. Es ist das Moment bezüglich der $h$ten Coordinate und wird gebildet, indem man die lebendige Kraft

$$T = \sum_{1}^{3n}{}_i\, m_i \dot{x}_i^2 \tag{19}$$

als Function der p_h und $\dot{p}_h$ ausdrückt und dann nach $\dot{p}_h$ partiell differentiiert.

2. Die p_h sollen die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Es ist also bei constanter Zeit für jedes $j(1, 2 \ldots \sigma)$:

$$\sum_{1}^{3n}{}_i\, \eta_j^i \delta x_i = 0, \tag{20}$$

wenn sich die p_h beliebig ändern, daher auch, wenn alle anderen bis auf eines, das wir wieder p_h nennen wollen, sowie die Zeit constant bleiben. Mit anderen Worten, es ist für jeden Wert von j und h:

$$\sum_{1}^{3n}{}_i\, \eta_j^i \frac{\partial x_i}{\partial p_h} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \ldots \sigma. \tag{21}$$

Wenn auch die Zeit um δt wachsen würde, so würden die x zudem etwas andere Functionen der p werden und man hätte jetzt für jedes j:

$$\eta_j \delta t + \sum_{1}^{3n}{}_i\, \eta_j^i \delta x_i = 0.$$

Diese Gleichung gilt jedoch für unsere jetzigen Betrachtungen nicht, da mit allen bisher durch das Zeichen δ bezeichneten Variationen keine Veränderung der Zeit verknüpft ist.

3. Nach Gleichung 15) ist:

$$\sum_{1}^{3n}{}_i\, (m_i \ddot{x}_i + \lambda_j \eta_j^i) \frac{\partial x_i}{\partial p_h} = P_h. \tag{22}$$

4. Aus Gleichung 19) folgt:

$$\sum_{1}^{3n}{}_i\, m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_h} = \frac{\partial T}{\partial p_h}. \tag{23}$$

Es ergibt sich also:

$$\frac{dq_h}{dt} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_{1}^{3n} {}_i\, m_i \dot{x}_i \left(\mathfrak{x}_i^h + \sum_{1}^{s} {}_k\, \mathfrak{x}_i^{hk}\right). \qquad 24)$$

Es sei nun $\mathfrak{v}_r$ sowohl die Größe, als auch die Richtung der Geschwindigkeit des r^{ten} materiellen Punktes, welcher die Masse $m_r = m_{r+1} = m_{r+2}$ hat, so dass $\dot{x}_r, \dot{x}_{r+1}, \dot{x}_{r+2}$ die Componenten von $\mathfrak{v}_r$ in den drei Coordinatenrichtungen sind. Ferner seien $\mathfrak{u}_r^h$ und $\mathfrak{u}_r^{hk}$ die Größen und Richtungen der Geraden, welche früher mit $E_r^h F_r^h$ und $A_r^{hk} B_r^{hk}$ bezeichnet wurden. Dann kann man die Gleichung 20) auch in der Form schreiben:

$$\frac{dq_h}{dt} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r m_r \mathfrak{v}_r \Big[\mathfrak{u}_r^h \cos(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}_r^h) +$$

$$+ \sum_{1}^{s} {}_k\, \mathfrak{u}_r^{hk} \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_r^{hk})\Big], \qquad 25)$$

wobei in der ersten Summe r bloß die Werte 1, 4, 7...$3n$—2 zu durchlaufen hat.

Hiemit ist also 1. erwiesen, dass die Lagrange'schen Gleichungen in unveränderter Form bei Anwendung nichtholonomer Coordinaten ungiltig sind, und 2. jedesmal das Correctionsglied berechnet, welches man ihnen beifügen muss, damit sie wieder giltig werden.

Der Beweis erleidet nur eine unwesentliche Modification, wenn die Anzahl ν der generalisierten Coordinaten größer ist als die Anzahl $s = 3n - \sigma$ der Freiheitsgrade des Systems. Dann bleiben zwischen den generalisierten Coordinaten noch $\nu - s = \tau$ Bedingungsgleichungen bestehen, von denen einige holonom, andere nichtholonom sein können. Von den σ zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten bestehenden Bedingungsgleichungen werden dann also bloß $\sigma - \tau$ durch die generalisierten Coordinaten identisch erfüllt.

Für die Variationen δx_i der rechtwinkeligen Coordinaten bei constanter Zeit gelten nach wie vor die σ Gleichungen 4). Wir können alle diese Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, indem wir jede mit einem willkürlichen Factor λ_j

multiplicieren und nachher alle addieren. Dadurch erhalten wir die resultierende Gleichung:

$$\sum_{1}^{\sigma}{}_j \sum_{1}^{3n}{}_i \lambda_j \eta_j^i \delta x_i = 0. \tag{26}$$

Die Festsetzung, dass diese Gleichung für beliebige Werte der λ bestehen soll, vertritt vollkommen die σ Gleichungen 4).

Wenn wir nun in der Gleichung 26) die δx durch die δp ersetzen, so muss sich die Anzahl der willkürlichen Factoren λ von σ auf τ reducieren, da ja zwischen den δp nur τ Gleichungen bestehen, welche wir in der Form schreiben wollen:

$$\sum_{1}^{r}{}_i \zeta_j^i \delta p_i = 0, \qquad j = 1, 2 \ldots \tau. \tag{27}$$

Die Gleichung 26) muss sich daher nach Einführung der δp auf folgende reducieren:

$$\sum_{1}^{\tau}{}_j \sum_{1}^{r}{}_i \mu_j^i \zeta_j^i \delta p_i = 0,$$

wobei die μ jedenfalls τ lineare, von einander unabhängige Functionen der λ sind.

Die Factoren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\sigma$ wurden nun nach Lagrange so gewählt, dass der Ausdruck

$$\sum_{1}^{3n}{}_i \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{1}^{\sigma}{}_j \lambda_j \eta_j^i \right) \delta x_i$$

für alle Werte der δx_i verschwindet. Nach Einführung der generalisierten Coordinaten verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\sum_{1}^{\nu}{}_h \left\{ P_h - \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_{1}^{3n}{}_i m_i \dot{x}_i \left(\mathfrak{x}_i^h + \sum_{1}^{\nu}{}_k \mathfrak{x}_i^{hk} \right) + \sum_{1}^{\tau} \mu_j \zeta_j^i \right\} \delta p_i = 0$$

oder

$$\sum_{1}^{\nu}{}_h \left\{ P_h - \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r m_r \mathfrak{v}_r \left[\mathfrak{u}_r^h \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_r^h) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{1}^{\nu}{}_k \mathfrak{u}_r^{hk} \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_r^{hk}) \right] + \sum_{1}^{\tau} \mu_j \zeta_j^i \right\} \delta p_i = 0,$$

wobei wieder r die Werte 1, 4, 7 . . . $3n$—2 zu durchlaufen hat. Wegen der für die λ getroffenen Wahl, aus welcher analoge Eigenschaften für die μ resultieren, muss die linke Seite der letzten beiden Gleichungen für alle überhaupt möglichen Werte der δp_i verschwinden und man erhält die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dq_h}{dt} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n}{}_i \, m_i \dot{x}_i \left(\mathfrak{x}_i^h + \sum_1^{\nu}{}_k \, \mathfrak{x}^{hk} \right) + \sum_1^{\tau} \mu_j \zeta_j^i$$

oder

$$\frac{dq_h}{dt} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \Sigma_r \, m_r \mathfrak{v}_r \left[\mathfrak{u}_r^h \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_r^h) + \sum_1^{\nu}{}_k \, \mathfrak{u}_r^{hk} \cos(\mathfrak{v}_r \mathfrak{u}_r^{hk}) \right] +$$
$$+ \sum_1^{\tau} \mu_j \zeta_j^i = 0.$$

Die durch den Mangel der Holonomität der Coordinaten bedingten Zusatzglieder zu den Lagrange'schen Gleichungen sind also ganz dieselben geblieben, wie in dem Falle, dass die Anzahl der generalisierten Coordinaten gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist, so dass zwischen den generalisierten Coordinaten keine Gleichungen mehr übrig bleiben und es ist somit die gestellte Aufgabe in voller Allgemeinheit gelöst.

Über die tägliche Drehung der mittleren Windrichtung und über eine Oscillation der Luftmassen von halbtägiger Periode auf Berggipfeln von 2 bis 4 *km* Seehöhe

von

J. Hann,
w. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. December 1902.)

Die tägliche Periode der Richtung des Windes auf Berggipfeln ist schon mehrfach Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Dieselben wurden hauptsächlich veranlasst durch die Folgerungen, welche Sprung aus der Espy-Köppen'schen Theorie der täglichen Periode der Windstärke an der Erdoberfläche gezogen hatte. An der Erdoberfläche hat die Windrichtung eine ausgesprochene Tendenz sich bei Tag mit der Sonne, also von E über S nach W zu drehen. Nun zeigen die Beobachtungen, dass die Windrichtungen in den höheren Luftschichten gegen die unteren nach rechts abweichen, wenn man den Wind im Gesichte hat, und zwar zunehmend mit der Höhe.[1] Espy und Köppen haben bekanntlich die tägliche Verstärkung des Windes um Mittag durch den zu dieser Zeit am stärksten entwickelten Luftaustausch zwischen den untersten und den höheren Luftschichten erklärt, welcher die

[1] Die Registrierungen auf dem Eiffelthurme z. B. geben das Resultat, dass hier 300 *m* über dem Erdboden alle Windrichtungen gegen die gleichzeitig unten herrschenden um 23° nach rechts gedreht sind (Angot).

nothwendige Folge der Erwärmung des Bodens und der dadurch hervorgerufenen aufsteigenden Luftbewegung ist. In der Höhe ist aber die Luftbewegung stets lebhafter als unten, die Windgeschwindigkeit nimmt mit der Höhe zu. Der mittägige Luftaustausch bedingt deshalb eine Verstärkung des Windes unten, dagegen eine Abschwächung in den etwas höheren Schichten, wie sie in der That die Anemometer auf Thürmen, namentlich auf dem Eiffelthurm anzeigen. Dieser Luftaustausch, folgert Sprung, muss aber auch die Windrichtung beeinflussen, vormittags bis mittags wird sich die untere Windrichtung jener in den höheren Schichten immer mehr nähern müssen, sich also nach rechts drehen, im Sinne des täglichen Laufes der Sonne, oben jedoch muss eine retrograde Drehung eintreten, die Windrichtung muss sich der unten herrschenden annähern, sich also nach links drehen. Abends, mit dem Aufhören der aufsteigenden Luftbewegung geht der Wind unten wieder retrograd zurück, oben aber dreht er wieder nach rechts. Diese Folgerung aus der Espy-Köppen'schen Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke hat Sprung durch die Zählung der Häufigkeit der Rechts- und Linksdrehungen der Windfahne unten und oben (auf einigen Berggipfeln) an zahlreicheren Stationen als thatsächlich in Erscheinung tretend nachzuweisen gesucht.

Die Beweiskraft der Sprung'schen Zählungen der Häufigkeit der Rechts- und Linksdrehungen der Windfahne zwischen je zwei Beobachtungsterminen auf Berggipfeln ist aber mehrfach angezweifelt worden und man hat das Problem auf anderen Wegen zu lösen gesucht, gestützt auf die continuierlichen anemometrischen Aufzeichnungen auf einigen Berggipfeln. Man hat einerseits den täglichen Gang der Häufigkeit der 16 oder 8 Windrichtungen untersucht, anderseits aus den von den Windrichtungen zurückgelegten Windwegen in strengerer Weise den Eintritt der Maxima und Minima bei den vier Componenten N, E, S und W berechnet, beide Methoden führten zu einem der Sprung'schen Folgerung, scheinbar wenigstens, widerstreitenden Resultat. Soweit die Beweiskraft der beiden Methoden reicht, sprachen sie übereinstimmend zugunsten der Behauptung, dass die Windrichtung sich auf den Berggipfeln tagüber mit der Sonne dreht, wie unten.

Die hauptsächlichsten bezüglichen Arbeiten mögen hier kurz namhaft gemacht werden:

Sprung, Die tägliche Periode der Richtung des Windes. Deutsche Met. Zeitschr. 1884 (I B.) S. 15 und 65; Sprung, Lehrbuch der Met. 1885, S. 345 bis 352. Pernter, Beitrag zu den Windverhältnissen in den höheren Luftschichten. Zeitschr. für Met. XIX (1884), S. 380. — Derselbe ebenda, XX, S. 175. Die tägliche Periode der Windrichtung auf dem Obirgipfel und dem Säntis. Die tägliche Wanderung des Häufigkeitsmaximums bei den verschiedenen Windrichtungen auf dem Obir (S. 177) und Säntis (S. 179) tritt in den daselbst mitgetheilten Beobachtungsergebnissen sehr klar hervor. Am Vormittage erreichen die Ostwinde, um Mittag die Südwinde, abends die Westwinde, nachts die Nordwinde die Maxima ihrer Häufigkeit, also ganz so wie an der Erdoberfläche. Billwiller, Die tägliche Periode der Richtung und der Geschwindigkeit des Windes auf Berggipfeln. Zeitschr. für Met., XX (1885), S. 471. Die Untersuchung der Registrierungen von Windrichtung und Stärke an 400 Tagen (1883/85) auf dem Säntisgipfel führt zu dem gleichen Resultate. Das wertvolle Beobachtungsmateriale, das in dieser Abhandlung mitgetheilt wird, soll im Nachfolgenden noch nach strengeren Methoden weitere Verwertung finden. Pernter, Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick und auf einigen anderen Gipfelstationen. Denkschriften der Wiener Akademie, B. LVIII, Wien 1891. Der tägliche Gang der Häufigkeit und der Windwege für 16 Richtungen nach den Registrierungen auf dem Sonnblick (1887/1889), Obir (1887/1889) und Säntis (1886 und 1887) wird auf S. 209 bis 218 eingehender behandelt. Auf diese wichtige Arbeit werde ich später noch öfter zurückkommen.

Pernter, Die tägliche Periode der Windrichtung. Met. Z., XXX (1895), S. 113. Der Verfasser sucht hier durch die Ausschaltung der vorherrschenden Westwinde die Tendenz zur Drehung der übrigen Windrichtungen mit der Sonne auf den Berggipfeln deutlicher nachweisen zu können. Noch mögen angeführt werden die Arbeiten von Hegyfoky, Drehung der Windfahne auf dem Sonnblick (Zählung der Häufigkeit der verschiedenen Drehungen aus den stündlichen Aufzeichnungen).

Met. Z., XXIX (1894), S. 315, und Sprung, Über die tägliche Periode des Windes auf dem Eiffelthurm; Met. Z., 1894, S. 252. Die Zählung der Häufigkeit der Rechts- und der Linksdrehungen der Windfahne (mit oder gegen die Sonne) ergibt namentlich im Sommer ein Überwiegen der Linksdrehungen am Vormittage und der Rechtsdrehungen am Nachmittage auf dem Eiffelthurm (dreistündige Intervalle) wie auch auf dem Sonnblick, doch zeigen die E- und SE-Winde die Tendenz, mit dem Uhrzeiger (nach rechts) umzugehen am Vormittage viel deutlicher als am Nachmittage. Die Zählung der Häufigkeit der Rechts- und Linksdrehungen der Windfahne ist demnach auch auf den Berggipfeln der Ansicht von Sprung im allgemeinen günstig.

Es besteht nun, was zumeist übersehen wird, zunächst kein directer Gegensatz zwischen diesen Ergebnissen der Zählung der Häufigkeiten der Rechts- und Linksdrehungen der Windfahne und der täglichen Wanderung der Maxima der Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen, welche im Sinne des Uhrzeigers vor- wie nachmittags erfolgt, ebenso wie jene der Maxima der vier Componenten der Windwege.

Die nach diesen verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate sind nämlich nicht unmittelbar vergleichbar. Die Zählung der Drehungen fasst die Verhältnisse unmittelbar sich folgender Zeitabschnitte ins Auge; die Constatierung der Eintrittszeiten der Maxima der Häufigkeit und der Windkräfte nach Richtung und Stärke bezieht sich auf Verhältnisse, die zwar zur gleichen Tageszeit, aber in zeitlich oft weit abstehenden Zeitmomenten eingetreten sind. Wir erfahren nach letzterer Methode der Bearbeitung der Windaufzeichnungen nur die Wahrscheinlichkeit, mit welcher wir zu einer bestimmten Tageszeit eine bestimmte Windrichtung oder Windkraft zu erwarten haben, können aber daraus nicht auf den Sinn der wahrscheinlichen Änderung während der nächsten Stunden desselben Tages schließen. Nur wenn die Tagessummen der Häufigkeit (und Windwege) für alle Richtungen die gleichen wären, müßten wohl die Resultate beider Methoden übereinstimmen. Die Ursache des Gegensatzes der Resultate wird aus den Ergebnissen der folgenden Untersuchung zutage treten. Die vorliegende Arbeit verfolgt aber nicht den Zweck, neue

Belege für oder gegen die Ansicht von Sprung herbeizuschaffen. Die neueren Ergebnisse über die Höhe, bis zu welcher sich der tägliche Luftaustausch zwischen den unteren und oberen atmosphärischen Schichten erstreckt, machen es höchst unwahrscheinlich, dass derselbe auf Berggipfeln selbst von 1·5 bis 2·5 *km* relativer Erhebung noch in der oben erwähnten Weise wirksam ist. Die an den Berghängen tagsüber aufsteigende Luftbewegung kann auf den hohen Berggipfeln jene Rolle nicht spielen, welche der Luftaustausch in den unteren Schichten, noch auf dem Eiffelthurm, so deutlich hervortreten lässt. Ihre Wirkung auf eine tägliche Periode der Windrichtung müsste ausgeprägt einseitig sein, da die Südseite der Berge am stärksten erwärmt wird. Davon ist aber, wie auch aus dem Nachfolgenden sich herausstellen wird, nichts zu bemerken. Den Ergebnissen, die man für die tägliche Änderung der Windrichtung aus den anemometrischen Aufzeichnungen auf hohen Berggipfeln erhält, wird demnach kaum, weder für, noch gegen die Theorie von Sprung eine Beweiskraft zuerkannt werden können.

Der Grund, warum ich das Thema der Feststellung des täglichen Ganges der Windrichtung auf hohen Berggipfeln trotz der schon darüber vorliegenden oben citierten Arbeiten wieder aufgenommen habe, ist der, dass ich die Berechnung nach einer anderen Methode durchführen wollte, als sie in den früher angeführten Arbeiten befolgt worden ist.

Ich stellte mir die Aufgabe, die von dem täglichen Gange der Sonne abhängigen stündlichen Änderungen der Richtung und Größe der Kraft zu berechnen, welche die Luftmassen in 2 bis 4 *km* Seehöhe in Bewegung setzen würde, wenn kein allgemeiner Gradient vorhanden wäre, die Luftbewegungen also nur von den täglichen Änderungen des Azimuthes und der Höhe der Sonne abhängen würden.

Die dabei befolgte Methode der Reduction der anemometrischen Aufzeichnungen ist nicht neu, aber bisher auf die Ergebnisse der Windregistrierungen auf hohen Berggipfeln nicht angewendet worden. Sie ist dieselbe, die man überhaupt zur Darstellung des täglichen Ganges der meteorologischen Elemente stets angewendet hat und besteht darin, den Einfluss

des täglichen Laufes der Sonne auf ein bestimmtes Element durch die Abweichungen der Stundenmittel desselben vom Tagesmittel auszudrücken. Der Unterschied gegen das gewöhnliche Verfahren ist im vorliegenden Falle darin begründet, dass bei dem Element der Luftbewegung Richtung und Stärke in Betracht kommen. Man berechnet deshalb aus den Abweichungen der Stundenwerte der Windcomponenten von dem Tagesmittel derselben für die einzelnen Stunden die Richtung und Größe der Resultierenden, eliminiert auf diesem Wege die mittlere Windrichtung des Tages, die von allgemeineren Ursachen bedingt wird, während jene Vectoren die Richtung und Größe der Kraft repräsentieren, die nur vom Sonnenstande abhängig ist. Auf diese Weise hat zuerst Rykatchef die von den Jahreszeiten abhängigen monsunartigen Winde an den Ufern des Kaspischen Meeres, ja selbst an den Küsten des Weißen Meeres klar zur Darstellung gebracht, die durch die vorherrschende Windrichtung direct nicht zur Geltung kommen;[1] in ähnlicher Weise hat Fred. Chambers die Cyclonenwinde im Arabischen Meere von der sie ablenkenden SW-Monsunströmung befreit.[2] Diese Methode erweist sich als sehr geeignet, eine Störung in einem allgemeinen Windsystem klar als selbständige Erscheinung beschreiben zu können. Endlich hat A. Angot die tägliche Periode der Windrichtung auf dem Eiffelthurm in dieser Weise dargestellt, also schon dasselbe geleistet, was ich hier für einige hohe Berggipfel zu leisten mir zur Aufgabe gestellt habe.

Ich lege deshalb auch auf einige bei dieser Arbeit erlangte scheinbar nebensächliche Resultate das Hauptgewicht, weil sie mir neu und eine besondere Beachtung zu verdienen scheinen.

Im Nachfolgenden sollen zuerst die Ergebnisse meiner Untersuchung übersichtlich dargelegt werden, während die nöthigen genaueren Hinweise auf das Materiale, das der Arbeit zugrunde liegt und die Auseinandersetzungen über die Art der Verwertung desselben für den vorliegenden Zweck erst am Schlusse den geeigneten Platz finden werden.

[1] Wild. Rep. für Met. Bd. VII, Nr. 4, 1881; Bd. XI, Nr. 7, 1885. Man sehe auch mein Lehrbuch der Meteorologie, S. 447.

[2] Indian Met. Memoirs, IV, Nr. 8.

I. Die tägliche Periode der Windrichtung auf einigen hohen Berggipfeln.

Die Bergobservatorien, auf deren anemometrische Aufzeichnungen sich die nachstehenden Ergebnisse beziehen, sind:

Sonnblick 3106 *m*	47° 3′ N,	12° 57′ E v. Gr.
Säntis 2500 *m*	47° 15′ N,	9° 20′ E v. Gr.
Obir 2140 *m*.........	46° 30′ N,	14° 29′ E v. Gr.
Pikes Peak 4308 *m*....	38° 50′ N,	105° 2′ W v. Gr.

Die genaueren Angaben über die benützten Beobachtungsperioden finden sich in den Tabellen selbst.

Der Wind dreht sich, wie man sieht (Tab. I), auf allen hier comparierenden Berggipfeln bei Tag ganz regelmäßig mit der Sonne, nur in den Nachtstunden zwischen 8^hp. und 2^ha. findet eine geringe retrograde Drehung statt, die Änderung der Richtungen ist aber bei Nacht gering. Das folgende Vectorendiagramm (Fig. 1) bringt die tägliche Winddrehung noch deutlicher zur Darstellung.

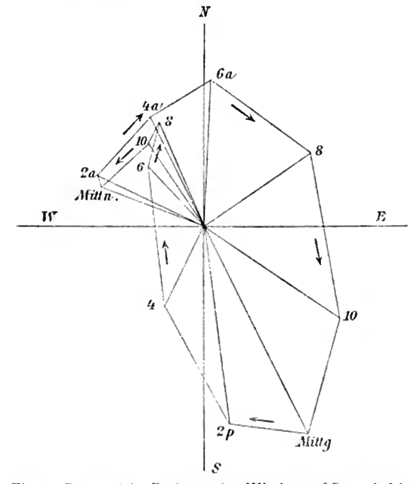


Fig. 1. Die tägliche Drehung des Windes auf Berggipfeln.

Tabelle I.

Tägliche Drehung der mittleren Windrichtung auf Berggipfeln zwischen 2 und 4 *km* Seehöhe.

Azimut von N über E nach S und W gezählt.

Berggipfel . .	Sonnblick		Säntis		Obir	Pikes Peak	Mittel		R.
Beob.-Zeit in Jahren . . .	2	1	2	1	2	5/6	(9)	8	(9)
Periode . . .	1887 bis 1889	1901	1887 bis 1889	1883 bis 1885	1887 bis 1889	1893 und 1894		ohne Pikes Peak	
Mitternacht	298	262	267	243	359	289	294	294	92
2	315	258	285	255	325	303	297	295	99
4	353	316	326	303	313	348	329	325	103
6	16	3	13	13	—28	81	11	2	120
8	53	29	60	68	53	98	59	54	107
10	152	154	108	110	107	104	122	124	136
Mittag	175	178	144	138	134	107	148	153	190
2	183	181	171	159	163	113	165	172	165
4	187	170	209	270	205	133	197	205	76
6	363	(383)	297	332	255	207	306	318	69
8	360	(374)	320	330	313	260	328	336	96
10	336	360	290	280	357	277	320	326	83

Zum Zwecke der Mittelbildung sind bei »Sonnblick 1« die Winkel 23 und 14 mit 383 und 374 eingesetzt. Bei Pikes Peak sind die Windwege durch 3 dividiert, um sie mit den anderen comparierenden Stationen vergleichbar zu machen. Die Zeit ist um 4 Stunden (2 Termen) zurückgedreht bei Azimut und Windweg.

Die Resultierende ist in zweistündigen Windwegen und zwar in Kilometern während 30 Tagen ausgedrückt. Die Division durch 60 gibt die Windstärke in Kilometern pro Stunde.

Die Ableitung der vorstehenden Resultate findet sich mit allen nöthigen Details in den Tabellen für die einzelnen Stationen am Schlusse dieser Abhandlung.

Zwischen 6^h morgens und 3^h nachmittags hält sich die Windrichtung auf der Ostseite der Windrose; sie ist um 6^h fast rein N, um 9^h rein E, um 3^h etwa S, um 5^h W, dann nach 6^h abends wird die Drehung unregelmäßig und geringfügig. Von 6^h morgens bis 6^h abends dreht sich die mittlere Windrichtung um 316°, in der gleichen Zeit während der Nacht kaum um 45°. Die Drehung ist also hauptsächlich ein Tagphänomen.

Schreibt man statt der Azimute die nächstliegende der 16 Windrichtungen, so erhält man folgende mittlere Stellungen der Windfahne zu den angegebenen Tageszeiten. Ich habe die nach einer periodischen Formel ausgeglichenen Azimute und Windrichtungen daruntergestellt.

Tägliche Drehung der mittleren Windrichtung auf hohen Berggipfeln.

Mittn.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
WNW	WNW	NW	N	NE	SE	SSE	S	SSW	NW	NNW	NW
Berechnet (ausgeglichen):											
299	297	325	16	43	111	172	180	233	301	336	325
WNW	WNW	NW	NNE	NE	ESE	SE	S	SW	WNW	NNW	NW
Resultierende. Zweistündiger Windweg pro Monat (in 60 Stunden). Berechnet[1]											
103	**105**	97*	100	124	155	**168**	147	107	74	69*	87
—8	—7	—14	—11	13	44	56	36	—5	—37	—42	—25

Nur von 8^h morgens bis 4^h nachmittags erhebt sich hiernach die Resultierende über ihren mittleren Wert, die Maxima fallen auf Mittag und bald nach Mitternacht.

[1] Der tägliche Gang der Resultierenden ist unregelmäßig, aber auch unsicher. Die Gleichung

$$111\cdot3+34\cdot7\sin(328\cdot8+x)+24\cdot2\sin(82\cdot9+2x)+21\cdot8\sin(240\cdot6+3x)$$

drückt denselben aus; ich habe aber nur mit den zwei ersten Gliedern gerechnet, welche ein, wie mir scheint, wahrscheinlicheres Resultat liefern.

Die Windrichtung springt von 4^h bis 6^h abends von SW nach WNW um, aber auch vormittags dreht sie sich von 8^h bis 10^h ebenso rasch von NE nach ESE (rund) und bis Mittag fast ebenso rasch bis SSE.[1]

Die bemerkenswerteste Erscheinung in Tabelle I ist die große Übereinstimmung, mit welcher auf jedem der Berggipfel (Pikes Peak ausgenommen) zur selben Tagesstunde sehr nahe die gleiche Windrichtung sich einstellt. Geradezu erstaunlich ist aber die Constanz, mit welcher verschiedene Beobachtungsreihen auf dem gleichen Berggipfel für eine bestimmte Tagesstunde die gleiche Windrichtung ergeben. Diese Windrichtung ist also geradezu eine Constante.

Die mittleren Azimute der Windrichtung in Tabelle I können auch als Repräsentanten der Richtung der Gradienten zu den verschiedenen Tagesstunden angesehen werden, wie sich selbe nur infolge des Sonnenstandes zu den verschiedenen Tageszeiten ergeben möchten, wenn kein allgemeiner Gradient vorhanden wäre, also wenn, abgesehen von diesen Tagwinden, völlige Windstille herrschen würde. Die Größe der Resultierenden wäre dann ein Maß für die Steilheit der Gradienten, welche nur von dem Sonnenstande bedingt werden.

---

[1] Für stündliche Intervalle ist die tägliche Winddrehung ganz beiläufig folgende:

	Azimut	Richtung		Azimut	Richtung
Mitternacht ...	299	WNW	Mittag...	172	S
1^h ...	293	WNW	1^h ...	176	S
2 ...	297	WNW	2 ...	180	S
3 ...	309	NW	3 ...	201	SSW
4 ...	325	NNW	4 ...	233	SW
5 ...	338	NNW	5 ...	269	W
6 ...	16	NNE	6 ...	301	WNW
7 ...	23	NNE	7 ...	325	NW
8 ...	43	NE	8 ...	336	NNW
9 ...	74	ENE	9 ...	335	NNW
10 ...	111	ESE	10 ...	325	NW
11 ...	146	SE	11 ...	311	NW

Der Wind von der Sonne her erreicht zwischen 11^h a. und 1^h p. seine größte Stärke mit 190*km* Windweg in 30 Tagen.[1] Dies gibt 3·17 *km* pro Stunde oder 0·88 *m* pro Secunde. Sieht man, was wohl hier die zutreffendste Annahme sein dürfte, von der Ablenkung durch die Erdrotation und von der Reibung ab, so berechnet sich die Druckdifferenz, die dieser Windstärke entspricht, aus der Gleichung:

$$v = 24\sqrt{T\frac{\Delta B}{B}}.$$

Setzen wir $T = 273$, B in Sonnblickhöhe im Mittel zu 520*mm*, so wird

$$v = 17\cdot4\sqrt{\Delta B}, \quad v = 0\cdot88\,m, \quad \Delta B = 0\cdot0026\,mm.$$

Es genügt eine außerordentlich kleine Druckdifferenz bei Abwesenheit von Reibung, die in dem freien Luftmeer wohl sehr nahe gleich Null gesetzt werden kann, um eine Luftbewegung von 0·88*m* Geschwindigkeit hervorzurufen (für $v = 1\,m$ ergibt sich $\Delta B = 0\cdot0033\,mm$).

Da im vorliegenden Falle z. B. die Tendenz zu Ostwinden am Vormittage sich eigentlich nur in einer Verminderung der allgemeinen Gradienten für Westwinde geltend macht, in einer Abschwächung der letzteren, so ist das ΔB eigentlich nur als Gegendruck aufzufassen und obige Rechnung daher wohl die hier zutreffendste.

Denkt man sich aber die Luftströmung von der Sonne her reell und von ferne her kommend, so muss man nach der Gleichung rechnen

$$\Delta B = \frac{b}{17\cdot73\,T}\,v\sin\varphi.$$

Setzt man

$$T = 273, \quad b = 520\,mm,$$

so wird

$$\Delta B = 0\cdot107\,v\sin\varphi.$$

[1] Um nicht immer mit Decimalen rechnen zu müssen, habe ich die bei der Bearbeitung der anemometrischen Aufzeichnungen zunächst erhaltenen mittleren Windwege für je 2 Stunden pro Monat überall beibehalten. Die Division durch 60 und Multiplication mit 0·2778 gibt Meter pro Secunden.

$$v = 0 \cdot 88, \quad \varphi = 47°$$

gibt

$$\Delta B = 0 \cdot 07\ mm.$$

ΔB ist hier die Druckdifferenz auf 111 *km* bezogen. 1 *mm* Druckdifferenz an der Erdoberfläche entspricht einer Hebung der Flächen gleichen Luftdruckes um 10·515 *m*, in Sonnblickhöhe aber bei 520 *mm* (760 : 520) 10·5 = 15·37. Somit beträgt die Hebung der Druckflächen 0·07 × 15·37 = 1·06 *m* und zwar auf 111 *km* Distanz.

Der Neigungswinkel der Fläche gleichen Druckes ist also verschwindend klein. Die Temperaturdifferenz in der ganzen Luftsäule auf 111 *km* Entfernung, die in 3000 *m* Höhe eine Hebung um diesen Betrag hervorbringen könnte, berechnet sich aus $3000\,\alpha t = 1 \cdot 06$ zu 0·096°. Es würde also eine mittlere Temperaturdifferenz von 0·1° auf 1 Grad (111 *km*) Distanz genügen, den Gradienten für einen Wind von 0·88 *m* zu erzeugen. Allerdings kommen dann doch schon auf eine Stunde Zeitdifferenz (15° Länge) eine Temperaturdifferenz von 1·5°, d. i. auf 6 Stunden 9°.

Die Windrichtung müsste aber dann ungefähr rechtwinkelig auf die Richtung des Druckgefälles (des Gradienten) angenommen werden. Dies gäbe schon vormittags Südwind, mittags Westwind. Man darf allerdings mit einer Verzögerung des Eintrittes der höchsten Wärme in der ganzen Luftschichte gegen den rein östlichen und südlichen Sonnenstand um zwei Stunden etwa rechnen.

Wenn wir mit Pernter annehmen wollen, dass das Herumgehen des Windes mit der Sonne in der Höhe von 3 *km* circa durch ein Gefälle den Flächen gleichen Druckes, morgens von Osten, mittags von Süden, abends von Westen, also von den gerade am stärksten erwärmten Himmelsgegenden her, hervorgerufen wird,[1] so begegnet diese Annahme nach obiger Rechnung, von Seite des benöthigten Temperaturgefälles wenigstens, keiner besonderen Schwierigkeit.

[1] Pernter, Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick. Denkschriften der Wiener Akademie, LVIII (1891), S. 213.

Schwieriger wird allerdings auf diesem Wege die Erklärung für das analoge tägliche Umgehen des Windes schon auf dem Eiffelthurm in 300 *m* Höhe über dem Boden. An der Erdoberfläche selbst sollten die Windrichtungen die entgegengesetzten von den oberen sein, mittags sollten Nordwinde, nachts Südwinde wehen. Soweit die vielfach gestörten Erscheinungen an der Erdoberfläche eine Beurtheilung allgemeiner Verhältnisse zulassen, ist dies aber nicht der Fall. Auch unten scheinen die Winde von der Sonne her zu wehen (nicht gegen dieselbe) geradeso wie oben. Und darin liegt die große Schwierigkeit einer Erklärung der täglichen Drehung der Windrichtungen direct durch thermische Verhältnisse.

Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß das oben nachgewiesene (die Rechnungsbelege finden sich vollständig beisammen in den Tabellen am Schlusse dieser Abhandlung) tägliche Umgehen der Windrichtung mit der Sonne auch in der Wanderung der Maxima der Häufigkeit der acht Windrichtungen mit den Tageszeiten sehr klar sich ausspricht, freilich wäre dies für sich allein nicht ganz entscheidend. Die Ostwinde erreichen vormittags, die Südwinde um die Mittagszeit, die Westwinde am späteren Nachmittage und abends ihre größte Häufigkeit, wie namentlich die Häufigkeitstabellen II und VII am Schlusse dieser Abhandlung (Sonnblick 1871, Säntis Sommer und Winter 1891 und 1892 [16 Monate], Pikes Peak Sommer 1893 und 1894 [10 Monate] und Säntis 1883/1885 [400 Tage]) sehr schön zeigen. Die Westcomponente (aus Häufigkeit berechnet) erreicht um 2^h morgens, die Nordcomponente um 6^h, die Ostcomponente um 10^h vormittags und die Südcomponente um 2^h nachmittags ihr Maximum (die daraus berechneten Azimute der Windrichtung schreiten aber nur von Mitternacht bis gegen 4^h abends regelmäßig mit der Sonne fort. Siehe Tabelle S. 1697).

In vielen Fällen wird man sich deshalb schon mit der täglichen Periode der Frequenzzahlen der Winde begnügen können.[1]

---

[1] Siehe auch Pernter's Häufigkeitstabellen für Obir und Säntis. Met. Zeitschr. XX (1885), S. 177 bis 179.

Die tägliche Periode der Windrichtung auf dem Eiffelthurm. Alfred Angot hat bei einer eingehenderen Bearbeitung der anemometrischen Aufzeichnungen auf der Spitze des Eiffelthurmes, 300 *m* über dem Erdboden, auch die tägliche Periode der Windrichtung untersucht.[1]

Angot hat zunächst die Häufigkeitszahlen von 32 Windrichtungen in den einzelnen Monaten nach dreistündigen Intervallen zusammengefasst und daraus die Componenten und die mittlere Windrichtung berechnet (vent moyen). Zur Feststellung der bloß von dem täglichen Gange der Sonne abhängigen mittleren Windrichtung (brise diurne) zu den Stunden 0, 3, 6, 9, 9^h vor- und nachmittags hat er dann, wie dies auch hier geschehen, die Abweichungen der Nord- und der Ostcomponente von ihren Tagesmitteln verwendet. Er berechnet separat die tägliche Variation der reinen Tagwinde (brise diurne) für die kalten (November bis Februar), mittleren (März, April, September, October) und für die warmen Monate (Mai bis August). Die beiden Componenten und die Resultierende aus den Windwegen berechnet er bloß für die extremen Monate Januar und Juli. Am entschiedensten, und zwar sehr regelmäßig tritt, nach beiden Methoden berechnet, der tägliche Gang der Windrichtung in den wärmeren Monaten hervor, im Winter ist, wie zu erwarten, der tägliche Gang der Winddrehung vielfach gestört und die Resultierenden sind auch viel kleiner.

Da die anemometrischen Aufzeichnungen auf dem Eiffelthurme unvergleichliche Vortheile bieten zur Feststellung einer täglichen Periode der Windrichtung in der freien Atmosphäre (nur von einem etwaigen Einflusse der Land- und Seewinde sind sie, wegen der Küstennähe von Paris, vielleicht nicht ganz frei), so sollen die hauptsächlichsten Resultate von Angot's Rechnungen zum Vergleiche mit den vorhin für die Berggipfel erhaltenen hier kurz zusammengefasst auch Platz finden.

Angot hat die mittlere Richtung des »Tageswindes« nur für dreistündige Intervalle berechnet, welche zur Vergleichung

[1] Résumé des Observations anémometriques faites au Bureau Central et a la tour Eiffel pendant les années 1890—1895. Annales du Bureau Central Mét. de France, 1898, I. Mémoires. — Siehe auch Comptes-rendus, CXXIV (1897), p. 1020.

mit den von mir für die Berggipfel berechneten analogen aber zweistündigen Werten nicht ausreichen. Deshalb habe ich die dreistündigen Daten für die Nord- und Ostcomponente bei Angot durch trigonometrische Reihen ausgedrückt und mittels derselben die Größe der Süd- und Ostcomponente für zweistündige Intervalle berechnet, zugleich aber auch des bequemeren Vergleiches wegen, statt der mittleren Windstärke in Metern pro Secunde, die zweistündigen Windwege während eines Monates (30 Tage) eingestellt. Desgleichen wurde durch einfachen Zeichenwechsel die Süd- und Westcomponente genommen (statt N und E). Die von Angot aus den Häufigkeitszahlen berechneten mittleren Richtungen für dreistündige Intervalle werden ungeändert angeführt (Tabelle II).

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Süd- und der Westcomponente auf dem Eiffelthurme sind (Juli):

$$S \ldots \; 247\cdot0 \sin(307\cdot1^\circ + x) + 37\cdot8 \sin(29\cdot1^\circ + 2x)$$

$$W \ldots \; 79\cdot1 \sin(229\cdot4 + x) + 61\cdot0 \sin(352\cdot5 + 2x)$$

$x = 0$ für Mitternacht. Die Amplituden sind zweistündige Windwege in 30 Tagen, in Kilometern.

Die tägliche Winddrehung unter dem Einflusse des täglichen Sonnenganges geht auf dem Eiffelthurm gerade so vor sich wie auf den hohen Berggipfeln, der Wind dreht sich mit der Sonne und weht von der Sonne her, doch eilt sein Azimut jenem der Sonne etwas voraus, umgekehrt wie auf den Berggipfeln. Um Mittag herum beträgt der Phasenunterschied der Windrichtung gegen jene auf den Berggipfeln rund vier Stunden; um so viel ist die Windrichtung auf dem Eiffelthurm voraus. Auf den Berggipfeln wird die reine Südrichtung erst nach 2^h p. erreicht, auf dem Eiffelthurm schon bald nach 10^h vormittags. Auf dem Eiffelthurm ist die Windrichtung bei Nacht NE, auf den Berggipfeln WNW und NW; auf dem ersteren weht den ganzen Vormittag fast constant schon SSE, von Mittag an dreht sich der Wind dann rasch auf SW bis NW, auf den Berggipfeln herrscht am Morgen noch NE und der Wind geht von da an erst nach ESE und dann nach SE und S. Einen strengen Vergleich lassen übrigens die vorliegenden Daten nicht zu. Jene für die Berggipfel gelten für den mittleren Zustand des Jahres (Pikes Peak ausgenommen), jene für den Eiffelthurm für den wärmsten Monat.

Tabelle II.

Tägliche Drehung der mittleren Windrichtung auf dem Eiffelthurme.

Juli, Mittel 1890 bis 1895 (6 Jahre). — Zweistündige Windwege pro Monat (30 Tage) in Kilometern.

	Componenten		Mittlere Richtung		R.
	S	W		Azimut	
Mitternacht	—179	— 52	N 16° E	16	186
2	— 59	— 29	N 26° E	26	66
4	50	— **18**	S 20° E	160	53*
6	131	— 59	S 24° E	156	144
8	190	— 63*	S 18° E	162	200
10	**226**	— 30	S 8° E	172	**228**
Mittag	215	68	S 18° W	198	225
2	134	126	S 43° W	223	184
4	— 11	**131**	W 5° N	275	132*
6	—167	43	N 14° W	346	172
8	—265	— 34	N 7° E	7	267
10	—265*	— 83*	N 17° E	17	**277**
Tagesmittel	75·4	740·0	W 6° S	264	743·1

Windrichtung Sommer (Mai bis August) nach den Häufigkeitszahlen (Angot).

	Mittern.	3h	6h	9h	Mittag	3h	6h	9h
S	—196	— 80	+ 71	+226	+229	+105	—101	—254
W.......	—151	—103	— 69	— 1	+123	+153	+106	— 58

Mittlere Windrichtung

Azimut...	37	46	136	180	208	235	314	13
R.	248	130	99*	226	**260**	186	146*	**261**

Trotzdem wollen wir noch die von Angot bloß aus den Häufigkeitszahlen der vier warmen Monate berechneten Azimute der mittleren Windrichtungen zu den verschiedenen Tagesstunden mit jenen auf den Berggipfeln vergleichen. Erstere sind deshalb auf graphischem Wege für zweistündige Intervalle interpoliert worden.

Vergleich der täglichen Drehung der Windrichtung auf dem Eiffelthurme (*E*) und auf den Berggipfeln (*B*).

	Mittn.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
					I. Azimute (von N über E gezählt):							
E..	37	39	72	136	174	183	208	228	255	314	342	18
B..	294	295	325	2	54	124	153	172	205	318	336	326
					Differenz (Eiffelthurm voraus):							
Δ..	103°	104	107	134	120	59	55	56	50	—4	6	52
					II. Beiläufige Windrichtung:							
(*E*)	NE	NE	ENE	SE	S	S	SSW	SW	WSW	NW	NNW	NNE
(*B*)	WNW	WNW	NW	N	NE	SE	SSE	S	SSW	NW	NNW	NW

Die aus den Häufigkeitszahlen für den Eiffelthurm berechneten mittleren Windrichtungen drehen sich regelmäßiger als jene, die aus den Windwegen berechnet worden sind; jene sind aber auch aus den Registrierungen von 24 Monaten, diese letztere nur aus 6 Monaten abgeleitet.

Am Vormittag sind die Azimute den Windrichtungen auf dem Eiffelthurm um 100 bis 130° gegen jene auf den Berggipfeln voraus, von Mittag bis zum Abend verringert sich die Differenz immer mehr, vergrößert sich aber nachts wieder. Zwischen Mittag und 8^h abends herrschen auf dem Eiffelthurm und auf den Berggipfeln ziemlich nahe die gleichen Windrichtungen.

Die NE-Winde bei Nacht auf dem Eiffelthurm können kaum als eigentliche Landwinde angesprochen werden; die Richtung der letzteren müsste eher SE sein, die Seewinde bei Tag müssten wohl als NW auftreten.

Es ist daher nicht wahrscheinlich, dass die tägliche Winddrehung auf dem Eiffelthurm auf den Wechsel der Land- und Seewinde zurückzuführen sei.

Angot macht darauf aufmerksam, dass die Größe der Resultierenden zwei Maxima (10^h vormittags und 10^h abends) und zwei Minima (zu den Zeiten des Temperaturminimums und des Temperaturmaximums) hat. Das Maximum um Mittag erreicht mehr als 1 *m* Windgeschwindigkeit pro Secunde (3·8 *km* pro Stunde).[1]

Angot bringt ferner die ganztägige Periode in der Richtung der Luftbewegung mit dem regelmäßigen täglichen Barometergang in Zusammenhang. Er sagt (Comptes rend., T. 124, S. 1020, Mai 1897): »Schon in einer früheren Arbeit über den täglichen Gang des Luftdruckes (Annales du Bureau Central Mét. pour 1887, T. 1, Paris 1889) habe ich aus der Untersuchung des ganztägigen Gliedes dieser Variation die Folgerung gezogen, dass sich jeden Tag eine oscillatorische Bewegung der Luft vom Pole gegen den Äquator und umgekehrt vollziehen muss. In den mittleren Breiten und in den unteren Schichten der Atmosphäre wird diese periodische Bewegung die relative

[1] Ch. Goutereau hat in den »Annales du Bureau Central, 1898, I. Mémoires«, p. 105 bis 120, eine Abhandlung veröffentlicht unter dem Titel: »Sur la variation diurne des courants horizontaux«, in welcher auch vom Säntis für die extremen Monate Jänner und Juli die mittlere Größe der West- und Nordcomponente aus 10jährigen Registrierungen für zweistündige Intervalle berechnet wird. Außerdem wird für mehrere Stationen der Niederung Hamburg, Wüstrow, Paris (Bureau Central), Zürich, Wien die tägliche Variation der beiden Componenten berechnet, für die Orcaden, Batavia, Cordoba werden die entsprechenden Daten aus anderen Publicationen entnommen mitgetheilt; wir kommen später darauf zurück. Es mag hier nur angeführt werden, dass die anemometrischen Aufzeichnungen am Bureau Central dieselbe Winddrehung geben (Sommer), wie sie Angot für den Eiffelthurm gefunden. Der Wind (brise diurne) kommt von E um 3^h morgens und dreht sich von links nach rechts, er ist SE um 6^h a., S gegen 10^h vormittags, SW um 1^h p., W am Nachmittage, circa 4^h, NW um 6^h, N gegen 7^h abends, NE etwa um Mitternacht. Die Resultierende hat zwei Minima um 4^h a. und 5^h p., und zwei Maxima um Mittag und um 9^h abends, also analog wie auf dem Eiffelthurme.

Fig. 1 der citierten Abhandlung gibt das entsprechende Vectordiagramm, das jenem für den Eiffelthurm sehr ähnlich ist.

Häufigkeit der Südwinde in der ersten Hälfte des Tages vergrößern, dagegen jene der Nordwinde während der zweiten Tageshälfte«.

Wir werden im nächsten Abschnitte unserer Arbeit auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Erklärung des scheinbaren Widerspruches zwischen dem Ergebnis der Zählung der sich unmittelbar folgenden Winddrehungen und jenem aus den oben berechneten mittleren Windrichtungen für die verschiedenen Tageszeiten. Erstere haben, wie früher erwähnt, sowohl für die unteren wie für die oberen Schichten (Berggipfel) ergeben, dass am Vormittage die retrograden Drehungen (gegen die Sonne) überwiegen, am Nachmittage die directen (mit der Sonne). Die berechneten mittleren Windrichtungen drehen sich aber vor- wie nachmittags mit der Sonne von links nach rechts.

Ich bin der Ansicht, dass dieser Widerspruch sich in eine vollkommene Übereinstimmung auflöst, wenn man folgende Überlegung gelten lässt.

Die vorliegenden Zählungen des Sinnes der Winddrehungen am Vor- und Nachmittage beziehen sich auf Gebiete mit vorherrschenden Westwinden, wenigstens soweit die Berggipfel und der Eiffelthurm in Betracht kommen, um welche es sich ja hier handelt. Wenn nun, wie die Berechnung der stündlichen Werte der mittleren Windrichtung gezeigt hat, vormittags eine Tendenz zu östlichen Winden, nachmittags eine solche zu westlichen Winden besteht, oder wenn das Druckgefälle für Ostwinde vom Vormittag zum Nachmittag über Süd in ein solches für westliche Winde übergeht, so müssen vormittags die vorherrschenden westlichen Winde häufiger sich zurückdrehen, dagegen nachmittags gerne ausschießen, das heißt, nach W zurückspringen. So wie der gewöhnlich herrschende Gradient für Westwinde schwach wird, wird die Tendenz zu Ostwinden am Vormittage die südlichen bis westlichen Winde zurückdrehen, und daher den retrograden Drehungen ein Übergewicht geben. Umgekehrt verhält es sich am Nachmittage. Damit löst sich der früher erwähnte Widerspruch zwischen dem Gange der sich unmittelbar folgenden Drehungen der Windfahne und der berechneten täglichen

Drehung jener mittleren Windrichtung, welche nur von der Tageszeit abhängig ist. Auf diese letztere, sowie auf die Wanderung der Häufigkeits-Maxima hat ja die vorherrschende Windrichtung keinen Einfluß.

Schließlich mag nur noch darauf hingewiesen werden, dass die beobachteten Werte der Windcomponenten einen täglichen Gang der Resultierenden ergeben, der bei allen hier comparierenden Stationen der gleiche ist. Der wirklich herrschende mittlere Wind dreht sich überall von Morgen bis zum Nachmittage von West etwas gegen Süd und kehrt am Abend wieder zurück nach West, doch beträgt diese Drehung nur wenige Grade. Die Ursache davon ist die Zunahme der Südwinde um Mittag, die aber bloß imstande ist, die so stark vorherrschende Westrichtung etwas nach Süd zu drehen.

	Mittlere Windrichtung				Größte Schwankg.
Säntis, Sommer.....	Nachts	W 23° S	Mittags 11/1h	W 34·6 S	12°
Säntis, Jahr	Nachts	W 30° S	Mittags 11/1h	W 46·6 S	17°
Sonnblick, Jahr	Abends	W 21° N	Mittags 11/1h	W 25·5 S	47°
Pikes Peak, Sommer.	Morgens	W 4° S	Nachmitt. 1/3hp.	W 47·7 S	44°

Im Winter aber scheint auf dem Säntis der Wind nachts südlicher zu sein als mittags, die Westcomponente erreicht um Mittag ihr Maximum. (Auch die zehn Jänner-Monate, die Goutereau berechnet hat, ergeben dasselbe.) Wir werden später darauf zurückkommen.

II. Die tägliche Variation der Größe der Windcomponenten und die daraus folgende Oscillation der Luftmassen von halbtägiger Periode.

Das bemerkenswerteste Resultat aus den dieser Abhandlung zugrunde liegenden Rechnungen scheint mir die Feststellung der Thatsache zu sein, dass namentlich die Größe der Nord- und Südcomponente der Luftbewegung auf Berggipfeln einer starken, doppelten täglichen Variation unterliegt, wie folgende berechnete Werte derselben darthun. Die Zahlen sind Windwege in Kilometern. Sie müssten aber durch 2 dividiert werden, um die stündlichen Wege für einen Monat (30 Tage) zu

erhalten. Da es sich hier nur um den täglichen Gang handelt, ist diese Division unterblieben.

Tabelle III.

Täglicher Gang der vier Windcomponenten.

	N	E	S	W	S—N	W—E
Mitternacht	15	0	9	62	— 6	62
1h	5	— 1	3	70	— 2	71
2	4*	— 1	—13	71	— 17	72
3	10	1	—35	61	— 45	60
4	21	4	—58	43	— 79	39
5	32	8	—74	19	—106	11
6	36	11	—81*	— 9	—117*	—20
7	31	13	—72	—36	—103	—49
8	14	12	—49	—58	— 63	—70
9	—12	9	—16	—71	— 4	—80*
10	—42	4	21	—74*	63	—78
11	—70	— 2	56	—69	126	—67
Mittag	—90	— 9	80	—57	170	—48
1h	—96*	—13	91	—41	187	—28
2	—86	—16*	85	—27	171	—11
3	—62	—15	67	—13	129	2
4	—29	—13	41	— 4	70	9
5	7	— 8	13	1	6	9
6	38	— 3	— 8	4	— 46	7
7	60	1	—21	8	— 81	7
8	68	4	—23*	13	— 91*	9
9	64	6	—16	23	— 80	17
10	50	5	— 5	35	— 55	30
11	32	3	5	49	— 27	46
Mittel	41	7	39	38	77	38

Die Gleichungen, welche diesen täglichen Gang ausdrücken, sind:

Nordcomponente	$+52\cdot5\cos x-\ 1\cdot2\sin x-37\cdot2\cos 2x-26\cdot0\sin 2x$
Ostcomponente	$+\ 4\cdot4\cos x+\ 7\cdot0\sin x-\ 3\cdot9\cos 2x-\ 7\cdot2\sin 2x$
Südcomponente	$-35\cdot8\cos x-36\cdot1\sin x+44\cdot5\cos 2x+15\cdot9\sin 2x$
Westcomponente.....	$+59\cdot3\cos x-\ 6\cdot7\sin x+\ 2\cdot6\cos 2x+24\cdot0\sin 2x$
S—N	$-88\cdot3\cos x-34\cdot9\sin x+81\cdot7\cos 2x+41\cdot9\sin 2x$
W—E.............	$54\cdot9\cos x-13\cdot7\sin x+\ 6\cdot5\cos 2x+31\cdot2\sin 2x$

Die Nord- und die Südcomponente haben fast genau den entgegengesetzten Gang, die Ost- und Westcomponente weniger. Die doppelte tägliche Periode ist am stärksten bei der Nord- und bei der Südcomponente vorhanden; bei der Westcomponente hingegen ist die ganztägige Periode die weitaus vorherrschende. Dies zeigt sich deutlicher, wenn man die obigen Gleichungen auf die nachstehende Form bringt:

N	$52\cdot5\sin(\ 91\cdot3^\circ+x)+45\cdot4\sin(235\cdot1^\circ+2x)$
E	$8\cdot3\sin(\ 32\cdot2\ +x)+\ 8\cdot2\sin(208\cdot5\ +2x)$
S	$50\cdot9\sin(224\cdot8\ +x)+47\cdot3\sin(\ 70\cdot3\ +2x)$
W ...	$59\cdot7\sin(\ 96\cdot4\ +x)+24\cdot1\sin(\ \ 6\cdot2\ +2x)$

Bei den ersten drei Componenten ist die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation fast so groß, wie die der ganztägigen.

Wie die Mittelwerte für die Componenten gebildet worden sind, ergibt sich aus den nachfolgenden Tabellen.

Wegen der beträchtlichen Differenz in den Phasenzeiten (bei kurzer in Rechnung gezogener Beobachtungsperiode) sind die Daten für Pikes Peak nicht in die obigen Mittelwerte einbezogen worden, ebenso fehlt Säntis 1883/1885, weil erst hinterher berechnet. Die unter Säntis 1891/1892 eingestellten Werte sind Mittel aus Winter und Sommer (16 Monate im ganzen).

Mit p sind die Amplituden der beiden Cosinusglieder, mit q jene der Sinusglieder der obigen Reihen bezeichnet, A_1 und A_2 sind die Winkelconstanten, a_1 und a_2 die Amplituden (zweistündige Windwege in 30 Tagen).

Tabelle IV.

Harmonische Constituenten des täglichen Ganges der Windcomponenten.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Nordcomponente								
Sonnblick:								
1887/89 ...	97·5	— 2·5	—60·2	—15·5	91°5	255°6	97·5	62·1
1891......	72·5	— 5·1	—70·5	—81·0	94·0	220·7	72·6	108·0
Säntis:								
1883/85 ...	36·6	6·3	—39·3	—12·9	80·2	251·8	37·1	41·4
1886/87 ...	17·0	3·5	—20·8	— 9·4	78·4	245·7	17·4	22·8
1891/92 ...	10·3	— 8·8	—21·0	—14·6	130·5	234·9	13·5	25·7
Obir:								
1887/89 ...	60·5	5·1	—10·4	—23·0	85·2	204·3	60·7	25·2
[Pikes Peak:								
Sommer ...	32·4	38·0	—17·9	6·2	40·4	290·1	49·9	19·0]
Ostcomponente								
Sonnblick:								
1887/89 ...	—10·5	10·7	— 4·5	— 6·3	315°6	215°5	15·0	7·7
1891......	— 8·3	— 1·3	— 8·4	— 8·5	261·1	224·7	8·4	11·9
Säntis:								
1883/85 ...	4·0	27·6	—11·5	—27·3	8·2	202·8	27·9	29·6
1886/87 ...	11·6	7·9	— 8·0	—16·3	55·7	206·1	14·0	18·2
1891/92 ...	21·0	4·2	— 3·7	—15·5	78·7	193·1	21·4	16·0
Obir:								
1887/89 ...	12·0	11·1	7·3	14·7	47·2	26·4	16·3	16·4
[Pikes Peak:								
Sommer ...	—28·8	—24·6	— 3·0	— 7·6	229·5	202·0	38·0	8·2]

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Südcomponente								
Sonnblick:								
1887/89 ...	—63·3	—65·8	60·0	25·0	223°9	67°4	91·3	65·0
1891......	—40·2	—24·6	58·5	23·3	238·5	68·3	47·1	63·0
Säntis:								
1883/85 ...	—14·9	2·6	73·0	18·2	279·9	76·0	15·1	75·2
1886/87 ...	—42·6	—40·9	44·8	13·4	226·2	73·4	59·1	46·8
1891/92 ...	—12·7	— 4·1	44·0	9·7	252·1	77·6	13·4	45·0
Obir:								
1887/89 ...	— 3·1	—28·1	7·5	4·8	186·3	57·4	28·3	8·9
[Pikes Peak:								
Sommer ...	31·9	—57·3	15·1	— 1·7	150·9	96·6	65·6	15·2]
Westcomponente								
Sonnblick:								
1887/89 ...	38·6	—14·6	21·6	30·7	110°7	35°1	41·3	37·5
1891......	26·3	16·3	16·8	28·3	58·2	30·7	30·9	32·9
Säntis:								
1883/85 ...	138·0	—15·6	—27·0	31·5	96·5	319·4	138·9	41·5
1886/87 ...	99·0	—24·9	—12·4	27·3	104·1	335·6	102·1	30·0
1891/92 ...	50·7	9·3	19·0	19·4	51·5	44·6	51·5	27·2
Obir:								
1887/89 ...	72·5	— 6·3	—33·8	9·2	95·0	285·2	72·8	35·0
[Pikes Peak:								
Sommer ...	173·3	148·1	—25·4	39·6	49·5	327·3	228·0	47·0]

Bei der Mittelbildung sind den obigen Werten für die p und q verschiedene Gewichte gegeben worden, je nach der Länge der Beobachtungszeiten. Da in vorstehender Tabelle für

Säntis, Beobachtungsperiode 1891 und 1892, nur die Mittelwerte eingestellt worden sind, mögen in einer Anmerkung auch die Constanten der Sinusreihen für die extremen Jahreszeiten Platz finden.[1]

Wir möchten die Aufmerksamkeit auf die überraschende Übereinstimmung der Winkelconstanten (Phasenzeiten) sowohl für verschiedene Beobachtungsperioden an der gleichen Station, als auch für die verschiedenen Stationen selbst hinlenken. Pikes Peak, der etwa 9° südlicher liegt als die anderen Stationen und um 1000 bis 2000 *m* höher ist, macht allerdings einige Ausnahmen, doch ist nicht ausgeschlossen, dass die Bearbeitung einer längeren Beobachtungsperiode dieselben vielleicht hätte verschwinden lassen.

[1] Die Constanten der harmonischen Reihen für die extremen Jahreszeiten sind:

Säntisgipfel 1891 und 1892.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				Sommer:				
N	21·1	−15·3	−18·4	−14·9	126·1	231·0	26·1	23·7
E	13·8	21·4	2·0	− 9·5	32·8	168·1	25·5	9·7
S	−18·5	6·7	64·8	13·3	289·9	78·4	19·7	66·1
W.......	166·2	34·3	8·1	8·8	78·3	42·6	169·7	9·6
S—N	−39·6	22·0	83·2	28·2	299·0	71·3	45·3	85·8
W—E ...	152·4	12·9	6·1	18·3	85·2	18·5	153·0	19·3
				Winter:				
N	− 0·6	− 2·4	−23·7	−14·4	194·0	238·7	2·5	27·7
E	28·3	−12·9	− 9·3	−21·5	114·5	203·4	31·1	24·4
S	− 6·8	−14·8	23·2	6·1	205·1	75·3	16·3	24·0
W.......	−64·7	−15·7	29·8	30·0	256·4	44·8	66·6	42·3
S—N	− 6·2	−12·4	46·9	20·5	206·6	66·5	13·9	51·1
W—E ...	93·0	− 2·8	39·1	51·5	91·7	37·2	93·1	64·6

Reduciert man im weiteren Fortgange der Berechnung die Componenten auf zwei, auf eine Süd- und auf eine Westcomponente, so erhält man die nachfolgende Tabelle V.[1]

Die Übereinstimmung der Phasenzeiten für die verschiedenen Beobachtungsperioden und Stationen tritt bei dieser Zusammenfassung noch auffallender hervor, nur Pikes Peak macht mehrfach eine Ausnahme. Die Amplituden können natürlich nicht in gleicher Weise stimmen. Die doppelte tägliche Periode tritt bei der Südcomponente sehr stark hervor, in der Hälfte der Fälle ist a_2 größer als a_1, bei der Westcomponente ist die halbtägige Periode schwächer entwickelt.[2]

Bei der Componente S—N fällt es auf, dass ihr täglicher Gang im allgemeinen mit dem täglichen Gange der Temperatur übereinstimmt. Die Winkelconstante des ersten Gliedes liegt stets im dritten Quadranten, jene des zweiten bleibt stets im ersten Quadranten. Dies ist für den täglichen Wärmegang an der Erdoberfläche, wie auch auf Berggipfeln charakteristisch.

[1] Bei der Mittelbildung sind den einzelnen Stationen folgende Gewichte gegeben: *A*. Sonnblick, Säntis, Obir 1887/89 und 1886/87 je 2, Säntis und Sonnblick je 1½, Pikes Peak 1. Bei der Berechnung der Westcomponente sind die p und q von Pikes Peak durch 3 dividiert worden, weil sonst diese Station allein das Mittel bestimmt hätte. *B*. Mittel ohne Pikes Peak mit etwas anderen Gewichten. *C*. Ebenso mit Säntis 1883/85, Werte in der Tabelle. *A* und *B* mögen hier in der Anmerkung Platz finden. Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die Summe der Gewichte.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				Südcomponente				
A (10)...	—77·6	—49·8	75·5	30·4	237°3	68°4	92·2	81·4
B (8) ...	—88·4	—36·8	74·5	33·9	247·4	65·5	95·7	81·9
				Nordcomponente				
A (10)...	72·2	0·3	0·9	35·9	89°8	1°3	72·2	35·9
B (8)....	63·6	—15·5	0·0	35·2	103·7	0·0	65·5	35·2

[2] Die berechneten stündlichen Werte der Süd- und Nordcomponente in Tabelle III sind nach einer etwas anderen Formel berechnet, als sie die Constanten der vorstehenden Tabelle liefern; Säntis 1883/85 (400 Tage) war noch nicht berechnet.

Tabelle V.

Die harmonischen Constituenten der täglichen Periode der Süd- und der Westcomponente auf Berggipfeln.

Zweistündige Windwege während eines mittleren Monats (30 Tage).

Berggipfel	Periode	Zahl der Monate	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_0	a_1	a_2
					I. Südcomponente (S—N)						
Sonnblick	1887/89	23	—161·0	— 62·8	121·0	39·7	248·7	71·8	— 76·9	172·8	127·4
	1901	12	—112·7	— 19·5	121·4	74·0	260·2	58·6	— 51·0	114·4	142·2
Säntis	1883/85	13	— 51·5	— 3·7	112·3	31·1	265·9	74·5	503·9	51·6	116·5
	1886/87	18	— 60·8	— 44·5	65·5	22·4	233·8	71·1	363·2	75·5	69·2
	Sommer 1891/92	8	— 39·6	22·0	83·2	28·2	299·0	71·3	566·5	45·3	85·8
	Winter 1891/92	8	— 6·2	— 12·4	46·9	20·4	206·6	66·5	457·5	13·9	51·1
Obir	1887/89	23	— 64·0	— 32·7	18·2	24·2	242·9	37·0	152·3	71·9	30·3
Pikes Peak	Sommer 1893/94	10	— 0·9	—190·7	66·0	—16·6	180·3	104·1	449·8	190·7	68·1
Mittel ohne Pikes Peak......		(105)	— 84·3	— 33·2	79·7	33·6	248·5	86·5	—	90·6	86·5

Berggipfel	Periode	Zahl der Monate	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_0	a_1	a_2
II. Westcomponente (W—E)											
Sonnblick	1887/89	23	48·7	— 24·3	27·2	36·3	116·5	36·9	658·7	54·4	45·4
	1901	12	34·6	17·6	25·2	36·8	63·3	34·4	446·0	38·8	44·6
Säntis	1883/85	13	134·0	— 43·2	— 15·5	58·8	107·9	345·8	783·1	140·8	60·8
	1886/87	18	83·2	— 33·7	— 8·4	44·5	112·1	348·8	735·5	89·8	45·4
	Sommer 1891/92	8	152·4	12·9	6·1	18·3	85·2	18·5	1192·5	153·0	19·3
	Winter 1891/92	8	93·0	— 2·4	39·1	51·5	91·7	37·2	793·5	93·1	64·6
Obir	1887/89	23	43·8	— 15·5	— 42·7	24·1	109·5	299·4	470·4	46·5	49·0
Pikes Peak	Sommer 1893/94	10	404·4	345·5	— 44·7	94·3	49·5	334·6	867·5	531·8	104·3
Mittel ohne Pikes Peak......		(105)	71·8	— 18·6	— 1·7	39·8	104·5	357·6	—	74·2	39·8

Vergleichen wir den täglichen Wärmegang in der 1000 *m* mächtigen Luftschichte Obir—Sonnblick[1] mit jenem der S—N-Componente, so erhalten wir

Gleichungen des täglichen Ganges.

Windcomponente S—N....... $90 \cdot 6 \sin(248 \cdot 5° + x) + 86 \cdot 5 \sin(86 \cdot 5° + 2x)$
Lufttemperatur Obir–Sonnblick. $1 \cdot 38 \sin(228 \cdot 2 + x) + 0 \cdot 17 \sin(23 \cdot 6 + 2x)$.

Der Phasenunterschied beim ersten Glied beträgt 20°, d. i. $1^1/_3$ Stunden, der Gang der Lufttemperatur bleibt um diese Zeitdifferenz zurück gegen jene der S—N-Componente; beim zweiten Glied beträgt der Unterschied 63°, d. i. wenig mehr als zwei Stunden, auch hier treten die Extreme beim Wind früher ein als bei der Temperatur.[2] Das interessanteste Vergleichsobject sind aber die Amplituden. Bei der Temperatur beträgt die Amplitude der doppelten täglichen Variation wenig mehr als $^1/_{10}$ jener der ganztägigen Schwankung, und das ist für den Temperaturgang überhaupt charakteristisch. Bei der täglichen Variation der S—N-Componente ist die halbtägige Periode fast ebenso groß als die ganztägige.

Da es außer dem Luftdruck kein meteorologisches Element gibt, welches eine so starke doppelte tägliche Periode hat,[3] so ist dieser Hinweis von größerer Wichtigkeit.

Die folgenden Diagramme bringen den täglichen Gang der reinen Nord- und Südcomponente, sowie der zusammengesetzten

---

[1] Hann, Temperatur des Obir und des Sonnblickgipfels. Diese Sitzungsberichte, Bd. CVII, Mai 1898.

[2] Der Vergleich mit dem Gange der Temperatur an der Erdoberfläche zeigt eine viel größere Übereinstimmung in den Phasenzeiten, z. B.

	A_1	A_2	a_1	a_2
Blue Hill (Sommer)........	239·4	68·0	3·82	0·74
Greenwich (Sommer).....	237·3	65·3	3·70	0·38
Kolm Saigurn (Sommer)....	250·9	102·0	2·91	0·35
Sonnblick (Jahr)..........	244·1	76·0	1·44	0·38

[3] Von der Luftelektricität abgesehen, welche aber nur an der Erdoberfläche eine solche zeigt.

Componente S—N und W—E zur Anschauung. Die oscillatorische Bewegung der Luftmassen im Laufe des Tages kommt in diesen Diagrammen deutlich zum Ausdrucke.

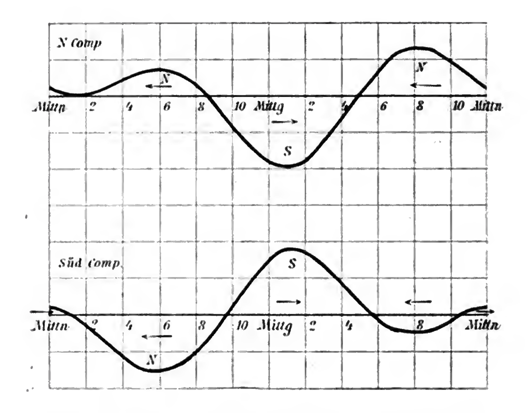


Fig. 2. Täglicher Gang der reinen Nord- und Südcomponente.

Bei der Componente S—N ist die tägliche Variation stärker als bei der Componente W—E. Doch dürfte es gerathen sein, auf diesen Satz kein zu großes Gewicht zu legen.[1]

---

[1] Auf Pikes Peak ist die Amplitude der ganztägigen Variation der Westcomponente eine ganz außerordentlich große. Ich möchte dies dem Umstande zuschreiben, dass die starke Erwärmung der großen Ebenen im Osten des Pikes Peak (unter 38° N im Sommer) die allgemeine westliche Luftströmung stark abschwächen muss wegen der starken Hebung der Flächen gleichen Druckes über den östlichen Ebenen. Die »Parks« im Westen liegen schon viel höher, die Hebung der Druckflächen daselbst ist geringer. Wie die Tabellen am Ende dieser Abhandlung zeigen, sinkt die Stärke der reinen Westcomponente auf Pikes Peak in 4308 *m* Seehöhe von 1 bis 5^h morgens bis 1 bis 3^h nachmittags auf weniger als die Hälfte herab (von 1590 *km* auf 744 *km*), die der zusammengesetzten Componente W—E sogar auf weniger

Die doppelte tägliche Oscillation der Luftmassen in 2 bis 3 *km* Seehöhe und ihre wahrscheinliche Beziehung zur doppelten täglichen Barometerschwankung.

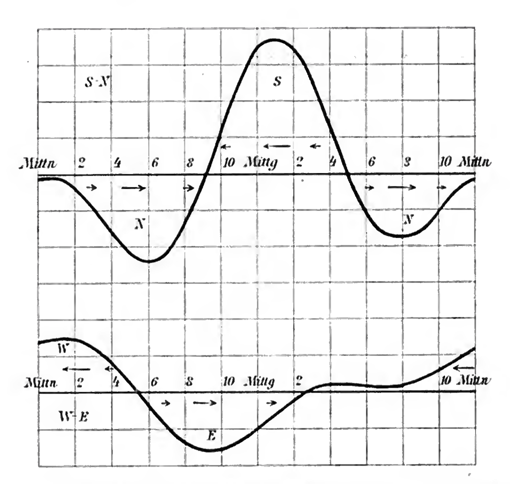


Fig. 3. Täglicher Gang der zusammengesetzten (Haupt-) Componenten.

Da ich die doppelte tägliche Periode der Windcomponenten für das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Untersuchung halte, habe ich dieselbe noch auf eine andere Weise recht klar zur Darstellung bringen wollen. Dies ist in der folgenden Tabelle geschehen, welche für jede einzelne Beobachtungsreihe die tägliche Variation der zusammengesetzten Componenten S—N und W—E enthält.

---

als ein Drittel (1 bis 5^h morgens zweistündiges Mittel 1427, 11^h a. bis 1^h p. dagegen bloß 398 *km*). Relativ noch größer ist die tägliche Variation der S—N-Componente, welche um 6^h a. auf 101 *km* herabsinkt, um 8^h abends aber den Wert von 501 *km* erreicht; das Fünffache! — Deshalb lassen sich die Werte von Pikes Peak mit jenen der Alpenstationen nicht zu Mittelwerten vereinigen.

Tabelle VI.

Täglicher Gang der Süd- und der Westcomponente.

Monatliche Windwege (in Abweichungen vom Tagesmittel) für zweistündige Intervalle (Mitternacht steht für 11^h p. bis 1^h a. etc.).

	Sonnblick		Säntis			Obir	Mittel
Periode . . .	1887 bis 1889	1891	1883 bis 1885	1886 und 1887	1891 bis 1892	1887 bis 1889	
Monate	23	12	13	23	16	23	(6)
Südcomponente							
Mitternacht	— **41**	9	**61**	**4**	**42**	— 46	**5**
2^h	— 76	**18**	37	— 24	36	— **42**	— 8
4	— 161	— 70	— 58	— 82	— 18	— 48	— 73
6	—183*	—141*	—116*	—110*	— 60*	— 51*	—110*
8	— 69	— 86	— 61	— 59	— 38	— 26	— 57
10	134	85	72	44	33	27	66
Mittag	**282**	**234**	**164**	**126**	**88**	82	**163**
2^h	266	232	130	126	71	**102**	155
4	109	76	0	56	— 4	72	51
6	— 58	—102	—109	— 21	— 70	15	— 58
8	—121*	— 164*	— 106*	— 43*	— 70*	— 34	— 90*
10	— 82	— 91	— 14	— 17	— 10	— 51*	— 44
Westcomponente							
Mitternacht	**76**	60	119	75	52	1	64
2^h	75	**83**	**138**	**89**	**70**	30	**81**
4	21	52	88	55	38	**51**	51
6	— 52	— 7	— 27	— 25	— 18	27	— 17
8	— 90*	— 47*	—148	—104	— 52*	— 35	— 79
10	— 72	— 41	—196*	—132*	— 42	— 88*	— 95*
Mittag	— 22	— 9	—150	— 92	— 7	— 86	— 61
2^h	15	6	— 51	— 21	**13**	— 31	— 12
4	**14**	— 13	29	31	0	34	16
6	— 3*	— 43*	58	**42**	— 28	**58**	14
8	0	— 42	62	36*	— 31*	36	10*
10	37	1	78	46	5	3*	28

Man muss geradezu staunen über die Regelmäßigkeit. mit welcher in jeder der einzelnen Reihen und an jeder Station die Extreme der täglichen Variation eintraten (Obir zeigt eine kleine Phasendifferenz). Die Südcomponente hat übereinstimmend zwei Maxima um Mittag und Mitternacht (secundäres Maximum) und zwei Minima um 6^h und 8^h. Die Westcomponente hat gleichfalls zwei Maxima um 2^h a. und 5^h p. (etwa) und zwei Minima um 10^h vormittags und 8^h abends (kleines secundäres Minimum). Die Eintrittszeiten der secundären Extreme sind aber bei der Westcomponente schwankender als bei der Südcomponente.

Mit welcher Bestimmtheit dieser Charakter der täglichen Variation der Windcomponenten ausgesprochen ist, zeigt sich auch darin, dass die Zahlen für die bloße Häufigkeit der einzelnen (8) Windrichtungen gleichfalls mit größter Übereinstimmung denselben täglichen Gang liefern.

Ich habe aus den 10611 Häufigkeitszahlen (in Stunden, 442 Tagen entsprechend) der Windrichtungen auf dem Sonnblick (1901), auf dem Säntis (Sommer und Winter 1891 und 1892) und Pikes Peak (Sommer 1893 und 1894) die Componenten berechnet und erhielt derart (näheres siehe Tabelle VII am Schluss) folgenden täglichen Gang der Süd- und der Westcomponente:

Täglicher Gang der Componenten bloß aus der Häufigkeit berechnet.

Mittern.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
					S—N						
5	−11	−54	−79*	−53	16	80	90	48	− 5	−26*	−11
					W—E						
45	85	86	43	−16	−54	−56*	−39	−29	−32*	−30	− 3

Der Gang dieser Zahlen, welche auch auf den Beobachtungen auf Pikes Peak zum Theile basieren, stimmt vollständig überein mit jenem in der Tabelle VI und liefert eine weitere Bestätigung der darin ausgesprochenen gesetzmäßigen

täglichen Änderungen der Windrichtung auf Berggipfeln von 2 bis 4 *km* Seehöhe.[1]

Die Ursache der doppelten täglichen Periode der Windcomponenten.

Die so stark ausgesprochene halbtägige Periode der täglichen Variation der Windcomponenten stimmt wohl nicht mit unserer früheren Annahme, dass die tägliche Wanderung des Maximums der Erwärmung von Ost nach West und die dadurch bedingte tägliche Drehung des Druckgefälles, der Neigung der Flächen gleichen Druckes, von E über S nach W direct die Ursache der täglichen Periode der Windcomponenten wäre. Die doppelte tägliche Periode derselben zwingt uns, auch an die tägliche Barometerschwankung als eine wahrscheinlichere Ursache zu denken. Wir können uns dabei Raths erholen aus der schönen mathematischen Untersuchung von M. Margules, Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale,[2] in deren dritten Theil eine Theorie der (ganztägigen und) halbtägigen Barometerschwankung gegeben wird als Effect einer periodischen Erwärmung der Lufthülle der Erde. Auf S. 1393 (III) werden die Beziehungen zwischen dem täglichen Gange des Windes und den wandernden Luftdruckwellen specieller aufgezeigt.

---

[1] Es mögen hier auch die Gleichungen für den täglichen Gang der Windcomponenten (der Häufigkeit) Platz finden.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_0	a_1	a_2
N	16·3	7·1	−17·7	−13·0	66·5	233·7	228	17·8	22·0
E.....	−20·7	−11·5	0·3	−11·0	240·9	178·4	130	23·7	11·0
S.....	−20·8	−30·2	24·7	8·1	214·6	71·8	295	36·7	26·1
W....	29·8	25·8	− 5·2	18·8	49·1	344·5	416	39·4	19·5
S—N .	−37·1	−37·3	42·4	21·2	224·9	63·5	67	52·6	47·4
W—E.	50·5	37·3	− 5·5	29·8	53·6	349·5	286	62·8	30·5

Diese Gleichungen zeigen eine bis ins Einzelne gehende Übereinstimmung mit jenen der Tabelle V, S. 1641/1642 welche aus den Windwegen berechnet worden ist. Die tägliche Drehung der daraus resultierenden Windrichtungen ist jedoch weniger normal.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. CI, April 1892; CII, Jänner 1893 und CIII, December 1893. Auf letztere beziehen wir uns hier speciell.

Die ganztägige Druckwelle gibt nach Dr. Margules auf der nördlichen Hemisphäre folgenden Windwechsel:

6^h morgens Druckmaximum	Mittags mittlerer Druck	6^h abends Druckminimum	Mitternacht mittlerer Druck
Ostwind	Südwind	Westwind	Nordwind

Auf der südlichen Hemisphäre sind die meridionalen Winde natürlich umgekehrt, die zonalen bleiben ungeändert. Dieses Schema entspricht vollständig dem oben nachgewiesenen täglichen Gange der Winddrehung.

Für die halbtägige Druckwelle mit zunehmender Amplitude von Pol zum Äquator und Eintritt des Druckmaximums um 10^h morgens und abends findet Margules folgendes Schema für die tägliche Variation der Windrichtung:

10^h morgens Druckmax.	1^h nachmitt. mittl. Druck	4^h abends Druckmin.	7^h abends mittl. Druck	10^h abends Druckmax.
E	S	W	N	E

Vergleichen wir damit die Werte der Windcomponenten in der Tabelle VI, S. 1646.

10^h morgens Min. der Westcomp.	1^h nachmitt. Max. der Südcomp.	4^h abends sec. Max. der Westcomp.	7^h abends Min. der Südcomp.	10^h abends sec. Min. der Westcomp.
E	S	W	N	E

Das Windschema von Dr. Margules entspricht demnach dem von uns nachgewiesenen (complexen täglichen Gange der Windcomponenten.

Zu einem strengeren Vergleich muss aber speziell das halbtägige Glied der täglichen Oscillation der beiden rechtwinkeligen Componenten herbeigezogen werden. Wir haben für die S—N-Componente (Amplitude auf Meter pro Secunde reduciert):

S—N....... $0\cdot40 \sin(86\ 5+2x)$

W—E...... $0\cdot18 \sin(357\cdot6+2x)$.

Diese Gleichungen geben, wenn wir die Winkelconstanten auf 90° und 360° abrunden (es entspricht ja 1° der Winkelconstanten bloß 2 Minuten Zeitdifferenz), folgende Extreme:

Südwind...... Mittag und Mitternacht,
Nordwind..... 6^h morgens und 6^h abends,
Westwind..... 3^h morgens und 3^h abends,
Ostwind...... 9^h morgens und 9^h abends,

also mit Rücksicht darauf, dass allgemein die Barometer-Maxima zwischen 9^h und 10^h, die Minima zwischen 3^h und 4^h eintreffen, eine völlige Übereinstimmung mit der Theorie von Margules.[1]

In dieser doppelten Periode stimmt auch Pikes Peak vollkommen mit der Theorie. Er gibt:

S—N...... $0 \cdot 32 \sin (104° + 2x)$
W—E..... $0 \cdot 48 \sin (335 + 2x)$.

Die Maxima der S—N-Componente treten um eine halbe Stunde früher ein, die Extreme der W—E-Componente um eine Stunde später als im allgemeinen Mittel der anderen Stationen, eine Übereinstimmung, wie sie bei nur zehnmonatlichen Aufzeichnungen nicht besser erwartet werden kann.

Die Tafel II der Abhandlung von Margules (Luftbewegung in einer rotierenden Sphäroidschale, III. Theil, diese Sitzungsberichte, Bd. CII., December 1893) enthält eine graphische Darstellung der westwärts wandernden Temperaturdoppelwelle, aus welcher der Sinn und die Größe der Luftbewegungen in derselben vom Äquator bis gegen die Pole hin bequem entnommen werden kann.

Die große Übereinstimmung der Winkelconstanten des zweiten Gliedes der täglichen Variation der Windcomponenten

[1] Es ist wohl zu beachten, dass die Windrichtungen in den thermischen Druckwellen von Margules Winde gegen den Gradienten sind. Die Südwinde z. B., die bei mittlerem Drucke wehen, haben das Maximum zur Linken, das Minimum zur Rechten. Die Westwinde wehen im Minimum, die Ostwinde im Druckmaximum. Dass die Beobachtungen mit diesen Forderungen der Theorie übereinstimmen, darin liegt eben ihre Beweiskraft für dieselbe.

(der Phasenzeiten) in der Tabelle V ist sehr auffallend und weist an sich schon auf einen Zusammenhang mit der doppelten täglichen Druckwelle hin. Dass die Übereinstimmung bei der W—E-Componente nicht ebenso groß ist, wie bei der S—N-Componente, rührt wohl daher, dass die Stürme, die ja auf unserem Gebiete fast ausschließlich Weststürme sind, auch eine doppelte tägliche Periode zu haben scheinen.[1]

Von besonderer Wichtigkeit für die Prüfung der Theorie wären die Ergebnisse der anemometrischen Aufzeichnungen, auf einem Berggipfel in den Tropen, namentlich in der Nähe des Äquators. Die Windregistrierungen auf dem Dodabetta Peak in Südindien, deren Ergebnisse publiciert worden sind, harren noch der Berechnung. Die Registrierungen der stündlichen Richtung des Windes auf dem von John Allan Brown auf dem Agustia Peak errichteten Observatorium liegen aber berechnet vor.[2] Das Observatorium liegt unter 8° 37′ N Br. 77° 20′ E v. Gr. in 1890 *m* Seehöhe auf dem höchsten Punkt

---

[1] Es darf hier vielleicht specieller erinnert werden an die bemerkenswerte Thatsache, dass die Stürme eine doppelte tägliche Periode haben mit zwei Maximis, das eine um Mitternacht, das andere um Mittag. Für Wien habe ich gefunden:

Täglicher Gang der mittleren Windstärke an stürmischen Tagen (Maximum 70 *km* pro Stunde, $19\frac{1}{2}$ *m*.Sec.); *m*.Sec. $x = 0$ für Mitternacht. Jahresmittel.

$$14\cdot88+0\cdot49 \sin(276\cdot5°+x)+0\cdot72 \sin(70\cdot5°+2x).$$

Tägliche Periode der Häufigkeit eines Windweges von 50 *km* pro Stunde.

$$1\cdot11 \sin(263\cdot2°+x)+1\cdot46 \sin(103\cdot0°+2x).$$

Die doppelte tägliche Periode ist in beiden Gleichungen die prädominierende. Sie ist auch noch im Sommer vorhanden. Hellmann und Sprung haben schon früher einen ganz gleichen Gang der Häufigkeit der stürmischen Winde für die norddeutschen Küsten nachgewiesen (Hann, Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen zu Wien 1873 bis 1892. Diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. IIa., Februar 1893, S. 152 etc.).

[2] Indian Met. Memoirs, Vol. X, Part II. Discussion of the observ. made at Agustia. Simla 1899.

der südlichen Travancore Hills und ist allen Winden frei ausgesetzt. Der Berg fällt steil nach E und W ab.

Die registrierten Häufigkeitszahlen der Winde ergeben folgenden täglichen Gang der beiden Hauptcomponenten. Zeit von Mitternacht gezählt, Amplituden in Procenten der Beobachtungen. Jahresmittel.

S—N-Componente:

$$-10 \cdot 5+3 \cdot 26 \sin (249 \cdot 4^\circ+x)+1 \cdot 64 \sin (92 \cdot 0^\circ+2x).$$

W—E-Componente:

$$8 \cdot 3+4 \cdot 29 \sin (292 \cdot 7^\circ+x)+2 \cdot 61 \sin (319 \cdot 0^\circ+2x).$$

Der tägliche Gang der S—N-Componente ist jenem auf unseren Berggipfeln völlig gleich, bei der W—E-Componente stimmt nur die halbtägige Periode. Die Phasenzeit der ganztägigen Periode ist um rund 12 Stunden verschieden.

Hier aber ist für uns die halbtägige Periode von hauptsächlichstem Interesse.

Die halbtägige Periode gibt nun folgendes Resultat (im Jahresmittel):

Südwinde	Mitternacht und Mittag,
Nordwinde	6^h a. und 6^h p.
Westwinde.....	4^h a. und 4^h p.
Ostwinde	10^h a. und 10^h p.

Diese Eintrittszeiten stimmen, wie man sieht, völlig mit der Theorie von Margules, allerdings sollten in so niedriger Breite die meridionalen Winde schon fehlen, sie sind aber bloß seltener als die Westostwinde. In der ruhigeren Zeit des NE-Monsuns (October bis Februar) wird die halbtägige Periode durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

S—N-Componente.....	$1 \cdot 53 \sin (66^\circ+2x)$
W—E-Componente....	$3 \cdot 97 \sin (335 +2x)$.

Die Phasenzeiten sind fast dieselben, das Übergewicht der Westostwinde ist jetzt größer.

Sehr bemerkenswert ist, dass auch die Größenordnung der von uns gefundenen halbtägigen Variation der Windcomponenten mit den von Margules berechneten Werten übereinstimmt. M. Margules sagt: »Die meridionalen Winde verschwinden am Äquator und haben in mittleren Breiten ein Maximum der Amplitude. Die größten Windgeschwindigkeiten werden, wenn die Druckamplitude am Äquator 1 *mm*, bei 45° Breite 0·3 *mm* beträgt, 0·2 bis 0·3 *m* pro Secunde sein«.

Nach unserer Tabelle beträgt die mittlere Amplitude der halbtägigen Periode der Südcomponente unter circa 47° Breite 0·4 *m* pro Secunde, eine genügende Übereinstimmung, wenn man die Unsicherheit der Anemometerangaben berücksichtigt (denen auch der zu große Factor 3 zugrunde liegt). Die Amplitude der W—E-Componente ist nach der Theorie von nahezu gleicher Größe, in den Ergebnissen unserer Rechnung kommt sie etwas kleiner heraus (siehe aber dagegen Pikes Peak), aber die Differenz liegt vollkommen innerhalb der Fehlergrenzen, die unseren Resultaten nothwendig anhaften müssen.

Mit großer Wahrscheinlichkeit dürfen wir demnach aus dem Vorstehenden den Schluss ziehen, dass die mathematische Theorie der doppelten täglichen Barometeroscillation von Margules auf thermischer Grundlage in den Luftbewegungen auf den Berggipfeln eine volle empirische Bestätigung findet.

Es war wohl nicht zu erwarten, dass man aus den anemometrischen Aufzeichnungen auf den Berggipfeln die schwachen Luftbewegungen, um welche es sich bei dieser Theorie handelt, werde nachweisen können. Es enthält das vorstehende Resultat deshalb auch eine Aufforderung, die anemometrischen Aufzeichnungen vielseitiger und sorgfältiger als bisher zu berechnen.

Die jährliche Periode des täglichen Ganges der Windcomponenten.

Es soll hier hauptsächlich nur der Wunsch aus gesprochen werden, dass dieser tägliche Gang aus den vieljährigen und schon publicierten Ergebnissen der Anemometeraufzeichnungen auf dem Säntisgipfel berechnet werden möge. Es würde sich dann auch der jährliche Gang der mittleren Windrichtung

(berechnet aus den Abweichungen der Componenten vom Jahresmittel) nebenbei ergeben.

Hier kann ich nur auf den Unterschied in der täglichen Variation der Componenten auf dem Säntisgipfel zwischen Winter und Sommer kurz hindeuten. Ich benütze dazu auch die Ergebnisse, welche Goutereau in der früher citierten Abhandlung für Jänner und Juli erhalten hat. Ich habe dieselben neu berechnet und des bequemeren Vergleiches wegen auch auf zweistündige Windwege im Monat reduciert. (Goutereau gibt Meter pro Secunde.) Die folgende Tabelle enthält die von mir berechneten Werte der S—N- und W—E-Componente in den extremen Jahreszeiten.

Die Tabelle ist recht lehrreich. Sie zeigt:

1. dass die S—N-Componente Winter wie Sommer, Jänner wie Juli den gleichen täglichen Gang hat, mit einer der Hauptsache nach doppelten täglichen Periode. Die halbtägige Periode ist besonders constant, so dass man einfach aus meinen und Gouterau's Resultaten direct ein Mittel nehmen kann, ebenso schließlich auch noch aus den Winter- und Sommerresultaten.

Die doppelte tägliche Periode der S—N-Componente beträgt:

Winter .... $54 \sin(55^\circ + 2x)$.
Sommer ...... $75 \sin(73 \;\; + 2x)$.

Die ganztägige Periode ist übrigens auch nicht so weit in beiden Reihen verschieden, um eine directe Mittelbildung nicht zu gestatten.

Ganztägige Periode der S—N-Componente:

Winter........ $43 \sin(238^\circ + x)$.
Sommer....... $57 \sin(320 \;\; + x)$.

Der Phasenunterschied zwischen Winter und Sommer beträgt aber hier 82°, d. i. $5^2/_3$ Stunden, fast $^1/_4$ Tag, während er bei der halbtägigen Periode nur $^1/_2$ Stunde beträgt und innerhalb der Fehlergrenze bleibt.

Tabelle VII.

Säntisgipfel. Täglicher Gang der Windcomponenten in den extremen Jahreszeiten.

	1891 und 1892				10 Jahre nach Goutereau			
	S—N		W—E		S—N		W—E	
	Winter	Sommer	Winter	Sommer	Jänner	Juli	Jänner	Juli
Mitternacht	**40**	**43**	—54	158	—35	**41**	—39	**166**
2^h	30	42	—18	**158**	—9	**59**	2	**211**
4	—20	—17	—24	100	—20	28	8	188
6	—59*	—61*	—42	7	—39*	2*	—15	51
8	—49	—27	—20	—84	—18	22	—27*	—154
10	5	62	54	—138	47	69	3	—307
Mittag	**53**	**123**	133	—146*	111	**84**	60	—314*
2^h	53	90	**146**	—120	**118**	31	**93**	—183
4	8	—16	74	—74	53	—63	66	—13
6	—34*	—106*	—36	—20	—38	—127*	—6	97
8	—34	—105	—109*	46	—91*	—112	—68	126
10	7	—28	—104	113	—79	—34	—77*	132

Gleichungen des täglichen Ganges ($x = 0$ für Mitternacht).

S—N-Componente:

Winter ..... $13 \cdot 9 \sin(206 \cdot 6 + x) + 51 \cdot 1 \sin(66 \cdot 5 + 2x)$
Jänner ..... $73 \cdot 2 \sin(269 \cdot 8 + x) + 56 \cdot 0 \sin(43 \cdot 1 + 2x)$

Sommer .... $45 \cdot 3 \sin(299 \cdot 0 + x) + 85 \cdot 8 \sin(71 \cdot 3 + 2x)$
Juli .... $68 \cdot 2 \sin(341 \cdot 6 + x) + 64 \cdot 8 \sin(75 \cdot 8 + 2x)$

W—E-Componente:

Winter ..... $93 \cdot 1 \sin(91 \cdot 7 + x) + 64 \cdot 6 \sin(37 \cdot 2 + 2x)$
Jänner ..... $49 \cdot 7 \sin(264 \cdot 5 + x) + 49 \cdot 7 \sin(12 \cdot 1 + 2x)$

Sommer .... $153 \cdot 0 \sin(85 \cdot 2 + x) + 19 \cdot 3 \sin(18 \cdot 5 + 2x)$
Juli .... $241 \cdot 5 \sin(95 \cdot 4 + x) + 94 \cdot 2 \sin(308 \cdot 4 + 2x)$.

2. dass die W—E-Componente im Winter eine sehr ausgesprochene halbtägige Periode hat, im Sommer dagegen nicht, dass aber namentlich bei Tag der Gang zwischen Winter und Sommer sich umkehrt. Im Winter fällt das Hauptmaximum der Westcomponente in beiden Reihen auf 2^h mittags, im Sommer fällt das Hauptminimum auf Mittag. Der Unterschied ist in den von mir für die Winter 1891 und 1892 berechneten Werten ebenso bestimmt ausgesprochen wie in den von Goutereau aus zehnjährigen Aufzeichnungen für Jänner und Juli erhaltenen Zahlen. Er kann somit als Thatsache betrachtet werden. Das nächtliche Maximum der Westcomponente um circa 2^h a. bleibt Winter wie Sommer, im Winter ist es ein secundäres, im Sommer das Hauptmaximum. Ich will keine Vermuthungen aussprechen über die Ursachen dieser Umkehr des täglichen Ganges vom Winter zum Sommer bei der W—E-Componente. Die Gleichungen des täglichen Ganges für beide Beobachtungsreihen stimmen sonst ziemlich überein, nur die ganztägige Periode hat bei Goutereau im Jänner einen Phasenunterschied von fast 180° gegen mein Resultat. Die Gleichungen für die halbtägige Periode stimmen soweit, dass man ein Mittel nehmen darf.

Halbtägige Periode der W—E-Componente:

Winter ...... $57 \sin(25°+2x)$.
Sommer ..... $57 \sin(343+2x)$.

Der Phasenunterschied zwischen Winter und Sommer beträgt 42° oder rund $1^1/_2$ Stunden. Die mittlere Amplitude für den Sommer ist natürlich sehr unsicher, weil aus zwei sehr abweichenden Zahlen berechnet.

Die vorstehenden so bestimmt ausgesprochenen Thatsachen über den jährlichen Gang der täglichen Variation der Windcomponenten auf dem Säntisgipfel fordern dazu auf, die Windregistrierungen auf anderen Berggipfeln gleichfalls in ähnlicher Weise zu untersuchen.

Zum Schlusse will ich noch den von mir und den von Goutereau mitgetheilten zweistündlichen Werten der Nord- und Ostcomponenten in Meter pro Secunde berechneten

mittleren täglichen Gang der beiden Componenten anführen. Das Mittel aus Jänner und Juli kann als ein Jahresmittel betrachtet werden.

Täglicher Gang der Windcomponenten auf dem Säntisgipfel. Mittel Jänner und Juli.

$$\text{S—N} \ldots\ldots\ 0{\cdot}27 \sin(303{\cdot}6^\circ + x) + 0{\cdot}27 \sin(59{\cdot}9^\circ + 2x).$$

$$\text{W—E} \ldots\ldots\ 0{\cdot}45 \sin(98{\cdot}1 + x) + 0{\cdot}29 \sin(329{\cdot}4^\circ + 2x).$$

Die Amplituden sind hier Meter pro Secunde, die Zeit ist von Mitternacht gezählt.[1] Diese Gleichungen unterscheiden sich nicht wesentlich von dem früher mitgetheilten durchschnittlichen Gange der beiden Componenten.

Der tägliche Gang der mittleren Windstärke bei den verschiedenen Windrichtungen.

Die Berechnung dieser Zahlen wurde nur als nebensächlich betrachtet. Einiges Interesse hat aber doch die Beantwortung der Frage, ob auch auf den Berggipfeln, wie an den Stationen der Niederung alle Winde ziemlich zur gleichen Zeit das Maximum ihrer Stärke erreichen. Für die Niederungen tritt die größte Stärke bei allen Windrichtungen bald nach Mittag ein, nahezu entsprechend dem Gange der sogenannten absoluten Windstärke, der sich natürlich von jenem der häufigsten Windrichtungen nicht viel unterscheiden kann.[2] Die Ursache, welche die mittägige Verstärkung der Luftbewegung veranlasst, ist von der Windrichtung (nahezu) unabhängig, macht sich bei allen Windrichtungen in gleicher Weise geltend.

Auf den Berggipfeln tritt aber das Maximum der absoluten Windgeschwindigkeit bekanntlich in der Nacht ein, das Minimum um den Mittag herum. Es entsteht deshalb die Frage, ob auch hier die Winde aller Richtungen in der Nacht ihr

---

[1] Goutereau gibt die Werte der Componenten für 0—1, 2—3, 3—4 etc. Ich habe angenommen, dass sie für $0^1/_2$, $2^1/_2$, $3^1/_2$ etc. gelten und die Phasenwinkel entsprechend um 7·5 und 15° zurückgedreht.

[2] Hann, Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes. Diese Sitzungsber. B. LXXIX, Jänner 1879, S. 43.

Stärkemaximum erreichen und ihr Minimum um den Mittag herum.

Zur Beantwortung dieser Frage habe ich den täglichen Gang der Windstärke für die acht Hauptwindrichtungen in der Art berechnet, dass die Häufigkeit (Stundenzahl), wie die Windwege der Zwischenrichtungen einfach halbiert und die Hälften zu den Hauptrichtungen addiert worden sind. Man erhält so Zahlen, welche dem gewöhnlichen Begriffe der Windstärke, d. i. Summen der Windwege dividiert durch die zugehörige Stundenzahl, völlig entsprechen. Ich bemerke das ausdrücklich, weil Pernter bei einer ähnlichen Berechnung für Sonnblick, Säntis und Obir einen anderen Weg eingeschlagen hat, indem er von der plausiblen Ansicht ausgieng, dass die Vertheilung der Zwischenrichtungen mit Rücksicht auf die Häufigkeit und Stärke der benachbarten Hauptrichtungen erfolgen sollte und nicht zu gleichen Theilen.[1] Nur wenn Häufigkeit und Windwege in völlig gleichem Verhältnisse wachsen, erhält man auch auf diesem Wege mittlere Windgeschwindigkeiten im gewöhnlichen Sinne. Erheblich wird allerdings die Abweichung davon nicht werden.

Wie man aus den Tabellen am Schlusse dieser Abhandlung entnehmen kann (für jede Station findet sich dort auch eine Tabelle der mittleren Windgeschwindigkeiten der acht Hauptrichtungen von zwei zu zwei Stunden vor), ist der tägliche Gang der Windstärken noch sehr unregelmäßig. Man müsste bei der relativen Seltenheit mancher Windrichtung viel längere Beobachtungsserien in Rechnung ziehen, um bestimmtere Resultate zu erhalten.

Es ist dies ja sehr begreiflich. Während in der Niederung der tägliche Gang der absoluten Windgeschwindigkeit (ohne Rücksicht auf die Richtung) sehr stark ausgesprochen ist, die die Maxima an allen Orten schon in den Monatsmitteln sehr bestimmt am frühen Nachmittag eintreten, ist dies auf den Berggipfeln nicht in gleicher Weise der Fall. Der tägliche Gang ist viel schwächer ausgesprochen, die Amplitude der täglichen

[1] Pernter, Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick. Denkschriften der Wiener Akad. LVIII. Bd., Wien 1891, S. 238.

Änderung ist relativ geringer und der Eintritt der Maxima ist viel weniger regelmäßig in kürzeren Beobachtungsperioden. In den Monatsmitteln der Windgeschwindigkeit kann das Maximum nicht gar so selten gelegentlich selbst auf die Mittagszeit fallen, obgleich es normal in der Nacht eintritt. Es ist daher begreiflich, dass die Zahlen für die stündliche Windstärke einzelner Richtungen, aus halbjährigen oder selbst einjährigen Aufzeichnungen berechnet, noch gar nicht regelmäßig fortschreiten. Ich habe daher die mittlere Windgeschwindigkeit auch für die vier Hauptrichtungen berechnet und nur diese Zahlen werden hier einer Discussion unterzogen. Die Auftheilung der Zwischenrichtungen nach Häufigkeit und Windwegen erfolgte ebenfalls nur durch Halbierung dieser Daten und gleichförmige Zutheilung derselben auf die vier Hauptrichtungen.

Außer den Resultaten meiner eigenen Berechnungen habe ich hier noch zum Vergleiche beigezogen zunächst die Resultate, die Pernter erhalten hat, die aber hier nur als Mittel aus allen seinen drei Stationen (Sonnblick, Säntis und Obir) comparieren;[1] ferner die von Billwiller berechneten mittleren Windgeschwindigkeiten (Säntis 1883/1885) (Met. Z. Bd. XX [1885], S. 476), welche ich auch auf vier Richtungen und auf zweistündige Intervalle reduciert habe. Die so erhaltenen Zahlen schreiten, obgleich nur aus Aufzeichnungen von 400 Tagen erhalten, schon auffallend regelmäßig fort.

Alle diese Zahlen findet man übersichtlich in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Es zeigt sich dabei Folgendes:

Die täglichen Extreme treten in allen drei Reihen recht nahe zu den gleichen Zeiten ein, die Maxima bei Nacht, die Minima um oder etwas nach Mittag, also umgekehrt wie in der Niederung, aber derselben Regel folgend, dass die Eintrittszeiten der Maxima und Minima für alle Richtungen nahe die gleichen sind.

---

[1] Pernter, Windverhältnisse auf dem Sonnblick, S. 208. Die Zahlen für die einzelnen Stationen schreiten noch recht unregelmäßig fort, selbst nachdem sie auf vier Richtungen reduciert worden sind. Deshalb habe ich Mittel für alle Stationen gebildet und je 2 Stunden zusammengezogen.

Tabelle VIII *a*.

Der tägliche Gang der mittleren Windstärke für die vier Hauptrichtungen.

	Mitter-nacht	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
						Nord						
A	25·1	26·3	**27·1**	26·3	24·6	24·0	23·0	22·4*	23·7	**26·0**	25·6	24·8*
B	23·8	**24·1**	**24·1**	22·8	21·3	20·8*	21·3	22·4	23·8	**24·5**	24·0	23·8*
C	17·5	**18·5**	18·2	16·9	15·3	14·7*	15·3	15·7	16·5	17·8	**18·1**	17·3*
Mittel....	22·1	23·0	**23·1**	22·0	20·4	19·8*	19·9	20·2	21·3	**22·8**	22·6	22·0*
						Ost						
A	22·9	24·4	**24·8**	24·9	23·0	22·9	21·7	21·1*	22·1	23·0	**23·2**	22·2*
B	21·1*	21·3	**21·9**	**22·1**	21·3	19·4*	19·6	19·6	19·6	21·9	**22·2**	21·5
C	**24·9**	24·6	24·2	24·5	23·7	21·7	20·8*	21·7	23·4	24·0	23·8	24·1
Mittel....	23·0	23·4	**23·6**	**23·8**	22·7	21·3	20·7*	20·8	21·7	23·0	**23·1**	22·6*

Süd												
A	35·5	34·6	35·2	35·1	33·7	33·7	32·8	32·1*	32·3	33·1	33·5	34·6
B	26·3	25·5	24·7	24·4	24·0	23·9*	24·8	25·5	26·0	26·3	26·7	26·8
C	32·5	32·4	32·3	32·0	30·0	27·0	24·7	24·5*	26·1	28·4	31·1	32·6
Mittel	31·4	30·8	30·7	30·5	29·2	28·2	27·4	27·4*	28·1	29·3	30·4	31·3
West												
A	36·4	35·2	35·1	34·6	33·3	32·2	31·5	31·4*	32·8	32 8	32·5	35·2
B	29·5	29·0	28·0	27·4	26·9	26·7*	26·9	26·6*	26·8	27·9	28·8	29·3
C	33·7	33·7	33·3	32·0	30·5	30·0*	30·5	30·7	30·9	31 7	32·6	33·4
Mittel	33·3	32·6	32·1	31·3	30·2	29·6	29·6*	29·6	30·2	30·8	31·3	32·6

A Sonnblick, Jahr 1901; Säntis 1891 und 1892, 16 Monate; Pikes Peak 1893 und 1894, 10 Monate.
B Sonnblick, Säntis, Obir je circa 2 Jahre.
C Säntis, 1883/1885, rund 13 Monate.

Die Mittel sind aber hier gebildet ohne Rücksicht auf die Dauer der Beobachtungen.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit.

Kilometer pro Stunde.

	N	E	S	W
Mitternacht	22·1	23·0	**31·4**	**33·3**
2h	**23·0**	23·4	30·8	32·6
4	**23·1**	**23·6**	30·7	32·1
6	22·0	**23·8**	30·5	31·3
8	20·4	22·7	29·2	30·2
10	19·8*	21·3	28·2	29·6
Mittag	19·9	20·7*	27·4*	29·6*
2h	20·2	20·8	27·4*	29·6
4	21·3	21·7	28·1	30·2
6	**22·8**	23·0	29·3	30·8
8	22·6	**23·1**	30·4	31·3
10	22·0*	22·6*	31·3	32·6

Die Nord- und die Ostwinde haben jedoch zwei Besonderheiten. Die Hauptmaxima treten erst zu den frühen Morgenstunden ein, zwischen 3^h und 6^h etwa, während sie bei den Süd- und Westwinden schon um Mitternacht sich einstellen. Außerdem finden wir bei den Nord- und Ostwinden noch secundäre Maxima zwischen 6^h und 8^h abends und ein secundäres Minimum um 10^h abends; bei den Süd- und Westwinden treten keine secundären Extreme ein.

Wenn man von Süd- und West- zum Nord- und Ostwind übergeht, so sieht es aus, als wenn die Maxima wandern würden von Mitternacht nach 2^h, 4^h und 6^h, als ob eine Drehung von rechts nach links erfolgen würde, wie sie oben für die Richtungen nachgewiesen worden ist. Auch die Minima wandern von 10^h a. bei Nord, auf Mittag bei Ost und 2^h p. bei Süd. Pernter gieng von der Ansicht aus, dass eine solche vollständige Drehung bestehe, konnte sie aber in den von ihm berechneten Zahlen nicht constatieren. Diese Wanderung der Eintrittszeiten der Extreme der Windstärken bei den einzelnen Windrichtungen tagüber von rechts nach links mit der Sonne ist aber wohl nicht vorhanden, es findet sich nur eine Andeutung davon in den Nachtstunden vor. Die Thatsache, welche schon Pernter betonte und die durch vorliegende Untersuchung eine weitere Bestätigung gefunden hat, dass die aus

den Häufigkeitszahlen allein berechneten mittleren Windrichtungen ganz den gleichen täglichen Gang der Windcomponenten ergeben wie die Windwege (auch gleiche Resultierende überhaupt), zwingt zu dem Schlusse, dass die Windwege und die Häufigkeitszahlen bei den verschiedenen Windrichtungen stets sehr nahe proportional bleiben, den gleichen Gang haben. Es können also keine merklichen und systematisch auftretenden Unterschiede im täglichen Gange der Windstärke (Quotient aus Windweg und Windhäufigkeit) bei den verschiedenen Richtungen erwartet werden, alle Windrichtungen müssen nahe zu den gleichen Zeiten die extremen Werte ihres Stärkegrades erreichen. Das zeigen auch in der That die obigen Tabellen des täglichen Ganges der Geschwindigkeit der verschiedenen Windrichtungen.

Eine sehr bemerkenswerte Ausnahme machen aber die Winde auf dem Dodabetta Peak in Südindien, 2643 *m*, dem höchsten Punkte der Nilgiris. Während der Periode der ENE-Winde vom November bis Mai wird das tägliche Maximum der Windgeschwindigkeit um 10^h vormittags erreicht, das Minimum zwischen 5^h und 6^h abends. Während der Zeit der NW-Winde von Juni bis October (Periode des SW-Monsuns) tritt umgekehrt das Maximum der Windgeschwindigkeit um 10^h abends ein, das Minimum um 1^h nachmittags wie auf unseren Berggipfeln. Die Gleichungen für den mittleren täglichen Gang der absoluten Windstärke sind:[1]

Dodabetta Peak, 2643 *m*.

Windstärke in Centimeter pro Secunde. $x = 0$ für Mitternacht.

November bis Mai. ENE-Wind:

$$385 \cdot 1 + 78 \cdot 1 \sin(322° + x) + 45 \cdot 5 \sin(145° + 2x).$$

Juni bis October. NW bei W:

$$1055 \cdot 8 + 100 \cdot 6 \sin(72° + x) + 38 \cdot 9 \sin(231° + 2x).$$

Während der Herrschaft der Ostwinde bleibt die Windgeschwindigkeit von 2^h p. bis 4^h a. unter dem Tagesmittel,

---

[1] Hann, Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes. Diese Sitzungsber., Januar 1879, S. 76 bis 77.

während der Herrschaft der Westwinde dagegen von 9^h morgens bis 6^h abends. Der Ostwind versteift sich mit der höher steigenden Sonne, der Westwind flaut dagegen ab.

Tabelle VIII *b*.

Täglicher Gang der mittleren Windstärke für die vier Hauptrichtungen (Kilometer pro Stunde).

Sonnblick (1901), Säntis (16 Monate), Pikes Peak (10 Monate).

	Beobachtet				Abweichungen vom Mittel berechnet			
	N	E	S	W	N	E	S	W
Mitternacht	25·1	22·9	**35·5**	**36·4**	0·44	0·06	1·21	2·03
2^h	26·3	24·4	34·6	35·2	1·20	0·94	**1·33**	**2·29**
4	**27·1**	**24·8**	35·2	35·1	**1·95**	**1·80**	1·20	1·77
6	26·3	24·9	35·1	34·6	1·78	1·77	0·88	0·70
8	24·6	23·0	33·7	33·3	0·43	0·74	0·35	−0·48
10	24·0	22·9	33·7	32·2	−1·34	−0·73	−0·37	−1·37
Mittag	23·0	21·7	32·8	31·5	−2·36*	−1·58*	−1·13	−1·81
2^h	22·4*	21·1*	32·1*	31·4*	−2·04	−1·50	−1·61*	−1·85*
4	23·7	22·1	32·3	32·8	−0·87	−0·76	−1·56	−1·55
6	**26·0**	23·0	33·1	32·8	0·14	−0·25	−0·96	−0·92
8	25·6	**23·2**	33·5	32·5	**0·41**	**−0·18**	−0·07	0·04
10	24·8*	22·2*	34·6	35·2	0·26*	−0·31*	0·73	1·15
Mittel[1]	25·0	23·0	33·6	33·7	24·91	23·02	33·85	33·58

Gleichungen des täglichen Ganges:

N .... $1·62 \sin(59·6+x)+0·96 \sin(274·2°+2x)$

E ... . $1·30 \sin(39·1+x)+0·78 \sin(281·9+2x)$

S .... $1·49 \sin(51·8+x)+0·19 \sin(168·1+2x)$

W .... $2·08 \sin(67·1+x)+0·22 \sin(30·1+2x)$.

1 Mit Rücksicht auf die verschiedene Häufigkeit nach den Tageszeiten und einfache arithmetische Mittel. Der Unterschied ist gering, wie man sieht.

Tabelle VIII *c*.

Täglicher Gang der mittleren Windstärke für die vier Hauptrichtungen (Kilometer pro Stunde).

Sonnblick, Säntis, Obir (je 2 Jahre).

	Beobachtet (ausgeglichen)				Berechnet			
	N	E	S	W	N	E	S	W
Mitternacht	23·8	21·1*	26·3	**29·5**	0·82	0·25*	0·69	**1·69**
2h	**24·1**	21·3	25·5	29·0	**1·10**	0·37	0·03	1·10
4	24·1	21·9	24·7	28·0	0·88	0·87	-0·59	0·24
6	22·8	**22·1**	24·4	27·4	-0·22	**1·02**	-1·06	-0·47
8	21·3	21·3	24·0	26·9	-1·63	0·30	-1·32*	-0·85
10	20·8*	19·4*	23·9*	26·7*	-2·39*	-0·99	-1·27	-1·03
Mittag	21·3	19·6	24·8	26·9	-1·88	-1·89*	-0·87	-1·15
2h	22·4	19·6	25·5	26·6*	-0·48	-1·69	-0·17	-1·16*
4	23·8	19·6	26·0	26·8	0·82	-0·55	0·63	-0·84
6	**24·5**	21·9	26·3	27·9	**1·28**	0·62	1·24	-0·07
8	24·0	**22·2**	26·7	28·8	1·01	**1·02**	**1·46**	0·91
10	23·8*	21·5	**26·8**	29·3	0·69*	0·67	1·23	1·63
Mittel	—	—	—	—	23·06	20·96	25·41	27·82

Gleichungen des täglichen Ganges:

N .... $1·54 \sin(119·0+x)+0·85 \sin(321·6+2x)$

E .... $1·09 \sin(79·4+x)+0·87 \sin(250·5+2x)$

S......... $1·39 \sin(145·9+x)+0·10 \sin(66·0+2x)$

W........ $1·43 \sin(98·0+x)+0·33 \sin(125·1+2x)$.

Anhang.

Bemerkungen über die tägliche Periode der mittleren Windrichtung an der Erdoberfläche.

Die Anregung zu der vorliegenden Abhandlung empfieng ich bei der Abfassung meines Lehrbuches der Meteorologie vor nahezu drei Jahren. Ich musste damals den Widerspruch, der zwischen der Regel von Sprung und dem mittleren Gange der Windfahne (der Drehung der reinen Tagwinde nach Abzug der vorherrschenden Windrichtung) zu bestehen scheint, ungelöst hinstellen (S. 404 meines Lehrbuches). Dies bewog mich, sowie ich etwas mehr Muße hatte, eine eingehendere Untersuchung dieser Verhältnisse aufzunehmen. Während der Sammlung des Materials für die Berechnung der täglichen Variation der Windrichtung erhielt ich die schon oben citierte Abhandlung des Herrn Ch. Goutereau, welche mich veranlasste, von einer Berechnung der Windregistrierungen an der Erdoberfläche abzustehen und nur jene von den Gipfelstationen zu bearbeiten. Ein paar Resultate aber, die ich schon erhalten hatte, sollen nachträglich doch hier Platz finden, zugleich mit einigen Auszügen, Umrechnungen und Bemerkungen, zu denen die Abhandlung des Herrn Goutereau[1] mir Veranlassung gegeben hat.

Nachträglich fand ich auch wieder (!), dass schon Herr Rykatchef in seiner schönen, großen Abhandlung über den täglichen Gang des Barometers in Russland[2] für einige Stationen die tägliche Variation der Windrichtung berechnet hat (Petersburg 1870/76, Toronto, Oxford, Armagh, Sandwich Manse [Orkaden,] Nukuss), und zwar auch schon aus den Abweichungen der zwei rechtwinkeligen Componenten von deren Tagesmittel. Er bildet das Mittel aus Oxford, Armagh und

---

[1] Sur la variation diurne des courants horizontaux. Annales du Bureau Central Mét. de France, 1898. I. Mémoires.

[2] La marche diurne du Baromètre en Russie et quelques remarques concernant ce phénomène en général. Repertorium für Met. T. VI. Nr. 10. Petersburg 1879; p. 104: Nouvelles explications de la marche diurne du baromètre.

Sandwich Manse und gründet auf den sich daraus ergebenden täglichen Lufttransport seine Ansichten über die Ursache der täglichen Barometeroscillation. Rykatchef construiert auch Vectordiagramme, welche die tägliche Drehung der Windfahne an den genannten Stationen darstellen (Planche III). Das Ergebnis ist, »dass bei Tag von 8 bis 9^h morgens bis 5 bis 7^h abends die Luft sich von W nach E bewegt, bei Nacht von E nach W« (Nukuss stimmt nicht, wurde weggelassen). Wir wissen jetzt, dass dies eine locale Eigenthümlichkeit der bei dem Resultat comparierenden Stationen ist, denn, soweit wir jetzt urtheilen können, erfolgt die Drehung der mittleren Windrichtung an der Erdoberfläche zumeist mit der Sonne, also auf der nördlichen Halbkugel von E über S nach W, auf der südlichen von E über N nach W und zurück. Vormittag herrschen die Ostwinde vor, Nachmittag die Westwinde, mittags Südwinde, nachts Nordwinde. Mit Recht aber betont Herr Rykatchef die Wichtigkeit der Feststellung des täglichen Ganges der Windrichtung an möglichst zahlreichen Stationen, »namentlich auch an solchen in beträchtlicher Höhe über dem Meeresniveau«. (S. 124.)

Goutereau benützt, wie schon oben bemerkt, die Stationen Paris (Bureau Central), Hamburg, Wustrow, Wien, Orkaden Batavia, Cordoba. An letzterer Station dreht sich der Wind wie zu Kimberley[1] (Südafrika) im entgegengesetzten Sinne wie auf der nördlichen Hemisphäre, aber auch hier mit der Sonne.

Der täglichen Drehung der Windrichtung zu Hamburg hat kürzlich J. Schneider eine schöne Untersuchung gewidmet.[2]

Herr Ch. Gautereau discutiert in eingehenderer Weise die ganztägige und die halbtägige Periode der täglichen Variation der Windcomponenten (N und E) an den oben genannten Stationen und prüft dann in sehr instructiver und interessanter Form, ob die Druckwellen, welche aus den täglichen periodischen Vorlagerungen der Luft resultieren müssen, mit jenen übereinstimmen, welche man in der That beobachtet.

---

1 Met. Zeitschrift, Bd. XXXVI (1901), S. 529.

2 Met. Zeitschrift, Bd. XXXVII (1902), S. 393. Die tägliche Bewegung der Luft über Hamburg.

Er findet die Übereinstimmung ganz befriedigend. Diese Untersuchung ist demnach einigermaßen analog mit jener oben erwähnten von Rykatchew, sie ist aber viel allgemeiner und strenger durchgeführt.

Wir möchten aber sehr bezweifeln, dass man hoffen darf, aus der täglichen Variation der Richtung und Größe der Luftbewegung an Stationen an der Erdoberfläche selbst allgemeinere Resultate, namentlich Beziehungen zu der regelmäßigen täglichen Barometeroscillation mit einiger Sicherheit ableiten zu können. Die localen Einflüsse auf den täglichen Lufttransport, sei es vom Meer aufs Land oder von der Ebene gegen die angrenzenden Berge u. s. w. sind hier zu prädominierend. Ich habe mich darüber specieller ausgesprochen in dem Referat, welches ich über die Abhandlung des Herrn Rykatchef seinerzeit veröffentlicht habe.[1]

Man sollte eine derartige Untersuchung nur auf die Windregistrierungen an Stationen auf weiten gleichförmigen Ebenen oder auf kleinen Inseln, entfernt von einer Küste, basieren, dann würden sie allgemeinere und gewiss auch sehr interessante Resultate liefern. Es gibt gewiss sehr wenige solche Stationen, doch völlig dürften sie auch jetzt schon nicht fehlen. Das wissenschaftliche Interesse wäre groß genug, dass man, wenn auch nur auf ein paar Jahre, Anemometer in günstiger Aufstellung an solchen Punkten in Thätigkeit setzen würde.

Herr Goutereau hat für die extremen Monate Jänner und Juli die stündlichen Werte der West- und Nordcomponente für Wien berechnet aus den Registrierungen der zehn Jahrgänge 1888/1897 nach den »Jahrb. der k. k. Met. C. A.«

Es ist ihm entgangen, dass ich schon vor langer Zeit die tägliche Periode der vier Windcomponenten für Wien berechnet habe[2] und zwar sowohl für das ganze Jahr, wie für die extremen Jahreszeiten (Winter und Sommer). Ich mache ihm daraus gewiss keinen Vorwurf, denn ich hatte selbst darauf schon ganz vergessen, und bin nur durch seine Arbeit zufällig wieder

---

[1] Met. Zeitschrift, 1881, Bd. XVI, S. 49, 50.

[2] Hann, Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes. Diese Sitzungsber., Bd. LXXIX, II. 1879, Jänner, S. 32 bis 35.

darauf aufmerksam geworden, nachdem ich schon Goutereau's Daten für meine Zwecke neu berechnet hatte.

Goutereau hat seine eigenen Daten für Wien in seine Discussion nicht einbezogen, »weil sie eine tägliche Variation der beiden Componenten ergeben, welche von jener an den übrigen Stationen ganz verschieden ist. Die Resultierende erreicht nachmittags ihren kleinsten, nachts ihren größten Wert«. Hätte Herr Goutereau eine größere Zahl von Inlandstationen für seine Untersuchung verwendet, so würde er gewiss mehr Stationen gefunden haben, an denen dasselbe der Fall ist. Ein Blick auf den von mir berechneten Gang der vier Windcomponenten für Winter und Sommer (S. 1648 meiner Abhandlung) zeigt sogleich, dass alles mit natürlichen Dingen zugeht. Im Winter erreichen zu Wien alle vier Componenten um Mittag ihren größten Wert, im Sommer die Ost-, Süd- und Nordcomponente desgleichen, nur die Westcomponente hat in der That dann um Mittag ein Minimum. Es ist dies offenbar eine Wirkung des in W bis N gelegenen Wienerwaldes, welcher bei Nacht die W- und NW-Winde verstärkt, während er bei Tag die Ostwinde (aufsteigender Thalwind) lebhafter werden lässt und den Westwind abflauen macht. Die absolute mittlere Windgeschwindigkeit erreicht natürlich trotzdem um 1^h nachmittags ihr Maximum.

Was hier für Wien gezeigt worden ist, wird gewiss auch an vielen andern Orten eintreten, die auf der Ostseite eines Bergzuges liegen; für Orte auf der Westseite eines solchen wird eine entgegengesetzte Wirkung eintreten. Die Stationen an einer Westküste wie Paris, Hamburg etc. werden natürlich ein Maximum der Westcomponente am Nachmittag haben (Seewind). Man kann deshalb die Anemometerstationen an der Erdoberfläche nicht zu allgemeineren Untersuchungen verwenden, ohne vorher die Topographie ihrer Umgebung studiert zu haben, und soll auch dann immer noch vorerst die vier Componenten einzeln untersuchen, bevor man weiter geht. In Wien erreicht im Sommer die Ostcomponente um Mittag den fünffachen Wert des Morgenminimums, die Südcomponente um 4^h nachmittags sogar den siebenfachen Betrag ihrer Stärke zwischen 4 bis 5^h morgens. Hat man nur die zwei Haupt-

componenten vor sich, so fehlt der Einblick in die Ursachen des täglichen Ganges derselben. Man sollte deshalb stets auch die Werte der vier Componenten mittheilen.

Die folgenden Tabellen IX*a* und IX*b* enthalten den täglichen Gang der Windcomponenten zu Wien im Jahresmittel und zu den extremen Jahreszeiten. Die erste Tabelle gründet sich auf die von mir berechneten Werte der Componenten (Sitzb. d. Wiener Akademie, Bd. 79, S. 32 bis 35), die zweite auf die von Goutereau berechneten Zahlen. Die Übereinstimmung ist eine vollkommen befriedigende. Die Gleichung für die Nordcomponente in der zweiten Tabelle wird vergleichbar, wenn die constanten Winkel um 180° gedreht werden, um für die Südcomponente zu gelten.

Im Jänner wie im Juli ist im allgemeinen die mittlere bloß von der Tageszeit abhängige Windrichtung bei Nacht nordöstlich oder nordwestlich, bei Tag östlich und südlich. Im Winter erfolgt die Drehung unregelmäßig, im Sommer aber schreitet sie regelmäßig von links nach rechts fort, von NW über N und NE nach E, SE und S.

Da ich die Windregistrierungen eines Sommers (1891) von Zürich schon berechnet hatte, will ich die Ergebnisse in größter Kürze hier folgen lassen. Ich habe je drei Stunden zusammengenommen, weil die Beobachtungszeit so kurz ist.

Täglicher Gang der Windcomponenten im Sommer 1891 zu Zürich:

Zeit	$1\frac{1}{2}^h$ a.	$4\frac{1}{2}^h$	$7\frac{1}{2}^h$	$10\frac{1}{2}^h$	$1\frac{1}{2}^h$ p.	$4\frac{1}{2}^h$	$7\frac{1}{2}^h$	$10\frac{1}{2}^h$	Mittel für drei Stunden
N ...	−113	−121*	−119	27	126	**134**	81	−17	225
E ...	18	− 30	− 31	−47*	− 26	− 2	50	**68**	133
S....	− 5	− 36	− 52*	− 1	− 5	41	**46**	14	222
W...	−139	−173*	−162	78	255	**267**	−31	−95	336

Diesen Zahlen entsprechen die auf S. 1674 folgenden Gleichungen.

Tabelle IX *a*.

Täglicher Gang der Windrichtung zu Wien.

	Componente		Componente		Resultierende	
	S—N	W—E	S—N	W—E	Richtung	Azimut
	Jahr (Kilometer)		Sommer (Kilometer)		Sommer	
Mitternacht	—291	559	—118	190	W 32° N	302°
2^h	—325*	582	—136*	199	W 34° N	304
4	—280	475	— 92	233	W 22° N	292
6	—242	305	—103	182	W 29° N	299
8	—207	93	— 95	55	N 30° W	330
10	—108	—172	— 68	—106	E 33° N	57
Mittag	100	—455	22	—249*	E 5° S	95
2^h	351	—653*	120	—239	E 27° S	117
4	500	—652	223	—215	S 44° E	136
6	433	—409	230	—174	S 37° E	143
8	180	— 21	79	— 8	S 6° E	174
10	—111	348	— 62	132	W 25° N	295

Gleichungen des täglichen Ganges.

Sommer:

S—N .... $164 \cdot 1 \sin(205 \cdot 7 + x) + 69 \cdot 8 \sin(302 \cdot 7 + 2x)$

W—E....... $252 \cdot 6 \sin(53 \cdot 9 + x) + 22 \cdot 5 \sin(232 \cdot 4 + 2x)$

Jahr:

S—N .... $375 \cdot 3 \sin(211 \cdot 5 + x) + 119 \cdot 4 \sin(306 \cdot 5 + 2x)$

W—E....... $606 \cdot 8 \sin(53 \cdot 9 + x) + 88 \cdot 8 \sin(144 \cdot 2 + 2x)$.

Die Windwege sind Kilometer pro Stunde während der betreffenden Zeiten des Jahres. Die Division durch 6 (Jahr) und 1·5 (Sommer) macht sie mit den vorausgegangenen Gleichungen für die Berggipfel direct vergleichbar (reduciert sie auf zweistündige Windwege pro Monat).

Tabelle IX *b*.

Täglicher Gang der Windcomponenten zu Wien.

Mittlere Windwege. Centimeter pro Secunde. Nach 10jährigen Registrierungen.

	Nach Goutereau				Berechneter täglicher Gang				Azimut der Resultierenden		Richtung	
	Jänner		Juli		Jänner		Juli					
	N	W	N	W	N	W	N	W	Jänner	Juli	Jänner	Juli
Mitternacht	77	332	115	416	17	2	20	64	354	287	N 6° W	N 73° W
2h	66	309	130	393	14	— 2	33	72	7	294	N 7° E	N 66° W
4	63	333	127	402	2	— 2	31	53	45	301	NE	N 59° W
6	45	335	120	384	—11	5	23	30	207	308	S 27° W	N 52° W
8	43*	346	117	357	—15	17	16	18	227	311	S 47° W	N 49° W
10	50	342	105	346	—12	21	11	10	241	316	S 61° W	N 44° W
Mittag	48	336	94	336	— 5	12	1	—12	250	85	S 70° W	N 85° E

2^h	58	328	85	292	— 1	— 5	—17	—49	100	108	E 10° S	S 72° E
4	58	304*	65	272	— 1	—18	—36	—82	94	114	E 4° S	S 66° E
6	55	306	45*	251*	— 2	—19	—44	—82	96	118	E 6° S	S 62° E
8	56	304	68	294	3	—10	—32	—41	76	128	N 76° E	S 52° E
10	73	337	93	375	11	— 1	— 6	19	3	252	N 3° E	S 72° W
Mittel....	58	326	97	343	—	—	—	—	280	286	W 10° N	W 15·8° N

W—E

Jänner ...... $13{\cdot}4 \sin(336{\cdot}7+x)+10{\cdot}1 \sin(138{\cdot}5°+2x)$

Juli .... $67{\cdot}5 \sin(33{\cdot}9+x)+26{\cdot}2 \sin(94{\cdot}2+2x)$

N—S

Jänner ...... $11{\cdot}5 \sin(110{\cdot}8+x)+7{\cdot}3 \sin(59{\cdot}6+2x)$

Juli .... $34{\cdot}6 \sin(15{\cdot}6+x)+10{\cdot}9 \sin(71{\cdot}2+2x)$

W (im Mittel) ...... $37{\cdot}8 \sin(25{\cdot}4°+x)+17{\cdot}3 \sin(106{\cdot}5°+2x)$

N (im Mittel) .... $17{\cdot}8 \sin(34{\cdot}9+x)+9{\cdot}0 \sin(66{\cdot}6+2x)$.

Täglicher Gang der Windcomponenten zu Zürich (Sommer):

N	$142 \cdot 4 \sin(209 \cdot 7 + x) + 12 \cdot 8 \sin(41 \cdot 4 + 2x)$
E	$52 \cdot 6 \sin(127 \cdot 3 + x) + 17 \cdot 8 \sin(176 \cdot 6 + 2x)$
S	$37 \cdot 2 \sin(183 \cdot 5 + x) + 22 \cdot 4 \sin(161 \cdot 6 + 2x)$
W	$221 \cdot 9 \sin(226 \cdot 4 + x) + 81 \cdot 9 \sin(25 \cdot 0 + 2x)$
S—N	$110 \cdot 3 \sin(38 \cdot 3 + x) + 14 \cdot 1 \sin(213 \cdot 5 + 2x)$
W—E	$235 \cdot 8 \sin(239 \cdot 1 + x) + 98 \cdot 9 \sin(20 \cdot 3 + 2x)$.

Die Maxima fallen somit ungefähr auf folgende Tageszeiten:

S	N	W	E
$3^h\ 30^m$ morgens	$3^h\ 30^m$ nachmittags	2^h nachmittags	2^h morgens

Die Süd- und Ostwinde sind Abend- und Nachtwinde vom Gebirge her, die Nord- und Westwinde Tagwinde, die gegen das Gebirge wehen, also wie in Wien; nur ist die Richtung, in welcher das Gebirge liegt, fast genau die entgegengesetzte. Aus derart beeinflussten Beobachtungen kann man keine allgemeinen Resultate ableiten.

Die Süd- und Nordwinde von und gegen das Gebirge heben sich im Tagesmittel auf, die Resultierende ist rein W, der allgemeine Wind dieser Gegend.

Eine Station, deren anemometrische Aufzeichnungen nach ihrer Lage allgemeinere Schlüsse zu versprechen scheint, ist Nukuss am Amu Darja, circa 125 *km* südlich vom Aralsee in ganz flacher Wüstengegend. Auf den täglichen Gang der vier Windcomponenten habe ich schon 1879 in meiner früher citierten Abhandlung hingewiesen. Es schien mir lohnend, diese Daten specieller zu berechnen. Die folgende Tabelle X enthält die Ergebnisse meiner specielleren Berechnung der Windcomponenten von Nukuss.

Tabelle X.

Tägliche Periode der Windcomponenten im Jahresmittel zu Nukuss (42° 27′ N Br., 59° 37′ E v. Gr.; 66 *m*).

Windwege in Kilometern pro Monat.

	E	S	W	N	N—S	E—W	φ	*R*
Mitternacht	168	42	55	206	164	113	N 35° E	199
2h	161	44	56	201	157	105	34	189
4	155	51	57	205	154	98	32½	183
6	166	55	63	206	151	103	34	183
8	209	69	79	223	154	130	40	202
10	236	91	100	244	153	136	42	205
Mittag	235	95	122	268	173	113	33	207
2h	223	81	133	299	218	90	22	236
4	211	62	118	318	256	93	20*	272
6	179	45	81	294	249	98	21½	268
8	165	36	53	258	222	112	27	250
10	172	39	51	227	188	121	33	224

	Berechnete Werte				Täglicher Gang nach Abzug der mittleren Richtung		
	N—S	E—W	N—S	E—W	φ′	Azimut	*R′*
Mitternacht	162	114	—24	5	S 12° E	168	24·5
2h	157	100	—30	— 9	S 17° W	197	31·3
4	158	98*	—28	—12	S 23° W	203	30·5
6	154	110	—33	1	S 2° E	178	33·0
8	147*	127	—40	17	S 23° E	157	43·5
10	151	131	—35	21	S 31° E	149	40·8
Mittag	178	116	— 8	7	S 41° E	139	10·6
2h	220	96	33	—14	N 23° W	337	35·9
4	251	87*	64	—22	N 19° W	341	67·6
6	252	97	65	—12	N 10° W	350	66·1
8	223	114	37	5	N 8° E	8	37·3
10	186	122	— 1	13	E 4° N	86	13·0

N—S ..... $186 \cdot 6 + 49 \cdot 5 \sin(189 \cdot 4° + x) + 19 \cdot 9 \sin(305 \cdot 0° + 2x)$

E—W ..... $109 \cdot 3 + 6 \cdot 8 \sin(350 \cdot 7 + x) + 17 \cdot 3 \sin(160 \cdot 4 + 2x)$.

Man sieht zunächst aus dieser Tabelle, dass die Ostcomponente ihr Maximum um 10^h vormittags erreicht, die Südcomponente um Mittag, die Westcomponente um 2^h und die Nordcomponente um 4^h nachmittags. Die mittlere Windrichtung ist nachts am meisten östlich und geht bis 4^h nachmittags um 15° nach Norden zurück. Die Resultierende hat ihr Maximum um 4^h p., ihr Minimum zwischen 4^h und 6^h morgens.

Der nur von dem Sonnenstande abhängige tägliche Gang des Windes ist aber nicht ganz regelmäßig. Nur von 2^h mittags bis 4^h morgens schreitet die Winddrehung regelmäßig von links nach rechts fort von NNW (2^h) über N, E und S bis SSW um 4^h morgens, dann wird die Drehung retrograd und geht eine Weile über S nach SE zurück,[1] um dann zwischen Mittag und 2^h p. von dieser Richtung einen Sprung nach NNW zu machen. Die Resultierende wird zu dieser Zeit sehr schwach; am kräftigsten ist der reine Tagwind aus NNW und N.

Die Station Nukuss erfüllt demnach nicht ganz die berechtigten Erwartungen, die man an ihre Windregistrierungen knüpfen möchte.

---

[1] Es ist zu beachten, dass der SE-Wind ein Landwind ist; der Aralsee liegt im Norden.

Tabellen der Windcomponenten und des täglichen Ganges derselben für Obir, Sonnblick, Säntis, Pikes Peak.

Nr. I.

Täglicher Gang der Windcomponenten und Resultierenden.

Circa zweijährige Mittel 1887/1889. Berechnete Werte.

	Sonnblick		Säntis		Obir	
	S—N	W—E	S—N	W—E	S—N	W—E
1. Windwege pro Monat (30 Tage) Kilometer						
11^{h}— 1^{h}a.	—109	649	408	886	91	427*
1 — 3	—144	648	379	900	94	456
3 — 5	—229	594	321	866	88	477
5 — 7	—251*	522	293*	786	85*	453
7 — 9	—137	483*	344	707	110	392
9 —11	66	501	447	679*	163	338*
11 — 1p.	213	552	530	719	219	340
1 — 3	198	588	529	790	238	396
3 — 5	41	588	459	842	208	460
5 — 7	—126	570*	382	854	151	484
7 — 9	—190*	574	360*	847	102	462
9 —11	—149	610	386	857	85*	430
Mittel	— 68	659	403	811	136	426
2. Abweichungen vom Mittel						
11^{h}— 1^{h}a.	— 41	76	4	75	— 46	1
1 — 3	— 76	75	— 24	89	— 42	30
3 — 5	—161	21	— 82	55	— 48	51
5 — 7	—183	—52	—110	— 25	— 51	27
7 — 9	— 69	—90	— 59	—104	— 26	—35
9 —11	134	—72	44	—132	27	—88
11 — 1p.	282	—22	126	— 92	82	—86
1 — 3	266	15	126	— 21	102	—31
3 — 5	109	14	56	31	72	34
5 — 7	— 58	— 3	— 21	42	15	58
7 — 9	—121	0	— 43	36	— 34	36
9 —11	— 82	37	— 17	46	— 51	3
Mittel	—817	6879	4835	9733	1634	5115

3. Täglicher Gang der Resultierenden						
	Sonnblick		Säntis		Obir	
	φ	R	φ	R	φ	R
Mitternacht	W 28° N	86	W 3° S	75	N 1° W	46
2^h	W 45° N	107	W 15° N	94	N $35^1/_2$° W	52
4	W 83° N	162	W 56° N	99	W 43° N	70
6	N 16° E	190	N 13° E	113	N 28° W	58
8	E $37^1/_2$° N	113	E 30° N	120	E 37° N	44
10	S 28° E	152	E 18° S	139	E 17° S	92
Mittag	S 5° E	283	S 36° E	156	E 44° S	119
2^h	S 3° W	267	S 9° E	128	S 17° E	107
4	S 7° W	110	S 29° W	64	S 25° W	80
6	N 3° E	58	W 27° N	47	W 15° S	60
8	N	121	W 50° N	56	W 43° N	50
10	N 24° W	90	W 20° N	49	W 51° N	51

4. Azimut der Resultierenden, N über E etc.					
	Sonnblick	Säntis	Obir	Mittel φ	R [1]
Mitternacht	298	267	359	308	69
2^h	315	285	325	308	84
4	353	326	313	331	110
6	16	13	332	0	120
8	53	60	53	55	92
10	152	108	107	122	128
Mittag	175	144	134	151	186
2^h	183	171	163	172	167
4	187	209	205	200	85
6	3	297	255	305	55
8	0	320	313	331	76
10	336	290	357	328	63

[1] Für ein zweistündiges Intervall.

Nr. II.

Säntis. August 1883 bis October 1885. 400 Tage.

Reduciert auf dreistündige Intervalle.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Intervall
Häufigkeit in Stunden									
Mitternacht	34	44	55	51	88	227	253	48	11– 1^ha.
2^h	35	54	57	38	80	240	249	46	1– 3
4	42	67	61	40	66	228	250	46	3– 5
6	44	80	60	38	67	202	248	61	5– 7
8	43	82	64	50	71	221	219	51	7– 9
10	15	63	83	62	98	265	168	46	9–11
Mittag	13	44	63	64	137	312	140	29	11– 1^hp.
2^h	16	43	56	42	126	333	156	27	1– 3
4	28	56	44	41	86	282	221	40	3– 5
6	34	65	50	34	82	230	248	59	5– 7
8	42	61	62	40	64	212	244	73	7– 9
10	34	53	58	51	71	225	240	68	9–11
Summe...	380	712	714	551	1036	2976	2636	594	
Mittlere Windwege innerhalb 40 Tagen									
Mitternacht	43	105	143	130	251	837	850	76	11– 1^ha.
2^h	58	142	128	105	210	874	847	78	1– 3
4	57	158	142	102	197	800	864	81	3– 5
6	61	190	151	105	194	719	811	88	5– 7
8	50	183	157	135	193	743	681	45	7– 9
10	15	128	176	141	239	765	542	36	9–11
Mittag	16	93	129	128	282	892	515	33	11– 1^hp.
2^h	17	82	120	92	258	879	556	39	1– 3
4	30	126	102	111	205	787	758	60	3– 5
6	50	134	127	95	202	690	838	119	5– 7
8	70	151	142	112	187	724	830	128	7– 9
10	44	130	138	123	215	827	839	109	9–11
E.......	510	1622	1655	1379	2633	9537	8931	892	

Säntis. Täglicher Gang der vier Windcomponenten und der Resultierenden (400 Tage, 1883 bis 1885).

Zweistündige Windwege innerhalb 40, respective 30 Tagen.

	Beobachtet (40 Tage)				Berechnet, reduciert auf 30 Tage			
	N	E	S	W	N	E	S	W
Mitternacht	171*	309	935	1496	140*	228	705	1130
2h	213	302*	902	1520	147	224*	688	1145
4	226	326	835	1487	175	244	621	1115
6	257	359	776*	1381	189	275	577*	1030
8	211	381	813	1238	161	288	604	923
10	131	367	880	1108*	106	264	682	851*
Mittag	105	286	1004	1169	67*	221	735	854
2h	103*	243*	945	1206	77	189*	711	921
4	161	269	839	1356	128	192	631	1004
6	229	289	757*	1410	176	220	571*	1063
8	268	328	778	1433	187	243	585	1088
10	213	317	887	1501	163	244	653	1105
Summe....	2288	3776	10351	16305				
Mittel.....					143	236	647	1019

	Abweichungen v. Mittel berechnet (30 Tage)				S—N	W—E	φ	Azimut	*R*
	N	E	S	W					
Mitternacht	— 3	— 8	58	111	61	119	W 27° S	243	134
2h	4	— 12	41	126	37	138	W 15° S	255	143
4	32	8	— 26	96	— 58	88	W 33° N	303	105
6	46	39	—70	12	—116	— 27	N 13° E	13	119
8	18	52	—43	— 96	— 61	—148	E 22° N	68	160
10	—37	28	35	—168	72	—196	E 20° S	110	209
Mittag	—76	—15	88	—165	164	—150	S 42° E	138	222
2h	—66	—47	64	— 98	130	— 51	S 21° E	159	140
4	—15	—44	—15	— 15	0	29	W	270	29
6	33	—16	—76	42	—109	58	N 28° W	332	123
8	44	7	—62	69	—106	62	N 30° W	330	123
10	20	8	6	86	— 14	78	W 10° N	280	79
Mittel....	16	12	24	45	39	48	—	—	—

Nr. III.

Säntis. Winter.

(December, Jänner, Februar, März 1891 und 1892.)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
Häufigkeit Summen (abgerundet)									
11— 1ʰ a.	18	60	47	21	36	144	131	25	4
1— 3	21	57	42	19	37	140	132	28	10
3— 5	25	54	40	17	39	134	142	23	12
5— 7	23	64	36	15	37	129	138	25	19
7— 9	25	59	41	13	36	136	136	32	7
9—11	28	64	44	16	33	134	130	26	4
11— 1ʰ p.	26	59	42	18	37	151	123	21	9
1— 3	26	57	42	21	38	154	121	23	5
3— 5	30	59	42	17	41	138	124	29	7
5— 7	31	56	44	20	40	138	118	26	14
7— 9	27	64	42	19	40	140	120	30	4
9—11	26	61	46	20	36	142	124	27	4
Summe...	306	714	508	216	450	1680	1539	315	99
Windstärke in Kilom.	18·5	28·2	27·6	23·3	33·6	38·7	34·7	16·5	0·0

	N	E	S	W	Mittel[1]
Mittlere Windgeschwindigkeit (Kilometer pro Stunde)					
Mitternacht	21·6	27·0	36·5	33·7	31·7
2ʰ	22·5	27·3	35·8	33·4	31·5
4	24·3	28·5	36·3	33·0	31·9
6	24·0	29·0	36·8	31·8*	31·4
8	24·3	27·6	37·0	34·0	32·3
10	22·4	27·0	38·5	36·5	33·1
Mittag	20·1	23·5*	35·2	37·2	32·0
2ʰ	20·1*	23·8	34·4*	37·7	32·1
4	21·2	27·1	35·2	38·5	33·1
6	24·1	29·3	34·7	36·4	32·9
8	22·9	29·8	34·0*	33·0	31·2*
10	20·8*	28·6	36·5	33·7	31·6
Mittel......	22·4	27·4	35·8	34·9	32·1

[1] Alle Winde ohne Calmen.

Säntisgipfel. Mittel von zwei Wintern 1891 und 1892 für die vier Componenten und die Resultierenden.

(December bis März, je 4 Monate). Windwege pro Monat (30¼ Tage).

	N	E	S	W	S–N	W–E	φ	R
11 — 1ʰ a.	227*	377	739	1127	512	750	W 34°3 S	908
1 — 3	249	347	711	1122	462	775	30·8	902
3 — 5	261	341	694	1116	433	775	29·2	888
5 — 7	252	351	676*	1161*	424	710*	30·8	827
7 — 9	294	337	701	1167	407*	830	26·1	924
9 — 11	272	361	714	1189	442	828	28·1	939
11 — 1ʰ p.	226	302*	737	1215	511	913	28·1	1035
1 — 3	225*	307	759	1238	534	931	29·8	1073
3 — 5	271	343	722	1239	451	896	26·7	1003
5 — 7	285	380	710	1133	425	753	29·5	865
7 — 9	288	395	699	1058*	411*	663*	31·8	780
9 — 11	252	394	730	1093	478	699	34·4	847
Summe...	3102	4235	8592	13758	5490	9523	30·0	11094

N .... $258·5+2·4 \sin(194°0+x)+27·7 \sin(238·7°+2x)$

E .... $353·0+31·1 \sin(114·5+x)+23·4 \sin(203·4+2x)$

S......... $716·0+16·3 \sin(204·7+x)+24·0 \sin(75·3+2x)$

W........ $1146·5+66·6 \sin(256·4+x)+42·3 \sin(41·8+2x)$

S—N ..... $457·5+13·9 \sin(206·6+x)+51·1 \sin(66·5+2x)$

W—E..... $793·5+93·1 \sin(91·7+x)+64·6 \sin(37·2+2x)$.

Säntisgipfel. Winter. Täglicher Gang der Windcomponenten und der Resultierenden.

Berechnete Werte.

	Windwege				Abweichungen			
	N	E	S	W	N	E	S	W
11—1ʰ a.	234	372	732	1112	—24	19	16	— 35
1—3	232*	348	720	1123	—26	— 5	4	— 23
3—5	256	342*	693	1112	— 3	—11	—23	— 35
5—7	280	349	678*	1101*	21	— 4	—38	— 46
7—9	281	351	691	1124	23	— 2	—26	— 22
9—11	258	336	721	1184	0	—17	5	37
11—1ʰ p.	235*	315	746	1241	—23	—38	30	95
1—3	236	312*	746	1251	—23	—41	30	105
3—5	260	336	726	1204	2	—17	10	57
5—7	285	375	707*	1132	26	22	— 8	— 14
7—9	285	401	708	1087	26	49	— 8	— 60
9—11	260	398	724	1087*	1	45	8	— 59

	S—N	W—E	φ	Resultierende		
				Azimut	Größe	
11—1ʰ a.	40	— 54	E 36½° S	126	67	Mitternacht
1—3	30	— 18	S 31° E	149	35	2ʰ
3—5	—20	— 24	E 40° N	50	31	4
5—7	—59	— 42	N 35½° E	35	72	6
7—9	—49	— 20	N 22° E	22	53	8
9—11	5	54	W 5° S	265	54	10
11—1ʰ p.	53	133	W 22° S	248	143	Mittag
1—3	53	146	W 20° S	250	155	2ʰ
3—5	8	74	W 6° S	264	74	4
5—7	—34	— 36	E 43½° N	46	50	6
7—9	—34	—109	E 17° N	73	114	8
9—11	7	—104	E 7° N	97	104	10

Nr. IV.

Säntisgipfel. Sommer 1891 und 1892. Häufigkeit im Mittel von zwei Sommern.

Stundenzahl in 4 Monaten.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen		Mittlere Windstärke (Kilom. N	E	S	W
11—1h a.	10	12	7	6	19	88	84	11	5	Mitternacht	19·2	15·9	31·2	35·6
1—3	9	10	6	5	20	96	79	12	6	2h	20·8	20·4	30·2	35·4
3—5	8	9	6	6	19	90	86	12	5	4	21·0	20·1	28·4	33·0
5—7	9	10	5	7	18	87	86	14	4	6	19·6	19·0	27·9	31·2
7—9	10	11	6	9	26	89	75	15	2	8	18·1*	17·3	26·4	30·4
9—11	8	11	7	11	33	97	63	10	3	10	18·5	13·7	24·6	30·2
11—1h p.	7	10	4	7	43	107	56	7	0	Mittag	20·5	13·0	23·9	29·8*
1—3	6	9	4	5	38	105	62	11	2	2h	20·2	11·4*	23·5*	30·4
3—5	8	10	2	3	27	105	71	14	2	4	19·4*	13·2	25·3	30·8
5—7	11	10	3	2	21	83	76	20	3	6	20·5	15·3	26·8	30·0
7—9	11	12	5	3	27	82	75	23	4	8	20·1	15·5	28·7	32·1
9—11	11	13	7	5	20	86	81	17	2	10	18·2	14·1	30·7	33·7
Summe ...	108	127	62	69	311	1115	894	166	38	Mittel	19·4	15·9	26·5	31·6

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
Mittlere Windstärke (Kilometer pro Stunde)									
Mitternacht	20·5	17·2	14·3	17·0	21·6	36·4	36·3	18·8	0
2h	20·3	22·2	19·7	18·8	20·5	34·8	36·9	20·3	0
4	23·1	22·0	17·7	21·8	19·1	32·6	33·9	24·0	0
6	16·7	21·0	17·6	17·9	21·3	31·5	31·7	22·2	0
8	16·6	19·9	16·2	15·4	19·9	31·4	31·0	18·8	0
10	19·3	16·8	12·0	12·5	20·0	29·2	32·2	19·2	0
Mittag	21·3	15·8	10·5	11·9	19·6	28·0	31·6	25·7	0
2h	20·0	16·2	7·7	8·4	18·7	27·8	33·2	23·8	0
4	20·6	14·7	11·0	10·3	20·2	28·3	33·6	21·4	0
6	20·5	16·7	12·0	19·0	23·0	29·2	31·4	22·5	0
8	18·9	15·7	13·4	21·7	24·1	31·7	33·6	23·0	0
10	18·8	14·5	12·1	18·8	24·8	34·1	35·4	20·4	0
Mittel[1]	19·0	17·8	14·2	15·5	20·9	31·1	33·5	21·8	0

[1] Summe der Windwege dividiert durch Stundensumme.

Säntisgipfel. Sommer. Täglicher Gang der Windcomponenten und der Resultierenden.

Kilometer pro Monat. Mittlere Windwege in je 2 Stunden pro 30·5 Tagen.

Zeit	N	E	S	W	S—N	W—E	φ	R	R' Kilometer pro Stunde	Zeit
11—1h a.	132	84	729	1454	597	1370	W 23°5 S	1494	24·5	Mitternacht
1—3	136	89	755	1456	619	1367	24·4	1501	**24·6**	2h
3—5	129	89	679	1385	550	1296	23·0	1408	23·1	4
5—7	138	86	639	1299	501	1213	22·5	1313	21·5	6
7—9	137	92	687	1197	550	1105	26·5	1235	20·2	8
9—11	112	83	732	1100	620	1017	31·4*	1191	19·5*	10
11—1h p.	102	55	801	1069	699	1014	**34·6**	1231	20·2	Mittag
1—3	107	42	744	1145	637	1103	30·0	1274	20·9	2h
3—5	128	38	710	1247	582	1209	25·7	1342	22·0	4
5—7	173	48	592	1172	419	1124	20·5	1200	19·7	6
7—9	191	65	676	1262	485	1197	22·1	1292	21·2	8
9—11	163	84	701	1379	538	1295	22·6	1403	23·0	10
Summe....	1648	855	8445	15165	6797	14310	25·4	15843	..	
Mittel.....	137	71	704	1264	567	1193	WSW	1320	21·6	

Säntisgipfel. Sommer. Berechnete Werte.

Zeit-Intervall	Mittlere Windwege Kilometer				Abweichungen vom Mittel				Mittlere Epoche
	N	E	S	W	N	E	S	W	
11— 1h a.	140	87	750	**1438**	3	16	**46**	**174**	Mitternacht
1— 3	126	86	735	1437	—11*	15	31	173	2h
3— 5	131	88	679	1380	— 7	16	—24	116	4
5— 7	140	**91**	646	1290	3	**20**	—58*	27	6
7— 9	136	90	675	1199	— 2	19	—29	— 65	8
9—11	115	78	744	1134	—22	8	40	—130	10
11— 1h p.	98*	60	**787**	1106*	—40*	—12	83	—158*	Mittag
1— 3	105	41	761	1114	—33	—30	57	—150	2h
3— 5	137	37*	686	1154	— 1	—35*	—17	—109	4
5— 7	171	48	632*	1221	34	—23	—72*	— 43	6
7— 9	**183**	67	645	1305	**46**	— 4	—59	42	8
9—11	167	82	705	1387	30	10	2	123	10

	S—N	W—E	φ	Azimut (N über E)	*R*	*R* in Kilometern p. Stunde	Mittlere Epoche
11— 1h a.	43	158	W 15° S	255°	**164**	2·7	Mittern.
1— 3	42	158	W 15° S	255	163	2·7	2h
3— 5	— 17	100	W 10° N	280	102	1·7	4
5— 7	— 61	7	N 6° W	354	61*	1·0	6
7— 9	— 27	— 84	E 18° N	72	88	1·4	8
9—11	62	—138	E 24° S	114	151	2·5	10
11— 1h p.	123	—146	E 40° S	130	**191**	3·1	Mittag
1— 3	90	—120	E 37° S	127	150	2·5	2h
3— 5	— 16	— 74	E 12° N	78	76*	1·2	4
5— 7	—106	— 20	N 11° E	11	108	1·8	6
7— 9	—105	46	N 24° W	336	115	1·9	8
9—11	— 28	113	W 14° N	284	116	1·9	10

Sonnblick 1901. Summen der Windwege pro Monat.

Kilometer (1 Jahr).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	
11—1h a.	443	182	27	61	274	508	227	192	Mittern.
1—3	421	192	27	41	251	504	214	182	2h
3—5	440	208	38	56	217	460	221	186	4
5—7	483	203	35	54	202	455	196	193	6
7—9	476	207	25	62	223	444	198	148	8
9—11	397	215	29	77	291	461	200	149	10
11—1h p.	337	186	31	87	342	477	184	133	Mittag
1—3	348	171	29	81	290	522	167	133	2h
3—5	450	187	28	62	237	564	177	124	4
5—7	487	226	36	55	250	472	181	156	6
7—9	541	226	28	59	247	413	182	158	8
9—11	520	191	32	61	256	450	202	183	10
Summe . . .	5343	2394	366	755	3080	5731	2350	1935	(21964)
Häufigkeit (Stunden im Jahr)									
11—1h a.	168	84	15	25	80	165	86	66	Mittern.
1—3	156	80	15	18	78	164	89	70	2h
3—5	157	88	17	28	65	156	85	75	4
5—7	170	83	17	24	65	155	78	71	6
7—9	173	92	13	29	77	153	87	63	8
9—11	142	97	12	29	94	159	85	60	10
11—1h p.	137	84	18	28	104	165	81	50	Mittag
1—3	144	87	16	28	89	180	81	63	2h
3—5	175	88	16	21	74	196	79	50	4
5—7	167	105	19	24	73	163	79	58	6
7—9	188	102	19	25	71	148	87	59	8
9—11	187	89	22	24	75	156	79	60	10
Summe . . .	1964	1079	199	303	945	1960	996	745	(8191)

Sonnblick. Tägliche Periode der Windstärke. Jahr.

Kilometer pro Stunde.

Zeit	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	E	S	W	Mittel ohne Calmen	Mittel mit Calmen
Mitternacht	31·6	26·0	21·6	29·3	41·1	37·0	31·6	34·9	31·2	25·4	38·0	34·3	33·2	31·9
2h	32·4	28·8	21·6	27·3	38·6	36·9	28·9	31·2	31·6	27·0	37·2	32·5	32·8	30·6
4	33·6	28·4	26·8	24·0	39·8	35·4	31·2	29·8	32·1	27·2	36·3	32·6	32·7	30·4
6	34·1	29·3	24·7	27·0	34·8	35·2	30·1	32·6	33·0	27·7	35·4	32·5	32·8	30·4
8	33·0	27·0	23·1	25·6	34·8	34·8	27·3	28·2	31·3	26·1	34·2*	30·4*	31·2	29·7
10	33·5	26·6	29·0	31·8	37·1	34·8	28·2	29·8	31·5	28·0	35·6	31·0	32·1	30·3
Mittag	29·5	26·5	20·7	37·3	39·5	34·7	27·3	31·9	29·2	27·1	37·4	31·2	32·0	29·6
2h	29·0	23·6	21·8	34·7	39·1	34·8	24·7	25·3	27·5*	25·6	36·8	29·3*	30·5	29·0*
4	30·8	25·5	21·0	35·4	38·4	34·5	26·9	29·8	29·8	25·9	36·1	31·0	31·4	30·5
6	35·0	25·8	22·7	27·5	41·1	34·7	27·5	32·3	32·8	25·5	36·1	31·3	32·2	31·0
8	34·5	26·6	17·7	28·3	41·7	33·5	25·1	32·1	32·7	25·0	36·1	29·4	31·7	31·0
10	33·4	25·8	17·5	30·5	41·0	34·6	30·7	36·6	32·4	24·0*	37·1	33·3	32·8	31·6
Mittel	32·7	26·6	22·1	29·9	39·1	35·1	28·3	31·2	31·3	26·2	36·6	31·6	32·1	30·5

Sonnblick. Täglicher Gang der Windcomponenten und der Resultierenden.

Mittlere Windwege in 2 Stunden in einem Monate (30·4 Tagen).

Zeit	N	E	S	W
11—1h a.	719	204	701	746
1—3	696	198	656	720
3—5	731	234	605	702
5—7	772	224	585	674
7—9	740	222	604	638
9—11	668	245	698	655
11—1h p.	571	232	767	641
1—3	570	212	740	653
3—5	681	215	700	684
5—7	771	244	642	647
7—9	826	236	601	603
9—11	795	215	636	668
Mittel.....	712	223	661	669

Zeit	S—N	W—E	φ	R
11—1h a.	—18	542	W 2° N	542
1—3	—40	522	W 4½° N	524
3—5	—126	468	W 15° N	485
5—7	—187	450	W 22½° N	487
7—9	—136	416	W 18° N	437
9—11	30	410	W 4° S	411
11—1h p.	196	409	W 25½° S	453
1—3	170	441	W 21° S	473
3—5	19	469	W 2½° S	470
5—7	—129	403	W 18° N	424
7—9	—225	367	W 31½° N	430
9—11	—159	453	W 19½° N	480
Mittel.....	—51	446	W 6½° N	449

Sonnblick. Täglicher Gang der vier Windcomponenten.

Berechnet.

	N	E	S	W	N	E	S	W	
11— 1ʰ a.	721	207	679	712	— 9	—17	18	43	Mittern.
1— 3	697	204*	664	733	— 15*	—19*	3	64	2ʰ
3— 5	731	215	611	713	19	— 9	—51	43	4
5— 7	770	230	578*	669	58	7	—83*	0	6
7— 9	746	238	611	637*	35	15	—51	—32*	8
9—11	659	233	693	639	— 53	10	32	—31	10
11— 1ʰ p.	576	223	760	660	—135	0	99	— 9	Mittag
1— 3	576*	220	757	671	—136*	— 4*	96	2	2ʰ
3— 5	657	226	693	658	— 44	2	32	—11	4
5— 7	780	233	628	636	68	10	—34	—33	6
7— 9	828	232	613	635*	116	8	—48*	—34*	8
9—11	789	220	648	668	78	— 3	—13	— 2	10

	S—N	W—E	φ	Azimut φ	R
11— 1ʰ a.	9	60	W $8^1/_2$° S	262°	61
1— 3	18	83	W 12° S	258	85
3— 5	— 70	52	N 44° W	316	97
5— 7	—141	— 7	N 3° E	3	141
7— 9	— 86	—47	N 29° E	29	98
9—11	85	—41	S 26° E	154	94
11— 1ʰ p.	234	— 9	S 2° E	178	234
1— 3	232	6	S 1° W	181	232
3— 5	76	—13	S 10° E	170	77
5— 7	—102	—43	N 23° E	23	111
7— 9	—164	—42	N 14° E	14	169
9—11	— 91	1	N	0	91

Nr. VI.

Pikes Peak. Summen der Windwege und Häufigkeit im Mittel von zwei Sommern 1893 und 1894.

(Mai bis September, 5 Monate). Ortszeit.

Localzeit	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Epoche
Windwege (englische Meilen)									
11— 1^h a.	319	409	195	98	491	2405	2509	413	Mittern.
1— 3	203	415	155	74	313	2192	2799	828	2^h
3— 5	411	394	187	73	273	1869	3018	867	4
5— 7	372	558	178	42	283	1801	2863	717	6
7— 9	230	644	318	34	267	1678	2255	352	8
9—11	144	558	434	78	496	1451	1432	192	10
11— 1^h p.	112	443	514	103	706	1507	952	172	Mittag
1— 3	119	473	500	156	760	1691	1000	164	2^h
3— 5	154	385	603	161	742	1698	1092	253	4
5— 7	226	423	430	234	787	1686	1233	293	6
7— 9	239	461	352	290	800	1909	1429	330	8
9—11	304	418	264	219	662	2172	1881	346	10
Summe...	2833	5581	4130	1562	6580	22059	22463	4927	
Häufigkeit (Stunden)									
11— 1^h a.	25	28	16	9	35	86	86	27	Mittern.
1— 3	17	27	15	6	28	79	102	45	2^h
3— 5	28	28	15*	6	17	65	106	44	4
5— 7	34	40	14	5	13*	65	95	39	6
7— 9	24	56	29	5*	15	64*	83	25	8
9—11	15	53	36	11	21	66	70	18	10
11— 1^h p.	12*	41	45	13	36	75	55	19	Mittag
1— 3	14	41	41	14	46	83	55	14*	2^h
3— 5	15	34*	52	14	45	81	51*	20	4
5— 7	20	36	35	20	40	77	55	19	6
7— 9	21	39	27	19	45	78	56	21	8
9—11	25	36	20	15	44	86	66	22	10
Summe...	250	459	345	137	385	905	880	313	

Pikes Peak. Tägliche Periode der Windstärke im Sommer.

Kilometer pro Stunde.

Localzeit	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	E	S	W
Mitternacht	20·5	23·5	19·6	17·5	22·6	45·0	46·9	24·6	22·4	20·9	34·0	44·3
2h	19·2	24·7	16·6	19·8	18·0	44·7	44·2	29·6	25·0	20·4	32·8	42·2
4	23·6	22·7	20·0	19·6	25·8	46·3	45·8	31·7	26·2	21·2	38·5	44·1
6	17·6	22·4	20·5	13·5	35·0	44·6	48·5	29·6	22·1	21·1	40·0	45·0
8	15·4	18·5	17·6	10·9	28·6	42·2	43·7	22·7	18·2	17·8	36·5	41·3
10	15·4	16·9	19·4	11·4	38·0	35·4	32·9	17·6	16·5	17·8	34·1	32·4
Mittag	15·0	17·4	18·4	12·7	31·6	32·3	27·8	14·6	16·0*	17·6*	30·2	28·1*
2h	13·7	18·6	19·6	17·9	26·6	32·8	29·2	18·8	16·9	19·1	28·8*	30·1
4	16·5	18·2	18·7	18·5	26·5	33·7	34·5	20·4	18·2	18·6	28·9	32·6
6	18·2	18·9	19·8	18·8	31·6	35·2	36·1	24·8	19·7	19·4	31·9	34·9
8	18·3	19·0	21·0	24·6	28·6	39·4	41·5	25·3	19·8	20·9	32·7	38·7
10	19·6	18·7	21·2	23·5	24·8	40·6	45·9	25·3	20·4	20·6	31·6	42·1
Mittel	18·2	19·6	19·3	18·3	27·5	39·4	41·1	25·3	20·4	19·3	32·7	38·8

Pikes Peak. Täglicher Gang der Windcomponenten und der Resultierenden.

Kilometer pro Monat. Mittlere Windwege in je 2 Stunden innerhalb 30·6 Tagen.

Local-Zeit	N	E	S	W	S—N	W—E	φ	R	R' Kilometer pro Stunde	Epoche
11— 1h a.	290	178	728	1449	438	1271	W 19°0 S	1344	22·0	Mitternacht
1— 3	340	161	616	1588	276	1427	11·0	1454	23·7	2h
3— 5	419	166	530	1593	111	1427	4·5	1431	23·4	4
5— 7	410	194	511	1495	101	1301	4·4	1305	21·3	6
7— 9	300	256	475	1188	175	932	10·6	948	15·5	8
9—11	217	285	508	835	291	550	27·9	622	10·2	10
11— 1h p.	176	290	593	688	417	398	46·4	577	9·4	Mittag
1— 3	183	305	666	744	483	439	47·7	652	10·7	2h
3— 5	195	319	662	795	467	476	44·5	667	10·9	4
5— 7	236	288	690	847	454	559	39·1	720	11·8	6
7— 9	257	285	758	969	501	684	36·2	848	13·8	8
9—11	272	230	757	1179	485	949	27·1	1066	17·4	10
Summe....	3295	2957	7494	13370	4199	10413	W 22·0 S	11221	15·3	
Mittel.....	275	246	625	1114	350	868				

Pikes Peak. Sommer. Berechnete Werte.

Zeit	N	E	S	W	N	E	S	W	Mittlere Epoche
11— 1^h a.	304	183	718	1410	29	—64	94	296	Mittern.
1— 3	362	156	636	1606	87	—91	12	491	2^h
3— 5	402	165	539	1638	127	—81	— 86	524	4
5— 7	386	203	480	1461	112	—43	—145	347	6
7— 9	315	249	481	1154	40	2	—143	40	8
9—11	227	282	530	868	— 47	35	— 94	—246	10
11— 1^h p.	174	298	591	717	—100	52	— 34	—398	Mittag
1— 3	174	305	637	709	—101	59	12	—405	2^h
3— 5	206	307	674	778	— 69	61	49	—336	4
5— 7	234	302	709	869	— 40	55	85	—245	6
7— 9	248	276	744	988	— 27	30	119	—126	8
9—11	263	231	755	1172	— 11	—15	131	58	10

Zeit	S—N	W—E	S—N	W—E	φ	Azimut N über E	R	R in Kilometer pro Stunde	Epoche
11– 1^h p.	414	1227	65	360	W 10° S	260	366	6·0	Mittn.
1– 3	274	1450	— 75	582	W 7° N	277	587	9·6	2^h
3– 5	137	1473	—213	605	W 19° N	289	641	10·5	4
5– 7	94	1258	—257	390	W 33° N	303	467	7·6	6
7– 9	166	905	—183	38	N 12° W	348	187	3·1	8
9–11	303	586	— 47	—281	E 9° N	81	285	4·7	10
11– 1^h p.	417	419	66	—450	E 8° S	98	455	7·4	Mittag
1– 3	463	404	113	—464	E 14° S	104	478	7·8	2^h
3– 5	468	471	118	—397	E 17° S	107	414	6·8	4
5– 7	475	567	125	—300	E 23° S	113	326	5·3	6
7– 9	496	712	146	—156	E 43° S	133	214	3·5	8
9–11	492	941	142	73	S 27° W	207	160	2·6	10

Nr. VII.

Mittlere Häufigkeit von acht Windrichtungen in Stunden (Sonnblick 1901, Säntis und Pikes Peak).

Die angeschriebenen Zeiten entsprechen der Mitte eines zweistündigen Zeitraumes.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mitternacht	118	85	32	27	94	255	210	86
2^h	111	79*	30	23	84	250	225	87
4	115	83	29*	24*	72	238	**230**	**91**
6	122	95	32	25	68*	230*	220	85
8	116	**108**	40	30	80	232	200	73
10	98	**108**	50	34	103	244	175	60
Mittag	90*	98	**54**	**34**	123	263	158	54*
2^h	95	92	53	32	**125**	**276**	156*	55
4	107	93	49	31	111	272	163	56
6	116	96	46	33	103	250	169	67
8	124	99	42	**34**	102	240	176	71
10	**127**	93	37	32	100	247	190	71
Summe...	1339	1129	494	359	1165	2997	2272	856

Sonnblick. Jahr die halbe Häufigkeit nur für die Mittelbildung genommen, um Sonnblick nicht zu ausschlaggebend zu machen.

Die obigen Häufigkeitszahlen (Summe 10611) entsprechen 442 Tagen (Calmen fallen weg) und sind nach der Formel

$$(a+2b+c):4$$

ausgeglichen worden.

Mittlere Windrichtung. Täglicher Gang aus den Häufigkeitszahlen berechnet.

Abweichungen vom Mittel.

	Beobachtet			
	N	E	S	W
Mitternacht	— 1	— 21	0	27
2h	— 5	— 32*	— 12	57
4	9	— 25	— 44	49
6	28	— 20	— 53*	28
8	23	13	— 33	— 1
10	— 13	25	4	— 28
Mittag	— 38*	18	46	— 43*
2h	— 31	12	54	— 23
4	— 14	14	36	— 12
6	3	10	— 3	— 26
8	22	9	1	— 25
10	17	— 3	5	— 3
Mittel	228	130	295	416

	Berechnet Resultante				
	S—N	W—E	φ	Azimut	*R*
Mitternacht	5	45	W 6° S	264°	45
2h	—11	85	W 7° N	277	86
4	—54	86	W 32° N	302	102
6	—79	43	N 29° W	331	90
8	—53	—16	N 17° E	17	55
10	16	—54	E 16° S	106	56
Mittag	80	—56	S 35° E	145	98
2h	90	—39	S 23° E	157	98
4	48	—29	S 31° E	149	56
6	— 5	—32	E 9° N	81	32
8	—26	—30	E 41° N	49	40
10	—11	— 3	N 15° E	15	11

Nr. VIII.

Belegtabellen.

Sonnblick, Säntis, Pikes Peak. Häufigkeit von 16 (8) Windrichtungen und deren Windwege für Stundenintervalle.

1. Sonnblick. Windwege in Kilometern pro Monat (30·4 Tage).

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
1h a.	182	37	71	13	3	5	23	14	73	98	172	74	59	32	68	32
2	174	40	71	14	3	3	11	14	74	100	164	78	55	34	66	21
3	188	30	66	26	1	2	14	11	53	122	157	65	50	39	55	27
4	178	30	73	30	1	5	20	12	48	106	150	68	56	36	67	32
5	203	30	77	27	3	7	19	11	50	110	134	67	54	51	47	26
6	212	40	66	29	2	8	17	12	36	134	141	53	49	43	69	22
7	216	33	77	19	1	8	14	18	22	125	134	49	52	44	61	15
8	214	53	66	22	1	7	15	22	52	91	154	55	59	29	44	20
9	184	60	66	13	2	2	14	36	45	102	131	70	46	33	52	23
10	170	61	64	19	2	2	17	31	70	106	135	78	47	32	57	21
11	146	57	70	25	3	1	25	36	75	120	133	82	44	26	41	22
Mittag	139	37	69	20	6	0	26	39	93	108	138	84	39	27	45	22

1^h p.	145	28	64	20	5	1	26	30	99	122	129	106	17	39	35	18
2	150	26	62	16	4	2	26	32	84	109	151	102	25	24	42	18
3	157	23	68	17	5	4	20	32	77	85	174	97	21	18	53	16
4	195	36	56	17	4	4	17	33	67	78	204	82	42	17	42	12
5	201	47	71	22	2	5	11	27	64	74	208	71	33	35	44	13
6	209	43	80	24	4	7	9	26	70	83	171	77	31	45	51	13
7	217	48	82	15	6	7	15	22	65	98	140	64	43	30	52	19
8	232	50	77	12	5	8	13	22	63	101	135	61	54	27	55	22
9	236	59	85	7	6	5	16	24	68	86	135	39	56	17	62	16
10	226	64	70	9	6	5	18	19	81	78	155	53	57	30	75	19
11	223	39	58	13	10	4	20	17	71	94	155	56	58	35	56	18
12	192	42	59	11	7	5	12	28	69	124	149	79	58	36	61	26
1—6h	1137	207	424	139	13	30	104	74	334	670	918	405	323	235	372	160
7—12	1069	301	412	118	15	20	111	182	357	652	825	418	287	191	300	123
1—6	1057	203	401	116	24	23	109	180	461	551	1037	535	169	178	267	90
7—12	1326	302	431	67	40	34	94	132	417	581	869	352	326	175	361	120
Summe.	4589	1013	1668	440	92	107	418	568	1569	2454	3649	1710	1105	779	1300	493

2. Sonnblick. Häufigkeit der Winde. Jahressummen.

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Calmen
1ʰ a.	68	20	31	6	2	4	9	6	20	28	56	28	21	15	23	8	17
2	64	19	27	8	3	3	5	4	25	28	51	32	21	19	24	6	24
3	67	17	27	8	2	2	7	4	17	36	52	27	20	19	20	8	24
4	63	17	31	9	1	3	10	4	14	32	52	26	22	19	29	9	21
5	69	14	32	8	3	4	10	4	14	35	46	25	20	17	19	9	24
6	71	19	27	9	2	5	7	3	11	42	44	22	18	19	24	8	29
7	73	19	29	8	2	4	7	6	7	42	47	22	20	17	22	7	22
8	72	27	29	6	2	3	6	10	18	29	50	25	23	14	16	9	17
9	64	27	30	6	2	2	7	16	15	32	44	32	20	17	21	11	14
10	54	29	31	6	2	1	8	12	24	31	46	33	18	18	19	11	19
11	52	26	32	8	2	1	8	13	24	37	46	33	17	17	15	8	22
Mittag	52	21	29	10	6	0	8	12	28	35	49	31	17	16	13	7	26

1ʰ p.	59	16	28	7	4	1	9	10	28	40	44	39	12	19	13	7	24
2	61	14	32	3	4	2	10	11	24	32	53	39	14	18	18	8	22
3	63	12	36	8	5	1	6	11	24	27	57	40	10	15	21	6	22
4	70	22	27	5	5	1	5	11	20	26	68	32	18	12	15	5	20
5	76	26	31	8	3	2	3	10	17	25	71	29	15	17	15	4	11
6	71	22	39	8	4	3	6	8	20	27	57	27	16	19	19	3	11
7	71	20	38	7	4	4	7	7	18	30	51	27	19	15	18	5	15
8	80	24	32	5	4	4	7	8	16	29	49	26	23	16	18	8	12
9	77	25	40	6	6	2	7	8	20	25	47	23	25	12	20	6	14
10	76	25	31	8	5	2	7	7	22	24	54	22	23	12	23	6	12
11	84	17	28	9	6	3	8	6	19	29	53	25	21	12	19	5	13
Mittern.	72	20	27	6	4	3	5	10	19	38	47	30	22	13	21	7	15
1— 6ʰ	402	106	175	48	13	21	48	25	101	201	301	160	122	108	139	48	139
7—12	367	149	180	44	16	11	44	69	116	206	282	176	115	99	106	53	120
1— 6	400	112	193	39	25	10	39	61	133	177	350	206	85	100	101	33	110
7—12	460	131	196	41	29	18	41	46	114	175	301	153	133	80	119	37	81
Summe.	1629	498	744	172	83	60	172	201	464	759	1234	695	455	387	465	171	450

3. Säntis. Mittlerer Windweg im Winter (December bis März 1891/92).

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
1h a.	7	132	107	481	27	58	99	69	43	545	214	1713	189	102	36	16
2	10	129	70	518	33	48	65	60	20	498	343	1573	212	138	54	14
3	32	113	93	504	0	36	42	71	78	456	228	1651	221	86	43	61
4	54	146	95	469	17	39	49	104	114	291	290	1734	257	83	52	38
5	47	118	101	494	23	58	16	53	171	418	185	1622	243	110	20	35
6	44	136	128	493	25	43	40	45	117	462	191	1610	200	136	11	32
7	13	134	240	433	0	44	23	41	57	560	140	1526	217	153	8	34
8	12	189	94	527	6	25	16	47	73	494	220	1692	182	186	26	35
9	29	228	36	499	41	20	24	40	70	418	307	1774	116	230	21	47
10	27	168	82	513	38	61	51	36	70	415	173	1918	144	136	10	66
11	9	116	157	481	27	40	22	60	97	384	286	1870	167	134	10	68
Mittag	20	120	82	433	50	36	48	61	80	349	349	1919	130	103	19	49

1^h p.	16	181	110	294	43	54	53	44	48	394	256	2023	123	113	17	22
2	33	98	91	409	41	40	60	56	19	392	298	2030	59	147	6	29
3	58	54	184	366	31	17	54	90	55	314	482	1956	108	115	10	43
4	40	113	110	430	50	17	30	78	105	376	185	2067	186	126	51	43
5	34	126	147	449	48	56	52	84	55	336	237	1955	113	168	25	67
6	83	116	119	501	59	17	54	135	39	395	219	1844	153	86	42	50
7	77	95	140	510	52	33	51	103	56	406	193	1827	104	138	18	43
8	54	137	136	554	35	34	77	74	45	398	323	1617	129	111	12	63
9	26	91	181	497	12	94	17	102	58	474	265	1508	193	101	28	71
10	30	134	145	485	40	61	113	48	65	461	361	1596	130	99	28	37
11	31	82	128	506	52	74	45	96	67	442	176	1751	161	123	24	17
Mittern.	7	107	79	544	18	103	23	85	34	488	219	1764	176	89	22	23
1— 6^h	194	774	594	2959	125	282	311	402	543	2670	1451	9903	1322	655	216	196
7—12	110	955	691	2886	162	226	184	285	447	2620	1475	10699	956	942	94	299
1— 6	264	688	761	2449	272	201	303	487	321	2207	1677	11875	742	755	151	254
7—12	225	646	809	3096	209	399	326	508	325	2669	1537	10063	893	661	132	254
Summe.	793	3063	2855	11390	768	1108	1124	1682	1636	10166	6140	42540	3913	3013	593	1003

4. Säntis. Häufigkeit der Winde im Winter (December bis März; Summen 1891 und 1892).

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Calmen
1^h a.	2	11	9	32	2	7	5	7	3	24	14	91	13	14	4	3	2
2	3	10	6	35	3	5	5	6	2	23	19	81	15	17	6	2	5
3	5	9	7	34	0	4	3	7	4	25	15	84	20	11	4	6	6
4	6	11	6	30	2	4	4	7	5	19	15	86	22	12	4	4	6
5	5	11	6	31	3	5	3	4	8	22	15	80	23	16	2	3	6
6	5	12	8	30	2	5	4	3	5	23	14	81	20	19	2	2	8
7	2	14	15	26	0	6	2	4	3	28	10	78	20	19	2	3	11
8	2	15	7	33	1	3	2	5	4	25	13	85	17	21	3	3	4
9	4	17	3	32	5	3	3	4	5	21	15	86	11	24	3	4	3
10	4	15	5	33	4	6	4	3	4	21	11	83	15	16	2	7	3
11	2	15	12	31	3	5	3	4	4	22	16	88	15	13	3	6	1
Mittag	4	12	9	31	6	3	4	6	6	20	20	89	12	11	3	4	3

1h p.	3	18	9	22	5	6	5	4	3	25	17	93	8	13	2	4	6
2	4	12	7	28	5	5	5	7	1	27	19	94	5	14	2	6	2
3	6	8	13	26	5	4	3	10	4	22	18	92	10	11	2	6	3
4	6	12	7	28	5	2	2	9	6	23	12	90	14	10	5	7	5
5	5	12	12	28	5	5	3	9	5	20	15	88	8	16	4	8	2
6	8	11	8	28	6	3	3	12	3	22	14	88	10	10	5	5	7
7	8	8	9	31	5	4	3	9	5	21	14	89	7	16	3	4	7
8	6	10	10	35	3	3	4	8	4	21	19	82	11	14	3	8	2
9	4	9	11	31	1	7	1	10	3	27	16	81	13	14	5	8	2
10	6	11	10	31	4	5	5	5	5	21	19	87	9	14	5	5	1
11	6	9	10	32	4	8	2	7	4	22	12	92	11	15	4	2	3
Mittern.	3	9	6	38	2	10	1	6	2	24	14	93	13	12	5	3	2
1—6h	26	64	42	192	12	30	24	34	27	136	92	503	113	89	22	20	32
7—12	18	88	51	186	19	26	18	26	26	137	85	509	90	104	16	27	25
1—6	32	73	56	160	31	25	21	51	22	139	95	545	55	74	20	36	25
7—12	33	56	56	198	19	37	16	45	23	136	94	524	64	85	25	30	17
Summe.	109	281	205	736	81	118	79	156	98	548	366	2081	322	352	83	113	99

4. Säntis. Häufigkeit der Winde im Winter (December bis März; Summen 1891 und 1892).

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Calmen
1^h a.	2	11	9	32	2	7	5	7	3	24	14	91	13	14	4	3	2
2	3	10	6	35	3	5	5	6	2	23	19	81	15	17	6	2	5
3	5	9	7	34	0	4	3	7	4	25	15	84	20	11	4	6	6
4	6	11	6	30	2	4	4	7	5	19	15	86	22	12	4	4	6
5	5	11	6	31	3	5	3	4	8	22	15	80	23	16	2	3	6
6	5	12	8	30	2	5	4	3	5	23	14	81	20	19	2	2	8
7	2	14	15	26	0	6	2	4	3	28	10	78	20	19	2	3	11
8	2	15	7	33	1	3	2	5	4	25	13	85	17	21	3	3	4
9	4	17	3	32	5	3	3	4	5	21	15	86	11	24	3	4	3
10	4	15	5	33	4	6	4	3	4	21	11	83	15	16	2	7	3
11	2	15	12	31	3	5	3	4	4	22	16	88	15	13	3	6	1
Mittag	4	12	9	31	6	3	4	6	6	20	20	89	12	11	3	4	3

1^h p.	3	18	9	22	5	6	5	4	3	25	17	93	8	13	2	4	6
2	4	12	7	28	5	5	5	7	1	27	19	94	5	14	2	6	2
3	6	8	13	26	5	4	3	10	4	22	18	92	10	11	2	6	3
4	6	12	7	28	5	2	2	9	6	23	12	90	14	10	5	7	5
5	5	12	12	28	5	5	3	9	5	20	15	88	8	16	4	8	2
6	8	11	8	28	6	3	3	12	3	22	14	88	10	10	5	5	7
7	8	8	9	31	5	4	3	9	5	21	14	89	7	16	3	4	7
8	6	10	10	35	3	3	4	8	4	21	19	82	11	14	3	8	2
9	4	9	11	31	1	7	1	10	3	27	16	81	13	14	5	8	2
10	6	11	10	31	4	5	5	5	5	21	19	87	9	14	5	5	1
11	6	9	10	32	4	8	2	7	4	22	12	92	11	15	4	2	3
Mittern.	3	9	6	38	2	10	1	6	2	24	14	93	13	12	5	3	2
1— 6^h	26	64	42	192	12	30	24	34	27	136	92	503	113	89	22	20	32
7—12	18	88	51	186	19	26	18	26	26	137	85	509	90	104	16	27	25
1— 6	32	73	56	160	31	25	21	51	22	139	95	545	55	74	20	36	25
7—12	33	56	56	198	19	37	16	45	23	136	94	524	64	85	25	30	17
Summe.	109	281	205	736	81	118	79	156	98	548	366	2081	322	352	83	113	99

5. Säntisgipfel. Summen der Windwege in Kilometern. Mittel der zwei Sommer 1891 und 1892.

(Juni bis September, 4 Monate.)

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
1^h a.	28	78	22	86	2	14	37	26	62	239	312	2396	311	108	26	62
2	30	72	42	78	15	16	30	32	51	273	302	2503	210	94	17	68
3	12	73	33	70	19	3	34	9	66	272	387	2258	200	155	35	69
4	10	64	25	86	7	12	28	44	67	220	268	2262	344	93	37	65
5	10	65	26	77	7	9	42	57	21	252	247	2120	245	169	60	54
6	18	76	18	81	0	12	22	72	46	200	269	2013	306	162	35	70
7	2	73	40	76	0	7	41	32	74	223	309	1879	300	190	44	41
8	28	52	61	72	3	5	41	61	62	277	336	1865	200	131	57	50
9	29	47	27	90	3	14	8	97	108	258	353	1808	154	131	35	68
10	6	78	28	67	2	10	14	92	65	351	409	1720	116	112	24	64
11	28	43	42	43	12	20	7	114	30	573	433	1336	254	99	2	55
Mittag	27	40	48	17	8	10	9	90	80	532	510	1322	193	117	20	46

1hp.	31	52	46	18	6	9	2	33	54	759	500	1383	120	100	8	42
2	6	75	37	6	8	8	0	22	52	602	441	1420	221	128	22	54
3	0	62	31	12	8	4	19	11	28	624	406	1494	240	154	54	35
4	0	74	41	6	7	0	7	15	0	552	508	1558	309	156	16	70
5	25	81	24	4	5	10	0	23	34	434	350	1690	269	212	37	55
6	42	85	18	20	2	0	0	23	26	343	206	1605	300	224	88	38
7	41	125	27	14	14	5	5	37	72	370	337	1438	315	273	75	37
8	27	94	20	40	4	4	10	18	140	383	266	1696	288	286	109	59
9	37	72	38	52	7	17	11	51	130	331	290	1678	247	317	69	64
10	42	72	46	46	12	7	11	52	85	314	332	1881	310	274	57	53
11	35	90	53	67	7	11	10	75	50	280	293	2133	332	163	22	44
Mittern.	37	103	22	61	11	13	9	55	72	230	322	2263	289	127	13	37
1—6h	108	428	166	478	50	66	193	240	313	1456	1785	13552	1616	781	210	388
7—12	120	333	246	365	28	66	120	486	419	2214	2350	9930	1217	780	182	324
1—6	104	429	197	66	36	31	28	127	194	3314	2411	9150	1459	974	225	294
7—12	219	556	206	280	55	57	56	288	549	1908	1840	11089	1781	1440	345	294
Summe.	551	1746	815	1189	169	220	397	1141	1475	8892	8386	43721	6073	3975	962	1300

6. Säntis. Sommer (Juni bis September) 1891 und 1892. Summen der Häufigkeit.

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Calmen
1h a.	3	9	2	8	1	2	4	3	9	17	22	118	21	11	3	5	6
2	4	7	1	9	2	2	2	5	7	21	23	123	16	5	3	6	6
3	2	7	1	7	2	1	3	2	8	20	29	114	14	15	4	6	6
4	2	7	2	8	1	2	2	6	7	19	22	115	26	11	3	5	4
5	3	7	1	8	1	2	3	6	5	21	21	117	17	14	4	4	5
6	3	8	1	9	0	3	2	7	7	16	23	112	23	14	3	6	6
7	1	9	4	7	0	2	4	4	9	16	24	112	22	16	5	4	3
8	3	6	6	6	1	2	5	8	8	22	26	104	18	16	4	6	1
9	3	8	5	7	1	3	1	12	11	25	27	98	16	14	4	6	2
10	1	10	6	7	1	2	3	14	5	32	35	92	11	12	4	4	4
11	3	6	3	9	3	4	2	15	4	51	33	77	19	10	1	4	2
Mittag	3	6	7	4	2	3	1	12	9	51	40	76	16	8	3	3	0

1h p.	3	7	5	3	1	2	1	6	7	70	36	81	10	7	1	2	1
2	1	9	6	2	2	2	0	4	5	64	35	79	15	12	2	3	2
3	0	9	3	3	3	1	3	3	4	62	32	81	16	13	5	2	3
4	0	9	6	1	2	0	2	3	0	53	41	83	20	12	3	6	1
5	1	10	4	1	1	2	0	3	3	43	32	94	18	18	4	6	3
6	4	10	3	2	1	0	0	2	2	29	22	83	23	18	9	3	3
7	3	12	5	2	2	1	1	3	8	29	29	87	24	22	7	5	3
8	2	9	5	4	1	1	1	2	11	33	21	88	19	23	10	7	5
9	4	7	6	5	2	2	1	5	10	28	23	90	17	27	6	6	2
10	5	7	6	5	3	2	1	6	7	23	26	97	18	22	6	6	2
11	3	12	8	5	2	2	1	7	4	22	23	105	24	15	3	5	1
Mittern.	3	12	3	8	3	2	1	6	7	19	23	110	22	12	2	4	5
1— 6h	17	45	8	49	7	12	16	29	43	114	140	699	117	70	20	32	33
7—12	14	45	31	40	8	16	16	65	46	197	185	559	102	76	21	27	12
1— 6	9	54	27	12	10	7	6	21	21	321	198	501	102	80	24	22	13
7—12	20	59	33	29	13	10	6	29	47	154	145	577	124	121	34	33	18
Summe.	60	203	99	130	38	45	44	144	157	786	668	2336	445	347	99	114	76

7. Pikes Peak (Colorado). Summen der Windwege (englische Meilen) im Mittel von zwei Sommern 1893 und 1894.

(Mai bis September, 5 Monate.) Zeit des 75. Meridians.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
1h	136	216	129	72	302	1072	1088	176
2	183	175	127	48	307	1145	1154	193
3	136	234	68	50	184	1260	1355	220
4	100	212	76	33	163	1112	1350	378
5	103	203	79	41	150	1080	1449	450
6	163	188	103	51	104	998	1485	462
7	248	206	84	22	169	871	1533	405
8	207	252	81	20	151	903	1466	403
9	165	306	97	22	132	898	1397	314
10	137	296	157	17	137	848	1265	181
11	93	348	161	17	130	830	990	171
Mittag	63	301	197	40	197	736	804	114
1h	81	257	237	38	299	715	628	78
2	58	243	215	30	390	675	522	88
3	54	200	299	73	316	832	430	84
4	62	236	257	87	358	826	480	72
5	57	237	243	69	402	865	520	92
6	93	203	250	96	336	883	560	111
7	61	182	353	65	406	815	532	142
8	88	210	253	80	424	886	562	131
9	138	213	177	154	363	800	671	162
10	117	250	165	152	400	925	673	165
11	122	211	187	138	400	984	756	165
Mitternacht	168	202	135	147	360	1100	793	170
1—6h	821	1228	582	295	1210	6667	7881	1879
7—12	913	1709	777	138	916	5086	7455	1588
1—6	405	1376	1501	393	2101	4796	3140	525
7—12	694	1268	1270	736	2353	5510	3987	935
Summe ...	2833	5581	4130	1562	6580	22059	22463	4927

8. Pikes Peak (Colorado). Häufigkeit der Winde. Zahl der Stunden in 10 Monaten Mai bis September 1893 und 1894.

Zeit des 75. Meridians.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
1^h	23	34	19	12	36	83	77	22
2	27	27	19	9	34	84	78	28
3	24	30	13	9	22	88	94	26
4	17	26	16	5	18	81	100	43
5	16	27	14	6	16	77	103	47
6	22	26	17	9	10	67	109	46
7	35	29	14	3	16	63	103	43
8	34	35	13	4	13	66	97	43
9	33	46	16	6	16	63	93	34
10	29	51	27	4	21	63	89	22
11	18	60	31	6	22	65	77	27
Mittag	13	56	34	12	31	65	72	23
1^h	17	50	37	11	41	67	69	14
2	12	46	39	8	53	67	60	21
3	13	36	51	17	39	84	49	17
4	15	39	41	15	44	83	56	13
5	12	43	40	13	47	82	54	15
6	18	34	47	15	33	88	53	18
7	13	34	57	12	46	74	48	22
8	17	36	41	15	47	80	52	18
9	22	36	29	25	43	74	58	19
10	21	42	25	22	43	78	52	23
11	22	36	30	16	45	78	60	19
Mitternacht	26	38	21	19	34	89	56	23
1— 6^h	129	170	98	50	136	480	561	212
7—12	162	277	135	35	119	385	531	192
1— 6	87	248	255	79	257	471	341	98
7—12	121	222	203	109	258	473	326	124
Summe ...	499	917	691	273	770	1809	1759	626

E 6 L

... LIBRARY,
... MICH.
AUG 2 .. 1903

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CXI. BAND. X. HEFT.

JAHRGANG 1902. — DECEMBER.

ABTHEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 3 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1902.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.
IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 10. Heftes December 1902 des CXI. Bandes, Abtheilung II a der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

XXV. **Sitzung vom 4. December 1902: Übersicht** 1561

XXVI. **Sitzung vom 11. December 1902: Übersicht** 1563

XXVII. **Sitzung vom 18. December 1902: Übersicht** 1565

Daublebsky v. Sterneck R., Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie. [Preis: 70 h = 70 Pfg.] 1567

Boltzmann L., Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Coordinaten. [Preis: 30 h = 30 Pfg.] 1603

Hann J., Über die tägliche Drehung der mittleren Windrichtung und über eine Oscillation der Luftmassen von halbtägiger Periode auf Berggipfeln von 2 bis 4 *km* Seehöhe. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 80 h = 1 Mk. 80 Pfg.] 1615

Preis des ganzen Heftes: 2 K 80 h = 2 Mk. 80 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.

BOUND IN LIBRARY.
NOV 29 1904